حول النهايات

1) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; $a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$$

2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$; $a=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نخرج x^2 من المقام عامل مشترك،

وبالتالي:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$;x\to-\infty$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}\right)=-1$$

3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; $a=0$

$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نضرب بمرافق البسط ونقسم عليه،

وبالتالي:

$$f(x)=\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

4) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نضرب بمرافق البسط ومرافق المقام،

وبالتالي:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}\right)$$

$$=\frac{(x^2+1-x^2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}\right)}{(x^2-1-x^2+2)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$ أيضاً حالة عدم تعيين

لإزالتها نخرج عامل مشترك، وبالتالي:

$$f(x)=\frac{|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$;\ x\to+\infty$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+1}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

5) $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$; $a=2$

$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نقوم بتحليل البسط، وبالتالي:

$$f(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to2} f(x)=4+4+4=12$$

6) $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}$; $a=3$

$\lim_{x\to3} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نخرج x عامل مشترك من البسط، وبالتالي:

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x(x-3)}{x-3}=x\Rightarrow \lim_{x\to3} f(x)=3$$

7) $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-3x$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

نهاية سعيدة، نضرب بالمرافق ونقسم عليه،

وبالتالي:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$=\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0$$

8) $f(x)=\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+2}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

نهاية سعيدة، نضرب بالمرافق ونقسم عليه،

وبالتالي:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+2}\right)\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}\right)}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}}$$

$$= \frac{3x^2+1-(3x^2+2)}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{\infty} = 0$$

9) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{5x+1} - x \;\; ; \;\; a = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

نهاية جزئيّة، نخرج عامل مشترك، وبالتالي:

$$f(x) = |x|\sqrt{5+\frac{1}{x}} - x \quad ; x \to +\infty$$

$$\Rightarrow f(x) = x\sqrt{5+\frac{1}{x}} - x = x\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\left(\underbrace{\sqrt{5}-1}_{\text{مقدار موجب}}\right) = +\infty$$

10) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = 2$$

وعند التعويض بالنهاية نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2^{\frac{5}{2}} - 2\left(2^{\frac{3}{2}}\right) = 2^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}} = 0$$

11) غير موجودة لأن:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{\sin(-x)}{x} = -1$$

وبالتالي النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار فالنهاية غير موجودة.

12) عند الصفر من اليمين:

$$\lim_{x\to.0^+}\frac{1-2x-(1-3x)}{x} = \lim_{x\to0^+} 1 = 1$$

عند الصفر من اليسار:

$$\lim_{x\to.0^-}\frac{1-2x-(1-3x)}{x} = \lim_{x\to0^+} 1 = 1$$

إذن النهاية موجودة وقيمتها 1.

13) لدينا:

$$\frac{\sqrt{x+a^2}-a}{x} = \frac{x+a^2-a^2}{x\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+a^2}+a}$$

وبأخذ النهاية عند الصفر:

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$$

حول التوابع اللوغارتمية والأسية

1) لجواب: $\boxed{c:\ 2lna + 3lnb - lnc - 6lnd}$،

التفسير:

$$\ln\left(\frac{a^2\times b^3}{c\times d^6}\right) = \ln(a^2 . b^3) - \ln(c . d^6)$$

$$= \ln(a^2) + \ln(b^3) - \ln(c) - \ln(d^6)$$

$$= 2\ln(a) + 3\ln(b) - \ln(c) - 6\ln(d)$$

2) الجواب: $\boxed{a:\ 3\ln(2) + 2\ln(5) + ln3}$، التفسير:

$$\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{600}{599}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}.\ldots.\frac{600}{599}\right)$$

$$= \ln(600)$$

$$= \ln(6\times10^2)$$

$$= \ln(6) + 2\ln(10)$$

$$= \ln(3\times2) + 2\ln(5\times2)$$

$$= \ln(3) + \ln(2) + 2\ln(5) + 2\ln(2)$$

$$= 3\ln(2) + 2\ln(5) + \ln(3)$$

3) الجواب: $\boxed{a:\ 2\ln|x|}$.

4) $n \le 4$ بالتجريب.

5) $n \le 4$ بالتجريب.

6) $n \le 0$ بالتجريب.

7) لدينا:

$$\ln(x) = \ln(y+1) \;; x>0\,, y>-1$$

$$x = y+1 \Rightarrow y = x-1$$

معادلة نصف مستقيم.. ولكن ليش؟؟!!! لأن مجموعة تعريف التابع اللوغاتمي $x > 0$ يعني بس عالمجال $]0, +\infty[$ فصار اسمو نصف مستقيم لأن ئلو بداية 🧐

8) الجواب: $\boxed{b : \text{جزء من قطع مكافئ}}$ ، التفسير:

$$\ln(y) = 2\ln(x)$$
$$\Rightarrow E :]0, +\infty[$$
$$y = x^2$$

جزء من قطع مكافئ.

9) الجواب: $\boxed{c : \text{جزء من قطع زائد}}$ ، التفسير:

$$\ln(y) + \ln(x) = 0$$
$$\Rightarrow E :]0, +\infty[$$
$$\Rightarrow \ln(x.y) = 0 \Rightarrow x.y = 1$$

جزء من قطع زائد.

10) الجواب: $\boxed{a : \log(2) + \log(3) - 1}$ ، التفسير:

$$\log(0.6) = \log\left(\frac{6}{10}\right) = \log(6) - \log(10)$$
$$= \log(3 \times 2) - 1$$
$$= \log(3) + \log(2) - 1$$

11) الجواب: $\boxed{b : y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$ ، التفسير:

$$y = \log_a(x) \Rightarrow x = a^y$$
$$\ln(x) = \ln(a^y) \Rightarrow \ln(x) = y\ln(a)$$
$$\Rightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

12) لدينا:

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

13) حسب اوبيتال:

$$\frac{-\frac{1}{x}}{1} = -\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

14) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

15) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{\ln(x)} = 2$$

16) لدينا:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}(0) = 0$$

17) لدينا:

$$f(x) = \frac{ln\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}} = \frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2(0) = 0$$

18) لدينا:

$$f(x) = \ln(x)\,[\ln(x) - 1]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

19) لدينا:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

20) لدينا:

$$f(x) = \frac{1 + xln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1+0}{0^+} = +\infty$$

21) لدينا:

$$f(x) = 3x - xln(x)$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 - 0 = 0$$

22) لدينا:

طريقة (1):

$$f(x) = xln^2x = x(lnx)^2 = \left(\sqrt{x}\ln(x)\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0$$

طريقة (2):

$$xln^2x = \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}$$

حسب اوبيتال:

$$\frac{2\ln(x)\ .\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2\ln(x)}{-\frac{1}{x}}$$

نشتق مرة أخرى:

$$\frac{2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 2x$$

نعوض فنجد:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(0) = 0$$

23) لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{x - xln(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

24) لدينا:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$$

25) نضرب ونقسم على $\sin(x)$:

$$f(x) = \frac{\frac{\sin(x)}{x}\ln(1+sin(x))}{\sin(x)}$$

مبرهنتين جوابهن واحد وحدة لوغارتمية ووحدة مثلثية:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

26) لدينا:

حسب اوبيتال:

$$\frac{\ln(sin(x))}{x-\frac{\pi}{2}} \to \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{1} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{0}{1} = 0$$

27) لدينا:

$$g(x) = xln\left(\sqrt{x+1}\right) - \ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$g(1) = 0$$

$$g'(x) = \ln\sqrt{x+1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}x$$

$$= \ln\left(\sqrt{x+1}\right) + \frac{x}{2(x+1)}$$

$$g'(1) = \ln\left(\sqrt{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4} = \frac{2\ln(2)+1}{4}$$

حسب قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = ln\sqrt{2} + \frac{1}{4}$$

28) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\lambda x+1}{2x+3}\right) = 1$$

$$\ln\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 1$$

$$\frac{\lambda}{2} = e$$

$$\lambda = 2e$$

29) $\boldsymbol{f(x) = e^x - \ln(x)}$; $\boldsymbol{a = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

لإزالتها:

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$= +\infty(+\infty - 0) = +\infty$$

30) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - e^x}$; $\boldsymbol{a = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

لإزالتها:

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{e^x}{x^2}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$= +\infty(1 - \infty) = -\infty$$

31) $\boldsymbol{f(x) = x - \ln(e^x + 1)}$; $\boldsymbol{a = +\infty}$

$$f(x) = x - \ln\left(e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right)$$

$$= x - \left(\ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right)$$

$$= x - x - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

32) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)}$; $\boldsymbol{a = 0}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

33) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x - \ln\left(e^{\lambda x}+1\right)$$
$$2x - \ln\left(e^{\lambda x}\left(1+e^{-\lambda x}\right)\right)$$
$$= 2x - \left[\lambda x + \ln\left(1+e^{-\lambda x}\right)\right]$$
$$= 2x - \lambda x - \ln\left(1+e^{-\lambda x}\right)$$

في حال كانت $\lambda > 2$ ستكون النهاية $-\infty$

في حال كانت $0 < \lambda < 2$ ستكون النهاية $+\infty$

34) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

35) نسحب x عامل مشترك:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{e^x}{x} = -\infty$$

36) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$$

37) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

38) تساوي 1 (مبرهنة أسية مغيرين ديكورها)

39) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{4}$$

40) لدينا:

$$f(x) = 2e^x - xe^x$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

41) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

42) نعوض:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2)$$

43) لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}} + 2x - 2 = \frac{1+2xe^{2x}}{e^{2x}} - 2$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1+0}{0^+} - 2 = +\infty$$

44) لدينا:

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

حول تغيير المتحول

1) لدينا:

$$\frac{\lambda}{x} = t \Rightarrow x = \frac{\lambda}{t}$$
$$x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$$
$$\lim_{t\to0} \frac{\lambda\ln(1+t)}{t} = \lambda = 2$$

2) لدينا:

$$\lim_{x\to2} \frac{\ln(3-x)}{-2(2-x)} = \lim_{x\to2} \frac{\ln(1+2-x)}{-2(2-x)}$$

بفرض $t = 2-x$ بتلاقي انو صار عندك مبرهنة شهيرة.

$$t = 2-x$$
$$x \to 2 \Rightarrow t \to 0$$
$$\lim_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{-2t} = -\frac{1}{2}$$

3) لدينا:

$$xln\left(1 + \frac{x-1}{x+1} - 1\right) = xln\left(1 + \frac{-2}{x+1}\right)$$

بفرض:

$$t = -\frac{2}{x+1}$$
$$x+1 = -\frac{2}{t} \Rightarrow x = -\frac{2}{t} - 1$$

نغير جهة السعي:

$$x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$$

نعوض:

منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد

$$\lim_{t\to 0}\left(-\frac{2}{t}-1\right)\ln(1+t)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{-2\ln(1+t)}{t}-\ln(1+t)\right]=-2$$

4) لدينا:

$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(1+\frac{x+1}{x+2}-1\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{-1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$$

بفرض:

$$t=-\frac{1}{x+2}$$

$$x+2=-\frac{1}{t}$$

$$x=-\frac{1}{t}-2$$

نغير جهة السعي:

$$x\to+\infty\Rightarrow t\to 0$$

نعوض:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{-\frac{1}{t}-2}{2}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}}(1+t)^{-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{2}}}(1+t)^{-1}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

5) لدينا:

$$(2-x)^{\frac{1}{x-1}}=(1+1-x)^{\frac{1}{-(1-x)}}$$

بفرض $t=1-x$ تكون جهة السعي $t\to 0$:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

"ستعجلنا شوي بس متل يلي قبلها سهلة"

6) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}(3-2x)^{\frac{1}{2x-1}}=2^{+\infty}=+\infty$$

7) حسب اوبيتال:

$$\frac{2e^{2n}}{2(1+n)}=\frac{e^{2n}}{1+n}$$

اوبيتال مرة تانية:

$$2e^{2n}$$

نعوض:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

8) لدينا:

$$u_n=\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

"مبرهنة شهيرة حبيبات قلبي فرضو $t=\frac{1}{n}$ بتطلع"

9) لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{2}=e^{2}$$

حول النهايات المثلثية

1) الجواب: $\boxed{a\ :\ 0}$, التفسير:

$$\lim_{x\to\pi}f(x)=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin\pi}{\pi}=\frac{0}{\pi}=0$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

2) الجواب: $\boxed{b\ :\ 4}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{x}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{4\sin(4x)}{4x}$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=4(1)=4$$

و ذلك حسب قاعدة:

$$\boxed{\lim_{\heartsuit\to 0}\frac{\sin\heartsuit}{\heartsuit}=1}$$

3) الجواب: $\boxed{b\ :\ 3}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(6x)}{2x}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{3\sin(6x)}{3\times 2x}=\frac{3\sin(6x)}{6x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=3(1)=3$$

4) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{1}{2}}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-2\cos(2x)}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نستخدم الدستور:

$$\boxed{1-\cos(2x)=2\sin^2(x)}$$
$$f(x)=\frac{x\sin x}{2\sin^2 x}=\frac{x}{2\sin x}=\frac{1}{2}.\frac{x}{\sin x}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$$

5) الجواب: $\boxed{c\ :\ 0}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{\sin x}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{-(1-\cos x)}{\sin x}=\frac{-\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sin x}$$

نقسم البسط و المقام على x :

$$f(x)=\frac{\frac{-\left(2\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{-\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sin x}{x}}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{-1(0)}{1}=0$$

6) الجواب: $\boxed{a\ :\ -4}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(3x)-\cos x}{x\sin x}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نستخدم الدستور:

$$\cos(3x)-\cos x$$
$$=-2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right).\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$
$$=-2\sin\left(\frac{4x}{2}\right).\sin\left(\frac{2x}{2}\right)$$
$$=-2\sin(2x).\sin(x)$$
$$\Longrightarrow f(x)=\frac{-2\sin(2x).\sin(x)}{x\sin(x)}=\frac{-4\sin(2x)}{2x}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=-4(1)=-4$$

7) الجواب: $\boxed{a\ :\ 1}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)+\sin(x)}{\sin(5x)-\sin(x)}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: باستخدام الدساتير:

$$f(x)=\frac{2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right).\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{5x-x}{2}\right).\cos\left(\frac{5x+x}{2}\right)}$$
$$=\frac{2\sin(2x).\cos(x)}{2\sin(2x).\cos(3x)}$$
$$=\frac{\cos(x)}{\cos(3x)}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{1}=1$$

8) الجواب: $\boxed{b\ :\ 7}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(7x)}{x}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{7\tan(7x)}{7x}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=7(1)=7$$

9) الجواب: $\boxed{d\ :\ 4}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1}-1}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب و نقسم على مرافق المقام:

$$f(x)=\frac{\sin(2x).\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$
$$=\frac{\sin(2x).\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}$$
$$=2.\frac{\sin(2x)}{2x}.\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=2(1)\left(\sqrt{0+1}+1\right)=2(2)=4$$

10) الجواب: $\boxed{b\ :\ 1}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sin(x).\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=0(+\infty)$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\sin(x).\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\sin(x).\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}$$
$$=\sin(x).\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$
$$\boxed{x\to 0^+\Longrightarrow |x|=x}$$
$$\Longrightarrow f(x)=\frac{\sin(x)}{x}.\sqrt{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\left(\sqrt{0+1}\right)=1(1)=1$$

11) الجواب: $\boxed{a\ :\ 0}$, التفسير:

- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(x)}$$

نقسم البسط و المقام على x :

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}}=\frac{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}{\frac{\sin(x)}{x}}$$

$$=\frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}}\right)$$

$$=\frac{1(0)}{1}=0$$

- $\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x}\right)=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{1-\cos(2x)}{x}=\frac{2\sin^2(x)}{x}=2.\frac{\sin(x)}{x}.\sin(x)$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x}\right)=2(1)(0)=0$$

و بالتالي حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)\le\lim_{x\to0}f(x)\le\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x}\right)$$

$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to0}f(x)\le0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}f(x)=0$$

12) الجواب: $\boxed{c\ :\ 0}$, التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x+1}\right)=?$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$-1\le\sin(x)\le1$$

$$\Rightarrow\frac{-1}{x+1}\le\frac{\sin(x)}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x+1}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x+1}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to+\infty}f(x)\le0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

13) الجواب: $\boxed{d\ :\ 1}$, التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sin(x)}{x+5}\right)=?$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$-1\le\sin(x)\le1$$

نضرب ب -1 :

$$1\ge-\sin(x)\ge-1$$

نضيف x :

$$x+1\ge x-\sin(x)\ge x-1$$

نقسم على $(x+5)$:

$$\frac{x+1}{x+5}\ge\frac{x-\sin(x)}{x+5}\ge\frac{x-1}{x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+5}\right)\ge\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sin(x)}{x+5}\right)\ge\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)$$

$$1\ge\lim_{x\to+\infty}f(x)\ge1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

14) الجواب: $\boxed{a\ :\ 3}$, التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right)=?$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$-1\le\sin(x)\le1$$

نضرب ب -1 :

$$1\ge-\sin(x)\ge-1$$

نضيف $3x$:

$$3x+1\ge3x-\sin(x)\ge3x-1$$

نقسم على $\sqrt{1+x^2}$:

$$\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\ge\frac{3x-\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}}\ge\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\ge f(x)\ge\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{+\infty}{+\infty}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}=\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$x\to+\infty\Rightarrow|x|=x$$

$$\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\frac{3}{1}=3$$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{+\infty}{+\infty}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{3x-1}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}=\frac{3x-1}{|x|.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$x\to+\infty \implies |x|=x$$

$$\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{3x-1}{x.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right)=\frac{3}{1}$$

$$=3$$

و بالتالي فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\geq\lim_{x\to+\infty}f(x)\geq\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$3\geq\lim_{x\to+\infty}f(x)\geq 3$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$$

15) الجواب: $\boxed{b\ :\ +\infty}$, التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2\sin(x)}{5}\right)=?$$

- $0\leq\sin^2(x)\leq 1$

نضرب بـ 2 :

$$0\leq 2\sin^2(x)\leq 2$$

نقسم على 5 :

$$0\leq\frac{2\sin^2(x)}{5}\leq\frac{2}{5}$$

نضيف x :

$$x\leq x+\frac{2\sin^2(x)}{5}\leq\frac{2}{5}+x$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x)\leq\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2\sin(x)}{5}\right)$$

$$\leq\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}+x\right)$$

$$+\infty\leq\lim_{x\to+\infty}f(x)\leq+\infty$$

$$\implies\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

16) الجواب: $\boxed{a\ :\ 0}$, التفسير:

- $\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin^2(x)}{\sin(x)}\right)$

$$=\lim_{x\to0}(2\sin(x))=0$$

- $\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}=\frac{-(1-\cos(x))}{x^2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\frac{x^2}{4}}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-2}{4}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}$$

$$\implies\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{-2}{4}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\right)=\frac{-2}{4}(1)(1)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-2}{4}+\frac{1}{2}=0$$

و بالتالي حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}\right)\leq\lim_{x\to0}f(x)$$

$$\leq\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\implies 0\leq\lim_{x\to0}f(x)\leq 0$$

$$\implies\lim_{x\to0}f(x)=0$$

17) لدينا:

$$-1\leq\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\leq 1$$

$$-(x-1)^2\leq f(x)\leq(x-1)^2$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x\to1}f(x)=0$$

18) الجواب: $\boxed{a\ :\ a}$, التفسير:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{a\sin(ax)}{ax}$$

$$\implies\lim_{x\to0}f(x)=a(1)=a$$

19) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$, التفسير:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(ax)}{bx}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم التعيين:

$$f(x)=\frac{a\sin(ax)}{b(ax)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{a}{b}(1)=\frac{a}{b}$$

20) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(ax)}{bx}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{a\tan(ax)}{b(ax)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{a}{b}(1)=\frac{a}{b}$$

21) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{ax.\sin(ax).bx}{ax.bx.\sin(bx)}=\frac{a.\sin(ax).bx}{ax.b.\sin(bx)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a.\sin(ax).bx}{ax.b.\sin(bx)}\right)=\frac{a}{b}$$

22) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{ax.\tan(ax).bx}{ax.bx.\sin(bx)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{a}{b}$$

23) الجواب: $\boxed{a\ :\ \begin{cases} d_1: y=x+2 \\ d_2: y=x-2 \end{cases}}$, التفسير:

$$-1\le \sin(x)\le 1 \qquad \times 2$$
$$-2\le 2\sin(x)\le 2 \qquad +x$$
$$x-2\le x+2\sin(x)\le x+2$$

و بالتالي:

$$d_1: y=x+2 \ \ \&\ \ d_2: y=x-2$$

24) الجواب: $\boxed{a\ :\ g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$, التفسير:

يجب أن تكون:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

لنثبت ذلك:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=+\infty-\infty$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

نأخذ المقام:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x}\le\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$
$$\le\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}$$
$$2\sqrt{x}\le\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\le 2\sqrt{1+x}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

26) الجواب: $\boxed{b\ :\ (\sin(x)+2)^2+2}$, التفسير:

$$f(x)=\sin^2(x)+4\sin(x)+6$$
$$(\sin(x)+2)^2+2$$
$$=\sin^2(x)+4\sin(x)+4+2$$
$$=\sin^2(x)+4\sin(x)+6$$
$$=f(x)$$

27) الجواب: $\boxed{a\ :\ 3\le f(x)\le 11}$, التفسير:

$$-1\le\sin(x)\le 1$$

نضيف 2 :

$$1\le\sin(x)+2\le 3$$

نربّع:

$$1\le(\sin(x)+2)^2\le 9$$

نضيف 2 :

$$3\le(\sin(x)+2)^2+2\le 11$$
$$3\le f(x)\le 11$$

28) الجواب: $\boxed{b\ :\ +\infty}$, التفسير:

$$g(x)=x^2.f(x)$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)\times\lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$=(+\infty)(a)=+\infty$$

حيثُ أنَّ $3\le a\le 11$ و ذلك من السؤال السابق:

$$3\le f(x)\le 11$$

و بالتالي فإنَّ:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

$$\boxed{(+\infty)\left(\text{عدد}\right)=+\infty}$$

$$=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=0$$

و بالتالي فإنَّ:

$$g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

25) الجواب: $\boxed{c\ :\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\le f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}$, التفسير:

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

نأخذ المقام:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x}\le\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$
$$\le\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}$$
$$2\sqrt{x}\le\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\le 2\sqrt{1+x}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

26) الجواب: $\boxed{b\ :\ (\sin(x)+2)^2+2}$, التفسير:

$$f(x)=\sin^2(x)+4\sin(x)+6$$
$$(\sin(x)+2)^2+2$$
$$=\sin^2(x)+4\sin(x)+4+2$$
$$=\sin^2(x)+4\sin(x)+6$$
$$=f(x)$$

27) الجواب: $\boxed{a\ :\ 3\le f(x)\le 11}$, التفسير:

$$-1\le\sin(x)\le 1$$

نضيف 2 :

$$1\le\sin(x)+2\le 3$$

نربّع:

$$1\le(\sin(x)+2)^2\le 9$$

نضيف 2 :

$$3\le(\sin(x)+2)^2+2\le 11$$
$$3\le f(x)\le 11$$

28) الجواب: $\boxed{b\ :\ +\infty}$, التفسير:

$$g(x)=x^2.f(x)$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)\times\lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$=(+\infty)(a)=+\infty$$

حيثُ أنَّ $3\le a\le 11$ و ذلك من السؤال السابق:

$$3\le f(x)\le 11$$

و بالتالي فإنَّ:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

$$\boxed{(+\infty)\left(\text{عدد}\right)=+\infty}$$

29) الجواب: $\boxed{a\ :\ \sin(x^2-1)}$, التفسير:

$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\sin(x^2-1)$

30) الجواب: $\boxed{a\ :\ \frac{1}{2}\sin h}$, التفسير:

$S_{OAM}=\dfrac{OA\times MM'}{2}=\dfrac{1}{2}\,MM'=\dfrac{1}{2}\sin h$

31) الجواب: $\boxed{c\ :\ \frac{1}{2}\tan h}$, التفسير:

$S_{OAT}=\dfrac{OA\times AT}{2}=\dfrac{1}{2}AT=\dfrac{1}{2}\tan h$

32) الجواب: $\boxed{b\ :\ cosh\le\frac{sinh}{h}\le 1}$, التفسير:

لدينا:

$\sin h\le h \quad , \quad h>0$

$\Rightarrow \dfrac{\sin h}{h}\le 1 \quad ....(1)$

و لدينا:

$h\le\tan h\Rightarrow h\le\dfrac{\sin h}{\cos h} \qquad \times\dfrac{\cos h}{h}$

$\cos h\le\dfrac{\sin h}{h} \quad .....(2)$

إذاً من (1) و (2) نجد:

$$cosh\le\frac{sinh}{h}\le 1$$

33) الجواب a:

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}$$

حول المقارب المائل

1) **الجواب:**

$f(x)=2x+1+\underbrace{\sqrt{x^2+4x+5}}_{\text{بالإتمام إلى مربع كامل}}$

$\Rightarrow f(x)=2x+1+\sqrt{x^2+4x+4+1}$

$=2x+1+\sqrt{(x+2)^2+1}$

$\Rightarrow \Delta: y=2x+1+\sqrt{(x+2)^2}$

$-\infty$ بجوار $\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2}=|x+2|=-x-2$

$\Rightarrow \Delta: y=2x+1-x-2$

$\Rightarrow \boxed{\Delta: y=x-1}$

2) **الجواب:**

$f(x)=\sqrt{4x^2+kx+5}$

حيثُ $y=2x+4$ مقارب مائل لـ C_f .

$f(x)=\underbrace{\sqrt{4\left(x^2+\frac{k}{4}x+\frac{5}{4}\right)}}_{\text{بالإتمام إلى مربع كامل}}$

$=2\sqrt{x^2+\frac{k}{4}x+\frac{k^2}{64}-\frac{k^2}{64}+\frac{5}{4}}$

$=2\sqrt{\left(x+\frac{k}{8}\right)^2+\frac{80-k^2}{64}}$

$\Rightarrow \Delta: y=2\sqrt{\left(x+\frac{k}{8}\right)^2}$

$+\infty$ بجوار $\Rightarrow \boxed{\Delta: y=2\left(x+\frac{k}{8}\right)=2x+\frac{k}{4}}$

بالمقارنة نجد أنّ:

$\frac{k}{4}=4\Rightarrow k=16$

3) $f(x)=x+k+\frac{x^2+3}{x-1}$

بالقسمة الإقليديّة لـ (x^2+3) على $(x-1)$ نجد:

$f(x)=x+k+x+1+\dfrac{4}{x-1}$

$=2x+1+k+\dfrac{4}{x-1}$

عندئذٍ نجد:

$\Delta: y=2x+1+k+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x-1}\right)}_{=0}$

$\Rightarrow \Delta: y=2x+1+k$

ولدينا $y=2x+1$, بالمقارنة نجد:

$\boxed{k=0}$

4) $f(x)=x+\frac{x^2+kx}{x-1}$

$\Delta: y=2x+1$

بالقسمة الإقليديّة لـ (x^2+kx) على $(x-1)$ نجد:

$f(x)=x+x+k+1+\dfrac{k+1}{x-1}$

$\Rightarrow f(x)=2x+1+k+\dfrac{k+1}{x-1}$

$\Rightarrow \Delta: y=2x+1+k+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{k+1}{x-1}\right)}_{=0}$

$\Rightarrow \Delta: y=2x+1+k$

بالمقارنة نجد أنّ:

$\boxed{k=0}$

5) **الجواب:**

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(y_\Delta)=\lim_{x\to-\infty}(3x-1)$

$=-\infty$

" نهاية التابع من نهاية مقاربه في نفس الجوار "

6) **الجواب:**

بما أنّ $y = 4x - 5$ مقارب مائل لـ C_f بجوار الـ $+\infty$ فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = a = 4$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}(2x+1)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right)$$

$$= (4)(2) = 8$$

7) f تابع فردي، وبالتالي:

$$f(-x) = -f(x)$$

$y = x - 1$ مقارب مائل، وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = a = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)+1}{x+f(x)+f(-x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)+1}{x+f(x)-f(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

8) **الجواب:**

f تابع زوجي $\Leftarrow$ C_f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب yy' و $f(-x) = f(x)$ أي نبدّل كل x بـ $-x$ فنحصل على:

$$y = 2(-x) \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

9) **الجواب:**

f تابع فردي $\Leftarrow$ C_f متناظر بالنسبة للمبدأ و $f(-x) = -f(x)$ أي نبدّل كل x بـ $-x$ ونبدّل كل y بـ $-y$ فنحصل على:

$$-y = 2(-x) + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}$$

10) **الجواب:** التابع f لا يملك مقاربات أفقيّة. " قد يملك مقارباً أفقيّاً في جوار الـ $+\infty$ "

11) **الجواب:**

$$f(x) = -\frac{x}{3} + \ln\left(\left|\frac{x-1}{3x}\right|\right)$$

$$\Delta: y = -\frac{x}{3} + \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\left|\frac{x-1}{3x}\right|\right)$$

$$\Rightarrow \Delta: y = -\frac{x}{3} + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta: y = -\frac{1}{3}x - \ln(3)}$$

12) **الجواب:**

$$f(x) = \ln(e^{\alpha x} + e^x + 1)$$

$$= \ln\left(e^{\alpha x}\left[1 + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha x}}\right]\right)$$

$$= \ln(e^{\alpha x}) + \ln\left(1 + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha x}}\right)$$

$$= \alpha x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = a = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha x}}\right)}{x}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

13) **الجواب:**

$$f(x) = |3x-1| + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$\Delta: y = |3x-1| + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta: y = |3x-1| + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta: y = |3x-1| + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

عندما $x \to +\infty$ نجد:

$$\Delta_1: y = 3x - 1 + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_1: y = 3x - 1 + \frac{1}{1} = 3x$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_1: y = 3x}$$

وعندما $x \to -\infty$ نجد:

$$\Delta_2: y = -3x + 1 + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_2: y = -3x + 1 - 1 = -3x$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_2: y = -3x}$$

المقاربان يتقاطعان في النقطة التي إحداثيّاتها $(0\,,0)$

14) **الجواب:**

$$f(x) = 5 - 4x + \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

$$\Delta: y = 5 - 4x$$

C_f فوق مقاربه عندما $f(x) - y_\Delta > 0$ أي

عندما:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$$

شرط الحل:

$$\frac{x+1}{x-4} > 0 \implies E =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$$

يكون $\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$ عندما $\frac{x+1}{x-4} > 1$ وبالتالي:

$$\implies \frac{x+1}{x-4} - 1 > 0 \implies \frac{x+1-x+4}{x-4} > 0$$

$$\implies \frac{5}{x-4} > 0$$

ندرس الإشارة:

	4	
5	+ + + + + +	
$x-4$	− − − 0 + + +	
	محقّقة غير محقّقة	

وبالتالي:

$$\implies x \in]4, +\infty[$$

نقاطع مع شرط الحل $\Leftarrow$ C_f يقع فوق مقاربه على

المجال:

$$\boxed{]4, +\infty[}$$

15) **الجواب:**

$$f(x) = -3x + \sqrt{4x^2+1}$$

$$y = 0 \implies 0 = -3x + \sqrt{4x^2+1}$$

$$\implies \sqrt{4x^2+1} = 3x \overset{\text{نربّع}}{\implies} 4x^2 + 1 = 9x^2$$

$$\implies 5x^2 = 1 \implies \boxed{\begin{cases} x = +\frac{1}{\sqrt{5}} & \text{مقبول} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{5}} & \text{مرفوض} \end{cases}}$$

حيثُ أنّ شرط الحل هو:

$$3x > 0 \implies x > 0$$

16) **الجواب:**

$$f(x) = 2x - 1 + |x-3|$$

$$\implies f(x) = \begin{cases} 2x-1+x-3 & : x > 3 \\ 2x-1-x+3 & : x \le 3 \end{cases}$$

$$\implies f(x) = \begin{cases} 3x-4 & : x > 3 \\ x+2 & : x \le 3 \end{cases}$$

نقاط تقاطع التابع f مع محور الفواصل تعني

$y = 0$ وبالتالي:

$$\begin{cases} 3x-4=0 \implies \boxed{x = \frac{4}{3}} \\ x+2=0 \implies \boxed{x=-2} \end{cases}$$

17) **الجواب:**

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2+1|}$$

$$\implies \Delta: y = x + \sqrt{|4x^2|}$$

$$\implies \Delta: y = x + |2x|$$

في جوار الـ $+\infty$:

$$\Delta: y = x + 2x = 3x \implies \boxed{\Delta: y = 3x}$$

18) **الجواب:**

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2-1|}$$

$$\Delta: y = x + \sqrt{|4x^2|}$$

$$\implies \Delta: y = x + |2x|$$

في جوار الـ $-\infty$:

$$\Delta: y = x - 2x = -x \implies \boxed{\Delta: y = -x}$$

19) **الجواب:**

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2-1|}$$

نفك القيمة المطلقة:

$$4x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = +\frac{1}{2} \end{cases}$$

ندرس الإشارة:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\lvert 4x^2-1\rvert$	+ + +	0 − − −	0	+ + +
	$(4x^2-1)$	$(1-4x^2)$		$(4x^2-1)$

وبالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4x^2-1} \ ; \ x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[\\ x + \sqrt{1-4x^2} \ ; \ x \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \end{cases}$$

المقارب بجوار الـ $+\infty$ وبالتالي:

$$\Delta: y = x + \sqrt{4x^2} = x + |2x|$$

$|2x| = 2x$: بجوار $+\infty$

$$\implies \Delta: y = x + 2x = 3x$$

وبالتالي $y = 3x$ مقارب مائل بجوار الـ $+\infty$ عند

المجال:

$$\boxed{]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[}$$

20) **الجواب:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)=\frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\left(\sqrt{2}x+\frac{15}{8}\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta: y=\sqrt{2}x+\frac{15}{8}}$$

21) لدينا:

$$f(x)=2x+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\Rightarrow y_\Delta=2x+\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)}_{u(x)}$$

$$u(x)=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{2x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}u(x)=\frac{2}{-\sqrt{4+0}}=\frac{2}{-2}=-1$$

$$\boxed{\Rightarrow c:\ y_\Delta=2x-1}$$

22) لدينا:

$$y=ax+b=-x-1$$

$$\Rightarrow a=-1\ ,\ b=-1$$

$$\Rightarrow \boxed{b:\ a=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=-1}$$

