السؤال الأول:

أوجد نهاية كل من التوابع الآتية:

.1 $f(x)=\frac{2sinx+5}{\sqrt{x+1}}\ ; a=+\infty$

.2 $f(x)=\frac{x-|sinx|}{x^2}; a=+\infty$

الحل:

.1 نستعمل مبرهنات الإحاطة لوجود $\sin(+\infty)$

$-1\le sinx\le 1$

نضرب ب 2:

$-2\le 2sinx\le 2$

نضيف 5:

$3\le 2sinx+5\le 7$

نقسم على $\sqrt{x+1}\ge 0$:

$$\frac{3}{\sqrt{x+1}}\le\frac{2sinx+5}{\sqrt{x+1}}\le\frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{\sqrt{x+1}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+1}}=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{2sinx+5}{\sqrt{x+1}}=0$$

.2 نستعمل مبرهنة الإحاطة لوجود $\sin(+\infty)$

$0\le|sinx|\le 1$

نضرب ب -1:

$0\ge-|sinx|\ge-1$

نضيف $x\ge 0$ لأن $(x\to+\infty)$:

$x\ge x-|sinx|\ge x-1$

نقسم على $x^2\ge 0$:

$$\frac{x}{x^2}\ge\frac{x-|sinx|}{x^2}\ge\frac{x-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2}=0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-|sinx|}{x^2}=0$$

السؤال الثاني:

ليكن التابع f الذي يحقق العلاقة:

$$\frac{3x+\sin(2x)}{x^2}\le f(x)\le\frac{3x+8}{x^2+1}$$

أوجد نهاية f عند ال$+\infty$.

الحل:

نحسب النهاية الأولى وهي:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+8}{x^2+1}=\frac{3}{+\infty}=0$$

نحسب النهاية الثانية وهي:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sin(2x)}{x^2}=\sin(+\infty)\Rightarrow \text{إحاطة}$$

$$-1\ge\sin(2x)\ge 1$$

نضيف $3x\ge 0$:

$$3x-1\ge 3x+\sin(2x)\ge 3x+1$$

نقسم على $x^2\ge 0$:

$$\frac{3x-1}{x^2}\ge\frac{3x+\sin(2x)}{x^2}\ge\frac{3x+1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x^2}=0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sin(2x)}{x^2}=0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R بالشكل :

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}$$

1- أثبت أن C لا يقبل مقاربات أفقية

2- أثبت أن $f(x)-x=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$
ثم استنتج أن C يملك مقارباً مائلاً Δ في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ

الحل:

1- $(x)=\sqrt{x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

2- $f(x)-x=\sqrt{x^2+1}-x$

نضرب بالمرافق:

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

نستنتج أن معادلة المقارب المائل:

$$y_\Delta=x$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0$$

3- نلاحظ أن:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}>0$$

C فوق Δ.

السؤال الرابع:

ليكن التابع f المعرف بالشكل $f(x)=\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-5x+6}$

1- أوجد مجموعة تعريف f وعين ما له من مقاربات شاقولية.

2- عين معادلة مقارب مائل للخط C_f .

3- ادرس الوضع النسبي لـ C_f مع المقارب المائل.

الحل:

1- نعدم المقام:

$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-3)(x-2)=0$$

إما:

$$x-3=0\Rightarrow x=3$$

أو:

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$

فإن:

$$D_f=\mathbb{R}\backslash\{2,3\}$$
$$=]-\infty,2[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\frac{15}{0^-}=-\infty$$

$x=2$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$.

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\frac{15}{0^+}=+\infty$$

$x=2$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$.

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\frac{43}{0^+}=+\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$.

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\frac{43}{0^-}=-\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$.

2- بقسمة البسط على المقام القسمة الإقليدية نجد:

$$f(x)=x+7+\frac{28x+1}{x^2-5x+6}$$

نفرض:

$$y_\Delta=x+7$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

فهو مقارب مائل في كل من الجوارين $\pm\infty$.

3- لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=0$$
$$\frac{28x+1}{x^2-5x+6}=0$$
$$28x+1=0$$
$$28x=-1$$
$$x=-\frac{1}{28}$$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{1}{28} \quad 2 \quad 3 \quad +\infty$
$\frac{28x+1}{x^2-5x+6}$	$-\quad 0 \quad + \quad \|\| \quad - \quad \|\| \quad +$
الوضع النسبي	تحت | فوق | تحت | فوق

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق:

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+1}$$

1- جد مجموعة تعريف التابع f

2- جد معادلة المقارب الأفقي للتابع

3- ادرس الوضع النسبي للمقارب الافقي مع C.

الحل:

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+1}$$

1- نعدم مقام التابع:

$$x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1$$

مستحيلة.

$$D_f=\mathbb{R}$$

2- لإيجاد معادلة المقارب الأفقي:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

$y=0$ مقارب افقي في جوار $\pm\infty$.

3- نشكل الفرق ونعدم:

$$f(x)-0=\frac{x+2}{x^2+1}$$

نعدم:

$$\frac{x+2}{x^2+1}=0\Rightarrow x+2=0$$
$$\Rightarrow x=-2$$

عندما $x < -2$ فإن C تحت المقارب الأفقي.

عندما $x > -2$ فإن C تحت المقارب الأفقي.

السؤال السادس:

ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق:

$$\boldsymbol{f(x) = x + \frac{E(x)}{x+1}}$$

1- اثبت أن Δ الذي معادلته $y_\Delta = x+1$ مقارب مائل لـ f

2- احسب $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

الحل:

1- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{E(x)}{x+1} - 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = E(\infty) \Rightarrow \text{إحاطة}$$

$$x - 1 \le E(x) \le x$$

نقسم على $x+1>0$ في جوار الـ $+\infty$

$$\frac{x-1}{x+1} \le \frac{E(x)}{x+1} \le \frac{x}{x+1}$$

نطرح 1:

$$\frac{x-1}{x+1} - 1 \le f(x) - y_\Delta \le \frac{x}{x+1} - 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} - 1 = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

وبالتالي Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

2- لحساب النهاية:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = \sqrt{2} + \frac{E(\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

السؤال السابع:

ادرس استمرار كلٍ من التوابع الآتية عند $a = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

الحل:

شرط استمرار تابع:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to0} f(x) = f(0)}$$

التابع الأول:

$$\lim_{x\to0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty(0) \text{ح ع ت}$$

نضرب ونقسم على $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to0} x^2 \frac{1}{x}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = 0(1) = 0$$

و $f(0) = 1$ فالتابع غير مستمر عند 0 لأن

$$\boldsymbol{\lim_{x\to0} f(x) \neq f(0)}$$

السؤال الثامن: ادرس قابلية الاشتقاق عند النقطة a الموافقة:

1. $f(x) = 2\sqrt{x} + x \,;\, a = 1$

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{0}{0} \text{ ح ع ت}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{2\sqrt{x} + x - 2 - 1}{x-1}$$

$$= \frac{(2\sqrt{x} - 2) + (x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 2}{x-1} + 1$$

$$= \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 2$$

فالتابع قابل للاشتقاق عند $x = 1$.

2. $f(x) = \sqrt{2-x} \,;\, a = 2$

$$\lim_{x\to2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{\sqrt{2-x}}{-(2-x)}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{1}{-\sqrt{2-x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

غير قابل للاشتقاق عند $x = 2$.

3. $f(x) = \sin(2x) \,;\, a = 0$

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin(2x)}{2x}$$

$$= 2(1) = 2$$

قابل للاشتقاق عند $x = 0$.