23) y_Δ مقارب:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}y_\Delta=+\infty$$

24) لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{3x^2+1}{x^3+x}\right).f(x)\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{3x^2+1}{x^2+1}\right).\underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{a=-1}\right)=3(-1)=-3$$

$$\Rightarrow \boxed{b:\ -3}$$

25) $x=2$ مقارب شاقولي أي أن $x=2$ تعدم المقام

وبالتالي:

$$2-b=0\Rightarrow b=2$$

$y=3$ مقارب أفقي أي أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{1}=3\Rightarrow a=-3$$

وبالتالي الثنائيّة: $(-3\ ,2)$

26) القسمة الإقليديّة نجد:

$$f(x)=-2x+3+\frac{1}{1-x}$$

وبالتالي $\boxed{d:\ y_\Delta=3-2x}$ مقارب مائل لـ C

27) لدينا:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2mx+4}$$

بالإتمام إلى مربّع كامل نجد:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2mx+m^2-m^2+4}$$

$$=\sqrt{(x-m)^2-m^2+x}$$

$$\Rightarrow y_\Delta=|x-m|=x-m\ :\ x\to+\infty$$

$$y_\Delta=x+1\Rightarrow -m=+1\Rightarrow \boxed{m=-1}$$

28) بالقسمة الاقليدية نجد:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x-1}=x-3+\frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow y_\Delta=x-3$$

29) بالقسمة الاقليدية نجد:

$$f(x)=\frac{x^2-3mx+1}{x-1}$$

$$=x-3m+1+\frac{-3m+2}{x-1}$$

$$\Rightarrow y_\Delta=x-3m+1=x-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -3m+1=-\frac{1}{2}\Rightarrow -3m=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a:\ m=\frac{1}{2}}$$

30) لدينا:

$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}$$

$$\Rightarrow y_\Delta=\frac{1}{2}x+\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}x+0+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}x+1$$

$$\Rightarrow \boxed{a:\ y_\Delta=\frac{1}{2}x+1}$$

31) لدينا التابع:

$$f(x)=2x-1+\sqrt{x^2+4x}$$

بالإتمام إلى مربّع كامل نجد:

$$f(x)=2x-1+\sqrt{(x+2)^2-4}$$

$$y_\Delta=2x-1+x+2\ :\ x\to+\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{b:\ y_\Delta=3x+1}$$

32) $\lim_{x\to0}f(x)=5+\infty=+\infty$

وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي في جوار الـ $+\infty$

33) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{m=3}\right)$$

$$=-1+3=+2$$

34) $y=2$ مقارب أفقي:

$$f(x)=\frac{x+b}{cx+d}\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{c}=2\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

$x=-1$ مقارب شاقولي، أي أن $x=-1$ تعدم المقام:

$$\frac{1}{2}(-1)+d=0\Rightarrow d=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=1\Rightarrow\frac{0+b}{0+d}=0$$

$$\Rightarrow b=d=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{c\ :\ b+d+c=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}$$

35) $y_\Delta=x-3$

$$f(x)=x+1+\lambda\,x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$$f(x)-y_\Delta=4+\lambda\,x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(4+\lambda\,x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow4+\lambda\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)=0$$

$$\Rightarrow\ 4+\lambda\,(1)=0\Rightarrow\boxed{b\ :\ \lambda=-4}$$

36) c : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}y_\Delta=+\infty$

حول الاستمرار وقابلية الاشتقاق

1) **الجواب:**

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{k\,x} & :\ 0\le x\le2\\ x & :\ x>2\end{cases}$$

f مستمر على المجال $I=[0,+\infty[$ أي مستمر عند نقاط الانقطاع ومنه مستمر عند $a=2$

وبالتالي:

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$$

$$f(2)=\sqrt{2k}\ ,\lim_{x\to2}f(x)=2$$

$$\sqrt{2k}=2\overset{\text{نربّع}}{\Longrightarrow}2k=4\Longrightarrow k=2$$

2) **الجواب:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{\sin(x)} & :\ x>0\\ 2x-m & :\ x\le0\end{cases}$$

f مستمر عند الصفر، أي أنّ:

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$$

$$f(0)=2(0)-m=-m$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x(x-2)}{\sin(x)}\right)=(1)(0-2)$$

$$=-2$$

$$\Longrightarrow\ -m=-2\Longrightarrow m=2$$

3) **الجواب:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(ax)}{x\tan(ax)} & :x<0\\ \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{b+x}-\sqrt{b}\right) & :\ x>0\\ \dfrac{1}{6} & :\ x=0\end{cases}$$

f مستمر عند الصفر أي أنّ:

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)$$

$$f(0)=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b}}{0}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نضرب بالمرافق:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{b+x}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{b}\right)}{x\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{b+x-b}{x\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{b}\right)}=\frac{1}{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{b}}=\frac{1}{2\sqrt{b}}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نضرب بالمرافق:

$$f(x)=\frac{(1-\cos(ax))(1+\cos(ax))}{x\left(\frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}\right)(1+\cos(ax))}$$

$$=\frac{1-\cos^2(ax)}{x\,.\sin(ax)\left(\frac{1}{\cos(ax)}+1\right)}$$

$$=\frac{a\,.\sin^2(ax)}{ax\,.\sin(ax)\left(\frac{1}{\cos(ax)}+1\right)}$$

$$=\frac{a\,.\sin(ax)}{x}\,\frac{1}{\frac{1}{\cos(ax)}+1}$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to0^-}f(x)=\frac{a(1)}{1+1}=\frac{a}{2}$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{6}=\frac{a}{2}=\frac{1}{2\sqrt{b}}\Rightarrow a=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$
$$2\sqrt{b}=6\Rightarrow\sqrt{b}=3\Rightarrow b=9$$

ومنه:

$$b=\frac{1}{a^2}$$

4) **الجواب:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x)-1}{\sqrt{x^2+1}-1} & : \quad x\neq 0\\ m & : \quad x=0\end{cases}$$

f مستمر، أي مستمر عند الصفر، وبالتالي:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$$
$$f(0)=m$$
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نضرب بالمرافق:

$$f(x)=\frac{(\cos(x)-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$
$$=\frac{(\cos(x)-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}\times\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}$$
$$=\frac{(\cos^2(x)-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2(\cos(x)+1)}$$
$$=-\frac{\sin^2(x)}{x^2}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\cos(x)+1}\right)$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=-(1)^2.\frac{1+1}{1+1}=-1$$
$$\Rightarrow m=-1$$

5) **الجواب:**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(f(x)-1)}{\sqrt{x}-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(f(x)-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(f(x)-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-1}{x-1}\left(\sqrt{x}+1\right)\right)$$
$$=f'(1)\left(\sqrt{1}+1\right)=2\sqrt{3}(2)=4\sqrt{3}$$

6) **الجواب:**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{1-1}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين، نفرض:

$$f(x)=\tan(x)\ ,f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$
$$f'(x)=1+\tan^2(x)\ ,\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+1^2=2$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=2$$

7) **الجواب:**

$$f(x)=\left(x+mE(x)\right)^2\ :I=[-2\ ,0[$$

نكتب f بعبارة لا تحوي $E(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\left(x+m(-2)\right)^2 & :x\in[-2\ ,-1[\\ \left(x+m(-1)\right)^2 & :\ x\in[-1\ ,0[\end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x-2m)^2 & :x\in[-2\ ,-1[\\ (x-m)^2 & :\ x\in[-1\ ,0[\end{cases}$$

f مستمر عند $a=-1$ أي أنّ:

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$$
$$f(-1)=(-1-m)^2$$
$$\lim_{x\to-1}f(x)=(-1-2m)^2$$

وبالتالي:

$$(-1-m)^2=(-1-2m)^2$$
$$\Rightarrow 1+2m+m^2=1+4m+4m^2$$
$$\Rightarrow 3m^2+2m=0$$
$$\Rightarrow m(3m+2)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}m=0 \text{ مرفوض } ;m\in\mathbb{R}^*\\ 3m+2=0\Rightarrow m=-\frac{2}{3} \text{ مقبول}\end{cases}$$

8) **الجواب:**

$$g(x)=x\sqrt{x}\ ,\ h(x)=x|x|$$
$$f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

g اشتقاقي عند الصفر (تابع جذري مضروب بمضمونه)

h اشتقاقي عند الصفر (تابع قيمة مطلقة مضروب بمضمونه)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x^2+1} & :\ x>0\\ \dfrac{x^2-x}{x^2+1} & :\ x\leq 0\end{cases}$$

f اشتقاقي عند الصفر أي أنّ:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$$
$$f(0)=\frac{0-0}{0+1}=0$$
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{0+0}{0+1}=0$$

وبالتالي f اشتقاقي عند الصفر.

ومنه فإنّ التوابع $h\ ,g\ ,f$ اشتقاقيّة عند الصفر.

9) **الجواب:**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين، نفرض:

$$f(x)=\cos(x)\ \ ,\ \ f(0)=1$$
$$\Rightarrow f'(x)=-\sin(x)\ \ ,\ \ f'(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=f'(0)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)=0$$

10) **الجواب:**

f تابع اشتقاقي على المجال I $\Longleftarrow$ يقبل مماساً عند كل نقطة من نقاطه.

11) الجواب: $\boxed{b:5}$, التفسير:

$$f(2)=\frac{2(2)+1}{2-1}=\frac{5}{1}=5$$

12) الجواب: $\boxed{a\ :\ 2\sqrt{3}}$, التفسير:

$$f(0)=2\sqrt{3}$$

13) الجواب: $\boxed{a\ :\ \text{نعم}}$, التفسير:

حتى يكون مستمر عند $x=2$ يجب أنّ يتحقق:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$$

- $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\frac{(2)^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$
$$=f(2)\qquad \text{محققة}$$

14) الجواب: $\boxed{b\ :\ \text{لا}}$, التفسير:

حتى يكون مستمر عند $x=1$ يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

- $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x-1}\right)=\frac{1-3+2}{1-1}$
$$=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}=x-2$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-2)\ =-1\neq f(1)$$

ليست محققة.

15) الجواب: $\boxed{a\ :\ \frac{1}{2}}$, التفسير:

$f(x)$ مستمر عند $x=0$ إذاً هو يحقق:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{x^2+x+1})(1+\sqrt{x^2+x+1})}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$
$$=\frac{1-(x^2+x+1)}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}=\frac{1-x^2-x-1}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$
$$=\frac{-x^2-x}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}=\frac{x(-x-1)}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$
$$=\frac{-x-1}{1+\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x-1}{1+\sqrt{x^2+x+1}}\right)$$
$$=\frac{-1}{1+\sqrt{1}}=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow m-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow m=1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

16) الجواب: $\boxed{c\ :\ -\frac{9}{8}}$, التفسير:

$f(x)$ مستمر عند $x=0$ إذاً هو يحقق:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3+\cos(x)}-2}{x^2}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$\frac{\sqrt{3+\cos(x)}-2}{x^2}$$
$$=\frac{(\sqrt{3+\cos(x)}-2)(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{3+\cos(x)-4}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{\cos(x)-1}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{-(1-\cos(x))}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$

$$= \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \times \frac{x^2}{4}\left(\sqrt{3+\cos(x)}+2\right)}$$

$$= -\frac{2}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+\cos(x)}+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{2}{4}(1)(1)\left(\frac{1}{\sqrt{4}+2}\right) = \frac{-1}{2(4)}$$

$$= -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow m+1 = -\frac{1}{8} \Rightarrow m = -\frac{9}{8}$$

17) الجواب: $\boxed{b : \frac{7}{16}}$, التفسير:

$f(x)$ مستمر عند $x = 0$ إذاً هو يحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{2+2\cos(x)}-\sqrt{3+\cos(x)}}{x^2}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه

فنجد:

$$\frac{\sqrt{2+2\cos(x)}-\sqrt{3+\cos(x)}}{x^2}$$

$$= \frac{2+2\cos(x)-(3+\cos(x))}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$

$$= \frac{2-3+2\cos(x)-\cos(x)}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$

$$= \frac{\cos(x)-1}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$

$$= \frac{-(1-\cos(x))}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$

$$= \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \times \frac{x^2}{4}\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \times \frac{x^2}{4}\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(1)\left(\frac{1}{2+2}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 2m-1 = -\frac{1}{8} \Rightarrow 2m = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow m = \frac{7}{16}$$

18) لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0+\infty} = 0$$

إذن $m = 0$.

19) لدينا:

التابع ذو فرعين.. على الفرق الذي يحوي الصفر

$x = 0 ; f(x) = 0$ فيكون المشتق $f'(0) = 0$.

20) قابلية الاشتقاق من اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{x-1} = 0$$

قابلية الاشتقاق من اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{x-1} = 0$$

إذن التابع قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و بالتالي اشتقاقي على $\mathbb{R}$.

حول تعريف النهايات بلغة المجالات

1) **الجواب:**

لدينا $f(x) \in]1.99 \ , \ 2.01[$ عندما $x > A$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

نحدّد المركز l :

$$l = \frac{b+a}{2} = \frac{2.01+1.99}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

ومنه نستنتج أنّ $\boxed{y=2}$ مقارب أفقي للخط C في جوار الـ $+\infty$

2) **الجواب:**

$$x > A \Rightarrow f(x) > M$$

نعلم أنّه إذا كان $x > A$ وكان $f(x) > M$ فإنّ:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3) لدينا:

$$\ell = 2 \ , \varepsilon = b-\ell = 0.01 = \frac{1}{100}$$

نعوض في القانون:

$$|f(x)-2| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{2\ln(x)-1+2\ln(x)+2}{\ln(x)+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{\ln(x)+1} < \frac{1}{100}$$

$$\ln(x) > 99$$

$$x > e^{99}$$

4) لدينا:

$$\left|\frac{e^{x+1}-2}{e^x+e} - e\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\left|\frac{e^x.e-2-e.e^x-e^2}{e^x+e}\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\left|\frac{-2-e^2}{e^x+e}\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\frac{2+e^2}{e^x+e} < \frac{1}{1000}$$

$$e^x + e > 10^3(2+e^2)$$

$$e^z > 10^3(2+e^2) - e$$

$$x > \ln(10^3(2+e^2)-e)$$

5) لدينا:

$$\ln(e^{2x}+3) > \ln(10^{10})$$

$$e^{2x}+3 > 10^{10}$$

$$e^{2x} > 10^{10}-3$$

$$2x > \ln(10^{10}-3)$$

$$x > \frac{\ln(10^{10}-3)}{2}$$

6) $|f(x)-l| < \varepsilon$

$$l = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$$

$$\varepsilon = b - l = -1.95 + 2 = +0.05$$

$$\left|\frac{2x+3}{1-x}+2\right| < 0.05$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x-3+2-2x}{1-x}\right| < \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{|-1|}{|1-x|} < \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{1}{1-x} < \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow 5(1-x) > 100$$

$$\Rightarrow 5 - 5x > 100 \Rightarrow -5x > 95$$

$$\Rightarrow \boxed{c \ : \ x < -19}$$

7)

$$l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varepsilon = b - l = 1.1 - 1 = 0.1$$

$$|f(x)-l| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - 1\right| < 0.1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} > 9 \Rightarrow \boxed{b \ : \ x > 81}$$

8) التقاطع مع محور الفواصل يعني أن $y = 0$:

$$\Rightarrow \sqrt{5x^2-1} - x = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{5x^2-1} = x$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 1 = x^2 \Rightarrow 4x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{d \ : \ x = \pm\frac{1}{2}}$$

حول الجزء الصحيح

1) **الجواب:**

$$f(x) = 2x - 3E(x) \quad : \quad x \in [1,3[$$

نُجزّء مجال الدّراسة إلى عدّة مجالات طولها 1 :

$$I = [1,3[= \begin{cases} [1,2[\\ [2,3[\end{cases}$$

نعوّض قيمة تابع الجزء الصحيح في المجال المرافق:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3(1) & : \ x \in [1,2[\\ 2x-3(2) & : \ x \in [2,3[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \begin{cases} 2x-3 & : \ x \in [1,2[\\ 2x-6 & : \ x \in [2,3[\end{cases}}$$

2) **الجواب:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+E(x^2)}{x^2+1}\right)$$

نعلم أنّ:

$$x - 1 \le E(x) < x$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 \le E(x^2) < x^2$$

نضيف x :

$$\Rightarrow x + x^2 - 1 \le x + E(x^2) < x^2 + x$$

نقسم على $x^2+1 > 0$:

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+1} \le \frac{x+E(x^2)}{x+1} < \frac{x^2+x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+E(x^2)}{x^2+1}\right) = 1}$$

3) **الجواب:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+E(\ln(x))}{x}\right)$$

نعلم أنّ:

$$x-1\le E(x)<x$$

ومنه:

$$\ln(x)-1\le E(\ln(x))<\ln(x)$$

نضيف 1 :

$$1+\ln(x)-1\le 1+E(\ln(x))<1+\ln(x)$$

نقسم على x :

$$\frac{\ln(x)}{x}\le\frac{1+E(\ln(x))}{x}<\frac{1+\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+E(\ln(x))}{x}\right)=0}$$

4) **الجواب:**

$$f(x)=2x+E(x)-3$$

بما أنّ 500 عدد صحيح فإنّ:

$$E(500)=500$$

بالتعويض في الدالة نجد:

$$f(500)=2(500)+500-3=1497$$

وبالتالي المجال الذي يحصر $f(500)$ هو:

$$\boxed{\{1497\}\text{ أو }[1497\ ,1497\ ]}$$

5) **الجواب:**

$$f(x)=\frac{x}{4}+\sqrt{2}\,E(\sqrt{x})$$

$$f(16)=\frac{16}{4}+\sqrt{2}\,E(\sqrt{16})$$

$$=4+\sqrt{2}\,E(4)=4+4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{f(16)=4+4\sqrt{2}}$$

ومنه $f(16)$ تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $3\sqrt{2}$

أو $4\sqrt{2}$ زيادة.

6) لنكتبه بصيغة مستقلة:

$$f(x)=\begin{cases}(x-2m)^2\ ;[-2,-1[\\(x-m)^2\ ;[-1,0[\end{cases}$$

لدينا:

$$f(-1)=(-1-m)^2=m^2+2m+1$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=(-1-2m)^2=4m^2+4m+1$$

نضع النهاية تساوي الصورة ونعزل:

$$3m^2+2m=0$$

$$m(3m+2)=0$$

$m=0$ مرفوض

$m=-\frac{2}{3}$ مقبول

7) ما رأيك؟ .....

8) لدينا:

$$x-1<E(x)\le x$$

$$-1<E(x)-x\le 0$$

محصور بين المستقيمين:

$$y=-1\ ,y=0$$

9) لدينا:

$$1-E(x)=0$$
$$1=E(x)$$
$$x\in[1,2[$$
$$\Rightarrow\mathbb{R}\backslash[1,2[$$

حول مركز التناظر

نعلم أنّ إحداثيّات مركز التناظر يجب أن تحقّق:

الشرط الأوّل:

$$\boldsymbol{x\in D_f\Rightarrow 2a-x\in D_f}$$

الشرط الثاني:

$$\boldsymbol{f(x)+f(2a-x)=2b}$$

1) **الجواب هو:**

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}\right)}$$

حيثُ:

$$f(x)=x+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\quad:D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\ ,1\}$$

$$2a-x=2\left(\frac{1}{2}\right)-x=1-x$$

الشرط الأوّل:

$$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\ ,1\}\Rightarrow-x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\ ,0\}$$
$$\Rightarrow 1-x\in\mathbb{R}\setminus\{0\ ,1\}$$

الشرط الثاني:

$$f(x)+f(1-x)$$

$$= x + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + 1 - x + \ln\left|\frac{1-x}{1-x-1}\right|$$
$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + 1 + \ln\left|\frac{1-x}{-x}\right|$$
$$= 1 + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$
$$= 1 + \ln\left|\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x}\right|$$
$$= 1 + \ln|1| = 1 + 0$$
$$= 1 = 2b = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

مع الانتباه إلى خاصيّة اللوغاريتم:

$$ln(a) + ln(b) = ln(a \times b)$$

2) **الجواب:**

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1} \quad : \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

البحث عن المقاربات:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}\right]$

$$= \lim_{x\to -1^-}\left[\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}\right] = -\frac{3}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}\right] = -\frac{3}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}\right]$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}\right]$$
$$= \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}\right]$

$$= \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ومنه $x = 1$ مقارب شاقولي.

ايجاد المقارب المائل:

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

بالقسمة الإقليديّة لـ (x^3+1) على (x^2-1)

نجد:

$$f(x) = x + \frac{x+1}{x^2-1}$$

ومنه $y = x$ مقارب مائل .

نلاحظ أنّ التابع f يملك مقارب شاقولي $x = 1$

ومقارب مائل $y = x$ وبالتالي فاصلة مركز التناظر هي:

$$x_0 = 1$$

نعوّض $x_0 = 1$ في معادلة المقارب المائل فنجد أنّ تراتيب مركز التناظر هو:

$$y_0 = 1$$

وبالتالي مركز التناظر هو:

$$\boxed{(1\,,1)}$$

3) **الجواب:**

$$f(x) = \frac{e^x+3}{e^x-1} \quad : \quad D_f = \mathbb{R}^*$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+3}{e^x-1}\right]$$
$$= \frac{3}{-1} = -3$$

ومنه $y_1 = -3$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x+3}{e^x-1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\frac{3}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right] = 1$$

ومنه $y_2 = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x+3}{e^x-1}\right]$$
$$= \frac{1+3}{1-1} = \frac{4}{0} = +\infty$$

ومنه $x = 0$ مقارب شاقولي.

نلاحظ أنّ التابع f يقبل مقاربين أفقيّين $y_1 = 1$ و $y_2 = -3$ ومقارب شاقولي $x = 0$ وبالتالي فإنّ فاصلة مركز التناظر هي:

$$x_0 = 0$$

وتراتيب مركز التناظر هي:

$$y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$$

إذاً مركز التناظر هو:

$$\boxed{(0\,,-1)}$$

4) **الجواب هو:**

$$(0\,,1)$$

حيثُ أنّ:

$$f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x-1} \quad : \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
$$2a - x = 2 - x$$

الشرط الأوّل:

$$x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$
$$\Rightarrow (2-x) \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

الشرط الثاني:

$$f(x)+f(2-x)=\frac{\ln|x-1|}{x-1}+\frac{\ln|2-x-1|}{2-x-1}$$
$$=\frac{\ln|x-1|}{x-1}+\frac{\ln|1-x|}{1-x}$$

نعلم أنّ:

$$|x-1|=|1-x|$$
$$\Rightarrow \ln|x-1|=\ln|1-x|$$

وبالتالي:

$$f(x)+f(2-x)=\frac{\ln|x-1|}{x-1}+\frac{\ln|x-1|}{-(x-1)}$$
$$=\frac{\ln|x-1|}{x-1}-\frac{\ln|x-1|}{x-1}=0=2b$$

وبالتالي مركز التناظر هو:

$$\boxed{(1\,,0)}$$

5) **الجواب:**

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)\ :\ D_f=]1\,,3[$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\ln\left(\frac{1-1}{3-1}\right)=\ln(0)=-\infty$$

ومنه $x_1=1$ مقارب شاقولي.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\ln\left(\frac{3-1}{3-3}\right)=\ln\left(\frac{2}{0}\right)=+\infty$$

ومنه $x_2=3$ مقارب شاقولي.

نلاحظ أنّ التابع f يقبل مقاربين شاقوليّين $x_1=$ و $x_2=3$ و 1 وبالتالي فاصلة مركز التناظر هي:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

وتراتيب مركز التناظر تساوي:

$$y_0=f(x_0)=f(2)$$
$$=\ln\left(\frac{2-1}{3-2}\right)$$
$$=\ln(1)=0$$

وبالتالي مركز التناظر هو:

$$\boxed{(2\,,0)}$$

6) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x+3=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=-3$$

ولدينا $A(1,-1)$ مركز تناظر فتكون:

$$f(2-x)+f(x)=2(b)=-2$$

نعوض في النهاية فنجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-2x}{f(2-x)+f(x)}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

7) لدينا:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$$

يملك مقارباً شاقولياً.

بقسمة البسط على المقام قسمة اقليدية نجد:

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}$$

فيكون المقارب المائل $y=x-1$

نعوض $x=1$ فيه $y=1-1=0$ فتكون النقطة $(1,0)$ مركز التناظر.

8) لدينا:

$$f(1-x)+f(x)=3$$

فتكون:

$$2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$
$$2b=3\Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

فالنقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ مركز تناظر. (الخيار c)

9) لدينا:

$$x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

نضرب ب -2:

$$-2x\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$$

نضيف 3:

$$3-2x\in\mathbb{R}\setminus\{5,1\}$$

10) لدينا:

$$f(-2-x)=\frac{2(-2-x)^2+3(-2-x)+9}{-2-x+1}$$

$$= \frac{2(4+4x+x^2)-6-3x+9}{-x-1}$$

$$= \frac{8+8x+2x^2-3x+3}{-x-1} = \frac{2x^2+5x+11}{-x-1}$$

لدينا:

$$f(x)+f(-2-x)$$

$$= \frac{2x^2+3x+9}{x+1} + \frac{2x^2+5x+11}{-x-1}$$

$$= \frac{2x^2+3x+9-2x^2-5x-11}{x+1}$$

$$= \frac{-2x-2}{x+1} = -2$$

11) لدينا:

$$f(-2-x)+f(x) = 2b = 2(-3) = -6$$

حول التابع الدوري

1) الخيار d لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{\pi x+1}{x+3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3+\cos\left(\frac{2\pi x+2}{x+3}\right)}$$

$$= \sqrt{3+\cos(0)} = 2$$

2) لدينا f تابع دوري ودوره π وبالتالي يكفي دراسته على المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (المجالات مفتوحة لأن مجموعة تعريف $\tan(x)$ هي $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}$)

3) لدينا f تابع دوري ودوره الأصغر $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ فيكفي دراسته على المجال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

4) لدينا f تابع دوري ودوره الأصغر $\frac{\pi}{2}$ وزوجي وبالتالي اصغر مجال يمكن دراسته عليه هو $[0,\frac{\pi}{4}]$.

5) نلاحظ من الرسم أن $T = 2\pi$ حيث أنه كل ما يمشي 2π عم يكرر رسمته. (مشي من $-\pi$ لـ π على محور الفواصل)

حول تعيين الثوابت

1) لدينا:

$$f(x) = \frac{a\sqrt{x}}{x+b}$$

نوجد المشتق:

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{2\sqrt{x}}(x+b) - a\sqrt{x}}{(x+b)^2}$$

$$f'(1) = \frac{\frac{a}{2}(1+b)-a}{(1+b)^2}$$

نضع $f'(1) = 0$

$$\frac{a}{2}(1+b)-a = 0$$

$$a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b-1\right) = 0$$

$$a\left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\right) = 0$$

إما $a = 0$ أو $b = 1$. ولكن a الحل مرفوض لأن a و b مغايرين للصفر.

نضع $f(1) = -1$:

$$f(1) = -1$$

$$\frac{a}{1+b} = -1$$

$$a = -1-b$$

نعوض $b = 1$ فتكون:

$$a = -1-1 = -2$$

$$a = -2, b = 1$$

2) **الجواب:**

لدينا:

$$f'(1) = 0$$

نوجد المشتق:

$$f'(x) = 3ax^2+6x-3$$

$$f'(1) = 3a+6-3 = 3a+3$$

نضع:

$$3a+3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

3) لدينا:

$$f'(0) = 4$$

$$f(0) = 3$$

المعلومة الأولى:

$$f'(x) = \frac{(9x^2+a)(x^2+1)-(2x)(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(0) = a$$

وبالتالي:

$$a = 4$$

المعلومة الثانية:

$$f(0) = b$$

وبالتالي:

$$b = 3$$

4) لدينا:

$$f'(x) = \cos x + a$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

5) لدينا:

$$f(1) = 5 \Rightarrow \frac{2+a+b}{2} = 5$$
$$\Rightarrow a + b = 8 \ldots (1)$$

$f(1) = 5$ قيمة حديّة محليّاً، وبالتالي:

$$f'(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{(4x+a)(x+1)-(1)(2x^2+ax+b)}{(x+1)^2}$$
$$\Rightarrow f'(1) = \frac{2(4+a)-(2a+b)}{4} \quad ; \quad f'(1) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{8+2a-2-a-b}{4} = 0 \Rightarrow 6+a-b = 0$$
$$\Rightarrow a - b = -6 \ldots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$
$$\Rightarrow b = 8 - 1 = 7$$
$$\Rightarrow (1\,,7)$$

6) **الجواب:**

$$f(x) = \frac{3x(x+2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$f(x) = \frac{a}{1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

بتوحيد المقامات نجد:

$$a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1) = 3x^2 + 6x$$

نأخذ $x = -1$ فنجد:

$$-3b = 3 - 6 \Rightarrow -3b = -3 \Rightarrow b = 1$$

نأخذ $x = 2$ فنجد:

$$3c = 24 \Rightarrow c = \frac{24}{3} = 8$$

نأخذ $x = 0$ فنجد:

$$-2a - 2(1) + 8 = 0 \Rightarrow a = 3$$

7) لدينا:

$$f'(1) = 0$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow f(1) = a + b$$
$$\Rightarrow a + b = 1 \quad \ldots (1)$$
$$f'(x) = a + \frac{3}{2}b\sqrt{x} \Rightarrow f'(1) = a + \frac{3}{2}b$$
$$\Rightarrow a + \frac{3}{2}b = 0 \ \ldots (2)$$

بطرح (2) من (1) نجد:

$$-\frac{1}{2}b = 1 \Rightarrow b = -2$$
$$\Rightarrow a = 1 + 2 = 3 \Rightarrow a = 3$$

8) $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b}$

$f(-2) = 2$ قيمة حديّة محليّاً وبالتالي:

$$f'(-2) = 0$$

$$f(-2) = \sqrt{4-2a+b}$$
$$\Rightarrow 2 = \sqrt{4-2a+b}$$

نربّع الطرفين:

$$\Rightarrow 4 = 4 + 2a + b \Rightarrow b = 2a \quad \ldots (*)$$

$$f'(x) = \frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax+b}}$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{-4+a}{2\sqrt{4-2a+b}}$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{-4+a}{2\sqrt{4-2a+b}}$$
$$\Rightarrow 0 = -4 + a \Rightarrow a = 4$$

نعوّض في $(*)$:

$$\Rightarrow b = 2(4) = 8 \Rightarrow b = 8$$

9) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

يقبل مماس أفقي وحيد أي أنّ المشتق ينعدم مرّة واحدة وبالتالي:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \quad ; a = 3a\,, b = 2b\,, c = c$$

$$\Rightarrow \Delta = 4b^2 - 4(3a)(c) = 4b^2 - 12ac$$

كون المشتق ينعدم مرّة واحدة فإنّ:

$$\Delta = 0$$

$$\Rightarrow 4b^2 - 12ac = 0 \Rightarrow b^4 - 3ac = 0$$

حول مبرهنة القيمة الوسطى

1) لدينا التابع زوجي وبالتالي خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب فإذا كان يقبل ثلاث حلول على المجال $]0,+\infty[$ فسيقبل ثلاثة حلول أخرى على المجال $]-\infty,0[$ وبالتالي عدد الحلول على اجتماع المجالين $\mathbb{R}^*$ هو 6 حلول.

2) لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$$

f مستمر على المجال:

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

$$f'(x) = x^4 - x^2$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2(x^2-1) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases} \end{cases}$$

3) $x(2x+1)^2 = 5 \Rightarrow x(2x+1)^2 - 5 = 0$

$$\Rightarrow f(x) = x(2x+1)^2 - 5$$
$$\Rightarrow f(x) = x(4x^2+4x+1) - 5$$
$$\Rightarrow f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x - 5$$

f مستمر على $\mathbb{R}$ ، نشتق:

$$f'(x) = 12x^2 + 8x + 1$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 8x + 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16 > 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

يوجد حلّان:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+4}{24} = -\dfrac{1}{6} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-4}{24} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(-\dfrac{1}{6}\right) = \left(-\dfrac{1}{6}\right)\left(-\dfrac{1}{3}+1\right)^2 - 5 \\ \quad = \left(-\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{4}{9}\right) - 5 = -\dfrac{139}{27} \\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)(-1+1)^2 - 5 = -5 \end{cases}$$

x		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
						$-\infty$
$f'(x)$	$++$	0	$--$	0	$++$	
$f(x)$		$\nearrow -5$	$\searrow$	$-\frac{139}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

وبالتالي يوجد حل وحيد في المجال:

$$\left[-\frac{1}{6}, +\infty\right[$$

4) $f(a).f(b) < 0$

5) f مستمر على $\mathbb{R}$, ويمكن كتابة التابع بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \left(-\sqrt{x}\right)$$

التابع $\frac{1}{x-1}$ تابع متناقص على $]1,+\infty[$

التابع $-\sqrt{x}$ تابع متناقص على $]1,+\infty[$

ومجموع تابعين متناقصين هو تابع متناقص وبالتالي:

$$0 \in f(]1,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]1,+\infty[$.

ملاحظة: يمكن دراسة الاطراد عن طريق جدول التغيرات وتصوير المجال أيضاً عن طريقه ولكن في شغف الرياضيات نحرص على أن تتعلم كل شيء 😊

6) لدينا:

$$f(x) = 3x + \cos(x)$$

نوجد المشتق:

$$f'(x) = 3 - \sin(x) = 3 - \sin(x)$$

لدينا:

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$
$$1 \ge -\sin(x) \ge -1$$
$$4 \ge f'(x) \ge 2 > 0$$

f متزايد تماماً ومستمر و $0 \in f(\mathbb{R}): \mathbb{R}$

وبالتالي للمعادلة حل وحيد.

7) لدينا:

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{1 - 3 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-2 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1$$

$$= \frac{-1 + 3 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1$	↘	$-\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1$	↗	$+\infty$

للمعادلة حل وحيد

8) محلول من شوي

9) لدينا:

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$D_f :]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$$

$$f'(x) = 1 - \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}} = \frac{1 + 2x^2 + x}{2x^2 + x} > 0$$

f متزايد تماماً على D_f وبالتالي للمعادلة حل وحيد.

10) لدينا:

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = 0$$

$$h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

نعدم:

$$x = 0 \; ; h(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$	0	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$
$h(x)$	↘↘↘↘↘↘	0	↗↗↗↗↗↗

نلاحظ أنه يمر بالصفر مرة واحدة وبالتالي للمعادلة $h(x) = 0$ حل وحيد أي $f(x) = g(x)$ لها حل وحيد أيضاً

11) لدينا:

$$f(5) = 5 - 10 + 3\ln\left(\frac{6}{1}\right) = -5 + 3\ln(6)$$

$$= 3\ln(6) - 5 = 3\ln(2) + 3\ln(3) - 5 > 0$$

$$f(6) = 5 - 12 + 3\ln\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$= -7 + 3\ln(7) - 3\ln(2) < 0$$

بالتالي حصلنا على تناوب بالإشارة فالحل ينتمي للمجال $]5,6[$.

12) لدينا:

$$g(x) = f(x) - y_T = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{2e^x(e^x + 1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x + 1)^2} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{e^x[2e^x + 2 - 2e^x + 3]}{(e^x + 1)^2} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{5}{4} = \frac{20e^x - 5(e^x + 1)^2}{4(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{20e^x - 5e^{2x} - 10e^x - 5}{4(e^x + 1)^2} = \frac{-5(e^{2x} - 2e^x + 1)}{4(e^x + 1)^2}$$

$$= -\frac{5}{4}\frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \leq 0$$

نعدم:

$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$x = 0$$

$$g(0) = 0$$

جدول اطراد:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'	$-$	$-$	0	$-$	$-$
g	↘		0	↘	

لدينا:

$g(x) > 0$ على المجال $]-\infty, 0[$ بالتالي C فوق T.

$g(x) < 0$ على المجال $]0, +\infty[$ بالتالي C تحت T.

13) لدينا:

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$$

$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x}{(x+1)^2}$$

نعدم:

$$x = 0 \, ; g(0) = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
g'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
g	↘		0	↗	

$$g(x) \geq 0$$

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$$

$$\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1}$$

أيا كانت $x \in]-1, +\infty[$

14) لدينا:

$$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

$$g(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x+1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$$

نعدم:

$$2 - \sqrt{x+1} = 0$$

$$\sqrt{x+1} = 2$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$

$$g(3) = 2\ln(2) - 2 < 0$$

x	-1		3		$+\infty$
g'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
g	↗		$2ln(2)-2$	↘	

$$g(x) \leq 2\ln(2) - 2 < 0$$

$$g(x) < 0$$

$$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

$$\ln(x+1) < \sqrt{x+1} \, ; \forall x > -1$$

$$]-1, +\infty[$$

15) لدينا:

$$e^x - x > 0$$

$$g(x) = e^x - x$$

$$g'(x) = e^x - 1$$

نعدم:

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g(0) = 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
g	↘		1	↗	

$$g(x) \geq 1 > 0$$

$$g(x) > 0$$

$$e^x - x > 0$$

$$e^x > x$$

أيا تكن $x \in \mathbb{R}$.

16) لدينا:

$$\ln(x) - 2\sqrt{x} \leq 0$$

$$g(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

نعدم:

$$1 - \sqrt{x} = 0$$

$$x = 1$$

$$g(1) = -2$$

x	0		1		$+\infty$
g'	$\|\|$	$+++++0$		$------$	
g	$\|\|$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	

$$g(x) \leq -2 < 0$$

$$g(x) < 0$$

$$\ln(x) - 2\sqrt{x} < 0$$

$$\ln(x) < 2\sqrt{x}$$

مهما تكن $x \in]0, +\infty[$

17) لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

نشكل الفرق:

$$f(x) - 2 = \frac{2x+1}{x-1} - 2 = \frac{2x+1-2x+2}{x-1}$$

$$= \frac{3}{x-1}$$

على المجال $]1, +\infty[$ يكون C فوق مقاربه الأفقي

إذن الخيار b هو الخاطئ.

18) لدينا:

$$f'(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}(x+1) = \frac{x\ln(x) + x + 1}{x}$$

إذن على مجموعة التعريف تكون إشارة المشتق من إشارة البسط.

19) لدينا:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln(x) + 1 = \frac{-1 + x^2\ln(x) + x^2}{x^2}$$

إذن إشارة المشتق من إشارة البسط.

20) لدينا:

$$f'(x) = \frac{x\ln(x) + x + 1}{x}$$

$$g(x) = x\ln(x) + x + 1$$

$$g'(x) = \ln(x) + 1 + 1 = \ln(x) + 2$$

نعدم:

$$\ln(x) + 2 = 0$$

$$x = e^{-2}$$

$$g(e^{-2}) = -\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2} + 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2} > 0$$

x	0		e^{-2}		$+\infty$
g'	$\|\|$	$-----0$		$+++++++$	
g	$\|\|$	$\searrow$	$\frac{e^2-1}{e^2}$	$\nearrow$	

$$g(x) \geq \frac{e^2 - 1}{e^2} > 0$$

$$g(x) > 0$$

إذن:

$$f'(x) > 0$$

أي f مطرد تماماً (متزايد تماماً).

21) لدينا:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln(x) + 1 = \frac{-1 + x^2\ln(x) + x^2}{x^2}$$

لدينا:

$$f'(1) = 0$$

إذن يقبل قيمة حدية عند $a = 1$.

حول المشتقات من مراتب عليا

1) لدينا:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f'''(x) = \frac{4\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}4x}{16x^2.x}$$

$$= \frac{\frac{8x + 4x}{2\sqrt{x}}}{16x^3} = \frac{12x}{32x^3\sqrt{x}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

2) مشتق العدد صفر يا جماعة..

3) بدنا نشتق 7 مرات هههههههههه:

$$f'(x) = 1 + 6x + 20x^4 + 30x^5$$

$$f''(x) = 6 + 80x^3 + 150x^4$$

$$f'''(x) = 240x^2 + 600x^3$$

كملو اشتقاق بيطلع 0 السابع.

مسائل عامة

1) لدينا:

$$f(3 + 0.1) \approx 0.1f'(3) + f(3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\approx 0.1\frac{1}{4} + 2 \approx \frac{81}{40}$$

2) **الجواب:**

$$g(x) = x\sqrt{x}$$

$g(x)$ اشتقاقي عند الصفر ((جذر مضروب بمضمونه))

$$h(x) = x|x|$$

$h(x)$ اشتقاقي عند الصفر.

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\left(\frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}\right) - 0}{x}$$
$$= \frac{x^2 + |x|}{(x^2 + 1)x}$$

نميّز حالتين:

الحالة الأولى $x \to 0^-$:

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{(x^2 + 1)x} = \frac{x(x-1)}{x(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} g(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

وبالتالي $f(x)$ اشتقاقي من اليسار عند الصفر ومنه:

$$f'(0^-) = -1$$

الحالة الثانية $x \to 0^+$:

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x(x^2 + 1)} = \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)} = \frac{x+1}{x^2+1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

وبالتالي $f(x)$ اشتقاقي من اليمين عند الصفر ومنه:

$$f'(0^+) = 1$$

و $f(x)$ غير اشتقاقي عند الصفر لأن:

$$f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

3) **57) الجواب:**

حسب قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{x - x^2}}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{x(1-x)}}{-(1-x)} = \lim_{x\to 1} -\frac{x\sqrt{x}}{1-x}$$
$$= \infty$$

له مماس شاقولي عند $a = 1$ معادله $x = 1$.

4) **الجواب:**

لنعيد صياغة شكل التابع $-2x^2 + 4x$

$$-2x^2 + 4x = x(-2x + 4)$$

وهذا جداء تابعين مختلفين بجهة الإطراد فهو تابع متناقص.. نعود للتابع:

$$f(x) = x(-2x + 4) + \sqrt{x(-2x + 4)}$$
$$-\frac{1}{x(-2x + 4)}$$

لدينا:

$$\sqrt{x(-2x + 4)}$$

هو عبارة عن تركيب التابعين $\sqrt{x}$ و $x(-2x + 4)$ وبالتالي تركيب تابعين مختلفين بجهة الاطراد تابع متناقص.

لدينا:

$$x(-2x + 4) + \sqrt{x(-2x + 4)}$$

مجموع تابعين متناقصين هو تابع متناقص.

وأخيراً:

$$-\frac{1}{x(-2x + 4)}$$

أولاً هو تركيب تابعين $-\frac{1}{x}$ و $x(-2x + 4)$ وتركيب تابعين مختلفين بجهة الاطراد تابع متناقص وبالتالي:

f تابع متناقص لأنه مكون من مجموع تابعين متناقصين.

5) **الجواب:**

لدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\vec{u}(k, f'(x)) , \vec{v}(x, f(x))$$

$$kf(x) - xf'(x) = 0$$

$$kf(x) - x\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$kf(x) - \frac{1}{x} = 0$$

نشتق الطرفين:

$$kf'(x) + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$k\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{k+1}{x^2} = 0$$

$$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$$

6) لدينا:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin(x) + 3\cos^2(x)} - 2$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x) - 6\sin(x)}{2\sqrt{1 + \sin(x) + 3\cos^2(x)}}$$

7) لدينا:

بما أن التابع اشتقاقي وبالتالي التابع مستمر فـ نستفيد من الشرطين:

$$\lim_{x-1} f(x) = f(1)$$

$$a + 4 = 8 + b$$

$$a - b = 4$$

وبما أنه قابل للاشتقاق فإن مشتقه من اليمين يساوي مشتقه من اليسار:

$$f'(1^+) = f'(1^-)$$

$$2a + 2 = 8$$

$$a = 3$$

نعوض لنجد b:

$$3 - b = 4$$

$$b = -1$$

8) لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x) - 1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-(1 - \cos(x))}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)(x)}{(4x)\left(\frac{x}{4}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(-\frac{2x}{4}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\right) = (0)(1) = 0$$

9) **الجواب:**

$$f(x) = 4\sin^3(x) + 3\cos(x)$$
$$f'(x) = 12\sin^2(x).\cos(x) - 3\sin(x)$$
$$= 3\sin(x)\,(4\sin(x).\cos(x) - 1)$$
$$= 3\sin(x)\left(4\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) - 1\right)$$
$$= 3\sin(x)\,(2\sin(2x) - 1)$$

10) **الجواب:**

$$f(x) = \tan(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$$

11) **الجواب:**

$\sin(3x)$ دوري أصغر دور له هو:

$\frac{3\pi}{2}$ لأنّ

$$3x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

12) **الجواب:**

$$f(x) = \tan(x)$$

$f(x)$ هو تابع فردي دوره π :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$$

وبالتالي f متزايد تماماً.

المسألة الأولى

1) **الحل:**

$$f(x) = \frac{\ln(x) + x^2 + x}{2x} + 3x$$
$$;\ D_f =]0, +\infty[$$
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x} + \frac{x^2}{2x} + \frac{x}{2x} + 3x$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{\ln(x)}{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 3x$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\ln(x)}{2x}+\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty(-\infty)+0+\frac{1}{2}=-\infty$$

ومنه فإنّ المستقيم $x=0$ مقارب شاقولي بجوار الـ $-\infty$

قد يوجد مقارب مائل:

$$\Delta: y=\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{2x}\right)}_{=0}$$

ومنه فإنّ المستقيم:

$$\Delta: y=\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}$$

مقارب مائل بجوار الـ $+\infty$ ، لدراسة لوضع النسبي ندرس إشارة الفرق:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\ln(x)}{2x}$$

البسط:

$$\ln(x)=0\Rightarrow x=1$$

المقام $2x$ موجب تماماً على D_f :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$\|$	$----$	0	$++++$	
الوضع النسبي	$\|$	C_f فوق y_Δ		C_f تحت y_Δ	

وبالتالي القضيّة خاطئة.

للتابع مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته:

$$y=\frac{5}{2}x+1$$

2) **الحل:**

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)(2x)-2(\ln(x))}{4x^2}+\frac{7}{2}$$
$$=\frac{2-2\ln(x)}{4x^2}+\frac{7}{2}$$
$$=\frac{2-2\ln(x)+14x^2}{4x^2}$$
$$=\frac{2(7x^2+1-\ln(x))}{4x^2}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{7x^2+1-\ln(x)}{2x^2}$$

المسألة الثانية

1) **الحل:**

$$f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$$
$$;D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

المقاربات المائلة عند الـ $+\infty$:

$$\Delta_1: y=x-1+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{e^x+1}\right)}_{=0}$$
$$\Rightarrow \Delta_1: y=x-1$$

المقاربات المائلة عند الـ $-\infty$:

$$\Delta_2: y=x-1+\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{e^x+1}\right)}_{=4}$$
$$\Rightarrow \Delta_2: y=x+3$$

$$f'(x)=1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{(e^x+1)-4e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

ومنه فإنّ القضيّة الصحيحة هي:

$$f'(x)=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

تذكّر أنّ:

$$\boxed{(a+b)^2-4ab=(a-b)^2}$$

2) **الحل:**

$$f'(x)=0\Rightarrow(e^x-1)^2=0$$
$$\Rightarrow e^x-1=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$$
$$f(0)=-1+\frac{4}{2}=1$$

وبالتالي لا يوجد قيم حديّة للتابع.

3) **الحل:**

$y=1$ معادلة المقارب الأفقي لـ C_f ، ندرس الوضع النسبي، أي ندرس إشارة الفرق:

$$f(x)-y\Rightarrow f(x)-1$$

من جدول تغيّرات f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$++++$		0		$++++$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+1$	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنّ $f(x)-1>0$ على المجال:

$$]0,+\infty[$$

أي أنّ C_f فوق $y = 1$ على المجال:

$]0 , +\infty[$

المسألة الثالثة

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

1) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

2) لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

3) لدينا:

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{-e^x - e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}$$

$$f'''(x) = \frac{e^x - e^x(x-2)}{e^{2x}} = \frac{3-x}{e^x}$$

إذن نلاحظ أن المشتق النوني:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n-x)}{e^x}$$

4) ندرس تغيرات التابع:

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$$

نعدم:

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{e}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+ + + + +$	0	$- - - - - -$
f	$-\infty \nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow 0$

$$\int xe^{-x}\,dx$$

$x \quad e^{-x}$

$1 \quad -e^{-x}$

$0 \quad e^{-x}$

$$[-xe^{-x} - e^{-x}]$$

الآن من الرسم (عندما ندرس تغيرات التابع) نجد:

$$\int_{-ln2}^{0} -f(x)\,dx + \int_{0}^{ln2} f(x)\,dx$$

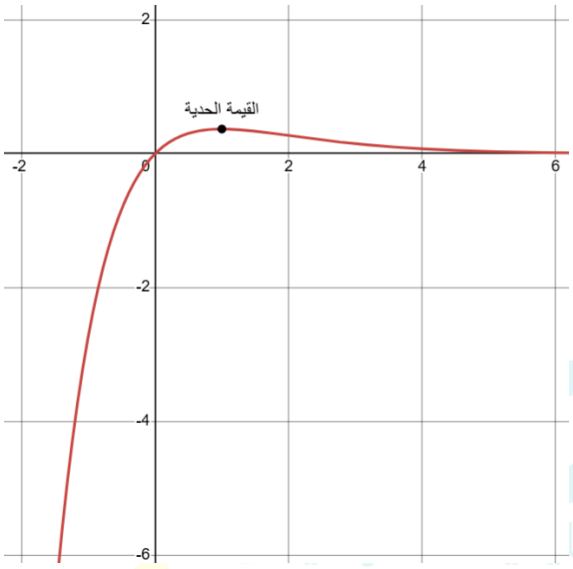
$$\int_{0}^{-ln2} f(x)\,dx + \int_{0}^{ln2} f(x)\,dx$$

$$[-xe^{-x} - e^{-x}]_0^{-ln2} + [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^{ln2}$$

$$= [(2\ln(2) - 2) - (-1)] + \left[\left(-\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\right) - (-1)\right]$$

$$= 2\ln(2) - 1 - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3\ln(2) - 1}{2}$$

5) الخط البياني للتابع:



للمعادلة حلان مختلفان عندما $m \in]1/e , 1[$

المسألة الرابعة

$$f(x) = \frac{1}{x} + xln(x)$$

1) لدينا:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln(x) + 1 = \frac{-1 + x^2\ln(x) + x^2}{x^2}$$

إذن إشارة المشتق من أشارة المقدار

$$x^2\ln(x) + x^2 - 1$$

2) لدينا:

$$f'(1) = 0$$

3) لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

نجد أن جدول تغيرات التابع:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+++++$	0	$------$
f	$+\infty \searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	1	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow +\infty$

فتكون المساحة:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)\,dx$$

نوجد التابع الأصلي:

$$\ln|x| + \int xlnx\,dx$$

$$Y = \int xlnx\,dx$$

$$u = \ln(x) \to u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \to v = \frac{x^2}{2}$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{x}{2}dx$$

$$\left[\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

نعوض:

$$\left[\ln|x| + \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$= \left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - \left(-1 - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2}\right)$$

$$= \frac{4+e^2}{4} - \left(-1 - \frac{2+1}{4e^2}\right) = \frac{4+e^2}{4} + 1 + \frac{3}{4e^2}$$

$$= \frac{4e^4 + 16e^2 + 4e^2 + 3}{4e^2} = \frac{4e^4 + 20e^2 + 3}{4e^2}$$

4) لدينا:

$$a = 1$$

$$f(1) = 1$$

$$f'(1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0(x-1) + 1$$

$$y = 1$$

أو أساساً بإمكانك تعرفها من الطلب الثاني بما أنو 1 عدمت المشتق معناها معادلة المماس الأفقي للتابع $y = f(1)$ 😊

حول التوابع المركبة

1) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{X\to 3} f(X) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

2) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{X\to 2} f(X) = \frac{5}{3}$$

3) لدينا:

$$f\big(g(x)\big) = \frac{\frac{2}{x-1}+2}{\frac{2}{x-1}} = \frac{\frac{2+2x-2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}$$

$$= \frac{2x}{2} = x$$

4) لدينا:

$$g\big(f(x)\big) = g(x^2-1) = \sin(x^2-1)$$

5) لدينا:

$$\big[f\big(g(x)\big)\big]' = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

$$1 = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

$$1 = \frac{1}{g(x)}g'(x)$$

$$g'(x) = g(x)$$

6) **الجواب:**

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\,f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x + \sqrt{1+x^2} = f(x)$$

7) **الجواب:**

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

نضرب بالمرافق:

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2}=\sqrt{x^2+1}-x$$
$$=\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)=f(-x)$$

8) **الجواب:**

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

لدينا:

$$g'(x)=f'(x)+f'(-x)(-1)=0$$

التابع g تابع ثابت صحيحة.

$$g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$$

متناظر لمحور التراتيب صحيحة.

بما أن التابع g ثابت فإن نهايته تساوي قيمة أي عدد منه وبالتالي يمكن القول أن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=g(1)=g(0)=g(2)\ldots$$

سنأخذ $g(0)$:

$$g(0)=f(0)+f(-0)=2f(0)$$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=2g(0)$$

وبالتالي الخيار التالت صحيح فالأخير هو ما تبقى خاطئ.

9) **الجواب:**

لدينا:

$$g'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=f'(x)+f'\left(\frac{1}{x}\right).\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

وبالتالي g تابع ثابت وليس متزايد.. منتهية. الخيار الأول غلط.

10) **الجواب:**

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x)=f(\tan(x))-x$$

$$\Rightarrow g'(x)=(\tan(x))'.f'(\tan(x))-1$$
$$=\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)\left(\frac{1}{1+\tan^2(x)}\right)-1$$
$$=\frac{1}{\cos^2(x)+\cos^2(x).\tan^2(x)}-1$$
$$=\frac{1}{\cos^2(x)+\cos^2(x)\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)}-1$$
$$=\frac{1}{\cos^2(x)+\sin^2(x)}-1$$
$$=\frac{1}{1}-1=0$$

11) **الجواب:**

$$f(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

$$f(f(x))=f\left(\frac{x-3}{x+5}\right)=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}$$
$$=\frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}}=\frac{-2x-18}{6x-22}$$
$$=\frac{-2(x+9)}{2(3x-11)}=-\frac{x+9}{3x-11}$$

12) **الجواب:**

لدينا:

$$g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$$

زوجي.

13) **الجواب:**

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x)=f(x)+f(-x)$$
$$\Rightarrow g'(x)=f'(x)-f'(-x)$$
$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

14) **الجواب:**

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+\left(\frac{1}{x}\right)'f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= f'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$$

15) **الجواب:** **مكرر**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = f(\tan(x)) - x$$

$$\Rightarrow g'(x) = (\tan(x))'.f'(\tan(x)) - 1$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)\left(\frac{1}{1+\tan^2(x)}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x).\tan^2(x)} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x)\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} - 1 = 1 - 1 = 0$$

16) **الجواب:**

لدينا:

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

عند $x = 0$ يكون التابع شكله:

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(0) = -1$$

نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y = -1(x - 0) + 0$$

$$y = -x$$

17) **الجواب:**

لدينا معادلة المماس في النقطة a:

$$f(a) = \frac{a^2 + a}{a^2 + a + 3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x+3) - (2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$= \frac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'(a) = \frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}$$

فتكون معادلة المماس:

$$y = \frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(x-a) + \frac{a^2+a}{a^2+a+3}$$

ليكون المماس مار بالمبدأ نعوض النقطة $(0,0)$:

$$0 = \frac{3(2a+1)(-a) + (a^2+a)(a^2+a+3)}{(a^2+a+3)^2}$$

ينعدم الكسر اذا نعدم بسطه:

$$-6a^2 - 3a + a^4 + a^3 + 3a^2 + a^3 + a^2 + 3a = 0$$

$$-2a^2 + a^4 + 2a^3 = 0$$

$$a^2(a^2 + 2a - 2) = 0$$

إما:

$$a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

أو:

$$a^2 + 2a - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-2)(1) = 4 + 8 = 12$$

للمعادلة حلان:

$$a_1 = \frac{-2+\sqrt{12}}{2}, a_2 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2}$$

إذن يوجد ثلاث مماسات تمر من المبدأ (يعني حسسب كم قيمة لـ a بيطلعلي)

التكامل

1) لدينا:

$$F(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+1}$$

$$G(x) = \frac{2x^2+\lambda x+5}{2x+2}$$

$$F(x) - G(x) =$$

$$= \frac{x^2+3x+1}{x+1} - \left(\frac{2x^2+\lambda x+5}{2x+2}\right)$$

$$= \frac{2x^2+6x+2-2x^2-\lambda x-5}{2x+2}$$

$$= \frac{(6-\lambda)x-3}{2x+2}$$

ليتم المطلوب يجب أن يكون

$$6-\lambda = -3$$
$$\Longrightarrow 6+3=\lambda$$
$$\Rightarrow \lambda = 9$$
$$\Rightarrow \frac{-3x-3}{2x+2} = \frac{-3(x+1)}{2(x+1)}$$
$$= -\frac{3}{2}$$

2) $F(x) = \lambda - 2\cos^2 x$

$$G(x) = -2\cos^2 x$$
$$F(x) - G(x)$$
$$= \lambda - 2\cos^2 x + 2\cos^2 x$$
$$= \lambda$$

إذن يجب أن تكون عدد حقيقي ما أي:

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

3) $\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right) e^{x^2+x}\,.\,dx$

نفرض:

$$H = x^2 + x$$
$$H' = 2x+1$$
$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{2}(2x+1)e^{x^2+x}.\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 H'.e^H.dx$$
$$= \frac{1}{2}[e^H]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{e-1}{2}$$

4) لدينا:

نفرض:

$$H = x^2 - 9$$
$$H' = 2x$$
$$f(x) = x(x^2-9)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2x(x^2-9)^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-9}$$

5) لدينا:

$$\int_1^0 x^3\sqrt{(x^2+1)^2}.\,dx$$
$$= \int_1^0 x^3(x^2+1).\,dx$$
$$= \int_1^0 x^5 + x^3\,.\,dx$$
$$= \left[\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}\right]_1^0 = 0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{-4-6}{24} = -\frac{10}{24}$$

6) لدينا:

$$\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\,.\,dx$$
$$= \int_1^e \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln(x)\,.\,dx$$

نفرض:

$$H = \ln(x)$$
$$H' = \frac{1}{x}$$
$$\int_1^e \frac{1}{x} + H'.H\,.\,dx$$
$$= \left[\ln|x| + \frac{H^2}{2}\right]_1^e$$
$$= \left[\ln|x| + \frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e$$
$$= \ln(e) + \frac{\ln^2(e)}{2} - \left[\ln(1) + \frac{\ln^2(1)}{2}\right]$$
$$= 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

7) لدينا:

$$\int_1^e \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\,.\,dx$$
$$= \int_1^e \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln(x)\,.\,dx$$

نفرض:

$$H = \ln(x)$$
$$H' = \frac{1}{x}$$
$$= \int_1^e \frac{1}{x} - H'.H\,.\,dx$$
$$= \left[\ln(x) - \frac{H^2}{2}\right]_1^e$$
$$= \left[\ln(x) - \frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e$$
$$= \ln(e) - \frac{\ln^2(e)}{2} - 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

8) لدينا:

$$\int_1^e \left(\frac{\ln^2(x) + 2\ln(x) + 2}{x}\right) dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x}\ln^2(x) + 2\frac{1}{x}\ln(x) + \frac{2}{x}\right) dx$$

نفرض:

$$H^2 = \ln^2(x)$$
$$H' = \frac{1}{x}$$

ونفرض:

$$H = \ln(x)$$
$$H' = \frac{1}{x}$$
$$= \int_1^e \left(H'.H^2 + 2H'.H + \frac{2}{x}\right) dx$$
$$= \left[\frac{H^3}{3} + 2\frac{H^2}{2} + 2\ln(x)\right]_1^e$$
$$= \left[\frac{\ln^3(x)}{3} + \frac{2\ln^2(x)}{2} + 2\ln(x)\right]_1^e$$
$$= \frac{\ln^3(e)}{3} + \ln^2(e) + 2\ln(e) - 0$$
$$= \frac{1}{3} + 1 + 2 = \frac{10}{3}$$

9) لدينا:

$$\int_{e^2}^{e^3} \left(\frac{1}{x\sqrt{\ln(x) - 1}}\right) dx$$
$$= \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x}(\ln(x) - 1)^{-\frac{1}{2}}.dx$$

نفرض:

$$H = \ln(x) - 1$$
$$H' = \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \int_{e^2}^{e^3} H'(H)^{-\frac{1}{2}}.dx$$
$$= \left[\frac{H^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{e^2}^{e^3} = 2[\ln(x) - 1]_{e^2}^{e^3}$$
$$= 2[3 - 1 - (2 - 1)]$$
$$= 2(2 - 1) = 2$$

10) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \ .dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x - 1)\, dx$$
$$= [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 1 - \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{4 - \pi}{4}$$

11) لدينا:

$$\int_0^k (x^2 + x)dx = \frac{5}{6}$$
$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^k = \frac{5}{6}$$
$$\frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} - 0 = \frac{5}{6}$$
$$\frac{2k^3 + 3k^2}{6} = \frac{5}{6}$$
$$2k^3 + 3k^2 - 5 = 0$$

يجب أن يكون المجموع صفر بالتالي $k = 1$

(بالتجريب).

12) لدينا:

$$0 \le x \le a$$

نضيف 1:

$$1 \le x + 1 \le a + 1$$

نقلب:

$$1 \ge \frac{1}{x+1} \ge \frac{1}{a+1}$$

نكامل بالنسبة:

$$\int_0^a 1\, dx \ge \int_0^a \frac{1}{x+1} dx \ge \int_0^a \frac{1}{a+1} dx$$
$$a \ge \ln(a+1) \ge \frac{a}{a+1}$$

نقسم على a:

$$1 \ge \frac{\ln(a+1)}{a} \ge \frac{1}{a+1}$$

13) لدينا:

$$\int_1^0 \frac{x}{e^x}\, dx$$
$$= \int_1^0 xe^{-x}\, dx$$
$$u = x \to u' = 1$$
$$v' = e^{-x} \to v = -e^{-x}$$
$$\Rightarrow = [-xe^{-x}]_1^0 + \int_1^0 -e^{-x}\, dx$$
$$= [-xe^{-x}]_1^0 - [e^{-x}]_1^0$$

$$= 0 + \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{e} = \frac{2-e}{e}$$

14) لدينا:

$$\int_0^{\pi} (wx+1)\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$u = 2x+1 \to u' = 2$$

$$v' = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \to v = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2x+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}[(2\pi+1)(1)-0] + \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi + \frac{1}{2} + 0 - 1 = \pi - \frac{1}{2}$$

15) لدينا:

$$\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x^2} dx$$

$$= \int_0^e (1+\ln(x))x^{-2} . dx$$

$$= \int_0^e (x^{-2} + x^{-2}\ln(x)) dx$$

$$\int_0^e x^{-2} + \int_0^e \underbrace{x^{-2}\ln(x)}_{\text{بالتجزئة}} . dx$$

$$u = \ln(x) \to u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^{-2} \to v = -\frac{1}{x}$$

$$= \int_0^e x^{-2} + \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e - \int_0^e -\frac{1}{x^2}$$

$$= \int_0^e x^{-2} + \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e + \int_0^e x^{-2}$$

$$= 2\int_0^e x^{-2} + \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e$$

$$= 2\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_0^e + \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e$$

$$= 2\left[-\frac{1}{e}+1\right] + \left[-\frac{1}{e}+0\right]$$

$$= -\frac{2}{e} + 2 - \frac{1}{e} = \frac{-3+2e}{e}$$

16) لدينا:

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3\ln(x)}{x^2}\right) dx$$

$$I_1 = \int_1^e x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e}$$

$$I_2 = 3\int_1^e x^{-2}\ln(x)\, dx$$

$$u = \ln(x) \to u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^{-2} \to v = -\frac{1}{x}$$

$$I_2 = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e + \int_1^e x^{-2}\, ex$$

$$I_2 = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e + I_2$$

نعوض في التكامل الكلي:

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3\ln(x)}{x^2}\right) dx = I_1 - \left[\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e + I_2\right]$$

$$= \left[\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e = \frac{1}{e}$$

17) لدينا:

$$I = \int_0^1 x^2 e^x . dx$$

$$u = x^2 \to u' = 2x$$

$$v' = e^x \to v = e^x$$

$$= [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{2x.e^x}_{J}$$

$$J = \int_0^1 2x.e^x . dx$$

$$u = 2x \to u' = 2$$

$$v' = e^x \to v = e^x$$

$$J = [2x.e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x$$

$$= [2e-0] - [2e^x]_0^1$$

$$= 2e - 2e + 2 = 2$$

$$\Rightarrow I = [x^2.e^x]_0^1 - 2$$

$$= e - 2$$

18) محلول

19) لدينا:

$$\int_1^{e^2} \left(\frac{1}{x(\ln(x)-1)}\right) . dx$$

$$= \int_1^{e^2} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)-1} \cdot dx$$
$$= [\ln|ln(x)-1|]_1^{e^2}$$
$$= \ln|ln(e^2)-1| - \ln|\ln(1)-1|$$
$$= \ln(2-1) - 0 = 0$$

20) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) \cdot \sin(2x) \cdot dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) \cdot 2\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2(x) \cdot \sin(x) \cdot dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -(2\cos^2(x)\,(-\sin(x)) \cdot dx$$

نفرض:

$$H = cos(x)$$
$$H' = -\sin(x)$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2H^2 \cdot H' \cdot dx$$
$$= -2\left[\frac{H^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= -2\left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= -2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\right)$$
$$= \frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$$

21) لدينا:

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x) \cdot dx$$
$$= \int_0^{\pi} \sin^2(x) \cdot \sin(x) \cdot dx$$
$$= \int_0^{\pi} (1-\cos^2(x)) \cdot \sin(x) \cdot dx$$
$$= \int_0^{\pi} \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x) \cdot dx$$

نفرض:

$$H = \cos(x)$$
$$H' = -\sin(x)$$
$$= \int_0^{\pi} \sin(x) - H' \cdot H^2 \cdot dx$$
$$= \left[-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\pi}$$
$$= 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

22) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x) \cdot dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x))^2 \cdot \cos(x) \cdot dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))^2 \cdot \cos(x) \cdot dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin(x) + \sin^2(x)) \cdot \cos(x)$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) - 2\cos(x)\sin(x)$$
$$+ \cos(x)\sin^2(x)$$

نفرض:

$$H = \sin(x)$$
$$H' = \cos(x)$$
$$= \left[\sin(x) - \frac{2\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{1}{3}$$

23) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\cos^2(x)} \cdot dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\cos^2(x)} \cdot dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2(x)} \cdot dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin(x)| \cdot dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(x) \cdot dx$$
$$= [2\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 2 = -2$$

24) لدينا:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos(x)}\, dx$$
$$\sqrt{2-2\cos(x)} = \sqrt{2(1-\cos(x))} = \sqrt{2.2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$= 2\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos(x)}\,dx=\int_0^{\pi}2\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}=-4\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=-4\,(0-1)=4$$

25) لدينا:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin(2x)}.dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{2\sin(x).\cos(x)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-(-\sin^2(x))}{\cos(x).\sin(x)}+\frac{\cos^2(x)}{\cos(x).\sin(x)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-(-\sin(x))}{\cos(x)}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}[-\ln|cos(x)|+\ln|sin(x)|]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{sin(x)}{cos(x)}\right|\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\ln|tan(x)|^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\ln\sqrt{|\tan(x)|}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln(1)-\ln\left(\sqrt{3}\right)=-\ln\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{1}{2}\ln(3)$$

26) لدينا:

$$\int_0^1\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.dx$$

نفرض:

$$H=e^x+e^{-x}$$
$$H'=e^x-e^{-x}$$
$$=[\ln(e^x+e^{-x})]_0^1$$
$$=\ln(e^1+e^{-1})-\ln(1+1)$$
$$=\ln\left(e+\frac{1}{e}\right)-\ln(2)$$
$$=\ln\left(\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$$

27) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}.dx$$

نفرض:

$$H=\cos(x)+\sin(x)$$
$$H'=\cos(x)-\sin(x)$$
$$=[\ln|cos(x)+sin(x)|]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\ln(0+1)-\ln(1+0)=0$$

28) لدينا:

$$F(x)=(ax+b)e^{-x}$$
$$f(x)=\frac{5x-4}{e^x}$$

نشتق F :

$$F'(x)=ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}$$
$$=e^{-x}(a-ax-b)$$
$$=\frac{a-ax-b}{e^x}$$