4. $f(x) = (2x-4)\sqrt{x-2} \,;\, a = 2$

$$\lim_{x\to2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{2(x-2)\sqrt{x-2}}{x-2} = 0$$

السؤال التاسع: **أوجد معادلة المماس عند النقطة a الموافقة:**

سنستخدم هذا القانون في الحل:

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

1. $f(x) = x^2 + 2 \,,\, a = 1$

$$f'(x) = 2x$$

$$f(1) = 3$$

$$f'(1) = 2$$

$$y = 2(x-1) + 3 = 2x - 2 + 3 = 2x + 1$$

2. $f(x) = \sqrt{2x+1} \,,\, a = 2$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f(2) = \sqrt{5}$$

$$f'(2)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2)+\sqrt{5}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2+5}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{7}{\sqrt{5}}$$

.3 $\boldsymbol{f(x)=\sin(x)\ ,a=\frac{\pi}{2}}$

$$f'(x)=cosx$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$y=0\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1=1$$

.4 $\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{x+1}\ ,a=0}$

$$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f(0)=0$$

$$f'(0)=1$$

$$y=1(x-0)+0$$

$$y=x$$

.5 $\boldsymbol{f(x)=x^2+\frac{1}{x}\ ,a=-1}$

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$$

$$f(-1)=1-1=0$$

$$f'(-1)=-2-1=-3$$

$$y=-3(x+1)+0$$

$$=-3x-3$$

.6 $\boldsymbol{f(x)=1-\frac{3}{x}\ ,a=1}$

$$f'(x)=+\frac{3}{x^2}$$

$$f(1)=-2$$

$$f'(1)=3$$

$$y=3(x-1)-2$$

$$=3x-3-2=3x-5$$

.7 $\boldsymbol{f(x)=sinx\ ,a=0}$

$$f'(x)=cosx$$

$$f(0)=0$$

$$f'(0)=1$$

$$y=1(x-0)+0$$

$$y=x$$

.8 $\boldsymbol{f(x)=tanx\ ,a=\frac{\pi}{4}}$

$$f'(x)=1+\tan^2 x$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+1=2$$

$$y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$$

$$=2x-\frac{\pi+2}{2}$$

السؤال العاشر:

اكتب معادلة المماس الذي ميله 4.

الحل:

$$f(x)=2x-x^2$$

$$f'(x)=2-2x$$

$$f'(a)=4$$

$$2-2a=4$$

$$\Rightarrow a=-2$$

$$f(-2)=-4-4=-8$$

$$y=4(x+2)-8$$

$$=4x$$

السؤال الحادي عشر:

اكتب معادلة المماس في النقطة التي ترتيبها -1.

الحل:

$$f(x)=x^2-5x+5$$

$$f'(x)=2x-5$$

$$f(a)=-1$$

$$a^2-5a+5=-1$$

$$a^2-5a+6=0$$

$$(a-3)(a-2)=0$$

إما:

$$a=3$$

$$f(3)=9-15+5=-1$$

$$f'(3)=2(3)-5=1$$

$$\Rightarrow y_1=1(x-3)-1=x-4$$

أو:

$$a=2$$

$$f(2)=4-10+5=-1$$

$$f'(2)=-1$$

$$\Rightarrow y_2=-1(x-2)-1=x-3$$

السؤال الثاني عشر:

اكتب معادلة المماس في نقطة التقاطع مع محور الفواصل.

الحل:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

في التقاطع مع محور الفواصل نضع:

$$y = 0$$
$$f(a) = 0$$
$$\frac{a+1}{a-1} = 0$$
$$\Rightarrow a = -1$$
$$f'(-1) = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x+1) + 0$$
$$= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

السؤال الثالث عشر:

اكتب معادلة المماس في نقطة التقاطع مع محور التراتيب.

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$
$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

في التقاطع مع محور التراتيب نضع:

$$x = 0$$
$$f(0) = -1$$
$$f'(0) = -\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x-0) - 1$$
$$= -\frac{1}{4}x - 1$$

السؤال الرابع عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع $f(x) = \sqrt{x-1}$

1- ادرس قابلية الاشتقاق عند $a = 1$

2- فسر النتيجة هندسياً

الحل:

1- لدراسة قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

غير قابل للاشتقاق عند $a = 1$.

2- إن f يقبل مماساً شاقولياً عند $a = 1$ ومعادلته $x = 1$.

السؤال الخامس عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{x+3|x|}{x^2+3}$

1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $a = 0$

2- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للخط c_f عند $a = 0$

3- اكتب معادلة نصف المماس من اليسار للخط c_f عند $a = 0$

الحل:

1- لدراسة قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

نزيل القيمة المطلقة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{x^2+3}; x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{-2x}{x^2+3}; x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4x}{x^2+3}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{4}{x^2+3}$$
$$= \frac{4}{3} = f'(0^+)$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-2x}{x^2+3}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{x^2+3}$$
$$= -\frac{2}{3} = f'(0^-)$$

2- معادلة نصف المماس اليميني:

$$y_{T_1} = f'(0^+)(x-0) + f(0)$$
$$= \frac{4}{3}x$$

3- معادلة نصف المماس اليساري:

$$y_{T_2} = f'(0^-)(x-0) + f(0)$$
$$= -\frac{2}{3}x$$

السؤال السادس عشر:

ليكن c_f الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{2}{|x|+\sqrt{2}}$

1- ادرس قابلية الاشتقاق التابع f عند $a = 0$

2- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للخط c_f عند $a = 0$

3- اكتب معادلة نصف المماس من اليسار للخط c_f عند $a = 0$

الحل:

1- لدراسة قابلية الاشتقاق سنكتب التابع بصيغة مستقلة عن القيمة المطلقة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+\sqrt{2}} & ;x\in[0,+\infty[\\ \dfrac{2}{-x+\sqrt{2}} & ;x\in]-\infty,0[\end{cases}$$

نميز حالتين:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x+\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{2}-2x-2\sqrt{2}}{x(x+\sqrt{2})(\sqrt{2})}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2}{(x+\sqrt{2})(\sqrt{2})}$$

$$=-1=f'(0^+)$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{2}{\sqrt{2}-x}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2x}{x(\sqrt{2}-x)\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{x(\sqrt{2}-x)\sqrt{2}}=1=f'(0^-)$$

2- لكتابة معادلة نصف المماس اليميني:

$$y_{T_1}=f'(0^+)(x-0)+f(0)$$

$$=-1(x-0)+\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$=-x+\frac{2}{\sqrt{2}}$$

3- لكتابة معادلة المماس اليساري:

$$y_{T_2}=f'(0^-)(x-0)+f(0)$$

$$=1(x-0)+\frac{2}{\sqrt{2}}=x+\frac{2}{\sqrt{2}}$$

السؤال السابع عشر:

ليكن $f(x)=2\cos(3x)$ أثبت أن $f''(x)+9f(x)=0$.

الحل:

$$f'(x)=-6\sin(3x)$$

$$f''(x)=-18\cos(3x)$$

لننطلق من طرف لنصل إلى آخر:

$$f''(x)+9f(x)$$

$$=-18\cos(3x)+18\cos(3x)=0$$

السؤال الثامن عشر:

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=\frac{1}{x}$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$

2- أثبت أن $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

الحل:

1- نحسب المشتقات:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=-\frac{-2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

$$f^{(3)}(x)=-\frac{3}{x^4}$$

2- نستخدم الاثبات بالتدريج:

$$E(n):f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$ ...... الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$$ .... الطلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

نشتق:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)(n+1)x^n(-1)^n n!}{x^{2n+2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{2n+2-n}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$$

فالمساواة صحيحة.