نقارن بين F' و f :

$$\Rightarrow a-ax-b=5x-4$$
$$\Rightarrow a=-5$$
$$\Rightarrow -5-b=-4$$
$$\Rightarrow b=-1$$

29) لدينا:

$$F(x)=P(x)e^{2x}$$
$$f(x)=x^3e^{2x}$$

نعلم أن:

$$F'(x)=f(x)$$

فنجد أن:

$$\deg P(x)=3$$

30) لدينا:

$$\int_1^3|2x-4|.dx$$

$$2x-4=0\Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$2x-4$	$----$		$++++$		
$\|2x-4\|$	$-2x+4$		$2x-4$		

$$\Rightarrow\int_1^2-2x+4+\int_2^3 2x-4$$
$$=[-x^2+4x]_1^2+[x^2-4x]_2^3$$
$$=(-4+8)-(-1+4)+(9-12)-(4-8)$$
$$=-4+8+1-4+9-12-4+8=2$$

31) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\max(cos(x),sin(x)).dx$$

$$\sin(x)=\cos(x)$$
$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
max	$\cos(x)$			$\sin(x)$	

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)$$

$$= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) - \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

32) لدينا:

$$\int_0^1 \min(x^2, x)$$

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1) = 0$$

إما:

$$x = 0$$

أو:

$$x = 1$$

x	0		1
min		x	

$$\Rightarrow \int_0^1 x.dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

33) لدينا:

$$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x)$$

$$= e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

$$f''(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) + (-\sin(x) - \cos(x))e^x$$

$$= e^x[-2\sin(x)]$$

نعوض:

$$f(x) = af'(x) + bf''(x)$$

$$e^x \cos(x) = a[e^x(\cos(x) - \sin(x))] + b[e^x(-\sin(x)]$$

$$\cos(x) = a\cos(x) - a\sin(x) - 2b\sin(x)$$

$$\cos(x) = a\cos(x) + \sin(x)\,(-a - 2b)$$

بالمقارنة نجد:

$$a = 1$$

$$-a - 2b = 0$$

$$-1 - 2b = 0$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

34) لدينا:

$$f''(x) = af'(x) + bf(x)$$

$$f'(x) = e^x \sin(2x) + 2\cos(2x)\, e^x$$

$$= e^x(\sin(2x) + 2\cos(2x))$$

$$f''(x) = e^x(\sin(2x) + 2\cos(2x)) + (2\cos(2x) - 4\sin(2x))e^x$$

$$= e^x[-3\sin(2x) + 4\cos(2x)]$$

نعوض:

$$-3\sin(2x) + 4\cos(2x) = a(\sin(2x) + 2\cos(2x)) + b\sin(2x)$$

$$= a\sin(2x) + 2a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

بالمقارنة نجد:

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$a + b = -3 \Rightarrow b = -5$$

وبالتالي:

$$f''(x) = 2f'(x) - 5f(x)$$

نكامل الطرفين:

$$f'(x) = 2f(x) - 5F(x)$$

$$-5F(x) = f'(x) - 2f(x)$$

$$F(x) = -\frac{1}{5}f'(x) + \frac{2}{5}f(x)$$

35) **الجواب:**

لدينا:

$$g'(x) = \frac{3(1+\tan^2 x)(1+\tan(x)) - (1+\tan^2 x)(3tanx - 1)}{(tanx+1)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan^2 x)[3 + 3\,tan\,x - 3\tan x + 1]}{(1+tanx)^2}$$

$$= \frac{4 + 4\tan^2 x}{(1+tanx)^2}$$

36) **الجواب:**

لدينا:

$$g'(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$$

37) لدينا:

$$1-\frac{x^2}{2}\le \cos(x)\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

نشتق الأطراف:

$$-x\le -\sin(x)\le -x+\frac{x^3}{6}$$

نضرب بـ -1:

$$x\ge \sin(x)\ge x-\frac{x^3}{6}$$

المتتاليات

1) لدينا:

$$u_n=\frac{10^n\left(10+\frac{1}{10^n}\right)}{10^n\left(1+\frac{1}{10^n}\right)}$$

$$\lim u_n=\frac{10}{1}=10$$

2) لدينا:

$$\lim u_n=0-0+\infty=+\infty$$

3) لدينا:

$$u_{v_n}=\cos\left(\frac{\pi^{n+1}}{3.\pi^n+3}\right)$$

$$\lim u_n=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

حسب المسيطر

ثلاثة حدود متعاقبة

1) **الجواب:**

$$a+b+c+c=27$$
$$\Rightarrow 2b+b+c=27$$
$$\Rightarrow 3b+c=27$$

2) **الجواب:**

$$\left.\begin{matrix} b=2aq \\ c=2aq^2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow 2a+2aq+2aq^2=14$$
$$\Rightarrow 2a+4a+8a=14$$
$$\Rightarrow 14a=14\Rightarrow a=1$$

نختار الحدود المتزايدة:

$$a=1\ ,\quad b=4\ ,\quad c=9$$

3) **الجواب:**

$$k^2=1\left(k-\frac{2}{9}\right)=k-\frac{2}{9}$$
$$\Rightarrow k^2-k+\frac{2}{9}=0$$
$$\Rightarrow \left(k-\frac{2}{3}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow k=\frac{1}{3}$$

4) نعلم أن $a+b+c=3b$

$$S=3u_3+3u_{11}=3(u_3+u_{11})=3(60)$$
$$=180$$

5) لدينا:

$$a.b.c=216$$
$$b^2=a.c$$
$$b^3=216\Longrightarrow b=6$$

6) حاول تقليص عدد المجاهيل :

$$u_3=u_0+3r$$
$$u_2=u_0+2r$$
$$u_5=u_0+5r$$

نعوض :

$$2u_0+3r=18$$
$$2u_0+7r=34$$

بالطرح :

$$4r=16$$
$$r=4$$

و بالتالي $u_0=3$

و عليه يكون $u_n=3+4n$

7) **الجواب:**

$$b=aq\ \ ,\ \ c=aq^2$$

من الحسابية:

$$2B=A+C$$
$$\Rightarrow 10b=12a+2c$$

نعوّض $1\ ,2$ ، نقسم على a :

$$10aq=12a+2aq^2$$
$$\Rightarrow 10q=12+2q^2$$
$$\Rightarrow 2q^2-10q+12=0$$
$$\Rightarrow q^2-5q+6=0$$
$$\Rightarrow (q-3)(q-2)=0$$
$$\Rightarrow q=3\ ,\ q=2$$

8) لدينا:

$$b^3=216\Rightarrow b=6$$

نعوض في الأخرى:

$$a+c=21-6=15$$

9) لدينا:

$$(a+r)^2=1+a(a+2r)$$
$$a^2+2ar+r^2=1+a^2+2ar$$
$$r^2=1$$
$$r=1$$

10) لدينا:

$$2(2a+1)=a+2+a^2-4$$
$$4a+2=a+a^2-2$$
$$a^2-3a-4=0$$
$$(a-4)(a+1)=0$$
$$a=4\,,a=-1$$

نختار $a=4$ لأن المتتالية متناقصة

11) لدينا:

$$u_1+u_2+u_3=9$$
$$2u_2+u_2=9$$
$$u_2=3$$

لدينا:

$$u_{10}+u_{11}=40$$
$$u_2+8r+u_2+9r=40$$
$$17r=34$$
$$r=2$$

12) نفس رقم 10 بس غير حرف

13) لدينا:

$$2(3b)=4a+2c$$
$$6b=4a+2c$$

ولدينا $b=aq\,,c=aq^2$:

$$6aq=4a+2aq^2$$
$$aq^2-3aq+2a=0$$
$$q^2-3q+2=0$$
$$(q-2)(q-1)=0$$

$q=2$ مقبول

$q=1$ مرفوض

14) لدينا:

$$u_3-3u_5=-42$$
$$u_2+r-3(u_2+3r)=-42$$
$$-2u_2-8r=-42$$
$$-8r=-42+10$$
$$r=4$$

المتتاليات المعرفة بالتدريج

1) بملاحظة أن $E(0):0<1<2$ محققة

و أن

$$E(n):0<u_n<2$$
$$0<u_n^2<4$$
$$0<\frac{1}{2}u_n^2<2$$
$$2<2+\frac{1}{2}u_n^2<4$$
$$0<\sqrt{2}<\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}<2$$
$$0<u_{n+1}<2$$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة

و بالتالي $E(n)$ صحيحة مهما تكن n

2) **الجواب:**

$$v_{n+1}=u_{n+1}^2-4$$
$$=\left(\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}\right)^2-4$$
$$=2+\frac{1}{2}u_n^2-4$$
$$=\frac{1}{2}u_n^2-2$$
$$\Rightarrow\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{2}u_n^2-2}{u_n^2-4}=\frac{\frac{1}{2}u_n^2-2}{2\left(\frac{1}{2}u_n^2-2\right)}=\frac{1}{2}=q$$

3) **الجواب:**

$$v_0=u_0^2-4=1^2-4=-3$$

4) **الجواب:**

$$v_n = (q)^n . v_0 \quad \Longrightarrow v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5) **الجواب:**

$$u_n^2 = v_n + 4 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$

$$\Longrightarrow u_n = \sqrt{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

6) **الجواب:**

$$w_0 = v_0 - u_0 = 3 - (-1) = 4$$

7) **الجواب:**

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 3av_n + (1-3a)u_n \\ &\quad - (3au_n + (1-3a)v_n) \\ &= 3av_n + (1-3a)u_n - 3au_n \\ &\quad - (1-3a)v_n \\ &= 3a(v_n - u_n) + (1-3a)(u_n - v_n) \\ &= 3aw_n - (1-3a)(v_n - u_n) \\ &= 3aw_n - (1-3a)w_n \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{w_n(3a - (1-3a))}{w_n}$$

$$= 3a - 1 + 3a = 6a - 1$$

8) **الجواب:**

$$w_n = w_0 . q^n = 4(6a-1)^n$$

9) **الجواب:**

$$X_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 2u_n - 4 - 4 = 2u_n - 8$$

نشكّل النسبة:

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{2u_n - 8}{u_n - 4} = \frac{2(u_n - 4)}{u_n - 4} = 2$$

وبالتالي المتتالية X_n هندسية أساسها:

$$q = 2$$

10) **الجواب:**

$$X_n = X_0(q)^n = -3(2)^n$$

11) **الجواب:**

$$u_n = X_n + 4 = -3(2)^n + 4$$

12) **الجواب:**

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - 4u_n \\ v_{n+1} &= u_{n+2} - 4u_{n+1} \\ &= 7u_{n+1} - 12u_n - 4u_{n+1} \\ &= 3u_{n+1} - 12u_n \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3(u_{n+1} - 4u_n)}{u_{n+1} - 4u_n} = 3$$

13) **الجواب:**

$$\begin{aligned} y_n &= u_{n+1} - 3u_n \\ y_{n+1} &= u_{n+2} - 3u_{n+1} \\ &= 7u_{n+1} - 12u_n - 3u_{n+1} \\ &= 4u_{n+1} - 12u_n \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{4u_{n+1} - 12u_n}{u_{n+1} - 3u_n}$$

$$= \frac{4(u_{n+1} - 3u_n)}{u_{n+1} - 3u_n} = 4$$

وبالتالي المتتالية y_n هندسية أساسها:

$$q = 4$$

14) **الجواب:**

الحد العام:

$$v_n = -3^{n+1} \quad , \quad y_n = -4^n$$
$$v_n = u_{n+1} - 4u_n$$
$$\Longrightarrow 4u_n = u_{n+1} - v_n$$
$$\Longrightarrow 4u_n = y_n + 3u_n - v_n$$
$$\Longrightarrow u_n = -4^n + 3^{n+1}$$

15) **الجواب :**

$$S = 1 + 2 + 4 + .. + 1024$$
$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$$
$$S = 1\frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2047$$
$$\rightarrow 2s = 4094$$
$$\rightarrow 2s + 2000 = \boxed{6094}$$

16) **الجواب:**

$$t_n = x_n . y_n$$

نشكّل الفرق:

$$t_{n+1} - t_n = x_{n+1} . y_{n+1} - x_n . y_n$$
$$= \left(\frac{2x_n . y_n}{x_n + y_n}\right)\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) - x_n . y_n = 0$$

وبالتالي المتتالية t_n ثابتة.

17) **الجواب:**

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n . y_n}{x_n + y_n} - x_n$$

$$= \frac{2x_n . y_n - x_n(x_n + y_n)}{x_n + y_n} = \frac{2x_n y_n - x_n^2 - x_n y_n}{x_n + y_n}$$
$$= \frac{x_n y_n - x_n^2}{x_n + y_n} = \frac{x_n(y_n - x_n)}{x_n + y_n} < 0$$
$$; \quad y_n - x_n < 0$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x_n + y_n}{2} - y_n = \frac{x_n + y_n - 2y_n}{2}$$
$$= \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{متزايدة}$$

18) الجواب :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1}$$

$$u_n = \left(7 - \frac{18}{9}\right)10^n + 2$$

$$u_n = 5 \times 10^n + 2$$

19) **الجواب :**

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1}$$
$$u_n = \left(0 - \frac{4}{2}\right)3^n + 2$$
$$u_n = -2\,.\,3^n + 2 = 2(1 - 3^n)$$

20) الجواب:

نحل المعادلة $f(x) = x$

$$2x + 3 = x$$
$$x = -3 = l$$

$$v_n = u_n - l$$
$$v_n = u_n + 3$$

$$\alpha = 3$$

21) الجواب :

$$f(x) = x$$
$$-\frac{1}{3}x + 1 = x$$
$$\frac{4}{3}x = 1$$
$$x = \frac{3}{4} = l$$
$$v_n = u_n - \frac{3}{4}$$
$$\alpha = \frac{3}{4}$$

22) **الجواب:**

$$u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n+1}$$
$$v_n = nu_n$$

$$v_{n+1} = (n+1)(v_n + 1) = (n+1)\left(\frac{nu_n + 4}{n+1}\right)$$
$$= nu_n + 4$$
$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{nu_n + 4}{nu_n}$$
$$v_{n+1} - v_n = nu_n + 4 - nu_n = 4$$

وبالتالي المتتالية v_n حسابية أساسها:

$$r = 4$$

23) **الجواب:**

$$w_{n+1} = x_{n+1} + 2y_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}(y_n + 2x_n) + \frac{1}{3}(x_n + 5y_n)$$
$$= \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_n + \frac{5}{3}y_n$$
$$= \frac{6}{3}y_n + \frac{3}{3}x_n = 2y_n + x_n$$
$$\Rightarrow w_{n+1} - w_n = 2y_n + x_n - x_n - 2y_n = 0$$

وبالتالي المتتالية w_n ثابتة.

24) نضع الأمثال:

$$\alpha - 2 > 0$$

$$\alpha > 2$$

وبالتالي حسب الخيارات $\alpha = 3$.

25) **الجواب:**

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

$$\frac{3}{2}a\,u_n + \frac{a+1}{3} - u_n = 0$$
$$\frac{3}{2}a(2) + \frac{a+1}{3} - 2 = 0$$
$$3a + \frac{a+1}{3} - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{9a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{1}{3} - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{10a}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow 10a = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

26) لدينا:

$$v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{3u_n}{u_n + 1}}$$
$$= 1 - \frac{2u_n + 2}{3u_n} = \frac{u_n - 2}{3u_n}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_n - 2}{3u_n}}{\frac{u_n - 2}{u_n}} = \frac{1}{3} = q$$

27) لدينا:

$$u_{n+1} + 5t_{n+1} = 3u_n + 5t_n + 5u_n + 35t_n$$
$$= 8u_n + 40t_n = 8(u_n + 5t_n)$$

هندسية أساسها $q = 8$

28) لدينا:

$$u_1 = \frac{3}{6}u_0 + 3 = 3 + 3 = 6 = u_0$$

ثابتة.

29) لدينا:

$$t_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+2t_n}{3}-\frac{2u_n+t_n}{3}$$

$$==\frac{-u_n+t_n}{3}=\frac{1}{3}(t_n-u_n)$$

هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

30) لدينا:

$$v_n=5u_n-6u_{n-1}-2u_n=3u_n-6u_{n-1}$$

$$=3(u_n-2u_{n-1})=3v_{n-1}$$

هندسية أساسها $q=3$

31) لدينا:

$$u_0=2\cos(2\theta)$$

$$u_1=\sqrt{2+2\cos 2\theta}=\sqrt{2(1+\cos 2\theta)}$$

$$=\sqrt{2.2\cos^2\theta}=-2\cos\theta$$

لأن $\theta\in]\pi/2\ ,\pi[$

32) لدينا:

$$v_n=3u_n-2u_{n-1}-2u_n=u_n-2u_{n-1}=v_n$$

إذن أساسها $q=1$ وحدها العام:

$$v_n=v_0q^n=v_0.(1)^n=1(1)^n=(1)^n$$

33) لدينا:

$$(n+1)\ln(n+1)$$

نعرف التابع f:

$$f(x)=(x+1)\ln(x+1)\ ;x>-1$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=\ln(x+1)+1$$

نعدم:

$$lln(x+1)+1=0$$

$$x+1=\frac{1}{e}$$

$$x=\frac{1}{e}-1$$

$$f\left(\frac{1}{e}-1\right)=\left(\frac{1}{e}-1+1\right)\ln\left(\frac{1}{e}-1+1\right)=-\frac{1}{e}$$

جدول تغيرات:

x	-1		$\frac{1}{e}-1$		$+\infty$
f'	$\|\|$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	
f	$\|\|0$	↗	$-\frac{1}{e}$	↘	$+\infty$

نلاحظ أن:

$$f(x)\geq-\frac{1}{e}$$

بالتالي u_n محدودة من الأدنى:

$$u_n\geq-\frac{1}{e}$$

المجاميع

1) **الجواب:**

$$S=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n(1+n)}{2}$$

2) **الجواب:**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{4n^2}\right)=\frac{1}{4}$$

3) **الجواب: حسابية مع قفزات:**

$$n=\frac{2n-2}{2}+1=n-1+1=n$$

$$S=\frac{n(2n+2)}{2}=n(1+n)=n^2+n$$

4) **الجواب:**

$$S=\frac{100(1+100)}{2}=50(101)=5050$$

5) **الجواب:**

$$S=\frac{14(15+2)}{2}=119$$

6) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

7) $u_n=\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{2n^3+1}\to+\infty$

8)

$$u_n=1+2^3+3^3+\cdots+5^3=\frac{5^2(6)^2}{4}=225$$

9) $n=10$

$$S = \frac{10 \times 11 \times 12}{3} = 440$$

10) **الجواب:**

الجواب الصحيح b ذلك أن :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q = \frac{2}{5} < 1$$

لنناقش باقي الخيارات :

الأول حسب معيار الاشتقاق يتضح أنها متزايدة

الثالث : بتشكيل النسبة يتضح أنها متزايدة

الرابع : بما أن الحد الأول سالب لا يجوز استخدام معيار النسبة و بحساب الحدود الأولى .. نجد أنها متزايدة

11) **الجواب:**

$$\frac{10(6+3k)}{2} = 255$$
$$\Rightarrow 60 + 30k = 510$$
$$\Rightarrow 30k = 510 - 60 = 450$$
$$\Rightarrow k = \frac{450}{30} = 15$$

12) **الجواب:**

$$S = -3 - \left[\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \cdots + \frac{3}{4^n}\right]$$

متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{1}{4}$$

وبالتالي:

$$S = \frac{1-q^n}{1-q}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}\right) = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$\Rightarrow \text{الكامل } S = -3 - \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$
$$= -3 - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$= -4 + \frac{1}{(2^2)^n} = -4 + \frac{1}{2^{2n}}$$

13) **الجواب:**

$$S = 1 - \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots + \frac{1}{9^n}\right]$$

متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{1}{9}$$

وبالتالي:

$$S = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\frac{8}{9}}\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}$$
$$\Rightarrow S = 1 - \left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}\right) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8.9^n}$$
$$= \frac{7}{8} + \frac{1}{8.9^n}$$

14) **الجواب:**

$$S = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Rightarrow S = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

15) **الجواب:**

$$4^1 + 2 = 4 + 2 = 6$$

مضاعف للعدد 3 .

16) **الجواب:**

$3^{2n} - 2^n = 3^{2(1)} - 2^1 = 9 - 2 = 7$ صحيحة

17)

$$(2^5)^{11} - (5^2)^{11} = (32-25)k = 7k$$

18)

$$2(5^{33} - 2^{22}) = 2[(5^3)^{11} - (2^2)^{11}]$$
$$= 2[(125-4)k] = 2 \times 121 \times k = 2 \times 11(11k)$$
$$= 2 \times 11 \times k'$$

مضاعف للعدد 11 و زوجي

19)

$$S = (1+3+5+\cdots+99)$$
$$-(2+4+6+\cdots+100)$$
$$S = 2500 - 2550 = -50$$

20)

$$nE(x) \le E(x) + E(2x) + \cdots + E(nx) \le nE(nx)$$

$$\underbrace{\frac{E(x)}{n}}_{\text{نهاياتها صفر}} \le u_n \le \underbrace{\frac{E(nx)}{n}}_{\text{نهاياتها } x}$$

لاحظ أن

$$nx - 1 \leq E(nx) \leq nx$$

$$\frac{nx-1}{n} \leq \frac{E(nx)}{n} \leq x$$

و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n \in [0,x]$ و لا يمكن الحكم على نهايتها

(السؤال خاطئ ... أعتذر منكم)

21) **الجواب:**

$$3^5 \geq \frac{1}{3}(2^{5+1}) + \frac{5}{3}(5+1)^2$$
$$\Longrightarrow 3^5 \geq \frac{64}{3} + \frac{180}{3}$$
$$\Longrightarrow 243 \geq \frac{244}{3}$$
$$\Longrightarrow 243 \geq 81.3 \quad \text{محققة}$$

22) نهدف للوصول للطلب والذي هو:

$$E(n+1): (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

لدينا من الفرض:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

نضرب بـ $(1+x)$:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

23) لدينا:

$$E(n+1): 10^{n+1} + 1 = 9k'$$

لدينا من الفرض:

$$10^n + 1 = 9k$$

نضرب ب 10:

$$10^{n+1} + 10 = 90k$$
$$10^{n+1} + 1 = 90k - 9 = 9(10k-1) = 9k'$$

بالتالي $E(n+1)$ صحيحة.

نختبر حد البدأ:

$$10^0 + 1 = 2$$

غير قابل للقسمة على 9 بالتالي $E(n+1)$ صحيحة فقط.

24) لدينا:

$$E(n+1): n+1 > n+2$$

لدينا من الفرض:

$$n > n+1$$

نضيف 1:

$$n+1 > n+2$$

بالتالي $E(n+1)$ صحيحة. نختبر حد البدأ:

$$0 > 1$$

مستحيلة. إذن $E(n+1)$ صحيحة فقط.

25) لنوجد الأساس:

$$u_{30} - u_{15} = r(30-15)$$
$$15r = 20 - (-10)$$
$$r = 2$$

الآن:

$$S = (u_{15} - 7r) + (u_{15} - 6r) + (u_{15} - 5r)$$
$$+(u_{30} - 10r) + (u_{30} - 9r) + (u_{30} - 8r)$$
$$= 3u_{15} + 3u_{30} - 35r$$
$$= 3(-10) + 3(20) - 35(2) = -40$$

26) لدينا:

$$f(S_0) = \big(9(0) + 10(1), 3(0) + 5(1)\big) = (10,5)$$

27) مجموع متتالية هندسية أساسها $q = 10$ وعدد حدودها 6 وحدها الأول 1:

$$S = \frac{1 - 10^6}{1 - 10} = \frac{-99999}{-9} = 11111$$

28) لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

نضيف ونطرح $\frac{1}{n}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \frac{-2n-1+2n}{2n(2n+1)} = \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$$

المتتالية متناقصة تماماً (الخيار C)

29) لدينا:

u_n هندسية أساسها $q = 4$ إذن المتتالية u_n^2 أساسها 4^2 وبالتالي المجموع:

$$S = u_0^2 \frac{1-16^{n+1}}{1-16}$$

و u_0:

$$u_0 = v_0 + 1 = 15$$

نعوض:

$$S_n = 225 \frac{1-16^{n+1}}{-15} = 15(16^{n+1} - 1)$$

30) لدينا:

$$S = 3^0 + 3^1 + \cdots + 3^5$$

$$= 1\frac{1-3^6}{1-3} = \frac{(1-3^6)}{-2} = \frac{(1-729)}{-2} = 364$$

31) لدينا:

$$\frac{u_3}{u_0} = 2^{3-0} \Rightarrow u_3 = 8$$

نحسب المجموع:

$$u_3 \frac{1-2^{n-2}}{1-2} = 248$$

$$-8(1-2^{n-2}) = 248$$

$$1 - 2^{n-2} = -31$$

$$2^{n-2} = 32$$

نضع:

$$2^{n-2} = 2^5$$

$$n - 2 = 5 \Rightarrow n = 7$$

32) الجواب:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$\boldsymbol{u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}}$$

33) الجواب: $\boxed{c : k-1}$, التفسير:

$$u_{n+1} = 10u_n - 18 \quad ; \quad u_0 = 7$$
$$u_1 = 70 - 18 = 52$$
$$u_2 = 520 - 18 = 502$$
$$u_3 = 5020 - 18 = 5002$$
$$u_4 = 50020 - 18 = 50002$$

و بالتالي نجد أنّ عدد الأصفار للمتتالية u_k هو:

$$k - 1$$

34) الجواب: $\boxed{b : \text{متناوبة}}$, التفسير:

المتتالية متناوبة لأنّ حدودها من الشكل:

$$u_n = \left(-\frac{1}{1}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(-\frac{1}{n}\right)^n$$

35) الجواب: $\boxed{a : \text{ثابتة}}$, التفسير:

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \quad , \quad u_0 = 8$$
$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$$
$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$$
$$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$$

و بالتالي المتتالية u_n ثابتة.

36) الجواب: $\boxed{a : a^2 + b^2 + c^2}$, التفسير:

$$b^2 = a.c \Rightarrow a = \frac{b^2}{c}$$

نعوّض:

$$\left(\frac{b^2}{c} + b + c\right)\left(\frac{b^2}{c} - b + c\right) =$$

$$\left(\frac{b^2}{c}\right)^2 - \frac{bb^2}{c} + \frac{cb^2}{c} + \frac{bb^2}{c} - b^2 + bc + b^2 - bc + c^2$$

$$= \frac{b^4}{c^2} + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

حيث أنّ:

$$a = \frac{b^2}{c} \Rightarrow a^2 = \frac{b^4}{c^2}$$

37) لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

38) لنقسم المجموع لأقسام:

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{19}{2}$$

نضرب بـ 2:

$$2S_1 = 2S_2 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 19$$

$$2S_1 = 2S_2 = \frac{1+19}{2}(19)$$

$$S_1 = S_2 = 95$$

يكون S:

$$S = S_1 + 20 + S_2 = 95 + 20 + 95 = 210$$

39) لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1} = 2u_n + n - 1 - 2t_n - n + 1$$

$$= 2u_n - 2t_n = 2(u_n - t_n) = 2v_n$$

هندسية أساسها $q = 2$ وحدها العام:

$$v_n = v_0 q^n = 2.2^n = 2^{n+1}$$

40) لدينا مجموع متتالية هندسية أساسها $q = i$

وعدد حدودها 601 و الحد الأول 1:

$$S = 1\frac{1 - i^{601}}{1 - i} = \frac{1 - i^{600}i}{1 - i} = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

لأن $i^{600} = i^4 = 1$.

41) لدينا:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{39}{4} + 20 + 20 + \cdots + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \cdots + \frac{39}{4} + 20$$

$$4S_1 = 2 + 3 + \cdots + 39 + 40$$

$$= \frac{42}{2}(39) = 819$$

$$S_1 = \frac{819}{4} = 204.75$$

ولدينا:

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{39}{4} + 20$$

أي:

$$S_2 = S_1 = 204.75$$

فيكون S:

$$S = S_1 + S_2 = 409.5$$

42) لدينا:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{10^2(11)^2}{4} = \frac{100 \times 121}{4} = 25 \times 121 = 3025$$

البنوك التي بعد التمثيل البياني لحدود متتالية

1) **الجواب:** متناقصة

نلاحظ أنّ:

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$$
$$= u_n^2 - 3u_n + 2$$
$$= (u_n - 2)(u_n - 1)$$

بما أنّ $u_n \leq 2$ فإنّ:

$u_n - 2 \leq 0$ سالبة

وبما أنّ $u_n \geq 1$ فإنّ:

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1) \leq 0$$

وبالتالي u_n متناقصة.

2) **الجواب:** المتتالية متقاربة من الصفر.

بما أنّ:

$$l_{n+1} \le l_n \Rightarrow l_{n+1} - l_n \le 0$$

ومنه l_n متناقصة.

بما أنّ $l_{n+1} \le 1$ إذاً l_n محدودة من الأدنى بالعدد 1.

بما أنّ l_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة، ونهايتها هي حل المعادلة:

$$f(x) = x$$
$$\sqrt{1 + (x-1)^2} = x$$
$$\Rightarrow 1 + (x-1)^2 = x^2$$
$$\Rightarrow 1 + x^2 - 2x + 1 = x^2$$
$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} l_n = 1$$

ومنه المتتالية l_n متناقصة ومحدودة من الأدنى ومتقاربة من الواحد.

وبالتالي القضيّة الخاطئة هي أنّ المتتالية متقاربة من الصفر.

3) الجواب $\frac{2}{\pi}$ لأنّ:

$$u_n = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{3}{\pi^3} + \cdots + \frac{\pi}{\pi^n}$$

لنثبت أوّلاً أنّ:

$$E(n): 2^n \ge n$$

$E(0)$ و $E(1)$ محققتان وضوحاً لأنّ:

$$2^1 \ge 1 \ , \quad 2^0 \ge 0$$

ولنثبت صحة $E(n)$ لكل $n \ge 1$ عندئذٍ:

$$2^{n+1} = 2.2^n \ge 2n \ge n + n \ge n + 1$$

ومنه $E(n+1)$ محققة وبالتالي:

$$2^n \ge n \ : \ \forall n$$

بالاستفادة مما سبق نستبدل كل عدد k بالبسط بـ 2^k :

$$u_n \le \frac{2^1}{\pi} + \frac{2^2}{\pi^2} + \frac{2^3}{\pi^3} + \cdots + \frac{2^n}{\pi^n}$$
$$= q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$$
$$; \ q = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow u_n \le a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n}{1-\frac{2}{\pi}}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n}{\frac{\pi-2}{2}}\right) = \frac{2}{\pi-2}\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\right)$$
$$\le \frac{2}{\pi-2}$$

ومنه المتتالية محدودة من الأعلى بـ:

$$\frac{2}{\pi-2}$$

وهو أصغر حد راجح.

لدينا أيضاً:

$$\frac{2}{\pi-2} < \frac{2}{\pi-3} < \pi$$

ومنه فإنّ:

$$\pi \ , \ \frac{2}{\pi-3}$$

حدود راجحة أيضاً، لكن:

$$\frac{2}{\pi} < \frac{2}{\pi-2}$$

ومنه $\frac{2}{\pi}$ ليس حد راجح.

4) الجواب: y_{n+1} لأنّ:

لدينا:

$$y_{n+1} = x_n + y_n$$

نحسب الحدود الأولى:

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = x_0 + y_0 = x_0 + 0 = x_0$$
$$y_2 = x_1 + y_1 = x_0 + x_1$$
$$y_3 = x_2 + y_2 = x_0 + x_1 + x_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = x_{n-1} + y_{n-1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$$
$$y_{n+1} = x_n + y_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

ومنه:

$$y_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

5) الجواب: $y_n = \frac{3}{n^2}$ لأنّ:

$$\left(\text{الحد الأصغر}\right)\left(\text{عدد الحدود}\right) \le u_n$$
$$\le \left(\text{الحد الأكبر}\right)\left(\text{عدد الحدود}\right)$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \le 3 \cdot \frac{1}{n^2}$$
$$\Rightarrow u_n \le \frac{3}{n^2} \Rightarrow u_n = \frac{3}{n^2}$$

6) الجواب: 1 لأنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right) = 1$$

7) الجواب: $\sqrt{n+1}$ لأنّ:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

نضرب بالمرافق فنجد:

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$u_0 = \sqrt{1} - 0 = \sqrt{1}$$
$$u_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1}\ ,\ u_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$
$$u_3 = \sqrt{4} - \sqrt{3}\ , \dots\ , u_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$
$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
$$\Rightarrow s_n = \sqrt{n+1}$$

8) الجواب: 2 لأنّ:

$$f(x) = x$$

x هي فاصلة نقطة تقاطع C_f مع منصف الربع الأوّل، من الرسم نجد:

$$x = 0\ \ ,\ \ x = 1$$

وبالتالي عدد حلول المعادلة هو 2 .

9) الجواب: متزايدة

نلاحظ أنّ f متزايدة على $[0\ ,1]$.

نريد إثبات أنّ:

$$u_{n+1} \geq u_n$$

نثبت صحة $E(0)$ أي نريد إثبات أنّ:

$$u_1 \geq u_0$$

لدينا:

$$u_1 = f(u_0)$$

وبما أنّ f متزايدة على المجال $[0\ ,1]$ و $0 < u_0 < 1$ نجد:

$$f(u_0) \geq u_0 \Rightarrow u_1 \geq u_0$$

ونفرض صحة $u_{n+1} \geq u_n$ ولنثبت أنّ:

$$u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

لدينا:

$$f(u_{n+1}) = u_{n+2}$$

ومن الفرض $u_{n+1} \geq u_n$ و f متزايدة فإنّ:

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$$
$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$$
$$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

ومنه المتتالية متزايدة.

10) الجواب: المتتالية محدودة من الأعلى فقط.

بما أنّ:

$$0 < u_0 < 1$$

و f متزايدة و $u_{n+1} = f(u_n)$ فإنّ:

$$0 < u_n < 1$$

أي أنّ u_n محدودة. وبما أنّ المتتالية متزايدة ومحدودة فإنّ نهايتها المحتملة هي:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

11) الجواب:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

وبالتالي المتتالية متزايدة.

12) الجواب: $x_n \geq \frac{1}{2}$ لأنّ:

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$
$$x_n = u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

لدينا n حد وأصغر هذه الحدود هو:

$$\frac{1}{2n}$$

ومنه:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \geq \frac{1}{2}$$

13) الجواب: $x_n \geq \frac{1}{2}$ مكرر عن **12**

14) الجواب: $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ لأنّ:

الخاصة $E(1)$ صحيحة وضوحاً لأنّ:

$$u_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$ عندئذٍ:

$$u_{2^{n+1}} = u_{2^n} + u_{2^n.2} - u_{2^n} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة، أي أنّ:

$$u_{2^n} \geq \frac{n}{2} \quad : \quad \forall\, n \geq$$

انتهت حلول المقرر.. تذكر:

مع شغف الرياضيات العلامة الكاملة

لم تعد حلماً.. بل أصبحت خطّة.

بنوك التحليلية

1) الجواب:

$$\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{\imath} + \sqrt{6}\,\vec{\jmath} - \vec{k}$$

$$\Rightarrow ||\vec{v}|| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{2+6+1} = \sqrt{9} = 3$$

2) الجواب:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BG}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN}$$

حيثُ N هي منتصف BG أي مركز الوجه $BCGF$

3) الجواب:

$$\left(F\,;\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FD}\right)$$

وبالتالي:

$$A(1\,,0\,,0) \quad , \quad B(0\,,1\,,0)$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$$

بفرض $N(x\,,y\,,z)$ يكون:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x - 1 = -x \Rightarrow 2x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$y = 1 - y \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$
$$z = -z \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

وبالتالي:

$$N\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,0\right)$$

4) الجواب:

$$A(1\,,2\,,-1)\,,\ B(2\,,1\,,0)$$

C نظيرة A بالنسبة للمبدأ أي أنّ:

$$C(-1\,,-2\,,+1)$$

نشكّل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,1) \ , \ \overrightarrow{AC}(-2,-4,2)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين غير مرتبطين خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{-4} \neq \frac{1}{2}$$

لنفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$a = +(-2+4) = 2$$
$$b = -(2+2) = -4$$
$$c = +(-4-2) = -6$$
$$\Rightarrow \vec{n}(2,-4,-6) \ , \ A(1,2,-1)$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0$$
$$\Rightarrow 2(x-1) - 4(y-2) - 6(z+1) = 0$$
$$\Rightarrow 2x - 4y - 6z + 0 = 0$$

نقسم على 2 :

$$\Rightarrow x - 2y - 3z = 0$$

5) الجواب:

$$A(1,3,-1)\,,\ B(2,5,2)\ ,\ C(3,4,\alpha)$$

ليكون المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B يجب أن يكون:

$$AB = BC$$

ومنه:

$$BA = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$
$$BC = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (\alpha-2)^2}$$
$$= \sqrt{2 + (\alpha-2)^2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{14} = \sqrt{2 + (\alpha-2)^2}$$

نربّع الطرفين:

$$2 + (\alpha-2)^2 = 14$$
$$\Rightarrow (\alpha-2)^2 = 12$$
$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 12$$
$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(-8) = 48 \Rightarrow \sqrt{\Delta}$$
$$= 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+4-4\sqrt{3}}{2} = 2-2\sqrt{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+4+4\sqrt{3}}{2} = 2+2\sqrt{3} \end{cases}$$

6) الجواب:

$$A(3,-2,2)\ ,\ \vec{u}(1,1,0)\ ,\ \vec{v}(-1,1,1)$$

نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيّاً لأن:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$$

نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$a = +(0-1) = -1$$
$$b = -(0-1) = +1$$
$$c = +(-1-1) = -2$$
$$\Rightarrow \vec{n}(-1,1,-2)$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$-1(x-3)+1(y+2)-2(z-2)=0$$
$$\Rightarrow -x+3+y+2-2z+4=0$$
$$\Rightarrow -x+y-2z+9=0$$

نضرب الطرفين بـ (-1) :

$$\Rightarrow x-y+2z-9=0$$

7) الجواب:

$$(2,0,0)\ ,\ (0,3,0)\ ,\ (0,0,5)$$

المستوي له شكل المعادلة:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$$

نوحّد المقامات:

$$\Rightarrow \frac{15x+10y+6z}{30}=1$$
$$\Rightarrow 15x+10y+6z=30$$

8) الجواب:

$$\overrightarrow{w_1}=2\,\vec{u}-\vec{v}$$
$$\overrightarrow{w_2}=2\,\vec{u}+\vec{v}$$

بما أنّ $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان فإنّ:

$$\overrightarrow{w_1}.\overrightarrow{w_2}=0\Rightarrow 4\,\vec{u}^2-\vec{v}^2=0\Rightarrow 4\,\vec{u}^2=\vec{v}^2$$

$$||\vec{u}||=\frac{1}{4}||\vec{v}||^2$$
$$\Rightarrow ||\vec{u}||=\frac{1}{2}||\vec{v}||$$

9) الجواب:

$$A(1,2,-3)\ ,\ B(-1,3,3)\ ,\ C(4,-1,2)$$

بفرض $D(x,y,z)$

ليكون $ABCD$ متوازي أضلاع يجب أن يتحقق:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$
$$\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-x\\-1-y\\2-z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2=4-x\Rightarrow x=6\\1=-1-y\Rightarrow y=-2\\6=2-z\Rightarrow z=-4\end{cases}$$
$$\Rightarrow D(6\,,-2\,,-4)$$

10) الجواب:

$$AM^2=3+(x+1)^2$$

أصغر قيمة لـ AM^2 هي التي تحقق:

$$(x+1)^2=0\Rightarrow x=-1$$
$$\Rightarrow AM^2=3\Rightarrow AM=\sqrt{3}$$

11) الجواب:

$$\vec{u}(1,0,2)\ ,\ \vec{v}(-1,2,0)\ ,\ \vec{w}(-4,m,-2)$$

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$
$$\begin{pmatrix}-4\\m\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta\\2\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$-4=\alpha-\beta\quad ...(1)$$
$$m=2\beta\quad ...(2)$$
$$-2=2\alpha\Rightarrow\alpha=-1\quad ...(3)$$

نعوّض في (1) :

$$-4=-1-\beta\Rightarrow\beta=3$$

نعوّض في (2) :

$$\Rightarrow m=6$$

12) الجواب:

$$A(0,1,0)\ ,\ \vec{u}(0,1,2)\ ,\ \vec{v}(0,3,-1)$$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{3}\neq\frac{2}{-1}$$

بفرض $\vec{n}(a\,,b\,,c)$:

$$a=+(-1-6)=-7$$
$$b=-(0-0)=0$$
$$c=+(0-0)=0$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$\Rightarrow 7(x-0)+0+0=0\Rightarrow 7x=0\Rightarrow x=0$$

13) الجواب:

$$\overrightarrow{n_1}(1\,,2\,,-\lambda)\ ,\ \overrightarrow{n_2}(3\lambda-7\,,4\,,-6)$$

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$$
$$\Rightarrow 3\lambda-7+8+6\lambda=0$$
$$\Rightarrow 9\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{9}$$

14) الجواب:

$$2x+3y-4z+1=0$$
$$\lambda\,x+2y+\frac{\lambda}{2}z-3=0$$

$$\overrightarrow{n_1}(2,3,-4)\ ,\ \overrightarrow{n_2}\left(\lambda\,,2,\frac{\lambda}{2}\right)$$

ليكون المستويين متعامدين يجب أن يتحقق الشرط:

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$$
$$\Rightarrow 2\lambda+6-2\lambda=0$$
$$\Rightarrow 6\neq 0$$ غير موجودة

15) الجواب:

$$||\vec{u}||=5\ ,\ ||\vec{v}||=3$$
$$\vec{u}.\vec{v}=-4$$

$$2\,\vec{u}(2\,\vec{v}+3\,\vec{u})$$
$$=4\,\vec{u}.\vec{v}+6\,\vec{u}.\vec{u}$$
$$=4\,\vec{u}.\vec{v}+6\,||\vec{u}||^2$$
$$=4(-4)+6(25)=-16+150=134$$

16) الجواب:

$\overrightarrow{n_Q}(1,-2,3)$ ، $\overrightarrow{n_R}(1,1,1)$ ، $A(2,5,-2)$

كون المستوي P عمودي على المستويين Q و R

فإنّ $\overrightarrow{n_R}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ شعاعي توجيه له.

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_R}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{3}{1}$$

نفرض ناظم P هو $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\begin{matrix}a=+(-2-3)=-5\\ b=-(1-3)=+2\\ c=+(1+2)=+3\end{matrix}\Rightarrow \vec{n}(-5,2,3)$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow -5(x-2)+2(y-5)+3(z+2)=0$$
$$\Rightarrow -5x+2y+3z+6=0$$

نضرب بـ 2 :

$$\Rightarrow -10x+4y+6z+12=0$$

17) الجواب:

$$AB=4\ ,\ BC=CG=2$$

نعرّف المعلم المتجانس:

$$\left(A\,;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

ونوجد الإحداثيّات:

$A(0,0,0)$ ، $E(0,0,2)$ ، $B(4,0,0)$ ، $F(4,0,2)$
$C(4,2,0)$ ، $G(4,2,2)$ ، $D(0,2,0)$ ، $H(0,2,2)$

$$J\left(\frac{4+4}{2}\,,\frac{2+2}{2}\,,\frac{0+2}{2}\right)\Rightarrow J(4,2,1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{JD}(-4,0,-1)\ ,\ \overrightarrow{JH}(-4,0,1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JH}=16+0-1=15$$

18) الجواب:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$$

19) الجواب:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=1$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM})=1$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}^2=1$$

حيثُ I منتصف $[AB]$ ، وبالتالي:

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{BI}$$
$$\Rightarrow -\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}^2=1$$
$$\Rightarrow -\overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{IM}^2=1\Rightarrow \overrightarrow{IM}^2=1+\overrightarrow{AI}^2$$

20) الجواب هو الخيار c .

21) الجواب:

$$A(3,4,1)$$

B هي مسقط A على المستوي (xoz) وبالتالي:

$$B(3,0,1)$$

C هي مسقط B على محور الرواقم oz وبالتالي:

$$C(0,0,1)$$

$$\Rightarrow AC=\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2+(1-1)^2}$$
$$=\sqrt{9+16+0}=\sqrt{25}=5$$

22) الجواب:

$$P: x-2y+3z-5=0$$
$$Q: x+y+z+1=0 \quad \times(-1)$$

بحل المعادلتين حل مشترك نجد:

$$x-2y+3z-5=0\ \ ...(1)$$
$$-x-y-z-1=0\ \ ..(2)$$

بجمع المعادلتين (2) و (1) نجد:

$$-3y+2z-6=0\Rightarrow y=\frac{2}{3}z-2$$

نعوّض في Q :

$$\Rightarrow x+\frac{2}{3}z-2+z+1=0$$
$$\Rightarrow x=-\frac{5}{3}z+1$$
$$\Rightarrow M\left(-\frac{5}{3}z+1\,,\frac{2}{3}z-2\,,z\right)$$

23) الجواب:

$$2x+2y+2z=0\ \ ...(1)$$
$$x+y-4z=0\ \ ...(2)$$

ندرس الوضع النسبي للنواظم:

$\overrightarrow{n_1}(2,2,2)$ ، $\overrightarrow{n_2}(1,1,-4)$

$\frac{2}{1}=\frac{2}{1}\neq\frac{2}{-4}$ غير مرتبطين خطيّاً

وبالتالي المستويين غير متوازيان.

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=^?0$$
$$2+2-8=-4\neq 0$$

ومنه فإنّ المستويان متقاطعان دون تعامد.

24) الجواب:

$$A(1,2,-1)\ ,\ B(3,0,1)$$

النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$:

الناظم $\overrightarrow{AB}(2,-2,2)$

M منتصف $[AB]$ وبالتالي:

$M(2,1,0)$

معادلة المستوي المحوري:

$$2(x-2)-2(y-1)+2(z-0)=0$$
$$\Rightarrow 2x-4-2y+2+2z=0$$
$$\Rightarrow 2x-2y+2z-2=0$$

نقسم على 2 :

$$\Rightarrow x-y+z-1=0$$

بالمقارنة مع

$$x+my+nz-1=0$$

نجد أنّ:

$$m=-1 \quad , \quad n=1$$

25) بتطبيق فيثاغورث نجد:

$$r^2=dist^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow 9=dist^2+2$$
$$\Rightarrow dist^2=9-2=7$$
$$\Rightarrow dist=\sqrt{7}$$

26) الجواب:

نوجد النقطة M هي : $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

ونشكل الشعاعان $\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE}$:

$$\overrightarrow{CM}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$$

$$\overrightarrow{OE}(1,1,1)$$

نوجد $||CM||$ و $||OE||$:

$$||CM||=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$||OE||=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

من قانون الجداء السلمي نجد :

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{OE}=||CM||.||OE||.\cos(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2}.\sqrt{3}\cos(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})=0$$

$$\cos(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})=0$$

27) الجواب:

28) الجواب:

$$A(-1,2,3) \ , \ B(1,4,-5)$$

نوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$:

الناظم $\overrightarrow{AB}(2,2,-8)$

النقطة M منتصف $[AB]$ وبالتالي:

$M(0,3,-1)$

$$\Rightarrow 2(x-0)+2(y-3)-8(z+1)=0$$

$$\Rightarrow P: 2x+2y-8z-14=0$$

إيجاد معادلة الكرة:

نصف القطر:

$$dist(A,P)=\frac{|-2+4-24-14|}{\sqrt{4+4+64}}=\frac{|-36|}{\sqrt{72}}=\frac{36}{\sqrt{72}}$$

$$\Rightarrow x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\left(\frac{36}{\sqrt{72}}\right)^2$$

29) الجواب:

$$d: \begin{cases} x=t+1 \\ y=t-2 \\ z=3t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{u_d}(1,1,3)$$

$$P: 2x+ay-z+b=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}(2,a,-1)$$

كون $d\in P$ فإنّ: $\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_P}$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=0\Rightarrow 2+a-3=0\Rightarrow a=1$$

وكون $d\in P$ فإنّ d يحقق معادلته:

$$\Rightarrow 2(t+1)+(t-2)-3t+b=0$$
$$\Rightarrow 2t+2+t-2-3t+b=0\Rightarrow b=0$$

30) الجواب:

$$A(3,2,1) \ , \ B(1,2,0) \ , \ C(3,1,-2) \ , \ D(x,y,3)$$

31) الجواب:

حسب خاصة الاختزال:

$$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

نعوض :

$$6\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right|=6\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

$$\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right|=\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$.

32) الجواب:

$$l_1 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$l_2 = 3\overrightarrow{MD} - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$$

$$= 3\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{MG}$$

$$= 3\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MD}\right)$$

$$= 3\overrightarrow{GD}$$

نعوض:

$$3\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right| = 3\left|\left|\overrightarrow{GD}\right|\right|$$

$$\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{GD}\right|\right|$$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $[DG]$

33) الجواب:

$$x^2 + z^2 = \frac{9}{4}y^2$$

$$r^2 = 9 \Longrightarrow r = 3$$

مخروط دوراني محوره محور التراتيب ونصف قطر قاعدته 3

34) الجواب:

$$\left(O\,;\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OC}\right)$$

$$\Longrightarrow A(1,0,0)\ ,\ B(0,1,0)\ ,\ C(0,0,1)$$
$$\Longrightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Longrightarrow x + y + z - 1 = 0$$

35) الجواب:

$$P_1 :\ 2x + y - z + 2 = 0 \quad \ldots(1)$$
$$P_2 :\ x + 2y - z + 1 = 0 \quad \ldots(2)$$

بطرح (2) و (1) نجد:

$$x - y + 1 = 0 \Longrightarrow x = y - 1$$

نعوّض في (2):

$$y - 1 + 2y - z + 1 = 0 \Longrightarrow z = 3y$$

وبالتالي:

$$(y - 1\,,y\,,3y)\ ;\ \ y \in \mathbb{R}$$

36) الجواب:

$$\left.\begin{matrix} A(-1,2,3) \\ B(1,2,-1) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AB}(2,0,-4)$$
$$P : x + y + z - 1 = 0$$

المعادلات الوسيطية للمستقيم d هي:

$$d :\ \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = -4t + 3 \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

نعوّض d في P:

$$2t - 1 + 2 - 4t + 3 - 1 = 0$$
$$\Longrightarrow -2t + 3 = 0 \Longrightarrow t = \frac{3}{2}$$

نعوّض في d:

$$x = 2\ ,\ y = 2\ ,\ z = -3$$
$$\Longrightarrow I(2,2,-3)$$

37) الجواب:

$$A(2,0,0)\ ,\ B(0,1,0)\ ,\ C(0,0,1)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}(-2,1,0) \Longrightarrow \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \\ \overrightarrow{AC}(-2,0,1) \Longrightarrow \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|.\cos\left(B\hat{A}C\right)$$
$$\Longrightarrow 4 + 0 + 0 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \cos\left(B\hat{A}C\right)$$
$$\Longrightarrow \cos\left(B\hat{A}C\right) = \frac{4}{5}$$

38) الجواب:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 8 = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 - 8 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 9 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$$

وبالتالي M تمثّل كرة مركزها:

$$(0,1,0)$$

ونصف قطرها:

$$r = \sqrt{9} = 3$$

39) الجواب:

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\left|\overrightarrow{BA}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right|.\cos\left(\hat{B}\right)$$

حسب فيثاغورث:

$$\left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right| = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

40) الجواب:

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HJ}$$
$$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$$

41) الجواب:

$$d :\ \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = -t + 1 \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \vec{n} = \overrightarrow{u_d} = (0\,,-1\,,-1)$$

42) الجواب:

$A \in d \Leftarrow$ تحقق معادلته

$$\begin{cases} -2 = at - 1 \quad \dots(1) \\ 5 = 3t + 2 \\ 2 = 2t \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

نعوّض في (1) :

$$-2 = a(1) - 1 \Rightarrow a = -2 + 1 = -1$$

43) الجواب:

$$d: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 1 \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_d}(3\,,2\,,-1)$$

$$\Delta: \begin{cases} x = s + 2 \\ y = 1 \\ z = 3s + 1 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}(1\,,0\,,3)$$

$$\frac{1}{3} \neq \frac{0}{2} \neq \frac{3}{-1}$$

وبالتالي شعاعي توجيه Δ و d غير مرتبطين خطيّاً، ومنه فإنّ Δ و d غير متوازيان أي أنهما ((إمّا متقاطعين أو متخالفين))

$$\left.\begin{matrix} x = x \\ y = y \\ z = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3t + 1 = s + 2 \quad \dots(1) \\ 2t = 1 \quad \dots(2) \\ -t + 1 = 3s + 1 \quad \dots(3) \end{cases}$$

من (2) نجد:

$$t = \frac{1}{2}$$

نعوّض في (1) :

$$\Rightarrow s = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 - 2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

نعوّض في (3) :

$$-\frac{1}{2} + 1 \stackrel{?}{=} 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{5}{2}$$

وبالتالي Δ و d متخالفين.

$$\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta} = (1)(3) + (0)(2) + (3)(-1) = 0$$

ومنه فإن المستقيمان Δ و d متخالفين ومتعامدين .

44) الجواب:

$$A(1\,,2\,,0) \ , \ B(0\,,0\,,1) \ , \ C(1\,,5\,,5)$$

$$\overrightarrow{BA}(1\,,2\,,-1) \ , \ \overrightarrow{BC}(1\,,5\,,4)$$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{5}$$

الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطان خطيّاً.

نفرض:

$$\vec{n}(a\,,b\,,c)$$

$$a = +(8 + 5) = 13$$
$$b = -(4 + 1) = -5$$
$$c = +(5 - 2) = 3$$
$$\Rightarrow \vec{n}(13\,,-5\,,3)$$
$$B(0\,,0\,,1)$$

$$(ABC): 13(x - 0) - 5(y - 0) + 3(z - 1) = 0$$
$$\Rightarrow (ABC): \ 13x - 5y + 3z - 3 = 0$$

نكتب معادلة المستقيم d المار بالنقطة

$$D(-11\,,9\,,-4)$$

وشعاع توجيهه هو:

$$\overrightarrow{u_d} = \vec{n} = (13\,,-5\,,3)$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = 13t - 11 \\ y = -5t + 9 \\ z = +3t - 4 \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$$

نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي

(ABC) بالحل المشترك:

$$13(13t - 11) - 5(-5t + 9) + 3(3t - 4) - 3 = 0$$
$$\Rightarrow 203t - 203 = 0 \Rightarrow t = 1$$

وبالتالي:

$$\begin{cases} x = 13(1) - 11 \\ y = -5(1) + 9 \\ z = 3(1) - 4 \end{cases} \Rightarrow D'(2\,,4\,,-1)$$

45) الجواب:

$$E \in yy' \Rightarrow E(0\,,y\,,0)$$
$$B(2\,,1\,,0) \ , \ A(2\,,0\,,2)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AE}(-2\,,y\,,-2)$$
$$\overrightarrow{BE}(-2\,,y-1\,,0)$$
$$\left|\left|\overrightarrow{AE}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{BE}\right|\right|$$
$$\Rightarrow \sqrt{4 + y^2 + 4} = \sqrt{4 + (y-1)^2 + 0}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$8 + y^2 = 4 + (y-1)^2$$
$$\Rightarrow 8 + y^2 = 4 + y^2 - 2y + 1$$
$$\Rightarrow 3 = -2y \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow E\left(0\,,-\frac{3}{2}\,,0\right)$$

46) الجواب:

$$A(2\,,0\,,0) \ , \ B(0\,,3\,,0) \ , \ C(0\,,0\,,1)$$
$$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$$

نضرب الطرفين بـ 6 :

$$\Rightarrow (ABC): \ 3x + 2y + 6z = 6$$

$$dist(O\,,P) = \frac{|3(0) + 2(0) + 6(0) - 6|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{|-6|}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$$

47) الجواب:

المستقيم يوازي المستوي أي أنّ:

$$\vec{u} \perp \vec{n}$$

وبالتالي:

$$\vec{n}.\vec{u} = 0$$
$$\Rightarrow (2\,,-2\,,a)(1\,,-1\,,2) = 0$$
$$\Rightarrow 2(1) + (-2)(-1) + a(2) = 0$$
$$\Rightarrow 2 + 2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

48) الجواب:

$$dist(M\,,P) = \frac{|2(3) + 3 + 2(3) - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$dist(M\,,Q) = \frac{|2(3) - 2(3) - 3 + 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

$$dist(M\,,d) = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

49) الجواب:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(2\,\overrightarrow{BI}\right)$$

حيثُ I منتصف $[AC]$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BI}$$

ومنه M تنطبق على منتصف $[AC]$

50) الجواب:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{6} \ , \ y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

51) الجواب:

I مركز ثقل BCD وبالتالي I هو م.أ.م للنقاط:

$$(D\,,2) \ , \ (C\,,2) \ , \ (B\,,2) \Rightarrow (I\,,6)$$

K هي نظيرة A بالنسبة لـ I أي أن:

$$\overrightarrow{IK} = \frac{-1}{1}\overrightarrow{IA}$$

وبالتالي K م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-1) \ , \ (I\,,2)$$

ومنه K م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-3) \ , \ (I\,,6)$$

ومنه K م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-3) \ , \ (B\,,2) \ , \ (C\,,2) \ , \ (D\,,2)$$

52) الجواب:

بما أنّ I مركز ثقل المثلث ABC فإنّ I م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,1) \ , \ (B\,,1) \ , \ (C\,,1) \Rightarrow (I\,,3)$$

H م.أ.م للنقاط:

$$(I\,,3) \ , \ (D\,,3)$$

وبالتالي H منتصف DI .

53) الجواب:

$$P: x + 2y = 4 \quad \ldots(1)$$
$$Q: x - y = 1 \quad \ldots(2)$$

من (1) نجد:

$$x = -2y + 4$$

ومن (2) نجد:

$$x = y + 1$$

وبالتالي:

$$-2y + 4 = y + 1 \Rightarrow -3y = -3 \Rightarrow y = 1$$
$$\Rightarrow x = 1 + 1 = 2 \Rightarrow x = 2$$

نفرض أن $z = t$:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \ ; \ t \in \mathbb{R}$$

54) الجواب:

$$P_1: \ x + 2y + z - 5 = 0 \quad \ldots(1)$$
$$P_2: \ 2x - y - 1 = 0 \quad \ldots(2)$$
$$P_3: \ 3x + y - 4 = 0 \quad \ldots(3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_{P_1}}(1,2,1) \\ \overrightarrow{n_{P_2}}(2,-1,0) \\ \overrightarrow{n_{P_3}}(2,1,0) \end{cases}$$

نوجد الفصل المشترك لـ P_1 و P_3 :

من (2) نجد:

$$y = 2x - 1$$

ومن (3) نجد:

$$y = -3x + 4$$

وبالتالي:

$$2x-1=-3x+4 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$$
$$\Rightarrow y=2(1)-1=1 \Rightarrow y=1$$

نفرض $z=t$ ومنه:

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

نعوّض في معادلة المستوي P_1 فنجد:

$$1+2(1)+t-5=0 \Rightarrow t=2$$

وبالتالي المستويات P_1 و P_2 و P_3 متقاطعة بنقطة واحدة وهي:

$$(1\,,1\,,2)$$

55) الجواب: كرة

56) الجواب:

$$I(2,0,1)\ ,\ J(0,-2,3) \Rightarrow \overrightarrow{IJ}(-2\,,-2\,,2)$$
$$P:\ x+y-z+2=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}(1\,,1\,,-1)$$

بما أن P هي معادلة المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$ فإنّ $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{n_P}$ مرتبطان خطيّاً:

$$\frac{-2}{1}=\frac{-2}{1}=\frac{2}{-1}=-2$$
$$\Rightarrow J(0\,,-2\,,3) \text{ محققة}$$

57) الجواب:

G_α م.أ.م للنقاط:

$$(A,\alpha)\ ,\ (B,1+\alpha^2)\ ,\ (C,-\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{G_\alpha A}+(1+\alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B}-\alpha\overrightarrow{G_\alpha C}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow -\alpha\left(\overrightarrow{AG_\alpha}+\overrightarrow{G_\alpha C}\right)+(1+\alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow -\alpha\overrightarrow{AC}=-(1+\alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{G_\alpha B}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$$

58) الجواب:

$$dist(O,P)=\frac{|2(1)+(0)-2(1)-12|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{12}{\sqrt{9}}=4$$

$$R=\sqrt{r^2+dist^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=5$$
$$\Rightarrow R=5$$

59) الجواب:

$$\left.\begin{matrix} x=x \\ y=y \\ z=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=t+1 \\ 1=\lambda-1 \Rightarrow \lambda=2 \\ t=1 \end{cases}$$

نعوّض في المعادلة الأولى:

$$2=1+1 \text{ محققة}$$

نعوّض λ في L:

$$\left.\begin{matrix} x=2 \\ \Rightarrow y=2-1=1 \\ z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2,1,1)$$

60) الجواب:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=0$$

وبالتالي M م.أ.م للنقاط:

$$(B,-1)\ ,\ (A,1)\ ,\ (C,1)$$

61) الجواب:

مستوٍ مار من $(1,2,1)$ وعمودي على:

$$d: \begin{cases} x=0 \\ y=-t \\ z=-t+1 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{u_d}=(0\,,-1\,,-1)\ \ ,\ \ A(1,2,1)$$
$$\Rightarrow 0(x-1)-1(y-2)-1(z-1)=0$$
$$\Rightarrow -y-z+3=0$$
$$\Rightarrow z+y-3=0$$

62) الجواب:

$$x+y+z=1 \quad \dots L_1$$
$$-2y+z=1 \quad \dots L_2$$
$$-4y+14z=-2 \quad \dots L_3$$

نجري التحويل السطري:

$$-2L_2+L_3 \longrightarrow L_3'$$

فنحصل على:

$$x+y+z=1 \quad \dots L_1$$
$$-2y+z=1 \quad \dots L_2$$
$$12z=-4 \quad \dots L_3'$$

من L_3' نجد:

$$z=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3} \Rightarrow z=-\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow -2y-\frac{1}{3}=1 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow x=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+1=2 \Rightarrow x=2$$

وبالتالي المستويات الثلاث تشترك بنقطة واحدة هي:

$$\left(2\,,-\frac{2}{3}\,,-\frac{1}{3}\right)$$

63) الجواب:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \Rightarrow x=y-1 \\ x+y-1=0 \Rightarrow x=-y+1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y-1=-y+1 \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1$$
$$\Rightarrow x=1-1=0 \Rightarrow x=0$$

نفرض $z=t$ ومنه:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

64) الجواب:

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-3\vec{v}) =$$
$$\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2 - 3\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v} - 3\left|\left|\vec{v}\right|\right|^2 =$$
$$(5)^2 - 3(-5) - 5 - 3(3)^2 =$$
$$25 + 15 - 5 - 27 =$$
$$40 - 32 = 8$$

65) الجواب:

دوران الضلع $[BF]$ من المستطيل $BFHD$ حول

(DH) ينتج مخروط محوره:

$$(DH) \longrightarrow (OZ)$$

ومركزه:

$$D(0\,,0\,,0)$$

ونصف قطره $[DB]$:

$$B(2\,,2\,,0)$$

$$DB = \sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(0-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \quad ; \quad 0 \le z \le 2$$
$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 8 \quad ; \quad 0 \le z \le 2$$

66) الجواب:

الاختيار C خاطئ.

67) الجواب:

$$A(1,0)\,,\ B(4,0)\,,\ C(5,3)\,,\ D(3,2)\,,\ E(0,1)$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}(3,0)\ ,\ \overrightarrow{AC}(4,3)$$
$$\overrightarrow{AD}(2,2)\ ,\ \overrightarrow{AE}(-1,1)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12+0 = 12 \\ b = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 6+0 = 6 \\ c = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = -3+0 = -3 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow a+b+c = 12+6-3 = 15$$

بنوك الشعاعية

1 – 1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$

M تنطبق على F.

2) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$

M تنطبق على G.

3) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$
$= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$

M تنطبق على E.

4) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$
$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AZ}$

M خارج متوازي الأضلاع تقع في $EAGZ$.

5) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}\right)$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$
$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

2 – 1) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$
$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AJ}$

N تقع على J.

2) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$
$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HJ}$
$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$

N تقع على J.

3) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$

N تقع على I.

---

2 – 1) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$
$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AP}$

حيثُ P مركز الرباعي $BFGC$.

2) $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AQ}$

حيثُ Q مركز الرباعي $EFGH$.

3) $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA}\right) + \overrightarrow{BA}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CR}$

حيثُ R مركز الرباعي $DHEA$.

---

3 – $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$
$= \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$

توازي.

$$2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$$

$$2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = 1 \ , \ \alpha = -1$$

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$4\overrightarrow{AM} = 8\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$8\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$8(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + 3(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) - 4\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$8\overrightarrow{AM} + 8\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$8\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 7\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$-7\overrightarrow{MA} + 8\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = 8 \ , \ \alpha = -7 \ , \ \gamma = 3$$

تأمّل الشكل:

1) $\dfrac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow 4\overrightarrow{AG} - 3(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow 4\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow -\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = 3 \ , \ \alpha = 1$$

2) $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{2}{5}$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) - 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow -3\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = 2 \ , \ \alpha = 3$$

3) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$: نلاحظ

$$\Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = -1 \ , \ \alpha = 1 \ , \ \gamma = 1$$

4) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI}$: نلاحظ

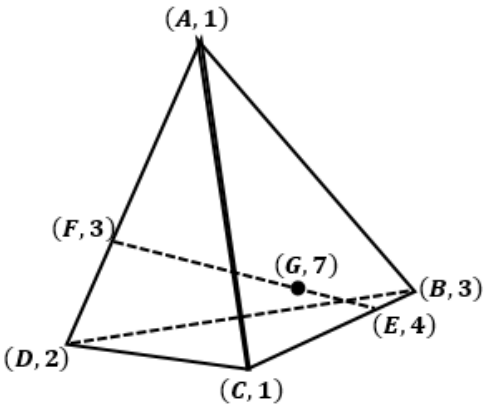
$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF} = 2\overrightarrow{AI}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} + 0\overrightarrow{IA} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = 1 \ , \ \alpha = 0 \ , \ \gamma = 1$$

ثقل مركز الأبعاد $(A,1),(B,3)$ يساوي 4 .

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,0),(B,3)$ يقع على B .

مركز الأبعاد $(A,10),(B,10)$ يقع في منتصف $[AB]$.

$\boxed{\frac{21}{43}}$:



$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \ , \quad \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

من العلاقات:

$(E,4)$ مركز لـ $(C,1)$, $(B,3)$.

$(F,3)$ مركز لـ $(D,2)$, $(A,1)$.

$(G,7)$ مركز لـ $(F,3)$, $(E,4)$.

$$\overrightarrow{EG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$

وبالتالي:

$(G,7)$ مركز لـ $(D,2),(C,1),(B,3),(A,1)$

تدرّب (1) صفحة 31:

من الشكل:

$(K,3)$ م.أ.م لـ $(D,1),(A,2)$.

$(I,2)$ م.أ.م لـ $(C,1),(B,1)$.

$(G,5)$ م.أ.م لـ $(I,3),(K,2)$.

لكن نلاحظ تناقض لذلك يجب تعديل أثقال النقاط I و K حيثُ:

نضرب I بـ $\frac{2}{3}$ ونضرب K بـ $\frac{2}{3}$ لنصل إلى:

$(K,2)$ و $(I,3)$

وهذا ما يتفّق مع G .

م.أ.م لـ$(I,3)$ للنقاط:

$\left(C,\frac{3}{2}\right)$, $\left(B,\frac{3}{2}\right)$

م.أ.م للنقاط: $(K,2)$

$\left(D,\frac{3}{2}\right)$,$\left(A,\frac{4}{3}\right)$

ومنه:

$a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=\frac{3}{2}$, $d=\frac{3}{2}$

تمرينات ومسائل

المسألة الأولى صفحة 35 :

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

2) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{BD}$

$+$

$2\,\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\,\overrightarrow{OI}$ ... (1)

$l_1=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}=2\,\overrightarrow{OI}=l_2$

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\,\overrightarrow{OI}$ ... (2)

$l_1=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JD}=2\,\overrightarrow{OJ}=l_2$

بجمع (2) و(1) نجد:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

4) $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ ... (1)

$l_1=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ .... (2)

$l_1=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

من (1) و(2) نجد:

$\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{LJ}$

وبالتالي: $IKJL$ متوازي أضلاع.