دراسة تغيرات تابع

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب ما تجده من مقاربات
2- جد معادلة المقارب المائل للخط C عند $+\infty$ و $-\infty$
3- ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب المائل
4- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها
5- اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب
6- أثبت أن النقطة $A(-1,-2)$ هي مركز تناظر للخط C
7- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم T ثم ارسم C
8- ناقش بيانياً حلول المعادلة $3+m(-x-1)+x^2=0$

الحل:

1- نوجد مجموعة التعريف:

$$D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

1- $x=-1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.

2- بقسمة التابع قسمة إقليدية:

$$f(x)=x-1+\frac{4}{x+1}$$

نشكل الفرق:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{4}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

3- لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=0$$

$$4\neq 0$$

مستحيلة.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{4}{x+1}$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	تحت	$\|$	فوق

4- لدراسة التغيرات:

التابع f معرف واشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$x^2+2x-3=0$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f(x)$		0	$\|\|$	0	
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	-6	↘ $-\infty$ $\|\|$ $+\infty$ ↗	2	↘ $+\infty$

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$x_1=1\ ,x_2=-3$$

$$f(1)=\frac{4}{2}=2$$

$$f(-3)=\frac{12}{-2}=-6$$

5- التقاطع مع محور التراتيب:

$$x=0$$

$$y_T=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$=-3(x-0)+3=-3x+3$$

6- النقطة $A(-1,-2)$:

$$x\in\mathbb{R}\Rightarrow -2-x\in\mathbb{R}$$

$$f(x)+f(2a-x)=2b$$

$$f(x)+f(-2-x)$$

$$=\frac{x^2+3}{x+1}+\frac{(-2-x)^2+3}{-2-x+1}$$

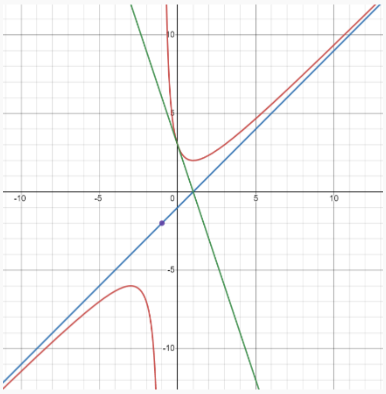
$$=\frac{x^2+3}{x+1}+\frac{4+4x+x^2+3}{-x-1}$$

$$=\frac{x^2+3-(7+4x+x^2)}{x+1}$$

$$=\frac{x^2+3-7-4x-x^2}{x+1}$$

$$=\frac{-4(x+1)}{(x+1)}=-4$$

7- الرسم:



8- ننطلق من:

$$3+m(-x-1)+x^2=0$$

$$m(-x-1)=-x^2-3$$

$$m=\frac{-(x^2+3)}{-(x+1)}=f(x)$$

$$f(x)=m$$

الحلول بيانياً:
- $m\in]-\infty,-6[$ حلان
- $m=-6$ حل وحيد
- $m\in]-6,2[$ لا يوجد حلول
- $m=2$ حل وحيد
- $m\in]2,+\infty[$ حلان

المسألة الثانية:

$$f(x)=x-4+\sqrt{x-2}\ \ :]2,+\infty[$$

1- ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ و نظم جدولاً بها

2- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

3- اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=3$

الحل:

1- نوجد النهايات:

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=2-4+0=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع اشتقاقي على $]2,+\infty[$.

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x-2}+1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{2\sqrt{x-2}+1}{2\sqrt{x-2}}=0$$

$$2\sqrt{x-2}+1=0$$

$$2\sqrt{x-2}=-1$$

$$\sqrt{x-2} = -\frac{1}{2}$$

مستحيلة.

x	$+2$	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+++\ ++++++$	
$f(x)$	‖-2 ↗	$+\infty$

2- نجد من جدول التغيرات السابق أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً.

3- نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y = f'(3)(x-3)+f(3)$$
$$= \frac{7}{2}(x-3)+0$$
$$= \frac{7}{2}x - \frac{21}{2}$$

المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = (3-x)\sqrt{x-3}$

1- جد مجموعة تعريف التابع f

2- أثبت أن f قابل للاشتقاق عند $a=3$ ثم استنتج معادلة المماس عند $a=3$

3- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

4- ارسم C

1- التابع $\sqrt{x-3}$ معرف على:

$$x-3 \geq 0$$
$$x \geq 3$$
$$\Rightarrow D_{\sqrt{x-3}} = D_f = [3,+\infty[$$

2- نعوض في تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\sqrt{x-3}}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)\sqrt{x-3}}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3} -\sqrt{x-3} = 0$$

معادلة المماس الأفقي:

$$y = 3$$

3- ندرس النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

f اشتقاقي على $[3,+\infty[$:

$$f'(x) = -\sqrt{x-3} + \frac{3-x}{\sqrt{x-3}}$$
$$= \frac{3-x+3-x}{\sqrt{x-3}} = \frac{6-2x}{\sqrt{x-3}}$$

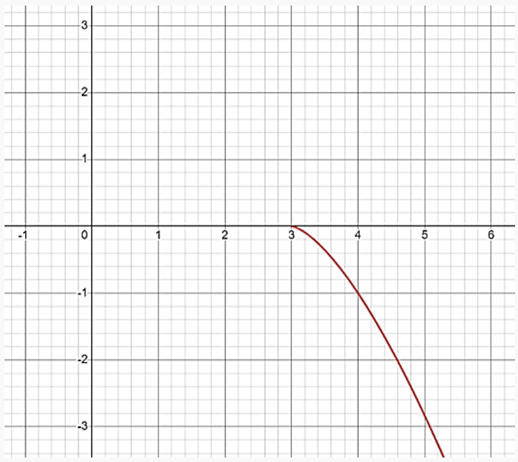
نعدم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6-2x = 0$$
$$\Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = 0$$

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	0 $-----------$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

4- الرسم:



المسألة الرابعة:

ليكن $f(x) = x - sinx$ اثبت أن f متزايد

الحل:

التابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} > 0$$

المشتق موجب فالتابع متزايد.

المسألة الخامسة:

ليكن التابع $\mathbf{f}$ المعرف بالشكل:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$$

1- ادرس تغيرات $\mathbf{f}$ ونظم جدولاً بها.

2- اوجد معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي

3- أثبت أن $\mathbf{f}$ فردي

4- ارسم المقارب المائل وارسم $\mathbf{c_f}$

5- بفرض $\mathbf{u_{n+1}} = \frac{\mathbf{u_n}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{u_n}}$ و $\mathbf{u_0} = \mathbf{2}$

أ- أثبت بالتدريج $\sqrt{2} \leq \mathbf{u_{n+1}} \leq \mathbf{u_n}$

ب- أستنتج أن المتتالية متقاربة و عين نهايتها

الحل:

1- مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.

f اشتقاقي على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{x^2-2}{2x^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$
$$x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$
$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$
$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

2- نفرض معادلة المقارب المائل:

$$y_\Delta = \frac{1}{2}x$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

وبالتالي Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = 0$$
$$\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$$

مستحيلة

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$-$	||	$+$
الوضع	تحت	||	فوق

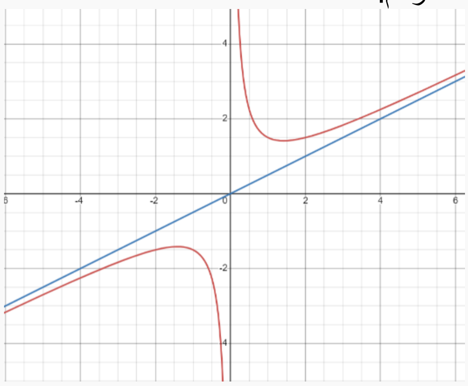
3- لإثبات أن التابع فردي:

$$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$f(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)$$
$$= -f(x)$$

فالتابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

4- الرسم:



5- لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}, u_0 = 2$$

أ) الإثبات:

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): \sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2} \le \frac{3}{2} \le 2$$

صحيحة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

فرض... $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب... $\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

نعرف تابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$ ولدينا من الجدول السابق أن f متزايد على $[\sqrt{2},+\infty[$ وبالتالي نصور الأطراف:

$$f(\sqrt{2}) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n)$$
$$\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة.