المسألة الثانية صفحة 35 :

1) $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{DJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

3) $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$

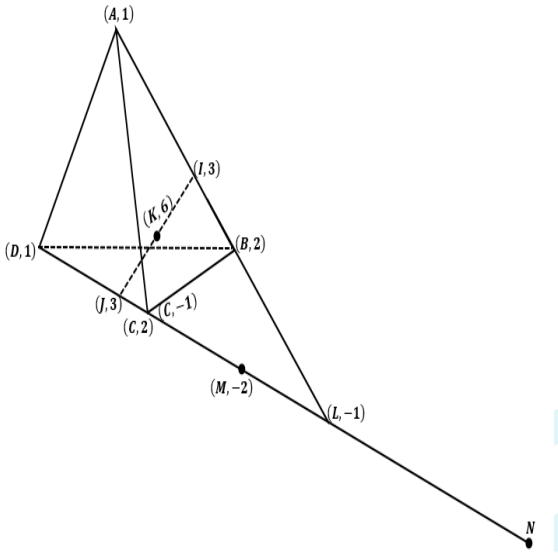
K مركز لـ $(J,3)$, $(I,3)$.

4) $\overrightarrow{AL}=\frac{-2}{-1}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$

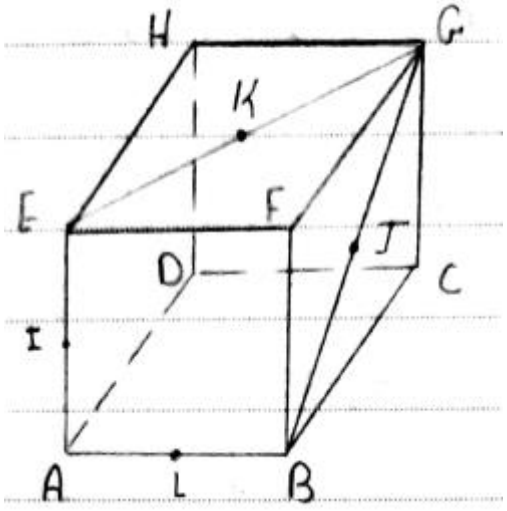
5) $\overrightarrow{LM}=\frac{-1}{-2}\overrightarrow{LC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{LC}$

6) $\overrightarrow{DN}=\frac{-2}{-1}\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DM}$

N مركز لـ $(M,-2)$, $(D,1)$.



$\frac{25}{44}$



M مركز لـ $(E,1),(G,1),(B,1),(A,1)$

1) $(J,2)$ مركز لـ $(B,1),(G,1)$

$(I,2)$ مركز لـ $(A,1),(E,1)$

$(M,4)$ مركز لـ $(J,2),(I,2)$

وبالتالي النقاط M ، I ، J تقع على استقامة واحدة.

2) $(L,2)$ مركز لـ $(B,1),(A,1)$

$(K,2)$ مركز لـ $(G,1),(E,1)$

$(M,4)$ مركز لـ $(L,2),(K,2)$

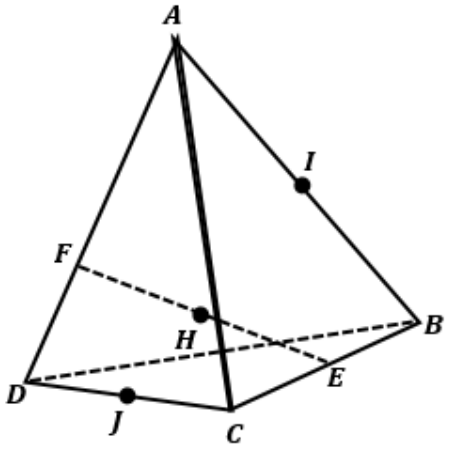
وبالتالي النقاط M ، K ، L تقع على استقامة واحدة.

3) $[IJ]$ و $[KL]$ متناصفان في M

ومنه J ، I ، L ، K ، M تقع في مستوٍ واحد.

وبالتالي $IJLK$ متوازي أضلاع.

$\boxed{\frac{1}{94}}$



1) $\overrightarrow{AE} = \alpha\,\overrightarrow{AD}$

وبالتالي: $(E,1)$ مركز لـ $(D,\alpha),(A,1-\alpha)$

$\overrightarrow{BF} = \alpha\,\overrightarrow{BC}$

وبالتالي: $(F,1)$ مركز لـ $(C,\alpha),(B,1-\alpha)$.

2) مما سبق نستنتج أنّ: $(H,2)$ مركز لـ:

$(C,1),(D,1),(A,1-\alpha),(B,1-\alpha)$

3) $(I,2-2\alpha)$ مركز لـ:

$(A,1-\alpha),(B,1-\alpha)$

$(J,2\alpha)$ مركز لـ:

$(C,\alpha),(D,\alpha)$

وبالتالي $(H,2)$ مركز لـ:

$(J,2\alpha)$ ، $(I,2-2\alpha)$

ومنه فإنّ H ، J ، I تقع على استقامة واحدة.

$\boxed{\frac{2}{94}}$

1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$(M,3)$ مركز لـ $(B,1),(C,1),(D,1)$

ومنه M ، C ، D ، B تقع في مستوي واحد.

2) $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

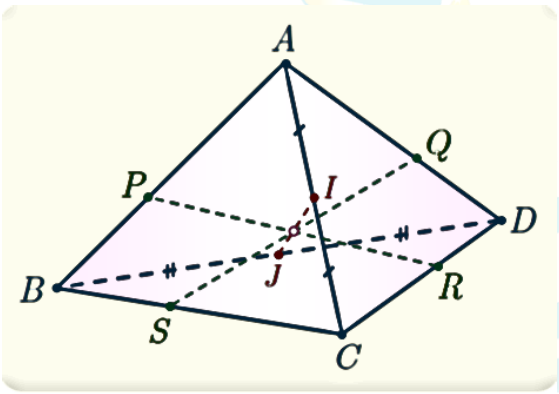
$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

ومنه $(M,4)$ مركز لـ:

$(B,1),(D,2),(C,1)$

$\boxed{\frac{6}{95}}$



بحث أول:

$\overrightarrow{AQ} = \alpha\,\overrightarrow{AD}$

وبالتالي $(Q,1)$ مركز لـ:

$(A,1-\alpha)$ ، (D,α)

$\overrightarrow{AP} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$

وبالتالي $(P,1)$ مركز لـ:

$(A,1-\alpha)$ ، (B,α)

$\overrightarrow{CS} = \alpha\,\overrightarrow{CB}$

وبالتالي $(S,1)$ مركز لـ:

$(C,1-\alpha)$ ، (B,α)

$\overrightarrow{CR} = \alpha\,\overrightarrow{CD}$

وبالتالي $(R,1)$ مركز لـ:

$(C,1-\alpha)$ ، (D,α)

$(I, 2-2\alpha)$ مركز لـ :

$(C, 1-\alpha), (A, 1-\alpha)$ "منتصف"

$(J, 2\alpha)$ مركز لـ :

$(D, \alpha), (B, \alpha)$ "منتصف"

$(G, 2)$ مركز لـ :

$(D, \alpha), (C, 1-\alpha), (B, \alpha), (A, 1-\alpha)$

لأنّ:

$(G, 2)$ مركز لـ $(P, 1)$ ، $(R, 1)$

$(G, 2)$ مركز لـ $(Q, 1)$ ، $(S, 1)$

$(G, 2)$ مركز لـ $(J, 2\alpha)$ ، $(I, 2-2\alpha)$

مما سبق نستنتج أنّ:

(QS) ، (PR) ، (IJ)

تلتقي في نقطة واحدة.

---

1) M مركز لـ $(B, 1)$ ، $(A, -2)$ $\boxed{\frac{1}{80}}$

$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{-1}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow t = -1$

2) M مركز لـ $(B, 3)$ ، $(A, 2)$

$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow t = \frac{3}{5}$

---

1) M مركز لـ $(A, 5)$ ، $(B, 2)$ $\boxed{\frac{2}{80}}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$

2) $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

M مركز أبعاد لـ $(A, 3)$ ، $(B, -1)$

3) $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$

طريقة 1 :

M مركز أبعاد لـ $(A, 4)$ ، $(B, -3)$

طريقة ثانية:

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

M مركز أبعاد لـ $(A, 4)$ ، $(B, -3)$

$\boxed{\frac{3}{81}}$

C مركز لـ $(A, 2)$ ، $(B, -5)$

$\overrightarrow{AC} = \frac{-5}{-3}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$

A مركز لـ $(C, -3)$ ، $(B, 5)$

$\overrightarrow{BA} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$

B مركز لـ $(C, 3)$ ، $(A, 2)$

$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

C مركز لـ $(A, 6)$ ، $(B, -4)$

$\overrightarrow{AC} = \frac{-4}{2}\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$

A مركز لـ $(C, 2)$ ، $(B, 4)$

$\overrightarrow{BA} = \frac{2}{6}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

B مركز لـ $(A, -6)$ ، $(C, 2)$

$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{-4}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

---

1) M مركز لـ $(C, 1), (B, 1), (A, -1)$ $\boxed{\frac{4}{81}}$

$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1}\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2) M مركز لـ $(C, 2), (B, 1), (A, 3)$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$

---

1) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ $\boxed{\frac{4}{81}}$

M مركز أبعاد لـ:

$(A, 0), (B, 2), (C, -1)$

2) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

M مركز أبعاد لـ:

$(A,1)\,,(B,1)\,,(C,-1)$

3) $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

M مركز أبعاد لـ:

$(A,3)\,,(B,2)\,,(C,-4)$

4) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **1ط**

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

M مركز أبعاد لـ:

$(A,1)\,,(B,2)\,,(C,1)$

2ط:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

6/81 $(B',2)$ مركز لـ $(C,1)\,,\ (A,1)$

$(I,4)$ مركز لـ $(B,2)\,,\ (B',2)$

وبالتالي:

$(I,4)$ مركز لـ $(B,2)\,,(A,1)\,,(C,1)$

$\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$1\,\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Longrightarrow \lambda = 2$

7/81 $(I,2)$ مركز لـ $(C,1)\,,\ (B,1)$

$(J,4)$ مركز لـ $(D,2)\,,\ (I,2)$

$(K,8)$ مركز لـ $(A,4)\,,\ (J,4)$

وبالتالي:

$(K,8)$ مركز لـ: $(B,1)\,,(A,4)\,,(C,1),(D,2)$

8/81

1) G مركز لـ:

$(D,3)\,,\ (C,1)\,,\ (B,1),(A,1)$

$(K,3)$ مركز أبعاد لـ:

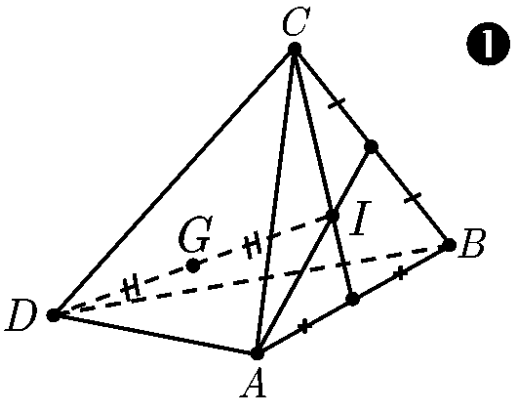
$(C,1)\ ,(B,1)\,,(A,1)$

وبالتالي:

$(G,6)$ مركز لـ:

$(D,3)\,,(K,3)$

G منتصف $[DK]$



2) G مركز لـ:

$(D,-2)\,,(C,-1)\,,(B,2)\,,(A,-1)$

$(I,-2)$ مركز لـ:

$(C,-1)\,,(A,-1)$

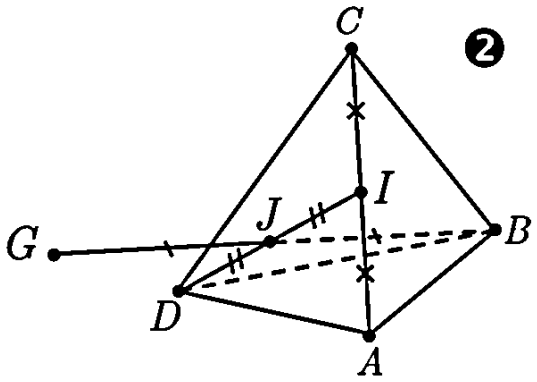
$(J,-4)$ مركز لـ:

$(D,-2)\,,(I,-2)$

$(G,-2)$ مركز لـ:

$(B,2)\,,(J,-4)$

$\overrightarrow{JG} = -1\,\overrightarrow{JB}$



3) G مركز لـ:

$(D,6)\,,(C,3)\,,(B,2)\,,(A,1)$

$(I,3)$ مركز لـ:

$(A,1)\,,(B,2)$

وبالتالي:

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$(J,6)$ مركز لـ: $(I,3)$, $(C,3)$ "منتصف"

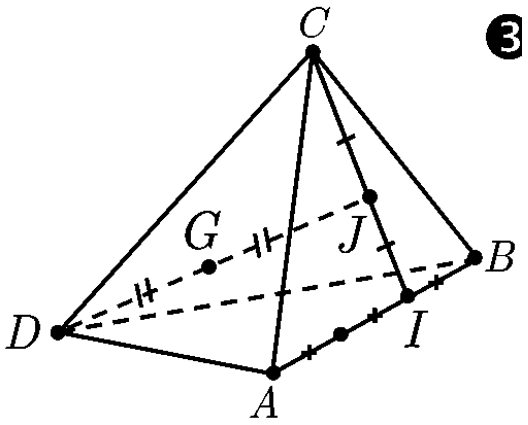
$(G,12)$ مركز لـ:

$(D,6)$, $(J,6)$

وبالتالي G مركز أبعاد لـ:

$(D,6)$, $(C,3)$, $(B,2)$, $(A,1)$

3



منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد

بنوك الأعداد العقديّة

1) الجواب: $\overline{z_1} = 2 - 4i$: d .

2) الجواب: $\boxed{b \ : \ \overline{z_3} = \frac{5}{2}i}$.

3) الجواب: $\boxed{a \ : \ 5 + 3i}$:

$$z_1 + z_2 = 2 + 4i + 3 - i = 5 + 3i$$

4) الجواب: $\boxed{a \ : \ -\frac{13}{2}i - 2}$:

$$z_3 - z_1 = -\frac{5}{2}i - 2 - 4i$$
$$= \frac{-5i - 8i}{2} - 2 = -\frac{13}{2}i - 2$$

5) الجواب: $\boxed{c \ : \ 10 + 10i}$:

$$z_1 . z_2 = (2 + 4i)(3 - i)$$
$$= 6 - 2i + 12i - 4i^2$$
$$= 6 + 10i + 4 = 10 + 10i$$

6) الجواب: $\boxed{b \ : \ 0}$:

$$z_3 = 0 - \frac{5}{2}i \implies Re(z_3) = 0$$

7) الجواب: $\boxed{b \ : \ -1}$:

$$z_2 = 3 - 1i \implies Im(z_2) = -1$$

8) الجواب: $\boxed{a \ : \ -12 + 16i}$:

$$z_1^2 = (2 + 4i)^2 = 4 + 16i - 16$$
$$= -12 + 16i$$

9) الجواب: $\boxed{c \ : \ |z_1| = 1}$

$$z_1 = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$
$$z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

بالمطابقة نجد أنّ :

$$|z_1| = r = 1$$

10) الجواب: $\boxed{c \ : |z_2| = 3}$:

$$z_2 = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$
$$z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

بالمطابقة نجد أنّ :

$$|z_2| = r = 3$$

11) الجواب: $\boxed{a \ : \ \overline{z_1} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$:

حسب قاعدة: ((عندما نأخذ مرافق الشكل المثلّثي للعدد العقدي فقط نضع اشارة سالب(-) للزاوية)) .

12) الجواب: $\boxed{c : \overline{z_2} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$.

13) الجواب: $\boxed{c \ : \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}}$.

14) الجواب: $\boxed{a : \ \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{3}\right)}$, التفسير:

$$(z_1)^7 = \left(1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^7$$
$$z_1^7 = 1^7\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$$
$$\implies z_1^7 = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$$

15) الجواب:

$$\boxed{d : z_2^3 = 27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$$

16) الجواب: $\boxed{a : \ 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$:

ضرب الطويلات و جمع الزوايا:

$$z_1 . z_2 = 3 \times 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

17) الجواب: $\boxed{b : \ \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)}$:

قسمة الطويلات و طرح الزوايا:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right.$$
$$\left. + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$$
$$\implies \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

18) الجواب: $\boxed{c : \ 3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)}$:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$\implies \frac{z_2}{z_1} = 3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

19) الجواب: $\boxed{b \ : \ \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i}$:

$$z = \frac{1}{2 - i}$$

ما بصير يكون في i بالمقام لذلك , نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

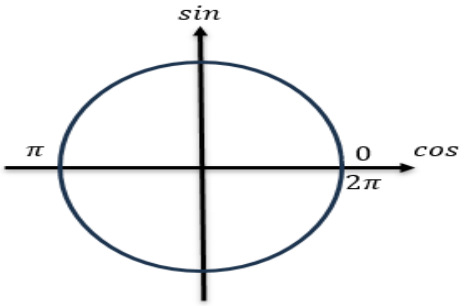
$$z = \frac{2 + i}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i}{4 + 1} = \frac{2 + i}{5}$$
$$\implies z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

20) الجواب: $\boxed{c : \sqrt{2}i}$:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\implies z = (1 + i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2}i$$

21) الجواب: $\boxed{d\ :\ \text{غير ذلك}}$:

$$z=\sqrt{3}-3+0i$$
$$r=\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2+0^2}=\sqrt{3}-3$$
$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3}=1$$
$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}=\frac{0}{\sqrt{3}-3}=0$$



وبالتالي:

$$\theta=0 \text{ أو } \theta=2\pi$$
$$\Rightarrow z=(\sqrt{3}-3)(\cos(0)+i\sin(0))$$

22) الجواب: $\boxed{a\ :\ 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)}$:

$$z=-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$z=-2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$z=2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$z=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

23) الجواب: $\boxed{a\ :\ \cos(2\pi)+isin(2\pi)}$, التفسير:

$$z^8=\left(\frac{3i-1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right)^8$$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

$$z=\frac{(3i-1)(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)}$$
$$z=\frac{3\sqrt{2}i+6\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2+8}$$
$$=\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i}{10}$$
$$=\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$|z|=r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

و بالتالي فإنّ الشكل المثلّثي ل z يعطى بالشكل:

$$z=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$\Rightarrow z^8=1^8\left(\cos\left(\frac{8\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{4}\right)\right)$$
$$\Rightarrow z^8=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$$

24) الجواب: $\boxed{a\ :\ (\sqrt{2}-1)e^{i\frac{4\pi}{3}}}$, التفسير:

$$z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=-(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\pi}(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$=e^{i\pi+i\frac{\pi}{3}}(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

25) الجواب: $\boxed{a\ :\ 32e^{-i\frac{4\pi}{3}}}$, التفسير:

$$z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$$

نفرض:

$$w=\frac{\sqrt{3}-i}{i}$$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

$$w=\frac{(\sqrt{3}-i)(-i)}{(i)(-i)}=\frac{-\sqrt{3}i-1}{-i^2}$$
$$=-\sqrt{3}i-1$$
$$\Rightarrow |w|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$
$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=-\frac{1}{2}$$
$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow\ \theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow w=2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$$
$$z=w^5=\left(2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^5=2^5.e^{i\frac{20\pi}{3}}=32\,e^{i\frac{20\pi}{3}}$$

الإرجاع الى الرّبع الأوّل:

$$\frac{20\pi}{3}=\frac{24\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=8\pi-\frac{4\pi}{3}=-\frac{4\pi}{3}$$
$$\Rightarrow\ z=32\,e^{-\frac{4\pi}{3}i}$$

26) الجواب: $\boxed{d\ :\ (a\ ,b)}$, التفسير:

$$z=(1+\sqrt{3}i)^4\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

نفرض أنّ:

$$w=1+\sqrt{3}i\Rightarrow x=1\ ,\ y=\sqrt{3}$$
$$r=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$
$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و بالتالي فإنّ: $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$w = 2\,e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow w^4 = \left(2\,e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^4 = 2^4\ e^{\frac{4\pi}{3}i} = 16\,e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

و بالتالي إمّا:

$$z = 16\,e^{\frac{4\pi}{3}i}\ e^{\frac{4\pi}{3}i} = 16\,e^{\frac{8\pi}{3}i}$$

أو , بالإرجاع الى الربع الأوّل:

$$\frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

و بالتالي:

$$z = 16\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

27) الجواب: $\boxed{c\ :\ z = 2^{1008}}$, التفسير:

$$(1+i)^{2016} = ((1+i)^2)^{1008} = (2i)^{1008}$$
$$= 2^{1008} \times i^{1008} = 2^{1008} \times i^4$$
$$= 2^{1008} \times 1 = 2^{1008}$$

28) الجواب: $\boxed{c:\ 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$, التفسير:

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نفرض أنّ:

$$w = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نعوّض في z :

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نضرب الطويلات و نجمع الزوايا:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

29) الجواب: $\boxed{b:\ z = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}}$, التفسير:

$$\overline{z} = \frac{9}{z} \Rightarrow z.\overline{z} = 9 \Rightarrow |z|^2 = 9 \Rightarrow |z| = 3$$
$$\arg(iz) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{3} - \arg(i)$$
$$\Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow z = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

30) الجواب: $c\ :\ 1$

31) الجواب: $\boxed{c:\ 2[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)]}$,

التفسير:

$$w = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^5$$
$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)^5$$
$$= 2\left(e^{-i\frac{\pi}{5}}\right)^5$$
$$= 2e^{-i\pi}$$
$$= 2(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$$

32) الجواب: $\boxed{b\ :\ -\frac{5\pi}{14}}$, التفسير:

$$z = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)$$
$$\Rightarrow \overline{z} = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{14}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right)\right)$$

33) الجواب: $\boxed{d:\ \frac{1}{2}}$, التفسير:

$$z = 1 + i$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i}$$

نضرب بمرافق المقام و نقسم عليه:

$$\frac{1}{z} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$
$$\Rightarrow Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$$

34) الجواب: $\boxed{c\ :\ z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}}$, التفسير:

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$$

نفرض أنّ البسط:

$$u = 1 + \sqrt{3}i$$
$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2}\ ,\quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

و نفرض أنّ المقام:

$$v = 1 + i \Rightarrow v = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

و بالتالي:

$$z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$$

35) الجواب: $\boxed{c\ :z = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$, التفسير:

$$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

$$z = \alpha + \alpha^4$$

$$\Rightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{5}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

$$\frac{8\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \underbrace{2\pi}_{\text{يهمل}} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

36) الجواب: $\boxed{a \ : \ |\overline{z}| = 2}$, التفسير:

$$z = \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^4}$$

نفرض أنّ:

$$u = 1+\sqrt{3}i \Rightarrow u = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

و نفرض أنّ:

$$v = \sqrt{2}+\sqrt{2}i \Rightarrow r = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow v = 2\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(2\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4} = \frac{2^5\,e^{i\frac{5\pi}{3}}}{2^4\,e^{i\pi}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}-\pi\right)} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \overline{z} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow |\overline{z}| = 2$$

37) الجوب:

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

خواص الـ arg

1) الجواب:

$\boxed{a \ : \ \widehat{DEC}}$ المستقيم (EA) منصف للزاوية ,

التفسير:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

- $\left|\frac{a-e}{d-e}\right| = \left|\frac{c-e}{a-e}\right| \Rightarrow \frac{EA}{ED} = \frac{EC}{EA}$

$\Rightarrow EA^2 = ED\,.\,EC$

- $\arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{ED}\,,\overrightarrow{EA}\right) = \left(\overrightarrow{EA}\,,\overrightarrow{EC}\right)$

$\Rightarrow \widehat{DEA} = \widehat{AEC}$

و بالتالي EA منصّف في المثلّث DEC .

2) الجواب: $\boxed{b}$ قائم في B و متساوي الساقين ,

التفسير:

$$\frac{d-b}{c-b} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- $\left|\frac{d-b}{c-b}\right| = 1 \Rightarrow \frac{BD}{BC} = 1 \Rightarrow BD = BC$
- $\arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right) = \left(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{2}$

و بالتالي المثلث BCD قائم في B و متساوي الساقين.

3) الجواب: $\boxed{b}$ دوران , التفسير:

$$b = ia = e^{i\frac{\pi}{2}}a$$

4) الجواب:

$b \ : \ \arg(z_1) + \arg(z_2)$

5) الجواب:

قائم في B ومتساوي الساقين

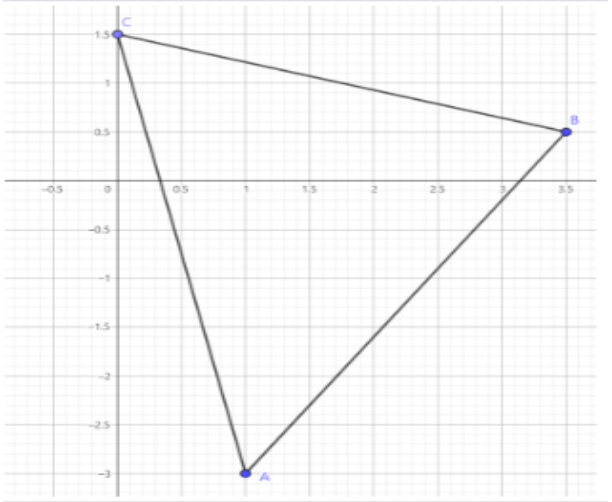
6) الجواب:

$\boxed{a \ : \ 2}$ تحاكٍ نسبته , التفسير:

$$a - 1 = 2b - 2$$

الجواب: a $a - 1 = 2(b-1)$

7) الجواب: $\boxed{c}$, التفسير:



$a = 1 - 3i \Rightarrow A(1, -3)$

$b = \frac{7}{2} + i \Rightarrow B\left(\frac{7}{2}, 1\right)$

$c = \frac{3}{2}i \Rightarrow C\left(0, \frac{3}{2}\right)$

8) الجواب: $\boxed{b: \begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{2} + 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = -1 + \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

$= \frac{7}{2} + i - 1 + 3i$

$= 4i + \frac{7}{2} - \frac{2}{2} = \frac{5}{2} + 4i$

$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A$

$= \frac{3}{2}i - 1 + 3i$

$= -1 + \frac{3}{2}i + \frac{6}{2}i = -1 + \frac{9}{2}i$

$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B$

$= \frac{3}{2}i - \frac{7}{2} - i = \frac{3}{2}i - \frac{2}{2}i - \frac{7}{2}$

$= \frac{1}{2}i - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$

9) الجواب: $\boxed{b: \begin{cases} AB = \frac{\sqrt{89}}{2} \\ AC = \frac{\sqrt{85}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{50}}{2} \end{cases}}$, التفسير:

$AB = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (4)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 16}$

$= \sqrt{\frac{25 + 64}{4}} = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$

$AC = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{81}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4 + 81}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$

$BC = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49 + 1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

10) الجواب: $\boxed{d: \text{مختلف الأضلاع}}$, التفسير:

لنختبر ان كان قائم حسب عكس فيثاغورث:

$L_1 = BC^2 =^? AB^2 + AC^2 = L_2$

$L_1 = \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$

$L_2 = \left(\frac{\sqrt{89}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{85}}{2}\right)^2$

$= \frac{89}{4} + \frac{85}{4} = \frac{174}{4}$

و بالتالي $L_1 \neq L_2$ اذاً المثلث ABC مختلف الأضلاع.

11) الجواب: $\boxed{a: Z_1 = \frac{9}{4} - i}$, التفسير:

$z_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{1 - 3i + \frac{7}{2} + i}{2}$

$= \frac{-2i + \frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{9 - 4i}{2}}{2} = \frac{9 - 4i}{4}$

$\Rightarrow z_1 = \frac{9}{4} - i$

12) الجواب: $\boxed{c: g = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}i}$, التفسير:

$z_G = \frac{a + b + c}{3} = \frac{1 - 3i + \frac{7}{2} + i + \frac{3}{2}i}{3}$

$= \frac{-2i + \frac{3}{2}i + \frac{9}{2}}{3} = \frac{\frac{-4i + 3i + 9}{2}}{3}$

$= \frac{-i + 9}{6} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6}i = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}i$

13) الجواب: $\boxed{d: Z_M = \frac{11}{4} - \frac{13}{4}i}$, التفسير:

$z_M = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}$

$= \frac{2(1 - 3i) + 1\left(\frac{7}{2} + i\right) - 1\left(\frac{3}{2}i\right)}{2 + 1 - 1}$

$= \frac{2 - 6i + \frac{7}{2} + i - \frac{3}{2}i}{2} = \frac{2 + \frac{7}{2} - 5i - \frac{3}{2}i}{2}$

$= \frac{\frac{4 + 7 - 10i - 3i}{2}}{2} = \frac{11}{4} - \frac{13}{4}i$

14) الجواب: $\boxed{a: \text{نعم}}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{OC}} = Z_C - Z_O = \frac{3}{2}i - 0 = \frac{3}{2}i$

$|Z_{\overrightarrow{OC}}| = OC = \sqrt{\frac{9}{4} + 0} = \frac{3}{2} = r$

15) الجواب: $\boxed{a: \text{نعم}}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$

$|Z_{\overrightarrow{BC}}| = BC = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}}$

$= \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = r$

16) الجواب: مختلف الأضلاع و قائم : b , التفسير:

$Z_A = -2 \ , Z_B = 2 \ , Z_C = -1 + i \ , Z_D = 1 - 3i$

اطوال أضلاع المثلث ACD :

$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A$

$= -1 + i + 2 = 1 + i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A$

$= 1 - 3i + 2 = 3 - 3i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{AD}}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D$

$= -1 + i - 1 + 3i = -2 + 4i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{DC}}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

لنختبر ان كان قائم حسب عكس فيثاغورث:

$L_1 = DC^2 =^? AC^2 + AD^2 = L_2$

$L_1 = DC^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 4 \times 5 = 20$

$L_2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 2 + (3 \times 2)$

$= 2 + 18 = 20$

$\Rightarrow L_1 \neq L_2$

اذاً المثلث ACD قائم في A و مختلف الأضلاع.

17) الجواب: متساوي الساقين و قائم : a , التفسير:

اطوال اضلاع المثلث BCD :

$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = -1 + i - 2 = -3 + i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{BC}}| = BC = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$Z_{\overrightarrow{BD}} = Z_D - Z_B = 1 - 3i - 2 = -1 - 3i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{BD}}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$Z_{\overrightarrow{DC}} = -2 + 4i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{DC}}| = DC = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

لنختبر ان كان قائم حسب عكس فيثاغورث:

$L_1 = DC^2 =^? BC^2 + BD^2 = L_2$

$L_1 = \left(\sqrt{20}\right)^2 = 20$

$L_2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10 + 10 = 20$

$\Rightarrow L_1 = L_2$

و بالتالي المثلث BCD قائم في B و متساوي الساقين.

18) الجواب: $d : \ Z_E = -2 - 2i$, التفسير:

$Z_D = 1 - 3i \ , Z_C = -1 + i \ , Z_B = 2$

$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_{\overrightarrow{DE}}$

$\Rightarrow Z_C - Z_B = Z_E - Z_D$

$-1 + i - 2 = Z_E - 1 + 3i$

$\Rightarrow Z_E = -1 + i - 2 + 1 - 3i$

$\Rightarrow Z_E = -2 - 2i$

19) الجواب: متوازيان : a , التفسير:

$$\frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_E} = \frac{-1 + i - 2}{1 - 3i + 2 + 2i}$$

$$= \frac{-3 + i}{3 - i} = \frac{-(3 - i)}{3 - i} = -1$$

$$\arg\left(\frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_E}\right) = \pi$$

و بالتالي المستقيمان ED و BC متوازيان.

20) الجواب: متعامدان : b , التفسير:

$$\frac{Z_D - Z_C}{Z_E - Z_B} = \frac{1 - 3i + 1 - i}{-2 - 2i - 2}$$

$$= \frac{2 - 4i}{-4 - 2i} = \frac{(2 - 4i)(-4 + 2i)}{(-4 - 2i)(-4 + 2i)}$$

$$= \frac{-8 + 4i + 16i + 8}{16 + 4} = \frac{20i}{20} = i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_E - Z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

و بالتالي المستقيمان DC و BE متعامدان.

21) الجواب: $c : \ Z_I = -i$, التفسير:

$$Z_I = \frac{c + d}{2} = \frac{-1 + i + 1 - 3i}{2}$$

$$= -\frac{2i}{2} = -i$$

22) الجواب: تقع على استقامة واحدة : a , التفسير:

$Z_E = -2 - 2i$

$Z_I = -i \ , \quad Z_B = 2$

$Z_{\overrightarrow{IB}} = Z_B - Z_I = 2 + i$

$Z_{\overrightarrow{IE}} = Z_E - Z_I = -2 - 2i + i$

$= -2 - i$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{IB}}}{Z_{\overrightarrow{IE}}} = \frac{2 + i}{-2 - i} = \frac{2 + i}{-(2 + i)} = -1$$

$\Rightarrow Z_{\overrightarrow{IB}} = -Z_{\overrightarrow{IE}}$

و منه $\overrightarrow{IE}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطان خطيّاً و بالتالي النقاط E, B, I تقع على استقامة واحدة.

23) الجواب: $a : e = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$, التفسير:

$a = 2 - 2i \ , \quad b = -1 + 7i$

$c = 4 + 2i \ , \quad d = -4 - 2i$

$$e = \frac{a + b}{2} = \frac{2 - 2i - 1 + 7i}{2}$$

$$= \frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

24) الجواب: $c : ACD$ المستقيم منصف في المثلث , التفسير:

$$L_1 = \frac{a - e}{d - e} = \frac{c - e}{a - e} = L_2$$

$$L_1 = \frac{a-e}{d-e} = \frac{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{-4-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$
$$= \frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{\frac{-8-1}{2}+\frac{-4i-5i}{2}} = \frac{\frac{3-9i}{2}}{\frac{-9-9i}{2}}$$
$$= \frac{3-9i}{-9-9i} = \frac{3(1-3i)(1-i)}{-9(1+i)(1-i)}$$
$$= \frac{3(1-i-3i-3)}{9(1+1)} = \frac{3(-4i-2)}{9\times 2}$$
$$= \frac{-4i-2}{3\times 2} = -\frac{4i}{6}-\frac{2}{6}$$
$$= -\frac{2}{3}i-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(+1+2i)$$

$$L_2 = \frac{c-e}{a-e} = \frac{4+2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$
$$= \frac{4-\frac{1}{2}+2i-\frac{5}{2}i}{2-\frac{1}{2}-2i-\frac{5}{2}i} = \frac{\frac{8}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4}{2}i-\frac{5}{2}i}{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}-\frac{4}{2}i-\frac{5}{2}i}$$
$$= \frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i} = \frac{(7-i)(3+9i)}{(3-9i)(3+9i)}$$
$$= \frac{21+63i-3i-9\,i^2}{9+81}$$
$$= \frac{(30+60i)\quad\times\frac{1}{10}}{9\quad\times\frac{1}{10}} = \frac{3+6i}{9} = \frac{3}{9}+\frac{6}{9}i$$
$$= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}i = \frac{1}{3}(1+2i)$$

و بالتالي:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

و منه:

$$\left|\frac{a-e}{d-e}\right| = \left|\frac{c-e}{a-e}\right|$$
$$\frac{EA}{ED} = \frac{EC}{EA} \Longrightarrow EA^2 = EC\,.\,ED$$

- $$\arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{ED}\,,\overrightarrow{EA}\right) = \left(\overrightarrow{EA}\,,\overrightarrow{EC}\right)$$
$$\widehat{DEA} = \widehat{AEC}$$

اذاً EA منصّف في المثلث ACD .

25) الجواب: $\boxed{b : e^{\frac{2\pi}{3}i}}$, التفسير:

$$a = 2\,,\quad b = 1+\sqrt{3}i\,,\quad c = -1+\sqrt{3}i$$
$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}i}{-2} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x = -\frac{1}{2}\,,\quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Longrightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$
$$\Longrightarrow \cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Longrightarrow \theta = \pi-\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$
$$\Longrightarrow \frac{a-b}{c-b} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$
$$\Longrightarrow \frac{a-b}{c-b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

26) الجواب: $\boxed{d : i}$, التفسير:

$$a = 8\,,\quad b = -4+4i\,,\quad c = -4i$$
$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8+4i} = \frac{-4+8i}{8-4i}$$
$$= \frac{(-4+8i)(8-4i)}{(8+4i)(8-4i)}$$
$$= \frac{-32+16i+64i+32}{64+16} = \frac{80i}{80} = i$$

27) الجواب: $\boxed{a : \text{قائم و متساوي الساقين}}$, التفسير:

- $$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$
$$\frac{CB}{CA} = 1 \Longrightarrow CB = CA$$

- $$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$
$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2}$$

و بالتالي المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

28) الجواب: $\boxed{a : \frac{1}{2}}$, التفسير:

$$a = 6-i\,,\quad b = -6+3i$$
$$c = -18+7i$$
$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}$$
$$= \frac{-12+4i}{8i-24} = \frac{4(-3+i)}{8(i+3)}$$
$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

29) الجواب:

$\boxed{a : \text{النقاط } A,B,C \text{ تقع على استقامة واحدة}}$

,التفسير:

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2\,AB$$

و بالتالي النقاط $A\,,B\,,C$ تقع على استقامة واحدة.

30) الجواب: $\boxed{b : \frac{\pi}{2}}$, التفسير:

$$d = 1 + 6i$$
$$d - 0 = (a - 0)e^{i\theta} \Rightarrow d = a\,e^{i\theta}$$
$$1 + 6i = (6 - i)e^{i\theta}$$
$$\frac{1 + 6i}{6 - i} = e^{i\theta}$$
$$\frac{(1 + 6i)(6 + i)}{36 + 1} = e^{i\theta}$$
$$\frac{6 + i + 36i - 6}{37} = e^{i\theta}$$
$$\Rightarrow \frac{37i}{37} = e^{i\theta} \Rightarrow i = e^{i\theta} \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\theta}$$

بالمقارنة نجد:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

31) الجواب: $\boxed{c : \sqrt{3}i}$, التفسير:

$$a = -1\ , \quad b = 2 + \sqrt{3}i$$
$$c = \overline{b} = 2 - \sqrt{3}i\ , \quad d = 3$$
$$\frac{a - c}{d - c} = \frac{-1 - (2 - \sqrt{3}i)}{3 - (2 - \sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1 - 2 + \sqrt{3}i}{3 - 2 + \sqrt{3}i} = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}$$
$$= \frac{(-3 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-3 + 3\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 3}{1 + 3} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$$

32) الجواب: $\boxed{b : \frac{\pi}{2}}$, التفسير:

- $\left|\frac{a - c}{d - c}\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \sqrt{3} \Rightarrow CA = \sqrt{3}CD$$

اذا غير متساوي الساقين

- $\arg\left(\frac{a - c}{d - c}\right) = \arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{CD}\,, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$$

33) الجواب: $\boxed{d : \text{قائم الزاوية}}$, التفسير:

$$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = 2 - \sqrt{3}i + 1 = 3 - \sqrt{3}i$$
$$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A = 3 + 1 = 4$$
$$Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D = 2 - \sqrt{3}i - 3 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$AD = \sqrt{16} = 4$$
$$DC = \sqrt{1 + 3} = 2$$

حسب عكس فيثاغورث:

$$L_1 = AD^2 =^? AC^2 + DC^2 = L_2$$
$$L_1 = (4)^2 = 16$$
$$L_2 = 12 + 4 = 16$$
$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

و بالتالي المثلث ADC قائم.

34) الجواب: $\boxed{a : b = 3 - i}$, التفسير:

$$\vec{w}(2\,, -2)$$
$$b = a + 2 - 2i$$
$$b = 1 + i + 2 - 2i$$
$$b = 3 - i$$

35) الجواب: $\boxed{d : c = 0}$, التفسير:

$$z' - w = k(z - w)$$
$$c - 2 - 2i = 2(a - 2 - 2i)$$
$$c - 2 - 2i = 2(1 + i - 2 - 2i)$$
$$c - 2 - 2i = 2(-1 - i)$$
$$\Rightarrow c = 2 + 2i - 2 - 2i = 0$$

36) الجواب: $\boxed{b : d = 2 + 2i}$, التفسير:

$$d - 0 = 2(a - 0) \Rightarrow d = 2a$$
$$\Rightarrow d = 2(1 + i) \Rightarrow d = 2 + 2i$$

37) الجواب: $\boxed{a : e = 1 - 3i}$, التفسير:

$$e - 3 + i = e^{\frac{\pi}{2}i}(a - 3 + i)$$
$$\Rightarrow e - 3 + i = i(1 + i - 3 + i)$$
$$\Rightarrow e - 3 + i = i(2i - 2)$$
$$\Rightarrow e = -2 - 2i + 3 - i$$
$$\Rightarrow e = 1 - 3i$$

38) الجواب: $\boxed{c : m = \sqrt{2}i}$, التفسير:

$$m = e^{\frac{\pi}{4}i}\,a$$
$$\Rightarrow m = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)(1 + i)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(1 + i)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2}i$$

39) الجواب: $\boxed{d : b = 1 + 3i}$, التفسير:

$$z' = \overline{z} \Rightarrow b = \overline{a} = 1 + 3i$$

40) الجواب: $\boxed{c : c = -1 + 3i}$, التفسير:

$$z' = -z \Rightarrow c = -a = -1 + 3i$$

41) الجواب: $\boxed{c : d = -1 + 3i}$, التفسير:

$$d - 0 = -(a - 0)$$
$$\Rightarrow d = -a = -1 + 3i$$

42) الجواب: $\boxed{a : e = 3 - 7i}$, التفسير:

$$e - (2 - 5i) = -(a - 2 + 5i)$$
$$\Rightarrow e - 2 + 5i = -(1 - 3i - 2 + 5i)$$
$$\Rightarrow e - 2 + 5i = -(2i - 1)$$

$\Rightarrow e-2+5i=-2i+1$
$\Rightarrow e=3-7i$

43) الجواب: $\boxed{b\ :\ b+i(b-c)}$, التفسير:

$b'-b=e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-b)$
$\Rightarrow b'-b=-i(c-b)$
$\Rightarrow b'-b=-ic+ib$
$\Rightarrow b'=b+i(b-c)$

44) الجواب: $\boxed{a\ :\ a'=a+i(c-a)}$, التفسير:

$a'-a=e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a)$
$\Rightarrow a'-a=i(c-a)$
$\Rightarrow a'=a+i(c-a)$

45) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{(b+a)+i(b-a)}{2}}$, التفسير:

$M=\frac{a'+b'}{2}$

$\Rightarrow M=\frac{a+i(c-a)+b+i(b-c)}{2}$
$\Rightarrow M=\frac{a+ic-ia+b+ib-ic}{2}$
$\Rightarrow M=\frac{(a+b)+i(b-a)}{2}$

46) الجواب: $\boxed{a\ :\ \begin{cases} n=\frac{b+c}{2} \\ b'=ib \\ c'=-ic \end{cases}}$, التفسير:

$n=\frac{c+b}{2}$

b' صورة b وفق دوران مركزه A و زاويته:

$\theta=\frac{\pi}{2}$

و بالتالي:

$b'-a=e^{\frac{\pi}{2}i}(b-a)$
$\Rightarrow b'=ib$

c' صورة c وفق دوران مركزه A و زاويته:

$\theta=-\frac{\pi}{2}$

و بالتالي:

$c'-a=e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-a)$
$\Rightarrow c'-a=-i(c-a)$
$\Rightarrow c'=-ic$

47) الجواب: $\boxed{b\ :\ -i}$, التفسير:

$\frac{c'-b}{c-b'}=\frac{-ic-b}{c-ib}$
$=\frac{(-ic-b)(c+ib)}{c^2+b^2}$
$=\frac{-ic^2+cb-bc-ib^2}{c^2+b^2}$
$=\frac{-i(c^2+b^2)}{c^2+b^2}=-i$

الجواب: $\boxed{d\ :\ e^{-\frac{\pi}{2}i}}$, التفسير:

$-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$

48) الجواب: $\boxed{b\ :\ \text{متعامدان و متساويان}}$, التفسير:

من النسبة:

$\frac{c'-b}{c-b'}=-i$

نجد أنّ:

- $\arg\left(\frac{c'-b}{c-b'}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{BC'}\right)=-\frac{\pi}{2}$

و بالتالي المستقيمان (BC') و $(B'C)$ متعامدان.

- $\left|\frac{c'-b}{c-b'}\right|=|-i|$

$\Rightarrow \sqrt{(-i)^2}=1$
$\Rightarrow \frac{BC'}{B'C}=1 \Rightarrow BC'=B'C$

و بالتالي المستقيمان (BC') و $(B'C)$ متساويان.

49) الجواب: $\boxed{a\ :\ \begin{cases} a=3\ ,\ b=4 \\ c=7\ ,\ d=7+i \\ e=6+3i \end{cases}}$, التفسير:

$A(3\ ,0)\Rightarrow a=3$
$B(4\ ,0)\Rightarrow b=4$
$D(7\ ,1)\Rightarrow d=7+i$
$E(6\ ,3)\Rightarrow e=6+3i$

50) الجواب: $\boxed{d\ :\ \begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}}=3+i \\ Z_{\overrightarrow{AE}}=3+3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}}=6+3i \end{cases}}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{OE}}=e-o=3+3i$
$Z_{\overrightarrow{AE}}=e-a=6+3i-3=3+3i$
$Z_{\overrightarrow{BD}}=d-b=7+i-4=3+i$

51) الجواب: $\boxed{a\ :\ 90i}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{BD}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{OE}}$
$=(3+i)(3+3i)(6+3i)$
$=(9+9i+3i-3)(6+3i)$
$=(6+12i)(6+3i)$
$=36+18i+72i-36$
$=90i$

52) الجواب: $\boxed{c:90\,e^{\frac{\pi}{2}i}}$, التفسير:

$90i=90\,e^{\frac{\pi}{2}i}$

53) الجواب: $\boxed{b:\frac{\pi}{2}}$, التفسير:

$\alpha+\beta+\gamma=\arg\big((3+i)(3+3i)(6+3i)\big)$
$=\arg(90i)=\frac{\pi}{2}$

54)

المعادلات العقديّة

1) الجواب: $\boxed{c\ :\ -1}$, التفسير:

$$3z-2=6z+1$$
$$-1-2=6z-3z$$
$$-3=3z \Longrightarrow z=-1$$

2) الجواب: $\boxed{c\ :\ 2+i}$, التفسير:

$$2z+i\overline{z}=5+4i$$

نفرض:

$$z=x+iy \Longrightarrow \overline{z}=x-iy$$

و بالتالي يكون:

$$2(x+iy)+i(x-iy)=5+4i$$
$$\Longrightarrow 2x+2iy+xi+y=5+4i$$
$$\Longrightarrow 2x+y+(2y+x)i=5+4i$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2x+y=5 & \dots(1) \\ 2y+x=4 & \dots(2) \quad \times -2 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x+y=5 & \dots(1) \\ -4y-2x=-8 & \dots(2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$-3y=-3 \Longrightarrow y=1$$

نعوّض في (1) :

$$2x+y=5 \Longrightarrow 2x+1=5$$
$$\Longrightarrow 2x=4 \Longrightarrow x=2$$
$$\Longrightarrow z=2+i$$

3) الجواب: $\boxed{d\ :\ 3i}$, التفسير:

$$\frac{\overline{z}-3}{\overline{z}+3}=i$$

نأخذ مرافق الطرفين:

$$\frac{z-3}{z+3}=-i$$

نضرب الوسطين بالطرفين:

$$z-3=-iz-3i$$
$$z+iz=3-3i$$
$$z(1+i)=3(1-i)$$
$$\Longrightarrow z=\frac{3(1-i)}{1+i}$$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

$$z=\frac{3(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3(1-i)^2}{1+1}$$
$$=\frac{3(-2i)}{2}=\frac{-6i}{2}=-3i$$

و بالتالي فإنّ:

$$\overline{z}=3i$$

4) الجواب: $\boxed{a\ :\ 0\ ,-\frac{3}{7i}}$, التفسير:

$$7z^2=-3i\,z$$
$$\Longrightarrow 7z^2+3i\,z=0$$
$$\Longrightarrow z(7z+3i)=0$$

إمّا: $z=0$

أو: $7z+3i=0$ و بالتالي:

$$7z=-3i \Longrightarrow z=-\frac{3}{7i}$$

5) الجواب: $\boxed{b:\overline{z}=1-i}$, التفسير:

$$-7\,\overline{z}=-7+7i$$

نقسم على -7 :

$$\overline{z}=1-i$$

6) **34)** الجواب: $\boxed{c\ :\ 5\ ,-5}$, التفسير:

$$4\,z^2-100=0$$
$$\Longrightarrow 4\,z^2=100$$
$$\Longrightarrow z^2=\frac{100}{4}=25$$

نجذر الطرفين:

$$\sqrt{z^2}=\sqrt{25} \Longrightarrow z=|5|$$
$$\Longrightarrow z=+5\ ,\ z=-5$$

7) الجواب: $\boxed{c\ :\ z_1=3+2i\,,z_2=-3-2i}$,

التفسير:

$$z^2=5+12i$$

نفرض w هو الجذر التربيعي لِ z :

$$x^2+y^2=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13 \quad \dots(1)$$
$$x^2-y^2=5 \quad \dots.(2)$$
$$2xy=12>0 \quad \dots.(3)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2=18 \Longrightarrow x^2=9$$
$$x=3\ ,\ x=-3$$

بطرح (1) و (2) نجد:

$$2y^2=8 \Longrightarrow y^2=4$$
$$y=2\ ,\ y=-2$$

و بالتالي تكون الحلول:

$$z_1=3+2i \quad , \quad z_2=-3-2i$$

8) الجواب: $\boxed{c:z_1=1+2i\ ,\ z_2=-1-i}$,

التفسير:

$$i\,z^2+z+3+i=0$$
$$a=i\ ,\ b=1\ ,\ c=3+i$$
$$\Delta=b^2-4ac=1-4(i)(3+i)$$
$$=1-12i+4=5-12i$$

نفرض w هو الجذر التربيعي لِ Δ :

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+144}$$
$$\Longrightarrow x^2+y^2=\sqrt{169}=13 \quad \dots(1)$$
$$x^2-y^2=a=5 \quad \dots(2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2=18 \Longrightarrow x^2=9$$
$$x=3\ ,\ x=-3$$

بطرح (1) و (2) نجد:

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4$$
$$y = 2 \ , \ y = -2$$

و بالتالي تكون الحلول:

$$w_1 = 3 - 2i \ \ , \ \ w_2 = -3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-1 - 3 + 2i}{2i}$$
$$= \frac{-4 + 2i}{2i} = \frac{(-4 + 2i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$
$$= \frac{8i + 4}{4} \Rightarrow z_1 = 1 + 2i$$
$$\Rightarrow z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{(-1 + 3 - 2i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$
$$= \frac{(2 - 2i)(-2i)}{4} = \frac{-4i - 4}{4} \Rightarrow z_2 = -1 - i$$

9) الجواب: $\boxed{b \ : z = \frac{1+\sqrt{3}}{2}}$, التفسير:

$$z^2 - (1 + \sqrt{3})z + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$a = 1 \ , \quad b = -1 - \sqrt{3} \ , \ c = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1 - \sqrt{3})^2 - 4(1)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4 - 2\sqrt{3} = 1 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

10) الجواب: $\boxed{c : \begin{cases} 1+i \\ 1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i \end{cases}}$, التفسير:

$$(z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4) = 0$$

إمّا: $z - 1 - i = 0$ و بالتالي:

$$z_1 = 1 + i$$

أو: $z^2 - 2z + 4 = 0$ و بالتالي:

$$a = 1 \ , \quad b = -2 \ , \ c = 4$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4)$$
$$= 4 - 16 = -12 < 0$$

و منه للمعادلة حلّان عقديّان مترافقان:

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2}$$
$$= \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$
$$z_3 = \overline{z_2} = 1 + i\sqrt{3}$$

11) الجواب: $\boxed{b : \ z_1 = 1 \, , z_2 = -2}$, التفسير:

$$(2 - z - z^2)^3 = 0$$
$$(-z^2 - z + 2)^3 = 0$$

نفرض أنّ:

$$w = -z^2 - z + 2$$
$$\Rightarrow a = -1 \ , \ \ b = -1 \, , \ c = 2$$
$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(-1)(2)$$
$$= 1 + 4(2) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 3}{2(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$
$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 3}{2(-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

12) الجواب: $\boxed{b : \begin{cases} 3e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ 3e^{i\frac{\pi}{3}} \\ 3e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{cases}}$, التفسير:

$$z^3 = 27i \Rightarrow z^3 - 27i = 0$$
$$\Rightarrow z^3 + (3i)^3 = 0$$
$$\Rightarrow (z + 3i)(z^2 - 3iz - 9) = 0$$

و بالتالي إمّا :

$$z = -3i \ \Rightarrow z = 3\, e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

أو:

$$z^2 - 3iz - 9 = 0$$
$$\Rightarrow a = 1 \ , \ \ b = -3i \, , \ c = -9$$
$$\Rightarrow \Delta = -9 - 4(1)(-9) = -9 + 36$$
$$\Rightarrow \Delta = 27 > 0 \ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

و منه يوجد للمعادلة جذرين مختلفين:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3i - 3\sqrt{3}}{2}$$
$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$
$$r_1 = \sqrt{\frac{9 \times 3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$
$$\Rightarrow z_1 = 3\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3i + 3\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$
$$r_2 = 3 \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \sin(\theta) = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow z_2 = 3\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

13) الجواب: $\boxed{b: \text{تخيّلي بحت}}$, التفسير:

$$w = \frac{z - u\,\overline{z}}{i - iu}$$

$$; |u| = 1 \ , \ \overline{u} = \frac{1}{u}$$

لنحسب مرافق w :

$$\overline{w} = \frac{\overline{z} - \overline{u}\,z}{-i - i\overline{u}} = \frac{\overline{z} - \frac{1}{u}\,z}{-i + i\frac{1}{u}}$$

$$= \frac{\frac{\overline{z}\,u - z}{u}}{\frac{-iu + i}{u}} = \frac{\overline{z}u - z}{-iu + i} = \frac{-(z - u\overline{z})}{i - ui}$$

$$\Rightarrow \overline{w} = -w$$

و بالتالي w تخيّلي بحت.

14) الجواب: $\boxed{b: \ |Z|^2 + |Z'|^2}$, التفسير:

$$|z - z'|^2 + z'\overline{z} + z\,\overline{z}' =$$
$$(z - z')\left(\overline{z} - \overline{z}'\right) + z'\overline{z} + z\,\overline{z}' =$$
$$z\,\overline{z} - z\,\overline{z}' - z'\overline{z} + z'\overline{z}' + z'\overline{z} + z\,\overline{z}' =$$
$$z\,\overline{z} + z'\overline{z}' = |Z|^2 + |Z'|^2$$

15) الجواب: $\boxed{c: 1}$, التفسير:

$$z = \sin(\theta) + i\cos(\theta)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$\Rightarrow |z| = 1$$

16) الجواب: $\boxed{a: \frac{\pi}{4}}$, التفسير:

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

17) الجواب: $\boxed{c: \frac{\sqrt{2}}{2}}$, التفسير:

من الطلب السابق (44).

18) الجواب: $\boxed{a: \text{حقيقي}}$, التفسير:

$$|z| = 1 \ , \quad \overline{z} = \frac{1}{z}$$
$$|w| = 1 \ , \quad \overline{w} = \frac{1}{w}$$
$$z = \frac{z + w}{zw + 1}$$
$$\overline{z} = \frac{\overline{z} + \overline{w}}{\overline{zw} + 1} = \frac{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{w}\right)}{\frac{1}{zw} + 1}$$
$$= \frac{\frac{w + z}{zw}}{\frac{1 + wz}{zw}} = \frac{w + z}{zw + 1}$$
$$\Rightarrow \overline{z} = z$$

إذاً z حقيقي.

19) الجواب: $\boxed{a: P(z) = (z - 1)(5z^2 + 2z + 1)}$,

التفسير:

$$P(z) = 5z^3 - 3z^2 - z - 1$$

لنجرّب:

$$P(+1) = 5 - 3 - 1 - 1 = 2 - 2 = 0$$

اذاً بالقسمة الإقليديّة ل $P(z)$ على $(z - 1)$ نجد:

$$P(z) = (z - 1)(5z^2 + 2z + 1)$$

20) الجواب: $\boxed{c: \left\{1, -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\,, -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right\}}$, التفسير:

$$P(z) = 0$$
$$(z - 1)(5z^2 + 2z + 1) = 0$$

إمّا:

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$$

أو:

$$5z^2 + 2z + 1 = 0$$
$$a = 5 \ , \ \ b = 2 \ , \ \ c = 1$$
$$\Rightarrow \Delta = 4 - 4(5)(1) = 4 - 20 = -16 < 0$$

و بالتالي للمعادلة حلّان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2 - i\sqrt{16}}{2(5)}$$
$$= -\frac{2}{10} - \frac{4}{10}i = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$
$$\Rightarrow z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

21) الجواب: $\boxed{d: 0}$, التفسير:

$$P(z) = 2z^3 - 5z^2 + 3z - 2$$
$$\Rightarrow P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 3(2) - 2$$
$$= 16 - 20 + 6 - 2 = 20 - 20 = 0$$

22) الجواب: $\boxed{d: P(z) = (z + 2)(2z^2 - z + 1)}$,

التفسير:

بالقسمة الإقليدية لِ $P(z)$ على $(z - 2)$

23) الجواب: $\boxed{a: \ 3}$, التفسير:

لأنَّ $P(z)$ معادلة من الدرجة الثالثة.

24) الجواب: $\boxed{d: z = 1 - i}$, التفسير:

$$2iz + \overline{z} = 3 + 3i$$

نفرض أنَّ:

$$z = a + ib \quad , \quad \overline{z} = a - ib$$

و بالتالي:

$$2i(a + ib) + (a - ib) = 3 + 3i$$
$$\Rightarrow 2ia - 2b + a - ib = 3 + 3i$$

$$\Rightarrow a-2b+i(2a-b)=3+3i$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a-2b=3 \ \dots(1) \\ 2a-b=3 \ \dots(2) \end{cases}$$

من (1) نجد:

$$a=3+2b \ \dots(*)$$

نعوّض في (2):

$$2(3+2b)-b=3$$
$$\Rightarrow 6+4b-b=3$$
$$\Rightarrow 6+3b=3$$
$$\Rightarrow 3b=-3 \Rightarrow b=-1$$

نعوّض في (*):

$$\Rightarrow a=3-2=1$$
$$\Rightarrow z=1-i$$

25) الجواب: $\boxed{b: p=i-2 \ , \ q=3-i}$, التفسير:

$$z_1=1+i \ \ , \ z_2=1-2i$$
$$z^2+pz+q=0$$
$$p=z_1+z_2$$
$$=1+i+1-2i=2-i$$
$$\Rightarrow p=i-2$$
$$q=z_1.z_2=(1+i)(1-2i)$$
$$=1-2i+i+2=3-i$$

26) الجواب: a

$$z_1=e^{-ix} \ \ , \ z_2=e^{ix}$$
$$p=z_1+z_2=e^{-ix}+e^{ix}$$
$$=2\cos(x) \Rightarrow p=-2\cos(x)$$
$$q=z_1.z_2=e^{-ix}.e^{ix}=e^0=1$$

المجموعات النقطيّة

1) الجواب: $\boxed{b}$, تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل.

2) الجواب: $\boxed{b: \text{تمثّل محور لقطعة مستقيمة}}$,

التفسير:

$$|2z-4+6i|=|2z-4|$$
$$\Rightarrow |z-2+3i|=|z-2|$$
$$\Rightarrow |z-(2-3i)|=|z-2|$$

3) الجواب: $\boxed{b: \ x=2 \text{ المستقيم الشاقولي}}$.

4) الجواب: $\boxed{c: \frac{3\pi}{14}}$, التفسير:

$$\theta=-\frac{25\pi}{14}=-\frac{28\pi}{14}+\frac{3\pi}{14}=\underbrace{-2\pi}_{\text{يُهمل}}+\frac{3\pi}{14}=\frac{3\pi}{14}$$

5) الجواب: $\boxed{b: -\frac{5\pi}{6}}$, التفسير:

$$\theta=\frac{7\pi}{6}=\frac{12\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}=\underbrace{2\pi}_{\text{يُهمل}}-\frac{5\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$$

6) الجواب: $\boxed{b: \ (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})}$.

7) الجواب: $\boxed{a: \ |z|=\sqrt{2}}$, التفسير:

$$z=-\frac{\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\pi}\frac{\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$=e^{i\frac{4\pi}{3}}\frac{\sqrt{2}}{1+i}=e^{i\frac{4\pi}{3}}\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$=\sqrt{2}\,e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\,e^{\frac{16\pi-3\pi i}{12}}$$
$$\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}} \Rightarrow |z|=\sqrt{2}$$

8) الجواب: **23**

$\boxed{b: Cos(a+b)=cosa\,cosb-sina\,sinb}$,

التفسير:

$$z=e^{ia} \ \ , \ \ z'=e^{ib}$$
$$zz'=e^{ib}e^{ia}=e^{i(a+b)}$$
$$zz'=\cos(a+b)+i\sin(a+b)$$
$$\cos(a+b)=\cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b)$$

9) الجواب: $\boxed{b \ : \ z=e^{-ix}}$, التفسير:

$$z=\frac{1+\cos(x)-i\sin(x)}{1+\cos(x)+i\sin(x)}$$
$$=\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}}=\frac{e^{-ix}(e^{ix}+1)}{1+e^{ix}}=e^{-ix}$$

10) الجواب: $\boxed{b: xy=\alpha\beta}$, التفسير:

$$a=\alpha+i\,\beta$$
$$z=x+i\,y$$
$$z^2-a^2=\overline{z}^2-\overline{a}^2$$
$$\underbrace{(x+iy)^2-(\alpha+i\beta)^2}_{L_1}=\underbrace{(x-iy)^2-(\alpha-i\beta)^2}_{L_2}$$

$$L_1=(x+iy)^2-(\alpha+i\beta)^2$$
$$=x^2+2xyi-y^2-(\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2)$$
$$=x^2+2xyi-y^2-\alpha^2-2\alpha\beta i+\beta^2$$
$$L_2=(x-yi)^2-(\alpha-\beta i)^2$$
$$=x^2-2xyi-y^2-(\alpha^2-2\alpha\beta i-\beta^2)$$
$$=x^2-2xyi-y^2-\alpha^2+2\alpha\beta i+\beta^2$$

$$\Rightarrow x^2+2xyi-y^2-\alpha^2-2\alpha\beta i+\beta^2$$
$$=x^2-2xyi-y^2-\alpha^2+2\alpha\beta i+\beta^2$$

$$\Rightarrow 2xyi+2xyi-2\alpha\beta i-2\alpha\beta i=0$$
$$\Rightarrow 4xyi=4\alpha\beta i$$

بالمطابقة نجد:

$$4xy=4\alpha\beta$$
$$\Rightarrow xy=\alpha\beta$$

11) الجواب: $\boxed{b \ : \ t=i\tan(\theta)}$, التفسير:

$$t=\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1}$$

نفرض أنّ البسط:

$$u=e^{2i\theta}-1$$

و نفرض أنّ المقام:

$$v = e^{2i\theta} + 1$$

و بالتالي:

$$u = e^{2i\theta} - 1 = e^{i(\theta+\theta)} - e^{i0}$$
$$= e^{i(\theta+\theta)} - e^{i(\theta-\theta)} = e^{i\theta}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$
$$= e^{i\theta}(2i\sin(\theta))$$

$$v = e^{2i\theta} + 1 = e^{i(\theta+\theta)} + e^{i0}$$
$$= e^{i(\theta+\theta)} + e^{i(\theta-\theta)} = e^{i\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$
$$= e^{i\theta}(2\cos(\theta))$$

نعوّض في t :

$$t = \frac{e^{i\theta}(2i\sin(\theta))}{e^{i\theta}(2\cos(\theta))} = i\tan(\theta)$$

12) الجواب: $\boxed{c \ : \ z_1 + z_2 = 0}$, التفسير:

$$w = -3 + 4i$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \ldots (1)$$
$$x^2 - y^2 = a = -3 \quad \ldots . (2)$$
$$2xy = +4 > 0 \quad \ldots . (3)$$

$\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{x}$ لهما نفس الإشارة, بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$$
$$\Rightarrow x = -1 \ , \ x = 1$$

بطرح (1) و (2) نجد:

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4$$
$$\Rightarrow y = -2 \ , \ y = 2$$

و بالتالي:

$$z_1 = -1 - 2i \ , \ z_2 = +1 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 0$$

13) الجواب: $\boxed{c : 0}$.

14) الجواب: $\boxed{c : 0}$.

15) الجواب: $\boxed{c \ : \ 0}$, التفسير:

$$z = e^{i\frac{2\pi}{11}}$$
$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{10}$$
$$= z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + \cdots + z^{10}$$
$$= \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^0 + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^1 + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^2$$
$$+ \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^{10}$$

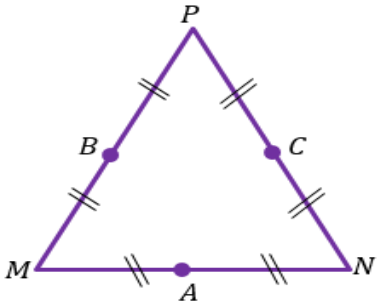
و هي متتالية هندسيّة أساسها:

$$q = e^{i\frac{2\pi}{11}}$$

مجموعها يُعطى بِ:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{(1)\left(1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^{11}\right)}{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)}$$
$$= \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{11}}} = \frac{1-1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{11}}} = \frac{0}{1 - e^{i\frac{2\pi}{11}}} = 0$$

16) الجواب: $\boxed{a \ : \ g' = g}$, التفسير:



$$c = \frac{n+p}{2} \ , \ b = \frac{m+p}{2} \ , \ a = \frac{m+n}{2}$$
$$\Rightarrow g = \frac{\frac{m+n}{2} + \frac{m+p}{2} + \frac{n+p}{2}}{3}$$
$$= \frac{n+p+m}{3} = g' \Rightarrow g = g'$$

17) الجواب:

c محور لقطعة مستقيمة.

التحليل التوافقي والاحتمالات

1) الجواب:

$$b \ : \ (3!)^2 = (3 \times 2 \times 1)^2 = (6)^2 = 36$$

2) الجواب:

$$c \ : \ P_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

3) الجواب:

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

4) الجواب:

$$b \ : \ P_4^3 \times 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$= 576$$

5) الجواب:

$$a \ : \ 7 \times 3 \times 2 \times 1 = 42$$

6) الجواب: $\boldsymbol{c}$

$$P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1$$
$$n+2 \geq 3 \quad n+2 \geq 1$$
$$n \geq 1 \quad n \geq -1$$
$$(n+2)(n+1)n = 6(n+2)$$
$$\Rightarrow n^2 + n = 6$$
$$n^2 + n - 6 = 0$$
$$(n+6)(n-5) = 0$$

$n = -6$ مرفوض

$n = 5$ مقبول

7) الجواب: $\boldsymbol{c}$

$$3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2} \ , \ n \geq 4 \quad n \geq 2$$

$$\frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=\frac{14n(n-1)}{2\times1}$$
$$n^2-5n+6=56$$
$$n^2-5n-50=0$$
$$(n-10)(n+5)=0$$
$n=10$ مقبول

$n=-5$ مرفوض

8) الجواب: c

$$\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$$
$10\geq 2n$ $\quad$ $10\geq n+2$
$n\leq 5$ $\quad$ $n\leq 8$
$3n+4+2=10$ $\quad$ $3n=n+2$
$4n+2=10$ $\quad$ $n=1$
$4n=8$ $\quad$ $n=2$

9) الجواب: b

$$\binom{10}{2n}=\binom{10}{n+1}$$
$10\geq 2n$ $\quad$ $10\geq n+1$
$n\leq 5$ $\quad$ $n\leq 9$
$2n+n+1=10$ $\quad$ $2n=n+1$
$n=3$ $\quad$ $n=1$

مسائل التوافيق

1) الجواب:

45 مصافحة، حيثُ:

$$\binom{10}{2}=\frac{10\times2}{2\times1}=\frac{90}{2}=45$$

2) الجواب:

44 مصافحة، حيثُ:

$$\binom{10}{2}-\binom{2}{2}=45-1=44$$

3) الجواب: الجواب 6 حيثُ:

$$\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

4) الجواب:

n عدد الأشخاص

$$\binom{n}{2}=66\ ;n\geq2\quad,\quad P_2^n=66$$
$$\frac{(n)(n-1)}{2}=66$$
$$\Rightarrow\frac{n^2-n}{2}=66\Rightarrow n^2-n=132$$
$$\Rightarrow n^2-n-132=0$$
$$\Rightarrow(n-12)(n+11)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}n=12 & \text{مقبول}\\ n=-11 & \text{مرفوض}\end{cases}\Rightarrow n=12$$

5) الجواب c:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

6) الجواب a:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

7) الجواب i: b

8) الجواب 1: a

9) الجواب b:

$$\frac{3\pi}{8}$$

10) الجواب b:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

11) الجواب:

$\binom{8}{3}=72$ مثلث

12) الجواب:

$$\binom{9}{3}=84$$

13) الجواب: 16 مثلث قائم:

$4\times4=16$

14) الجواب:

$$\binom{8}{4}=70$$

15) الجواب: 6 مستطيلات

16) الجواب: 24 مثلّث منفرج الزاوية.