ب) لدينا من اقضية السابقة:

$$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

بالتالي المتتالية متناقصة لأنّ:

$$u_{n+1} \le u_n$$

ومحدودة من الأدنى لأنّ:

$$\sqrt{2} \le u_n$$

فالمتتالية متقاربة ولتعيين نهايتها نحل المعادلة الآتية:

$$f(x) = x$$
$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x$$
$$\frac{x^2+2}{2x} = x$$
$$x^2 + 2 = 2x^2$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

مقبول $x = \sqrt{2}$

مرفوض $x = -\sqrt{2}$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$

التابع اللوغارتمي

السؤال الأول:

ليكن f التابع المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{\ln(x)+2}{\ln(x)+1}$$

1- احسب نهاية التابع f عند $+\infty$.

2- جد عدداً حقيقياً A ليحقق الشرط: $f(x) \in]0.9,1.1[$ عندما $x > A$.

3- استنتج نهاية $f\big(f(x)\big)$ عند $+\infty$.

الحل:

1- لحساب النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)\left(1+\frac{2}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)} = 1$$

2- لإيجاد العدد A:

$$|f(x)-l| < \varepsilon$$
$$l = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$
$$\varepsilon = b - l = 0.1 = \frac{1}{10}$$

نعوض:

$$\left|\frac{\ln(x)+2}{\ln(x)+1} - 1\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{\ln(x)+2-\ln(x)-1}{\ln(x)+1}\right| = \frac{1}{10}$$
$$\frac{1}{\ln(x)+1} < \frac{1}{10}$$

نقلب:

$$\ln(x)+1 > 10$$
$$\ln(x) > 9$$
$$x > e^9$$

نختار $A = e^9$

3- لاستنتاج النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{X\to 1} f(X) = 2$$

السؤال الثاني:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

$$\ln(x^2+1) = \ln(7x)$$
$$\ln(x^2-4) = \ln(2x-4)$$

الحل:

المعادلة الأولى:

$$\ln(x^2+1) = \ln(7x)$$
$$E_1 =]-\infty,+\infty[\,, E_2 =]0,+\infty[$$
$$\Rightarrow E = E_1 \cap E_2 =]0,+\infty[$$
$$x^2+1 = 7x$$
$$x^2-7x+1 = 0$$
$$\Delta = 49-4(1)(1) = 45 > 0$$

$x_1 = \dfrac{7+\sqrt{45}}{2} = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$ مقبول

$x_2 = \dfrac{7-\sqrt{45}}{2} = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ مقبول

والحلان مقبولان حسب شرط الحل.

المعادلة الثانية:

$$\ln(x^2-4) = \ln(2x-4)$$
$$E_1 =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$$
$$E_2 =]2,+\infty[$$
$$\Rightarrow E = E_1 \cap E_2 =]2,+\infty[$$
$$x^2-4 = 2x-4$$
$$x^2-2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$

إما:

$x = 0$ مرفوض

أو:

$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$ مرفوض

السؤال الثالث:

ليكن لدينا التابعان f و g المعرفان وفق:

$$g(x) = 2x^2+1-\ln(x)$$

والتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = 2x-2+\frac{\ln(x)}{x}$$

أولاً:

1) ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها.
2) استنتج إشارة $g(x)$ من جدول التغيرات.

ثانياً:

1) احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.
2) أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ واستنتج جدول تغيرات f.

ثالثاً:

1) أثبت وجود عددين حقيقيين a و b يحققان أن:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \qquad b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x$$

2) استنتج معادلة المقارب Δ للخط C_f, وادرس الوضع النسبي.

3) اكتب معادلة المماس d في نقطة من C_f التي فاصلتها (1).

رابعاً: ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f.

الحل:

أولاً:

-1 النهايات:

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2x + \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x}\right)$$

$$= +\infty(+\infty + 0 - 0) = +\infty$$

g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$x = \frac{1}{2}$ مقبول

$x = -\frac{1}{2}$ مرفوض

الجدول:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$------$	0	$+++++$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2} + \ln(2)$	↗	$+\infty$

-2 نلاحظ أن:

$$g(x) \geq \frac{3}{2} + \ln(2) > 0$$

$$g(x) > 0$$

ثانياً:

1) لحساب النهايات:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = 2 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$$

الجدول:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+++++++++$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

ثالثاً:

1) نوجد النهايات:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x.x}\right)}{x}$$

$$= 2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = a$$

$$f(x) - 2x = 2x - 2 + \frac{\ln(x)}{x} - 2x$$

$$= -2 + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = -2 = b$$

2) المعادلة:

$$y_\Delta = 2x - 2$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

إذن هو مقارب مائل.

$$f(x) - y_\Delta = 0$$

$$\ln(x) = 0$$

$$x = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$\frac{\ln(x)}{x}$	‖	$-----$	0	$+++++$	
وضع	‖	تحت		فوق	

3) لكتابة معادلة المماس:

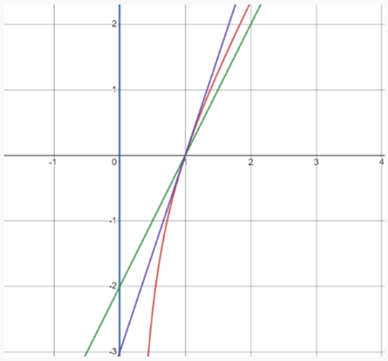
$$y_d = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$f'(1) = 3$$

$$f(1) = 0$$

$$\Rightarrow y_d = 3(x - 1) + 0 = 3x - 3$$

رابعاً: الرسم:



السؤال الرابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n} \quad ; \quad u_0 = 0$$

ولنضع المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق $v_n = u_{n+1} - u_n$:

1) أثبت أن v_n هندسية وعين أساسها وحدها العام.

2) من أجل كل $n \geq 1$ نضع $w_n = \ln(v_n)$:

أ) أثبت أنها حسابية وعين أساسها.

ب) اكتب w_n بدلالة n.

ت) حسب قيمة المجموع:

$$S = 1 - \frac{w_1}{\ln(2)} - \frac{w_2}{\ln(2)} - \cdots - \frac{w_5}{\ln(2)}$$

الحل:

-1 لإثبات أن المتتالية هندسية:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n} = v_n$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n.2}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2^n.2}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} = q$$

المتتالية هندسية وأساسها $q = \frac{1}{2}$, وحدها العام $v_n = \frac{1}{2^n}$.

-2 لدينا:

$$w_n = \ln(v_n)$$

أ- نوجد w_{n+1}:

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$$

نوجد الفرق:

$$w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

$$= \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) = r$$

فالمتتالية حسابية وأساسها $r = -\ln(2)$.

ب- لإيجاد الحد العام نعوض في:

$$w_n = w_0 + n.r = \ln(1) - n.\ln(2)$$

$$= n.\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

ت- لحساب قيمة المجموع:

$$S = 1 - \frac{w_1}{\ln(2)} - \frac{w_2}{\ln(2)} - \cdots - \frac{w_5}{\ln(2)}$$

$$= 1 - \left(\frac{w_1}{\ln(2)} + \frac{w_2}{\ln(2)} + \cdots + \frac{w_5}{\ln(2)}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\ln(2)}(w_1 + w_2 + \cdots + w_5)$$

ونلاحظ أن لدينا مجموع متتالية حسابية وهو:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

$$S = n.\frac{a+l}{2}$$

$$n = 5 - 1 + 1 = 5$$

$$a = w_1 = 0$$

$$l = w_5 = 5\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow w_1 + w_2 + \cdots + w_5 = 5.\frac{0 + 5\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{\ln(2)}{2}$$

نعوض في S:

$$S = 1 - \frac{1}{\ln(2)}\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

السؤال الخامس:

ادرس اطراد التابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$$

واستنتج حلول المتراجحة $\sqrt{x} \geq \ln(x)$.

الحل:

g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x} = 0$$

$$x = \sqrt{x}$$

نربع الطرفين بشرط $x > 0$ وهي كذلك على مجموعة التعريف:

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

إما:

$x = 0$ مرفوض

أو:

$x = 1$ مقبول

الجدول:

نلاحظ أن:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$---$	0	$+++$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$\sqrt{x} \geq \ln(x)$$

$$\sqrt{x} - \ln(x) \geq 0$$

$$g(x) \geq 0$$

من الجدول نلاحظ أن حلها:

$$s = [1, +\infty[$$

المتتاليات

مثال 1: لتكن لدينا المتتالية $u_n = 2 \times 3^n$ و المطلوب :

1- أثبت أنها هندسية

2- احسب قيمة المجموع

$$S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{10}$$

3- احسب المجموع :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$$

الحل :1 – إثبات أنها هندسية :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3 = q$$

2-حساب المجموع:

$$S = a\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$a = u_2 = 2 \times 3^2 = 18$$

عدد الحدود : $10 - 2 + 1 = 9$

$$S = 18 . \frac{1 - 3^9}{1 - 3} = -9(1 - 3^9)$$

3-حساب المجموع :

$$S_n = a\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$a = u_0 = 2$$

$$l = u_n = 2 \times 3^n$$

عدد الحدود : $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = 2\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}$$

$$S_n = -1(1 - 3^{n+1}) = 3^{n+1} - 1$$

1- ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$, أثبت أنها هندسية .

الحل :

1) نحسب u_{n+1} وذلك باستبدال كل n بـ $n+1$

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

2) نحسب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right)}{\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} . \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n . 2^1}{3^n . 3^2} . \frac{3^n . 3^1}{2^n}$$

$$\frac{u_{(n+1)}}{u_n} = \frac{2}{3} = q$$

هندسية وأساسها $q = \frac{2}{3}$

2- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $u_n = 3 - n$, أثبت أنها حسابية .

الحل :

1) نحسب u_{n+1}

$$u_{n+1} = 3 - (n + 1) = 2 - n$$

2) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = (2 - n) - (3 - n) = -1 = r$$

حسابية وأساسها $r = -1$

3- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$, احسب u_{20}

الحل :

من العلاقة بين حدين

$$u_n = u_m + (n - m)r$$

$$u_5 = u_2 + (5 - 2)r$$

$$\Rightarrow -13 - 41 = 3r$$

$$-54 = 3r$$

$$\Rightarrow r = -\frac{54}{3} = -18$$

مرة أخرى

$$u_n = u_m + (n - m)r$$

$$u_{20} = u_2 + (20 - 2)r$$

$$\Rightarrow u_{20} = 41 - 324$$

$$\Rightarrow u_{20} = -324 + 41 = -283$$

4- $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية فيها $u_4 = 16$ و $u_1 = 2$, احسب u_3 .

الحل :

من قانون الحدين $u_n = u_m q^{n-m}$

$$u_4 = u_1 . q^{4-1} \Rightarrow \frac{16}{2} = q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

مرة أخرى :

$$u_n = u_m . q^{n-m}$$

$$u_3 = u_1 . 2^{3-1}$$

$$u_3 = 2 \times 4 \Rightarrow u_3 = 8$$

-5 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1) احسب u_n بدلالة n

2) احسب المجموع $u_{30} + u_{31} + u_{32}$

3) احسب المجموع

$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$

الحل :

1) من قانون الحدين

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_n = u_1 + (n-1)3$$
$$u_n = 2 + 3n - 3$$
$$u_n = 3n - 5$$

2) من قانون مجموع حدود متتالية حسابية :

$$u_{30} + u_{31} + u_{32} = n\frac{(a+l)}{2}$$

حيث $a = u_{30} = 3(30) - 5 = 85$ (تم حسابه من تعويض n=30 في الحد العام)

و $l = u_{32} = 3(32) - 5 = 91$ (تم حسابه من تعويض $n =$ 32 في الحد العام)

وعدد الحدود $n = 32 - 30 + 1 = 3$ (آخر دليل ناقص أول دليل + 1)

بالتعويض:

$$u_{30} + u_{31} + u_{32} = 3\frac{(85+91)}{2} = 264$$

3) أيضاً من قانون مجموع حدود متتالية حسابية :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = n\frac{(a+l)}{2}$$
$$a = u_1 = -2$$
$$l = u_{20} = 3(20) - 5 = 55$$
$$n = 20 - 1 + 1 = 20$$
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = 20\frac{(-2+55)}{2} = 530$$

-6 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 و $u_0 = 1$, احسب

$u_3 + u_4 + \cdots + u_{10}$

الحل : لنوجد الحد العام أولاً

$$u_n = u_0 . q^n = 1.2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow u_n = 2^n$$

$$S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{10} = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a = u_3 = 2^3 = 8$$

$$q = 2$$

$$n = 10 - 3 + 1 = 8$$

$$S = 8.\frac{1-2^8}{1-2} = 8\frac{1-2^8}{-1} = 8(2^8 - 1) = 2040$$

فائدة هامة (مجموع مع قفزات)

نطبق نفس القوانين مع مراعاة :

عدد الحدود= $\frac{\text{أول دليل} - \text{آخر دليل}}{\text{طول القفزة}} + 1$

في الهندسية $q' = q^{\text{القفزة}}$

في الحسابية $r' = r \times$ القفزة

مثال :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 و فيها $u_1 = -2$

1) احسب u_n بدلالة n

2) احسب قيمة المجموع

$u_1 + u_2 + \cdots + u_7$

3) احسب قيمة المجموع

$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$

الحل :

1) من قانون الحدين

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \Rightarrow \frac{u_n}{u_1} = q^{n-1} \Rightarrow \frac{u_n}{-2} = 3^{n-1}$$

$$u_n = -2.(3)^{n-1}$$

2) $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7 = a.\frac{1-q^n}{1-q}$

$$a = u_1 = -2.(3)^{1-1} = -2$$

$$q = 3$$

$$n = 7 - 1 + 1 = 7$$

$$S = -2\frac{1-3^7}{1-3} = 1 - 3^7 = -2186$$

3) نلاحظ أن المجموع المطلوب هنا عبارة عن مجموع لحدود ليست متعاقبة (يوجد قفزة قدرها 2 بين كل دليل و الآخر) لذا نتبع الخطوات التالية :

عدد الحدود الجديد $n = \frac{2n-2}{2} + 1$

الأساس الجديد $q' = 3^2 = 9$

الحد الأول : $u_2 = -6$

القانون :

$$S = a\frac{1-(q')^n}{1-q'}$$
$$S = -6\frac{1-9^n}{1-9}$$

الإثبات بالتدريج

إذا كانت $E(n)$ قضية متعلقة بالعدد الطبيعي n حيث $n \geq n_0$ وأردنا إثبات أنها صحيحة مهما تكن $n \geq n_0$ فإن أفضل الطرق لذلك هي "الإثبات بالتدريج" أو ما يعرف بال " الاستقراء الرياضي" .

طريقة الإثبات بالتدريج :

① نرمز للقضية $E(n)$

② نثبت صحة القضية من أجل أول قيمة لـn ولتكن n_0

③ نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة ... (الفرض)

④ نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ ... (الطلب) مستفيدين من (الفرض)

النمط الأول من التمارين (المضاعفات) :

❶ أثبت صحة الخاصة

$E(n)$:"3 للعدد مضاعف 4^n+5 العدد " ; $n \geq 1$

الحل:

نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n=1$:

$4^1+5=4+5=9$

من مضاعفات العدد 3

$\Leftarrow$ الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$4^n+5=3k$ ... (الفرض)

حيث $k \in \mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$4^{n+1}+5=3m$ ... (الطلب)

حيث $m \in \mathbb{Z}$

البرهان: لدينا من الفرض :

$4^n+5=3k$

نضرب الطرفين بـ 4^1

$4^{n+1}+20=12k$

نضيف و نطرح 5 :

$4^{n+1}+5-5+20=12k$

$4^{n+1}+5+15=12k$

$4^{n+1}+5=12k-15$

$4^{n+1}+5=3m$

و هو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة مهما يكن $n \geq 1$

❷ أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: " 7 للعدد مضاعف $2^{3n}-1$ "

الحل:

نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n=1$:

$2^3-1=8-1=7$

من مضاعفات العدد 7

$\Leftarrow$ الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$2^{3n}-1=7k$ ... (الفرض)

حيث $k \in \mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$2^{3(n+1)}-1=7m$

$2^{3n+3}-1=7m$ ... (الطلب)

حيث $m \in \mathbb{Z}$

البرهان : لدينا من الفرض

$2^{3n}-1=7k$

نضرب الطرفين بـ 2^3 :

$$2^{3n+3}-2^3=2^3(7k)$$
$$2^{3n+3}-8=56k$$

نطرح 1 و نضيف 1 :

$$2^{3n+3}-1+1-8=56k$$
$$2^{3n+3}-1-7=56k$$
$$2^{3n+3}-1=56k+7$$
$$2^{3n+3}-1=7\underbrace{(8k+1)}_{m}$$
$$2^{3n+3}-1=7m$$

و هو المطلوب .فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall\, n \geq 1$

❸ أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: " 3 للعدد مضاعف n^3+2n "

الحل:

نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n=1$:

$$1^3+2(1)=3$$

مضاعف للعدد 3

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$n^3+2n=3k \ldots (\text{الفرض})$$

حيث $k\in\mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$(n+1)^3+2(n+1)=3m \ldots (\text{الطلب})$$

حيث $m\in\mathbb{Z}$

البرهان :

$$l_1=(n+1)^3+2(n+1)$$

$$l_1=n^3+3n^2+3n+1+2n+2$$

$$l_1=(n^3+2n)+3n^2+3n+3$$

ولكن حسب (الفرض) لدينا

$$n^3+2n=3k$$

نعوض:

$$l_1=3k+3n^2+3n+3$$

$$l_1=3(k+n^2+n+1)$$

$$l_1=3m$$

و هو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall n\geq 1$

النمط الثاني من التمارين (المجاميع) :

1 $\mathbf{E(n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$

نثبت صحة الخاصة من أجل $n=1$:

$$l_1=1 \quad , \quad l_2=\frac{1(1+1)}{2}=1 \quad \Rightarrow l_1=l_2$$

فالخاصة محققة من أجل $n=1$

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \ldots.(\text{الفرض}) \quad :$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \ldots (\text{الطلب})$$

البرهان : "دائماً في المجاميع ننطلق من (الفرض) ثم نضيف للطرفين الحد الناقص للوصول للطلب , ثم نصلح الطرف الثاني "

لدينا من (الفرض) :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

نضيف للطرفين $(n+1)$:

$$1+2+3+\cdots+n+\mathbf{(n+1)}=\frac{n(n+1)}{2}+\mathbf{(n+1)}$$

نوحد المقامات :

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

و هو المطلوب.

2

$\mathbf{E(n):\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

نثبت صحة الخاصة E(n) من أجل *n=1* :

$$l_1=1^3=1 \qquad l_2=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1 \quad \Rightarrow l_1=l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$: أي :

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \ldots (\text{الفرض})$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad \ldots. (\text{الطلب})$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad :$$

نضيف للطرفين $(n+1)^3$:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+\mathbf{(n+1)^3}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\mathbf{(n+1)^3}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+\boldsymbol{(n+1)^3}=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+\boldsymbol{(n+1)^3}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

و هو المطلوب .

النمط الثالث من التمارين (المتراجحات)

1. $\boldsymbol{E(n): (1+x)^n \geq 1+nx}$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} l_1=1+x \\ l_2=2+x \end{array}\right\} l_1 \geq l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$(1+x)^n \geq 1+nx \ldots$ (الفرض)

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

أو : $(1+x)^n \geq 1+nx+x$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

نضرب الطرفين ب $(1+x)$

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)=1+x+nx+nx^2$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+x(n+1)+nx^2 \geq 1+x(n+1)$$

حيث nx^2 يمكن إهمالها لنحصل على مقدار أصغر

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x$$

وهو المطلوب .

2. $\boldsymbol{E(n): n! \geq 2^{n-1}}$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} l_1=1!=1 \\ l_2=2^{1-1}=1 \end{array}\right\} l_1 \geq l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$n! \geq 2^{n-1} \ldots$ (الفرض)

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$(n+1)! \geq 2^n$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$n! \geq 2^{n-1}$$

نضرب الطرفين ب $(n+1)$

$$(n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}$$

$$(n+1)! \geq (n+1)2^n.2^{-1}$$

$$(n+1)! \geq 2^n\frac{(n+1)}{2} \geq 2^n$$

حيث $\frac{(n+1)}{2}$ مهملة فنحصل على مقدار أصغر

$$(n+1)! \geq 2^n$$

وهو المطلوب

النمط الرابع من التمارين $(\boldsymbol{u_{n+1}=f(u_n)})$

الحالة الأولى: $u_{n+1}=f(u_n)$

و u_n ذكرت مرة واحدة فقط

عندها ننطلق من (الفرض) ونطبق عمليات جبرية (ضرب , جمع , طرح) للوصول لشكل f

1. لتكن $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ و $u_0=1$

1) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$ أياً كان $n \geq 0$
نعرف القضية

$\boldsymbol{E(n): "\, 0 \leq u_n \leq 2\, "}$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 \leq u_0=1 \leq 2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$0 \leq u_n \leq 2 \ldots$ (الفرض)

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$0 \leq u_{n+1} \leq 2 \ldots.$ (الطلب)

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$0 \leq u_n \leq 2$$

نضيف للطرفين 2

$$2 \leq 2+u_n \leq 4$$

نجذر

$$0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2+u_n} \leq 2$$

$$0 \le \sqrt{2+u_n} \le 2$$

$$0 \le u_{n+1} \le 2$$

وهو المطلوب

2) أثبت أن المتتالية السابقة $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة

نعرف القضية

$$E(n):"\ u_n \le u_{n+1}\ "$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\left.\begin{array}{r} u_0 = 1 \\ u_1 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \end{array}\right\} u_0 \le u_1$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n \le u_{n+1} \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$u_{n+1} \le u_{n+2}$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$u_n \le u_{n+1}$$

نضيف للطرفين 2

$$2+u_n \le 2+u_{n+1}$$

نجذر

$$\sqrt{2+u_n} \le \sqrt{2+u_{n+1}}$$

$$u_{n+1} \le u_{n+2}$$

وهو المطلوب

الحالة الثانية: $u_{n+1} = f(u_n)$ و **ذكرت u_n أكثر من مرة** عندها

① نعرف التابع $f(x)$

② نحسب $f'(x)$

③ نثبت أن f متزايد أي $f'(x) \ge 0$

④ نصور به أطراف المتراجحة

تمرين :

$(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \ge 0$

1) أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \le 1$ أياً كان العدد n .

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً .

الحل:

في الطلب الأول تم تعريف التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ وهو مستخلص من شكل المتتالية في نص التمرين (قد لا يأتي التابع في نص التمرين ويكون من المفروض أن تصطنعه أنت ...)

إن f اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ومشتقه $f'(x) = \frac{14}{(2x+6)^2}$

مهما تكن $x \ge 0$ وبالتالي التابع f تابع متزايد

الآن لنفرض الخاصة :

$$E(n):"\ \frac{1}{2} < u_n \le 1"$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\frac{1}{2} < u_0 = 1 \le 1$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$\frac{1}{2} < u_n \le 1 \ldots (\text{الفرض})$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \le 1$$

البرهان :

نلاحظ أننا لا نستطيع الانطلاق من الفرض والحصول على الهدف بعمليات جبرية , لذلك سيكون من المفيد الاستفادة من التابع f المتزايد :

لدينا من الفرض

$$\frac{1}{2} < u_n \le 1$$

و f متزايد إذاً :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \le f(1)$$

$$\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)+2}{2\left(\frac{1}{2}\right)+6} < \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \le \frac{3(1)+2}{2(1)+6}$$

$$\frac{7}{14} < u_{n+1} \le \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \le \frac{5}{8} \le 1$$

وهو المطلوب .

النمط الأول من أسئلة التقارب : (دراسة تقارب متتالية معطاة بحد عام $(u_n = f(n)$

فإنه يكفي أن نوجد النهاية عندما $n \to +\infty$ كما كنا نفعل في التوابع (وكل ما كنت تفعله في التوابع مجازٌ من إحاطة و مقارنة و طرق لإزالة عدم التعيين....)

14) سنواجه حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$:

$$u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}$$

$$u_n = \sqrt{n^2+n} - \left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\left[\sqrt{n^2+n} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\left[\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{n^2+n-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)} = 0$$

فهي متتالية متقاربة من الصفر .

15) اعلم أولاً أن $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$, عندها ستلاحظ اننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

$$u_n = \frac{n!-2}{n!} = \frac{n!}{n!} - \frac{2}{n!} = 1 - \frac{2}{n!} \quad then \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 - 0 = 1$$

فمتقاربة من الصفر

يترك الباقي كتمارين للتدرب عليها ☺

النمط الثاني من أسئلة التقارب : (دراسة تقارب متتالية هندسية)

قانون هام جداً (كل دورة يرد سؤال عليه)

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ \text{ليس لها نهاية} & q \le -1 \end{cases}$$

تمارين :

1) احسب نهاية كل من المتتاليات التالية:

$$x_n = \frac{4^n}{3^n} \quad , \quad y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n} \quad , \quad t_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

سنحاول رد كل منها إلى الشكل q^n و الاستعانة بالفقرة السابقة :

$$x_n = \frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad then$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad because\ q^n\ \&\ q = \frac{4}{3} > 1$$

$$y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n} = \left(\frac{10}{10.1}\right)^n \quad then$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0 \quad because\ q^n\ \&\ q = \frac{10}{10.1} < 1$$

$$t_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3\times 3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad then$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{1}{3}(0) = 0 \quad because\ q^n \& q = \frac{2}{3} < 1$$

2) ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالشكل : $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

نخرج صاحب الأساس الأكبر عاملاً مشتركاً من البسط و من المقام (أي نخرج 3^n عاملاً مشتركاً) :

$$u_n = \frac{3^n\left[1-\frac{2^n}{3^n}\right]}{3^n\left[1+\frac{2^n}{3^n}\right]} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

حيث أن $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

(لأن الأساس $q = \frac{2}{3} < 1$)

3) ادرس تقارب المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالشكل $v_n = \frac{10^n - 1}{10^n + 1}$

تُحل بأسلوب مماثل للتمرين السابق (أخرج 10^n عامل مشترك) يترك للطالب

النمط الثالث من أسئلة التقارب : (حصر المتتالية ضمن مجال)

1) حصر المتتالية ضمن مجال من الشكل $]a, b[$:

-نوجد نصف قطر المجال $r = \frac{b-a}{2}$

-نوجد مركز المجال $l = \frac{b+a}{2}$ (أو يُحسب المركز بطريقة أخرى حيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$)

-نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < r$$

ثم نوجد مقامات أو نصلح حتى نصل إلى الشكل $n > A$ فنختار $n_0 \ge A$ يتم المطلوب

(بدها مثال مو !!)

مثال: أوجد عدداً طبيعياً n_0 بحيث يكون $u_n \in]1.9, 2.1[$ عندما $n > n_0$ حيث :

$$u_n = \frac{2n-1}{n+3}$$

الحل :

نلاحظ أن الهدف هنا أن نحصر حدود المتتالية في مجال من الشكل $]a,b[$ حيث $a = 1.9$, $b = 2.1$

لنتبع الخطوات المذكورة قبل قليل :

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = \frac{0.2}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$l = \frac{b+a}{2} = \frac{2.1+1.9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < r$$

$$\left|\frac{2n-1}{n+3} - 2\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{-7}{n+3}\right| < \frac{1}{10}$$

و بسبب القيمة المطلقة نكتب :

$$\frac{7}{n+3} < \frac{1}{10}$$

نقلب الطرفين :

$$\frac{n+3}{7} > 10$$

$$n+3 > 70$$

$$n > 67$$

و بالتالي نأخذ $n_0 \geq 67$ فيتم المطلوب.

2) حصر المتتالية في مجال من النمط $]a,+\infty[$:

إن قولنا أن $u_n \in]a,+\infty[$ فهذا يعني أن u_n هي عدد أكبر تماماً من a لذلك ننطلق من المتراجحة:

$$u_n > a$$

و نعزل n لنصل لمتراجحة من الشكل $n \geq n_0$

مثال : **لتكن المتتالية $u_n = n\sqrt{n}$, عين عدداً طبيعياً n_0 بحيث تنتمي حدود المتتالية إلى المجال $]10^3,+\infty[$ بدءاً من n_0**

الحل :

$$u_n > 10^3$$

$$n\sqrt{n} > 10^3$$

$n^3 > 10^6$ نربع

$n > 100$ نجذر من المرتبة 3

و بالتالي من أجل $n \geq 100$ فإن $u_n \in]10^3,+\infty[$

النمط الرابع من أسئلة التقارب : (دراسة تقارب متتاليات معرفة بالتدريج $u_{n+1} = f(u_n)$)

- كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى تكون متقاربة

-كل متتالية متناقصة و محدودة من الأدنى تكون متقاربة

و لكن كيف نستفيد من هذه المبرهنة ؟!

هذه هي المبرهنة التي سنستخدمها لدراسة المتتاليات المعرفة تدريجياً بالشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

1- نثبت أن المتتالية متزايدة (أو متناقصة) و ذلك وفق ما تعلمناه في الوحدة الأولى
2- نثبت أن المتتالية محدودة من الأعلى (أو من الأدنى) " غالباً بالتدريج – أو طلبات متدرجة"
3- نستفيد من المبرهنة السابقة

أخيراً : بعد إثبات تقارب المتتالية $u_{n+1} = f(u_n)$ يُمكن إيجاد نهاية هذه المتتالية من حل المعادلة $f(x) = x$

1- نعرف التابع f باستبدال u_n بـ x
2- نحل المعادلة $f(x) = x$
3- نقبل الحل المناسب (المحقق لصفة الاطراد أو المحدودية)

و توضح الأمثلة التالية كل ما سبق ^_^

مثال: لنتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بشرط البدء $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

1- أثبت أنها متزايدة
2- أثبت أن $u_n \leq 2$
3- استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها

الحل :

1- وظيفة
2- وظيفة
3- بما أنها متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

و لحساب نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$ حيث $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$\sqrt{1+x} = x$$

$$1 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

و لكن كون حدود المتتالية موجبة فإننا نقبل الحل الموجب إذن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

مسائل :

المسألة الأولى: المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \quad , u_0 = \frac{3}{2}$$

1- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

أياً يكن $n \in N$

2- A- أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$

B-استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة

3- أهي متقاربة

الحل :

1- لنفرض القضية $E(n)$: « $1 \leq u_n \leq 2$ »

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$1 \leq u_0 \leq 2$$

$$1 \le \frac{3}{2} \le 2$$

محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$1 \le u_n \le 2$ ... (الفرض)

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$1 \le u_{n+1} \le 2$ .... (الطلب)

البرهان : لنعرف التابع f على المجال $[1,2]$ بالشكل

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

فنلاحظ أن $f'(x) = 2x - 2 \ge 0$ لكل $x \in [1,2]$

فالتابع f متزايد على المجال $[1,2]$:

لدينا من $(*)$:

$$1 \le u_n \le 2$$

و بما أن f متزايد فيمكن أن نصور أطراف المتراجحة وفقه :

$$f(1) \le f(u_n) \le f(2)$$

$$1 \le u_{n+1} \le 2$$

و هو المطلوب . فالقضية صحيحة مهما تكن $n \in N$

-2 لدينا :

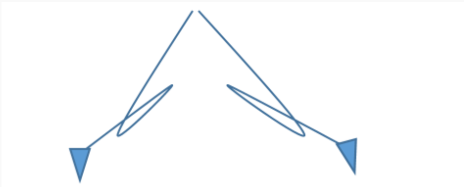
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$$
$$= u_n^2 - 3u_n + 2$$

بالتحليل المباشر :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

و لاستنتاج أنها متناقصة نلاحظ من الطلب السابق :

$$1 \le u_n \le 2$$



$1 \le u_n$ $\qquad$ $u_n \le 2$

$u_n - 1 \ge 0$ $\qquad$ $u_n - 2 \le 0$

و بالتالي $u_n - 2$ سالب و $u_n - 1$ موجب فجداؤهما سالب :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1) < 0$$

و هذا يعني أن المتتالية (u_n) متناقصة

-3 و لما كانت u_n محدودة من الأدنى بالعدد 1 فنستنتج أنها متقاربة لأنها متناقصة و محدودة من الأدنى .

المسألة الثانية : ليكن عند كل عدد طبيعي n

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

-1 أوجد عددين حقيقين a, b يحققان عند كل عدد طبيعي n أن :

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

-2 ليكن في حالة عدد طبيعي n :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

عبر عن s_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\ge0}$

الحل :

-1 لدينا :

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2b+1}$$
$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a(2n+1) + b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2a+2b)n + a - b}{(2n-1)(2n+1)}$$

نحذف المقامات و نطابق البسوط فنجد:

$$2a + 2b = 0$$
$$a - b = 1$$

بالحل المشترك نجد :

$$a = \frac{1}{2} \quad , \qquad b = -\frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

-2 الآن :

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$s_n = \frac{1}{2}\left[-1 - \frac{1}{2n+1}\right]$$
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}(-1+0) = -\frac{1}{2}$$

المسألة الثالثة : المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

-1 أثبت أن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ثم استنتج أنها متقاربة نحو الصفر

-2 المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ معرفة عند كل $n \ge 1$ وفق :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

A- استفد من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n

B- استنتج نهاية v_n

الحل :

1- بضرب البسط و المقام بالمرافق :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

فهي متقاربة نحو الصفر

2- لدينا :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$v_n = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

$$v_n = 1 - 1 + \sqrt{n} = \sqrt{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

المتتاليات المتجاورة :

نقول عن متتاليتين x_n, y_n إنهما متجاورتين إذا تحقق الشرطان :

1- إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة

2- $\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$

أمثلة :

التمرين الأول : أثبت أن المتتاليتين : $s_n = \frac{1}{n+1}$, $t_n = \frac{-1}{2n+4}$ متجاورتين

الحل : ندرس اطراد s_n فنعرف التابع :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

فالمتتالية s_n متناقصة

ندرس اطراد t_n فنعرف التابع :

$$f(x) = -\frac{1}{2x+4} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{(2x+4)^2} \geq 0$$

فالمتتالية t_n متزايدة

$$s_n - t_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4} = \frac{3n+5}{(n+1)(2n+4)} = \frac{3n+5}{2n^2+6n+4}$$
$$\lim_{n\to+\infty}(s_n - t_n) = 0$$

فالمتتاليتان (s_n) و (t_n) متجاورتان

التمرين الثاني : أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتين

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

الحل : ندرس اطراد x_n :

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

نشكل الفرق :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{4n+3}{(2n+2)(2n+1)} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{(4n+3)(n+1) - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$
$$= \frac{4n^2+7n+3-4n^2-6n-2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$
$$= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

إذن x_n متزايدة

لندرس اطراد y_n :

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \frac{n-2(2n+1)}{2n(2n+1)(n+1)} = \frac{-3n-2}{2n(2n+1)(n+1)} < 0$$

إذن y_n متناقصة

أخيراً : $y_n = x_n + \frac{1}{n}$

$$y_n - x_n = \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$$

فالمتتاليتان متجاورتان.

اسئلة دورات :

السؤال الاول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $q = 2$ و $u_0 = 1$

احسب u_3 ثم استنتج قيمة المجموع

$$S = u_3 + u_4 + \cdots + u_7$$

السؤال الثاني : لتكن المتتالية المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \quad , \quad u_0 = 1$$

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$v_n = u_n + 3$$

1- أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية
2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n
3- ليكن في حالة عدد طبيعي n :
$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
عبر عن s_n بدلالة n ثم استنتج نهاية $(s_n)_{n\geq 0}$

السؤال الثالث : بفرض أن
$u_n = n^2 - \ln(n)$ أثبت أن u_n متزايدة

السؤال الرابع : بفرض $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1- أثبت أن u_n متزايدة
2- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$
3- استنتج أن u_n متقاربة و احسب نهايتها .

السؤال الخامس : بفرض

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + .. + \frac{1}{3^n}$$

1- أثبت أن s_n متزايدة
2- أثبت أن $S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$
3- استنتج عنصراً راجحاً على S_n و هل هي متقاربة

السؤال السادس : بفرض لدينا :

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^n}$$

1- أثبت أن $n \leq 2^n$
2- استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح عليها
3- أثبت أن المتتالية متقاربة