17) الجواب: 20

18) الجواب: عدد متوازيات الأضلاع 60 حيثُ:

$$\binom{5}{2}.\binom{4}{2}=\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=10\times6=60$$

19) المستقيمات المتوازية:

$$\binom{4}{2}\binom{3}{2}+\binom{4}{2}\binom{2}{2}+\binom{3}{2}\binom{2}{2}$$
$$=(6)(3)+(6)(1)+(3)(1)=27$$

20) توزيع 4 قوالب على أربع تلاميذ:

$4!=4\times3\times2\times1=24$

$n=24\times10=240$ طريقة

21) لدينا:

$$P_7^6=7.6.5.4.3.2=5040$$

22) لدينا:

$$\binom{10}{4} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$$

23) شركة توليدو:

عدد طرق اختيار مدير عام 15

عدد طرق اختيار أمين سر 14

وبالتالي:

$n = 15 \times 14 = 210$ طريقة

24) الجواب: $\boxed{b : 504}$, التفسير:

$\{0,0,2,2,2,3,3,3,3\}$

$P_9^3 = 504$

25) الجواب: $\boxed{b : 42}$, التفسير:

$\{0,0,2\}\ \{0,0,3\} = 42$

26) الجواب: $\boxed{c : 132}$, التفسير:

$\{2,2,2\}\{2,3,3\}\{3,3,3\} = 132$

27) الجواب: $\boxed{d : 20}$, التفسير:

$$\binom{6}{3} = 20$$

28) الجواب: $\boxed{d : 60}$, التفسير:

$$P_5^2 \times \frac{3!}{2!} = 20 \times \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

29) الجواب: $\boxed{a : 90}$, التفسير:

$$5^2 \frac{3!}{2!} + 5^1 \frac{3!}{2!}$$

$$25 \times 3 + 15 = 90$$

30) الجواب: $\boxed{b : 5}$, التفسير:

$$P_5^1 \times \frac{3!}{3!} = 5$$

31) الجواب: $\boxed{a : 156}$, التفسير:

$$5^3 + 1^3 + 5^2 \times 1^1 + 5^1 \times 1^1$$

$$= 125 + 1 + 25 + 5 = 156$$

32) الجواب: $\boxed{c : 80}$, التفسير:

$$P_5^3 + P_5^2 \times P_1^1$$

$$= 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 1$$

$$= 60 + 20 = 80$$

33) يمكن حساب المئات بـ 5 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 6 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 3 طريقة

$5.6.3 = 90$

34) يمكن حساب المئات بـ 6 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 6 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 1طريقة

$6.6.1 = 36$

35) نميز حالتين:

الحالة (1): إذا تم أخذ الصفر في خانة الآحاد:

يمكن حساب المئات بـ 5 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 4 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 1طريقة

$5.4.1 = 20$

الحالة (2): إذا لم يتم أخذ الصفر في خانة الآحاد:

يمكن حساب المئات بـ 4 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 4 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 1 طريقة

$4.4.1 = 16$

ومجموع الطرق الكلية:

$20 + 16 = 36$

36) الجواب:

5 نوطات ، 4 مكثفات

$$\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}_{\text{الخانات المتبقية}} \times \underbrace{\underline{3}}_{\text{خانة 3}} \times \underbrace{\underline{4}}_{\text{خانة 2}} \times \underbrace{\underline{5}}_{\text{خانة 1}}$$

$\Rightarrow n = 43200$

37) الجواب: اختيار لجنة مع تخاصم:

م : متخاصم (2)

م′ : غير متخاصم (5)

$$\{\text{م م′ م′} \times \frac{3!}{2!} \text{ أو } \text{م′ م′ م′}\}$$

$\Rightarrow n = 2 \times 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3$

$= 120 + 60 = 180$

حول منشور ثنائي الحد

1) الجواب

2) الجواب

3) الجواب:

آحاد وعشرات العدد 11^{11} :

$$11^{11} = (1+10)^{11}$$
$$T_r = \binom{11}{r}(1)^{11-r}(10)^r$$
$$= \binom{11}{r}(10)^r$$

إذاً الحدود $T_1, T_2, \dots, T_{11}$ هي من مضاعفات المئة أي أنّ الآحاد والعشرات 1 لأنّ:

$$T_0 + T_1 = 111$$

4) الجواب:

5) الجواب:

6) الجواب:

$$f(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^3}{8}$$
$$= \frac{1}{8}\left[\binom{3}{0}.e^{3ix}.e^{-0xi} + \binom{3}{1}.e^{2xi}.e^{-1xi} + \binom{3}{2}.e^{1xi}.e^{-2xi} + \binom{3}{3}e^{0xi}.e^{-3xi}\right]$$
$$= \frac{1}{8}(e^{3xi}+3e^{xi}+3e^{-xi}+e^{-3xi})$$
$$= \frac{1}{8}(3[e^{xi}+e^{-xi}]+[e^{3xi}+e^{-3xi}])$$
$$= \frac{1}{8}(6\cos(x)+2\cos(3x)$$
$$= \frac{6}{8}\cos(x)+\frac{2}{8}\cos(3x)$$
$$= \frac{3}{4}\cos(x)+\frac{1}{4}\cos(3x)$$

7) الجواب:

$$f(x) = \sin^3(x)$$
$$f(x) = \left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{xi}-e^{-xi})^3}{-8i}$$
$$= -\frac{1}{8i}\left[\binom{3}{0}e^{3xi}.e^{0xi} - \binom{3}{1}e^{2xi}.e^{-1xi} + \binom{3}{2}e^{1xi}.e^{-2xi} - \binom{3}{3}e^{0xi}.e^{-3xi}\right]$$
$$= -\frac{1}{8i}(e^{3xi}-3e^{xi}+3e^{-xi}-e^{-3xi})$$
$$= -\frac{1}{8i}(2i\sin(3x)-6i\sin(x))$$
$$= -\frac{2}{8}\sin(3x)+\frac{6}{8}\sin(x)$$

8) الجواب:

حسب اوبيتال:

$$\frac{-3sin(3x)}{-sin(x)} = \frac{3sin(3x)}{sin(x)}$$

$$lim_{x\to+\frac{\pi}{2}}\frac{3sin(3x)}{sin(x)} = -\frac{3}{1} = -3$$

9) الجواب:

الحد الذي يحوي x^2 :

$$T_r = \binom{n}{r}.a^{n-r}.b^r$$
$$T_r = \binom{10}{r}.x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{10}{r}.x^{10-2r}$$
$$10-2r = 2 \Longrightarrow r = 4$$
$$\Longrightarrow T_4 = \binom{10}{4}.x^2 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}x^2$$
$$\Longrightarrow T_4 = 210\,x^2$$

10) الجواب:

خواص n ليكون هناك حد ثابت:

$$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n \quad ; \quad a = x\,, b = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$T_r = \binom{n}{r}.x^{n-r}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$$
$$= \binom{n}{r}.x^{n-r}.x^{-\frac{1}{2}r}$$
$$= \binom{n}{r}.x^{n-\frac{3}{2}r}$$
$$n-\frac{3}{2}r = 0 \Longrightarrow n = \frac{3}{2}r \Longrightarrow r = \frac{2}{3}n$$

ومنه n يجب أن يكون من مضاعفات العدد 3

11) الجواب:

$$(2+10)^{12} = \binom{12}{r}2^{10-r}.10^r$$

$$T_0 = \binom{12}{0}.2^{12}.10^0 = 4096$$

$$T_1 = \binom{12}{1}2^{11}.10^1 = 245760$$

الآحاد: $T_0 = 4096$

العشرات: $T_0 + T_1 = 4096 + 245760 = 249{,}856$

12) الجواب:

القيم المحتملة للمجموع $a+b$:

نجد أنّ $f'(a)=5a+4b$ وبحسب الفرض:

$$5a+4b=62$$

ولكن a و b موجبان

$$4(a+b)\le 5a+4b\le 5(a+b)$$

وهذا يكافئ:

$$\frac{62}{5}\le a+b\le \frac{62}{4}$$
$$\Rightarrow 12.4\le a+b\le 15.5$$
$$\Rightarrow a+b\in\{13\,,14\,,15\}$$

13) الجواب:

نعمل شبكة سحب تتالي بدون إعادة: نحذف

القطر الرئيسي:

-	1	1	2	2	3
1					
1					
2					
2					
3					

$$n=4$$

14) الجواب:

$$n=5$$

15) الجواب:

$$n=12$$

16) الجواب:

3 كتب لـ A ، 4 كتب لـ B

$$\underbrace{1}_{\text{خانة 7}}\times\underbrace{2}_{\text{خانة 6}}\times\underbrace{3}_{\text{خانة 5}}\times\underbrace{4}_{\text{خانة 4}}\times\underbrace{2}_{\text{خانة 3}}\times\underbrace{3}_{\text{خانة 2}}$$
$$\times\underbrace{4}_{\text{خانة 1}}$$
$$\Rightarrow n=576$$

17) الجواب:

3 كتب لـ A ، 4 كتب لـ B

$$1\times2\times3\times4\times5\times6\times\underbrace{4}_{\text{خانة 1}}$$
$$\Rightarrow n=2880$$

18) الجواب:

$$\frac{1}{\binom{4}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r}}+\frac{1}{\binom{6}{r}}$$
$$\frac{1}{\frac{4!}{r!\,(4-r)!}}=\frac{1}{\frac{5!}{r!\,(5-r)!}}+\frac{1}{\frac{6i}{r!\,(6-r)!}}$$
$$\underbrace{\frac{(4-r)!}{4\times3\times2\times1}}_{(30)}=\underbrace{\frac{(5-r)!}{5\times4\times3\times2\times1}}_{(6)}+\underbrace{\frac{(6-r)!}{6\times5\times4\times3\times2\times1}}_{(1)}$$
$$\frac{30(4-r)!}{720}=\frac{6(5-r)!}{720}+\frac{1(6-r)!}{720}$$
$$\Rightarrow 30(4-r)!=(6(5-r)(4-r)!)+(6-r)(5-r)(4-r)!$$
$$\Rightarrow 30=30-6r+(6-r)(5-r)$$
$$\Rightarrow 30=30-6r+30-6r-5r+r^2$$
$$\Rightarrow r^2-17r+30=0$$
$$\Rightarrow (r-15)(r-2)=0$$
$$\Rightarrow r=15\quad,\quad r=2$$

19) الجواب:

مضاعفات 5 / أصغر من 500 :

شرط الآحاد $\{5\}$ ، شرط المئات $\{2\,,3\}$

عدد طرق اختيار الآحاد 1

عدد طرق اختيار العشرات 4

عدد طرق اختيار المئات 2

$$\Rightarrow n=1\times2\times4=8$$

20) الجواب:

مصافحة مع 3 متخاصمين:

$$\binom{10}{2}-\binom{3}{2}=\frac{10\times9}{2\times1}-3$$
$$=45-3=42 \text{ مصافحة}$$

مقدمة في الاحتمالات

التمرين (1)

1) $\{1\,,3\,,5\}$

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2) $\{2\,,3\,,5\}$

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

3) $\{4\,,5\,,6\}$

$$P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

4) $C\cup B=\{2\,,3\,,5\,,4\,,5\,,6\}$

$$P(C\cup B)=\frac{5}{6}$$

5) $A\cup B=\{1\,,3\,,5\,,2\,,3\,,5\}$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

6) الجواب:

$$P(B \cap C) = \frac{1}{6}$$

7) الجواب:

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

8) الجواب:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

التمرين (2) :

$$P(F \cap R) = P(F) + P(R) - P(A \cup R)$$
$$= \frac{30}{100} + \frac{40}{100} - \frac{60}{100}$$
$$= \frac{10}{100} = 10\%$$

يدرسون اللغتين معاً.

الاحتمال الشرطي

التمرين (1) :

1) نكتب فضاء العينة:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} BBBB \\ BBBG, BBGB, BGBB, GBBB \\ GGGB, GGBG, GBGG, BGGG \\ BGBG, GBGB, BBGG, GGBB \\ BGGB, GBBG \\ GGGG \end{matrix} \right\}$$

2) الجواب:

$$P(C) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

3) الجواب:

$$P(A) = \frac{2}{16}$$

4) الجواب:

$$P(B) = \frac{6}{16}$$

5) الجواب:

$$P(A \backslash C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{1}{8}$$

6) الجواب:

$$P(B \backslash C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{3}{8}$$

7) الجواب: مستقلان

8) $X = \{0\,,1\,,2\,,3\,,4\}$

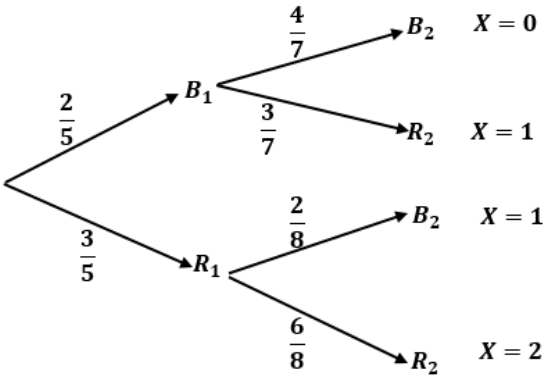
9) الجواب:

$$P(X = 4) = \frac{1}{16}$$

10) الجواب:

$$P(X = 1) = \frac{4}{16}$$

المسألة الأولى :



1) $P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2)$
$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{87}{140}$

2) S : $R_1 \cap R_2$ أو $B_1 \cap B_2$

$$\Rightarrow P(S) = \frac{3}{5} \times \frac{6}{8} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{63}{140} + \frac{8}{35} = \frac{95}{140}$$

3) $P(B_1) = \frac{2}{5}$

4) طريقة 1 :

S' : $R_1 \cap B_2$ أو $B_1 \cap R_2$

طريقة 2 :

$$P(S') = 1 - P(S) = 1 - \frac{95}{140} = \frac{45}{140}$$

5) $X = \{0\,,1\,,2\}$

6)

$$E(x) = \frac{6}{35} + \frac{6}{40} + \frac{18}{40}$$

المسألة الثانية:

-	B_2	B_1	R_1	R_2	w_1
B_2					
B_1					
R_1					
R_2					
w_1					

1) اهتمام باللون:

$$P(A) = \frac{9}{25}$$

2)
$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

3)
$$P(C) = \frac{11}{25}$$

4)
$$P(D) = \frac{12}{25}$$

5)
$$P(A \cap C) = \frac{3}{25}$$

المسألة الثالثة:

إعادة المسألة الثانية ولكن السحب دون إعادة.

	R_0	R_1	B_1	B_2	W_1
R_0	///////	$X=1$	$X=1$	$X=2$	$X=1$
R_1	$X=1$	///////	$X=2$	$X=3$	$X=2$
B_1	$X=1$	$X=2$	///////	$X=3$	$X=2$
B_2	$X=2$	$X=3$	$X=3$	///////	$X=3$
W_1	$X=1$	$X=2$	$X=2$	$X=3$	///////

1)
$$\mathrm{P(A)} = \frac{4}{20}$$

2)
$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{14}{20} = \frac{16}{20}$$

3)
$$P(B) = \frac{8}{20}$$

4)
$$P(C) = \frac{12}{20}$$

5) حدث مستحيل:

$$P(D) = P(A \cap B) = 0$$

$$X = \{1, 2, 3\}$$

x_i	1	2	3	$\sum$
P_i	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	1

$$E(x) = \sum x_i P_i = \frac{6}{20} + \frac{16}{20} + \frac{18}{20} = \frac{40}{20} = 2$$

المسألة الرابعة:

	R_0	R_1	B_1	B_2	W_1
R_0	//////	$X=1$	$X=1$	$X=2$	$X=1$
R_1	//////	//////	$X=2$	$X=3$	$X=3$
B_1	//////	//////	//////	$X=3$	$X=2$
B_2	//////	//////	//////	//////	$X=3$
W_1	//////	//////	//////	//////	//////

1)
$$P(A) = \frac{5}{10}$$

2)
$$P(B) = \frac{23}{10}$$

3)
$$P(C) = \frac{3}{10}$$

4)
$$P(D) = \frac{7}{10}$$

5) حدث مستحيل حيثُ:

$$P(A \cap C) = 0$$

6)
$$X = \{1, 2, 3\}$$

x_i	1	2	3	$\sum$
P_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

7)
$$E(x) = \frac{3}{10} + \frac{6}{10} + \frac{12}{10} = \frac{21}{10}$$

8)
$$V(x) = \left(\frac{3}{10} + \frac{12}{10} + \frac{36}{10}\right) - \frac{441}{100} = \frac{4659}{100}$$
$$\Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{4659}{100}} = \frac{\sqrt{4659}}{10}$$

المسألة الخامسة:

سحب ثلاث كرات معاً:

$$n(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

1) A : RRR أو WWW

$$n(A) = \binom{6}{3} + \binom{3}{3} = 20 + 1 = 21$$
$$\Rightarrow P(A) = \frac{21}{120}$$

2) B : RRR'

$$\Rightarrow n(B) = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} = 60$$
$$\Rightarrow P(B) = \frac{60}{120}$$

3) C : RWB

$$\Rightarrow n(C) = \binom{6}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{1}{1} = 18$$
$$\Rightarrow P(C) = \frac{18}{120}$$

4) D : $RR'R'$, RRR' , RRR

$$n(D) = \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{6}{3}$$
$$= (6)(6) + (15)(4) + 20$$
$$= 36 + 60 + 20 = 116$$
$$\Rightarrow P(D) = \frac{116}{120}$$

المسألة السادسة:

$6\,R$, $3W$, $1B$

1) RRR أو WWW

$$P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} + \frac{3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8} = \frac{126}{720}$$

2) تباديل RRR'

$$P(B) = \frac{6 \times 5 \times 4}{720} \times \frac{3!}{2!} = \frac{360}{720}$$

3)

$$P(C) = \frac{6 \times 4 \times 1}{720} \times 6 = \frac{144}{720}$$

4) حدث ظهور ثلاث كرات غير حمراء

E' : $R'R'R'$

$$P(E') = \frac{4 \times 3 \times 2}{720} = \frac{14}{720}$$

$$\begin{cases} RR'R' \\ RRR' \\ RRR \end{cases} \Rightarrow P(E) = 1 - \frac{14}{720} = \frac{706}{720}$$

5)

$$P(D) = \frac{1 \times 9 \times 8}{720} \times 3 = \frac{216}{720}$$

المسألة السابعة:

1) RRR أو WWW أو BBB

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{244}{1000}$$

2) RRR' $\frac{3!}{2!}$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right)(3) = \frac{432}{1000}$$

3) RWB $\frac{3!}{1!}$

$$\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)(6) = \frac{108}{1000}$$

4) E حدث ظهور كرة حمراء على الأقل.

E' حدث ظهور ثلاث كرات غير حمراء.

E' : $R'R'R'$

$$\Rightarrow P(E') = \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{64}{1000}$$
$$\Rightarrow P(E) = 1 - \frac{64}{1000} = \frac{936}{1000}$$

5) F حدث ظهور كرة سوداء على الأقل.

F' حدث ظهور ثلاث كرات غير سوداء.

F' : $B'B'B'$

$$\Rightarrow P(F') = \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{729}{1000}$$
$$\Rightarrow P(F) = 1 - \frac{729}{1000} = \frac{271}{1000}$$

6) X يدل على السوداء

$X = 2$ BBB'
$X = 3$ BBB
$X = 0$ $B'B'B'$
$X = 1$ $BB'B'$
$\Rightarrow X = \{0\,,1\,,2\,,3\}$

المسألة الثامنة:

	B_1	B_2	B_3	R_1	R_2
B_1	///////	$X=1$	$X=1$	$X=2$	$X=2$
B_2	///////	///////	$X=1$	$X=2$	$X=2$
B_3	///////	///////	///////	$X=2$	$X=2$
R_1	///////	///////	///////	///////	$X=1$
R_2	///////	///////	///////	///////	///////

1)

$$P(A) = \frac{5}{10}$$

2)

$$P(B)=\frac{4}{10}$$

3)

$$P(B\backslash A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{10}}=\frac{1}{5}$$

4) X عدد الألوان

$$X=\{1\,,2\}$$

5)

x_i	1	2	$\sum$
P_i	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

$$E(x)=\frac{4}{10}+\frac{12}{10}=\frac{16}{10}$$

6)

$$V(x)=\left(\frac{4}{10}+\frac{24}{10}\right)-\left(\frac{16}{10}\right)^2$$
$$=\frac{26}{10}-\frac{256}{100}=\frac{4}{100}$$

7)

$$\gamma=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{4}{100}}=\frac{2}{10}$$

المسألة التاسعة:

	1	1	2	2	3
1	//////	$X=2$	$X=3$	$X=3$	$X=4$
1	$X=2$	//////	$X=3$	$X=3$	$X=4$
2	$X=3$	$X=3$	//////	$X=4$	$X=5$
2	$X=3$	$X=3$	$X=4$	//////	$X=5$
3	$X=4$	$X=4$	$X=5$	$X=5$	//////

X مجموع الرقم الظاهر:

$$X=\{2\,,3\,,4\,,5\}$$

x_i	2	3	4	5	$\sum$
P_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	1

$$E(x)=\frac{4}{20}+\frac{24}{20}+\frac{24}{20}+\frac{20}{20}=\frac{72}{20}$$

$$V(x)=\left(\frac{8}{20}+\frac{72}{20}+\frac{96}{20}+\frac{100}{20}\right)-\frac{5184}{400}=\frac{336}{400}$$

$$\Rightarrow \gamma=\sqrt{\frac{336}{400}}$$

المسألة العاشرة:

	R_1	B_2	B_3
R_1	$y=2$ $x=0$	$x=1$ $y=3$	$x=1$ $y=4$
B_2	$y=3$ $x=1$	$x=2$ $y=4$	$x=2$ $y=5$
B_3	$y=4$ $x=1$	$x=2$ $y=5$	$x=2$ $y=6$

قيم x:

$$x\ :\ \{0\,,1\,,2\}$$

قيم y:

$$y\ :\ \{2\,,3\,,4\,,5\,,6\}$$

قانون x:

$$P(X=0)=\frac{1}{9}$$
$$P(X=1)=\frac{4}{9}$$
$$P(X=2)=\frac{4}{9}$$

x_i	0	1	2	$\sum$
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

قانون y:

y_i	2	3	4	5	6	$\sum$
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

القانون الاحتمالي للزوج:

$X\backslash Y$	2	3	4	5	6	قانون x
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9}$
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
قانون y	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$$P(X=0\cap Y=2)=\frac{1}{9}$$

دراسة الاستقلال:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$
$$P(X=0\cap Y=2)=\frac{1}{9}$$
$$P(X=0).P(Y=2)=\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$\frac{1}{9}\neq\frac{1}{9}.\frac{1}{9}$$ غير مستقلان

المسألة 11:

-	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

عبي القيم لحالك.

1) $P(X=0)=\frac{18}{36}$

2) $P(Y=2)=\frac{9}{36}$

3) لدينا:

$$P(X=0\cap Y=2)=\frac{9}{36}$$

نختبر شرط الاستقلال:

$$P(X=0).P(Y=2)=\frac{18}{36}.\frac{9}{36}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=0\cap Y=2)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

إذن غير مستقلان احتمالياً

المسألة 12:

$$E=\{X_A=2\,,X_B=1\}\cup\{X_A=1\,,X_B=2\}\cup\{X_A=1\,,X_B=1\}$$

$$\Rightarrow P(E)=[P(X_A\,,X_B)=(2\,,1)]+[P(X_A,X_B)=(2\,,1)]+[P(X_A\,,X_B)=(1\,,1)]$$

وبما أنّ الحدثان مستقلان احتمالياً:

$$P(X_A\,,X_B)=P(X_A).P(X_B)$$

$$\Rightarrow P(E)=0.04+0.06+0.1=0.2$$

المسألة 13:

$X\setminus Y$	0	1	2	قانون x
0	0.12	0.20	0.08	0.4
1	0.06	0.10	0.04	0.20
2	0.12	0.20	0.08	0.4
قانون y	0.3	0.50	0.20	1.0

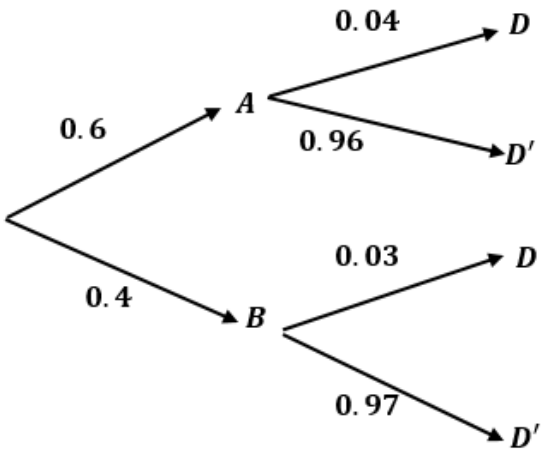
$$P(X=1).P(Y=1)=P(X=1\cap Y=1)$$

$$x\times 0.2=0.1\Rightarrow x=\frac{0.1}{0.2}=0.5$$

وهكذا .....

قواعد استخدام التمثيل الشجري

المسألة الأولى :



1)

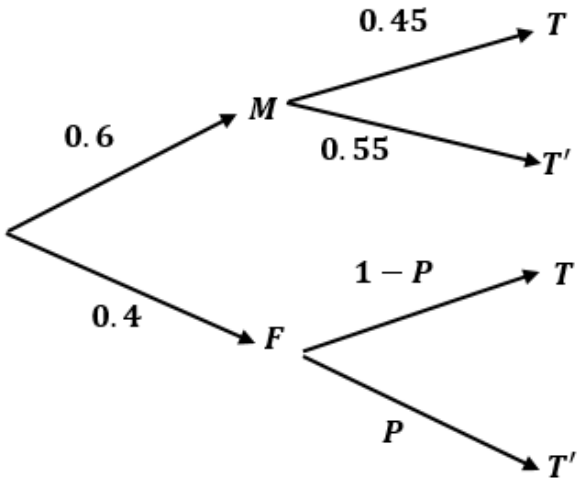
$$P(D)=(0.6)(0.004)+(0.4)(0.03)=0.036$$

2)

$$P(A\backslash D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{(0.6)(0.04)}{0.036}=\frac{2}{3}$$

المسألة الثانية:

T يلعبون ، T' لا يلعبون



$$P(T'\backslash F)=?$$

$$P(T'\backslash M)=0.55$$
$$P(T)=0.3$$
$$P(M)=0.6$$

$$P(T) = 0.4(1-P) + (0.6)(0.45) = 0.925$$
$$= P(T'\backslash F)$$

المسألة الثالثة:

$$P(A).P(C) = P(A \cap C) \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}P\right) = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{18}+\frac{2}{9}P = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{9}P = \frac{1}{6}-\frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2}{9}P = \frac{2}{18} \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

المسألة الرابعة:

$$X = \{2\,,3\,,4\}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4}\times\frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

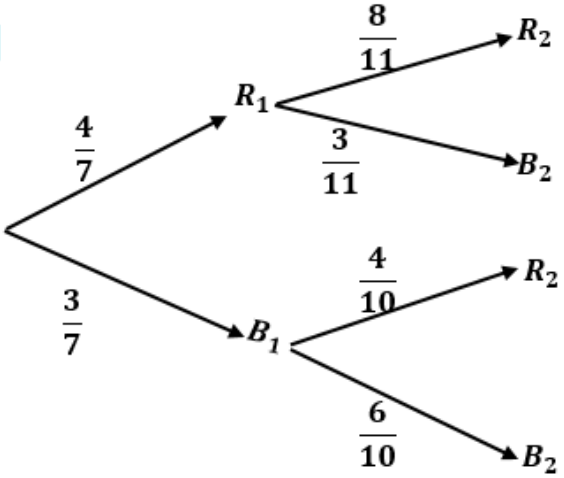
$$P(X=3) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

$$P(X=4) = 1-[P(X=2)+P(X=3)] = \frac{3}{5}$$

x_i	2	3	4
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

$$E(x) = 3.5$$

المسألة الخامسة:



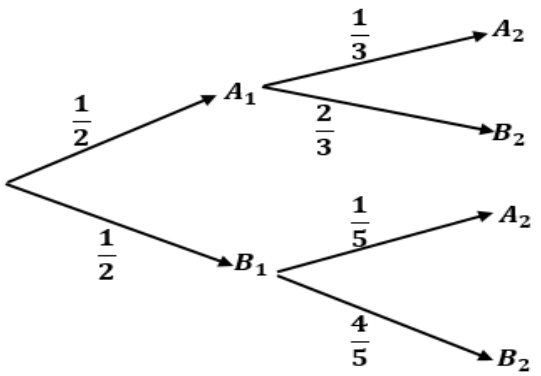
$$P(R_2) = \frac{4}{7}\times\frac{8}{11}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{10} = \frac{32}{77}+\frac{12}{70} = \frac{3164}{5396} = \frac{791}{1349}$$

$$P(B_1\backslash R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{12}{70}}{\frac{791}{1349}}$$

$$= \frac{12}{70}\times\frac{1349}{791} = \frac{16188}{55370}$$

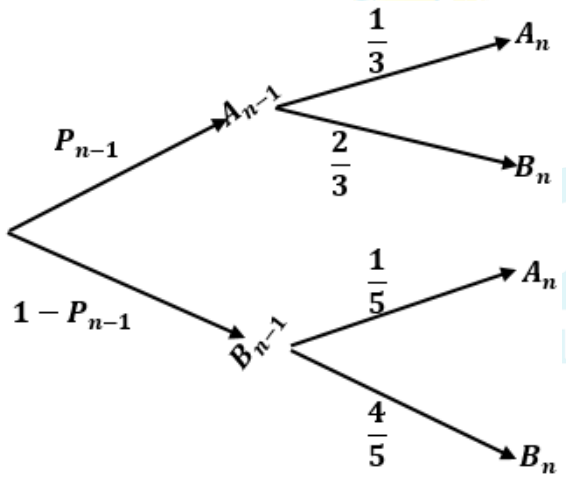
المسألة السادسة:

(1



$$P_2 = P(A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}$$

(2



$$P_n = P(A_n) = P_{n-1}\times\frac{1}{3}+(1-P_{n-1})\times\frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{5}+\frac{2}{15}P_{n-1}$$

(3

$$u_n = P_n - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}P_{n-1}+\frac{1}{5}-\frac{3}{13}$$
$$= \frac{2}{15}P_{n-1}-\frac{2}{65}$$
$$= \frac{2}{15}u_{n-1}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{15}u_{n-1}$$

هندسية أساسها:

$$q = \frac{2}{15}$$

وحدّها الأوّل:

$$u_1 = P_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$$

4) $u_n = q^{n-1} . u_1$

$$\Rightarrow u_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$$

$$P_n = \frac{3}{13} + \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{3}{13} + \frac{7}{26}(0) = \frac{3}{13}$$

المسألة السابعة:

1) الجواب:

$$c \ : \frac{1}{4}$$

2) الجواب:

$$c : \frac{1}{4}\, P(R_1) + \frac{1}{4}$$

3) الجواب:

$$c \ : \ \frac{1}{4} P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$$

4) الجواب:

هندسيّة أساسها $c : \frac{1}{4}$

5) الجواب:

$$c : -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

6) الجواب:

$$c : \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{3}$$

التجربة البرنولية

التمرين (1):

تجربة برنوليّة: $n = 5$

1) $X = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

2) $P(X = 0) = ?$

$$P = \frac{2}{6} \quad ; \quad q = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

$$P(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$= 1 \times \frac{32}{243} = \frac{32}{243}$$

3) $E(x) = n.P$

$$\Rightarrow E(x) = 5 \times \frac{2}{6} = \frac{10}{6}$$

4) $V(x) = n.q.P$

$$\Rightarrow V(x) = 5 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$$

التمرين (2):

n هي احتمال ظهور كتابة.

$2n$ هي احتمال ظهور صورة.

1) $X = \{0 , 1 , 2 , 3\}$

2) عدد مرات الرمي $n = 3$; $E(x) = n.p$

$$P = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow E(x) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

3) $V(x) = n.p.q$

$$\Rightarrow V(x) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

التمرين (3):

1) عدد الكرات البيضاء n

عدد الكرات الحمراء $3n$

$$3n + n = 4n$$

$$P(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

2) $X = \{0 , 1 , 2 , 3\}$

$$P = \frac{3}{4} \ , \ q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

والسحب هنا $n = 3$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

التمرين (4):

قيمة n : $n = 4$

قيمة P : لدينا:

$$P(X = 3) = \frac{1}{27}$$

$$\binom{3}{3} P^3 q^{3-3} = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow P^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$$

قيمة q :

$$q = \frac{2}{3}$$

قيمة $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{3}{3}\right)^{3} = \frac{8}{27}$$

منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد