أولاً: أجب عن كل من التمارين الآتية:

التمرين الأول: نتأمل المستقيمين:

$$d_1:\begin{cases}x=3+t\\y=2+2t\,;t\in\mathbb{R}\\z=3t+1\end{cases}\quad,\quad d_2:\begin{cases}x=4-s\\y=2s\quad;s\in\mathbb{R}\\z=2-s\end{cases}$$

١. أثبت أن المستقيمين $d_1$ و $d_2$ متعامدان.
٢. أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين $d_1$ و $d_2$
٣. اكتب معادلة المستوي $P$ الذي يشمل المستقيمين $d_1$ و $d_2$

الطلب الأول:

$$\overrightarrow{u_1}(1,2,3)$$
$$\overrightarrow{u_2}(-1,2,-1)$$
$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}$$
$$=(1)(-1)+(2)(2)+(3)(-1)$$
$$=-1+4-3=0$$

ومنه المستقيمان $(d_1)$ و $(d_2)$ متعامدان.

الطلب الثاني:

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمان $(d_1)$ و $(d_2)$ نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases}3+t=4-s\ \dots(1)\\2+2t=2s\ \dots(2)\\3t+1=2-s\dots(3)\end{cases}$$

نحل جملة المعادلتين $(1)$ و $(2)$ :

نضرب المعادلة $(1)$ بـ $2$ وفق:

$$\begin{cases}6+2t=8-2s\ \dots(1)'\\2+2t=2s\ \dots(2)\end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و $(2)$ :

$$8+4t=8$$
$$4t=0$$
$$t=0$$

نعوض في $(2)$ :

$$2+2(0)=2s$$
$$2=2s$$
$$s=1$$

نتحقق في المعادلة المتبقية $(3)$ وفق:

$$3(0)+1=2-(1)$$
$$1=1$$

محققة ومنه يوجد للجملة حل وحيد هو:

$$S=1$$
$$t=0$$

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض قيمة $t$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم $(d_1)$أو نعوض قيمة $S$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم $(d_2)$ (طبعاً حتطلع معي ذات النتيجة)

نعوض $t=0$

في التمثيل الوسيطي للمستقيم $(d_1)$ وفق:

$$x=3+0\quad\to x=3$$
$$y=2+2(0)\to y=2$$
$$z=3(0)+1\to z=1$$

ومنه إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمان $(d_1)$ و $(d_2)$ هي:

$$I(3,2,1)$$

الطلب الثالث:

تحديد النقطة:

هي ذاتها نقطة تقاطع المستقيمان $(d_1)$ و $(d_2)$ والتي هي:

$$I(3,2,1)$$

تحديد الناظم:

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ وبما أنّ المستوي $P$ يشمل المستقيمان $(d_1)$ و $(d_2)$ فإنّ أشعة التوجيه $\overrightarrow{u_1}(1,2,3)$ و $\overrightarrow{u_2}(-1,2,-1)$ هما شعاعين موجهين للمستوي $P$ وبالتالي الناظم $\vec{n}$ عمودي على كل منهما أيّ أنّ:

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_1}=0$$
$$a+2b+3c=0\dots(1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{u_2}=0$$
$$-a+2b-c=0\dots(2)$$

نحل جملة المعادلتين:

$$a+2b+3c=0\dots(1)$$
$$-a+2b-c=0\dots(2)$$

بجمع $(1)$ و $(2)$ نجد أنّ:

$$4b+2c=0$$
$$2c=-4b$$
$$c=-2b\dots(*)$$

نعوض في $(1)$ :

$$a+2b-6b=0$$
$$a=4b\dots(**)$$

بفرض $b=1$ :

نعوض في $(*)$ و $(**)$ وفق:

$$c=-2$$
$$a=4$$
$$\to\vec{n}(4,1,-2)$$

نكتب معادلة المستوي وفق:

$$a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$
$$4(x-3)+1(y-2)-2(z-1)=0$$
$$4x-12+y-2-2z+2=0$$
$$4x+y-2z-12=0$$

## التمرين الثاني:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي $P: 2x+y-3z+2=0$ والنقطة $A(1,1,-2)$

١. أثبت أن النقطة $A$ لا تنتمي إلى المستوي $P$

٢. اكتب معادلة المستوي $Q$ المار من $A$ والموازي للمتسوي $P$ .

**الطلب الأول:**

نعوض النقطة $A$ في المستوي $P$ :

$$2(1)+(1)-3(-2)+2=0$$
$$2+1+6+2=0$$
$$11\neq 0$$

ومنه النقطة $A$ لا تنتمي إلى المستوي $P$

**الطلب الثاني:**

تحديد النقطة: معلومة $A(1,1,-2)$

تحديد الناظم: بما أنّ المستوي $Q$ يوازي المستوي $P$

فإنّ: $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}$

أيّ: $\overrightarrow{n_Q}(2,1,-3)$

نكتب المعادلة وفق:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$2(x-1)+1(y-1)-3(z+2)=0$$
$$2x-2+y-1-3z-6=0$$
$$2x+y-3z-9=0$$

## التمرين الثالث:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا المستويين $P$ و $Q$ حيث: $P: x-2y+3z-5=0$ و $Q: x+y+z+1=0$

والمطلوب:

1. أثبت أن المستويين $P$ و $Q$ متقاطعين وفق فصل مشترك $d$.
2. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $d$.
3. اكتب معادلة المستوي $R$ العمودي على كل من $P$ و $Q$ والمار من $A(2,5,-2)$.

**الطلب الأول:**

لإثبات أنّ المستويان $P$ و $Q$ متقاطعان فإننا نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً.

$$\overrightarrow{n_P}(1,-2,3)$$
$$\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$$

نلاحظ أنّ المركبات غير متناسبة ومنه $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً ومنه المستويان $P$ و $Q$ متقاطعان.

**الطلب الثاني:**

لكتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم $d$ فإننا نحل جملة المعادلتين الآتية:

$$\begin{cases} x-2y+3z-5=0 \ldots (1) \\ x+y+z+1=0 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة $(2)$ بـ $2$ وفق:

$$\begin{cases} x-2y+3z-5=0 \ \ldots (1) \\ 2x+2y+2z+2=0 \ldots (2)' \end{cases}$$

بجمع $(1)$ و $(2)'$ نجد:

$$3x+5z-3=0$$
$$3x=-5z+3$$
$$x=-\frac{5}{3}z+1 \ldots (*)$$

نعوض في $(1)$ وفق:

$$-\frac{5}{3}z+1-2y+3z-5=0$$
$$-2y+\frac{4}{3}z-4=0$$
$$-2y=-\frac{4}{3}z+4$$
$$y=\frac{2}{3}z-2 \ldots (*)$$

بفرض $z=t$ نعوض في $(*)$و $(**)$ فنجد أنّ:

$$x=-\frac{5}{3}t+1$$
$$y=\frac{2}{3}t-2$$

$$d: \begin{cases} x=-\frac{5}{3}t+1 \\ y=\frac{2}{3}t-2 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

**الطلب الثالث:**

تحديد النقطة: معلومة $A(2,5,-2)$

تحديد الناظم: بفرض $\overrightarrow{n_R}(a,b,c)$

بما أنّ المستوي $R$ عمودي على كل من المستويان $P$ و $Q$ فإنّ:

$$\overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_P}=0$$
$$a-2b+3c=0$$
$$\overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_Q}=0$$
$$a+b+c=0$$

نحل جملة المعادلتين وفق:

$$\begin{cases} a-2b+3c=0 \ldots (1) \\ a+b+c=0 \ \ldots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة $(2)$ بـ $-1$ وفق:

$$\begin{cases} a-2b+3c=0 \dots (1) \\ -a-b-c=0 \;\dots (2)' \end{cases}$$

بجمع $(1)$ و $(2)'$ نجد:

$$-3b+2c=0$$
$$2c=3b$$
$$c=\frac{3}{2}b \dots (*)$$

نعوض في $(2)$ نجد أنّ:

$$a+b+\frac{3}{2}b=0$$
$$a+\frac{5}{2}b=0$$
$$a=-\frac{5}{2}b \dots (**)$$

بفرض $b=2$ نعوض في $(*)$ و $(**)$ فنجد:

$$c=3$$
$$a=-5$$

ومنه: $\overrightarrow{n_R}(-5,2,3)$

نكتب المعادلة وفق:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$-5(x-2)+2(y-5)+3(z+2)=0$$
$$-5x+10+2y-10+3z+6=0$$
$$R:\ -5x+2y+3z+6=0$$

## التمرين الرابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ $C$ و $E$ و $D$ ليست واقعة على استقامة واحدة.
2. أثبت أن المستقيم $(AB)$ عمودي على المستوي $(CDE)$
3. عين إحداثيات $N$ نقطة تقاطع المستقيم $(AB)$ مع المستوي $(CDE)$
4. عند أي قيمة للوسيط $m$ تنتمي النقطة $M(m,1,0)$ للمستوي $(CDE)$

**الطلب الأول:**

$$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$$
$$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط $C$ و $E$ و $D$ ليست على استقامة واحدة.

**الطلب الثاني:**

نثبت أنّ شعاع توجيه المستقيم $(AB)$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ الغير مرتبطين خطياً من المستوي $(CDE)$ .

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}=0$$
$$(-1)(-3)+(-1)(-1)+(-4)(1)=0$$
$$3+1-4=0$$
$$0=0$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$$
$$(-1)(-4)+(-1)(4)+(-4)(0)=0$$
$$4-4=0$$
$$0=0$$

ومنهُ المستقيم $(AB)$ عمودي على المستوي $(CDE)$

**الطلب الثالث:**

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم $(AB)$ وفق:

تحديد النقطة: $A(2,1,3)$

تحديد شعاع التوجيه:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$

$$(AB):\begin{cases} x=-t+2 \\ y=-t+1 \;;t\in\mathbb{R} \\ z=-4t+3 \end{cases}$$

كتابة معادلة المستوي $(CDE)$ :

تحديد النقطة: معلومة $C(4,0,0)$

تحديد الناظم:

بما أنّ المستقيم $(AB)$ عمودي على المستوي $(CDE)$ فإنّ $\overrightarrow{u_{AB}}=\overrightarrow{n_{CDE}}$ أيّ:

$$\overrightarrow{n_{CDE}}(-1,-1,-4)$$

نكتب المعادلة وفق:

$$a(x-x_C)+b(y-y_C)+c(z-z_C)=0$$
$$-1(x-4)-1(y-0)-4(z-0)=0$$
$$-x+4-y-4z=0$$
$$-x-y-4z+4=0$$

لإيجاد إحداثيات النقطة $N$ نقطة تقاطع المستقيم $(AB)$ مع المستوي $(CDE)$

فإننا نحل أربعة معادلات وفق:

$$-x-y-4z+4=0 \dots (1)$$
$$x=-t+2 \dots (2)$$
$$y=-t+1 \dots (3)$$
$$z=-4t+3 \dots (4)$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$-(-t+2)-(-t+1)-4(-4t+3)+4=0$$
$$t-2+t-1+16t-12+4=0$$
$$18t-13=0$$
$$18t=13$$
$$t=\frac{13}{18}$$

نعوض $t$ في (2) و (3) و (4) وفق:

$$x=-\left(\frac{13}{18}\right)+2\rightarrow x=\frac{23}{18}$$
$$y=-\left(\frac{13}{18}\right)+1\rightarrow y=\frac{5}{18}$$
$$z=-4\left(-\frac{13}{18}\right)+3\rightarrow z=\frac{106}{18}$$
$$N\left(\frac{23}{18},\frac{5}{18},\frac{106}{18}\right)$$

الطلب الرابع:

نعوض إحداثيات النقطة $M$ في المستوي $(CDE)$ ثم نعزل $m$ فنحصل على قيمتها وفق:

$$-m-1-0+4=0$$
$$-m+3=0$$
$$m=3$$

التمرين الخامس:

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتين: $A(1,0,1)$ و $B(2,-2,3)$ والمطلوب:

١. أوجد نقطة تنتمي لمحور الفواصل متساوية البعد عن النقطتين $A$ و $B$
٢. اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
٣. اكتب معادلة الكرة التي يكون $[AB]$ قطراً فيها

الطلب الأول:

لتكن $M$ نقطة تنتمي إلى محور الفواصل فهذا يعني أنّ إحداثياتها من الشكل $M(x,0,0)$

وبما أنّها متساوية البعد عن $A$ و $B$ فإنّها تحقق:

$$MA=MB$$
$$\sqrt{(1-x)^2+0^2+(1)^2}=\sqrt{(2-x)^2+(-2)^2+(3)^2}$$

نربع الطرفين:

$$(1-x)^2+1=(2-x)^2+4+9$$
$$1-2x+x^2+1=4-4x+x^2+4+9$$
$$x^2-2x+2=x^2-4x+17$$
$$2x=15$$
$$x=\frac{15}{2}$$
$$\rightarrow M\left(\frac{15}{2},0,0\right)$$

الطلب الثاني:

تحديد النقطة: تكون النقطة هي منتصف $[AB]$

$$I\left(\frac{3}{2},-1,2\right)$$

تحديد الناظم:

بما أنّ المستوي هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فإنّ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$ ومنه: $\overrightarrow{AB}(1,-2,2)$

نكتب المعادلة وفق:

$$a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$
$$1\left(x-\frac{3}{2}\right)-2(y+1)+2(z-2)=0$$
$$x-\frac{3}{2}-2y-2+2z-4=0$$
$$x-2y+2z-\frac{15}{2}=0$$

الطلب الثالث:

مركز الكرة: هو $I$ منتصف القطعة $[AB]$ ومنهُ:

$$I\left(\frac{3}{2},-1,2\right)$$

نصف القطر:

يُعطى بالعلاقة:

$$R=\frac{1}{2}AB$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+4+4}=\frac{3}{2}$$

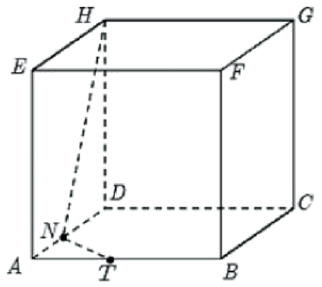
نكتب المعادلة وفق:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}$$

التمرين السادس:

ليكن لدينا $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 و $T$ نقطة من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

و $N$ نقطة من $[AD]$ تحقق $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ والمطلوب:




١. في المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ جد إحداثيات النقاط $T$ و $N$ و $F$ و $H$

٢. جد الشعاعين $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة للمستوي $(HNT)$

٣. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $(EF)$

٤. استنتج نقطة تقاطع المستقيم $(EF)$ مع المستوي $(HNT)$

الطلب الأول:

إحداثيات رؤوس المكعب:

| | |
|---|---|
| $E(0,0,1)$ | $A(0,0,0)$ |
| $F(1,0,1)$ | $B(1,0,0)$ |
| $H(0,1,1)$ | $D(0,1,0)$ |
| $G(1,1,1)$ | $C(1,1,0)$ |

إيجاد إحداثيات النقطة $T$ :

لتكن $T(x,y,z)$ ومنهُ:

$$\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$x=\frac{2}{5}$$
$$y=0$$
$$z=0$$
$$T\left(\frac{2}{5},0,0\right)$$

إيجاد إحداثيات النقطة $N$ :

لتكن $N(x,y,z)$ ومنهُ:

$$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$x=0$$
$$y=\frac{2}{5}$$
$$z=0$$
$$N\left(0,\frac{2}{5},0\right)$$

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{NT}\left(-\frac{2}{5},\frac{2}{5},0\right)\to\overrightarrow{NT}(-2,2,0)$$

$$\overrightarrow{NH}\left(0,\frac{3}{5},1\right)\to\overrightarrow{NH}(0,3,5)$$

كتابة معادلة المستوي $(HNT)$ وفق:

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط $N$ و $T$ و $H$ تشكل مستوي.

تحديد النقطة: معلومة $H(0,1,1)$

تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أنّ النقاط $N$ و $T$ و $H$ من المستوي فإنّ $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ ومنهُ:

$$\overrightarrow{NT}.\vec{n}=0$$
$$-2a+2b=0$$
$$\overrightarrow{NH}.\vec{n}=0$$
$$3b+5c=0$$

نحل جملة المعادلتين الآتية:

$$\begin{cases}-2a+2b=0\ \ldots(1)\\ 3b+5c=0\ \ \ \ldots(2)\end{cases}$$

نضرب المعادلة $(1)$ بـ $-3$ والمعادلة الثانية بـ $2$

$$\begin{cases}6a-6b=0\ \ \ \ldots(1)'\\ 6b+10c=0\ \ \ldots(2)'\end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و $(2)'$ نجد أنّ:

$$6a+10c=0$$
$$6a=-10c$$
$$a=-\frac{5}{3}c\ \ldots(*)$$

نعوض في $(1)$ :

$$-2\left(-\frac{5}{3}c\right)+2b=0$$
$$-\frac{10}{3}c+2b=0$$
$$2b=\frac{10}{3}c$$
$$b=\frac{10}{6}c$$
$$b=\frac{5}{3}c\ \ldots(**)$$

نفرض $c=3$ نعوض في $(*)$ و $(**)$ ومنهُ:

$$a=-5$$
$$b=5$$

ومنهُ $\vec{n}(-5,5,3)$

نكتب المعادلة وفق:

$$a(x-x_H)+b(y-y_H)+c(z-z_H)=0$$
$$-5(x-0)+5(y-1)+3(z-1)=0$$
$$-5x+5y-5+3z-3=0$$
$$-5x+5y+3z-8=0$$

الطلب الثالث:

تحديد النقطة: معلومة $E(0,0,1)$

تحديد شعاع التوجيه:

$$\vec{u}=\overrightarrow{EF}$$
$$\vec{u}(1,0,0)$$

نكتب التمثيل الوسيطي وفق:

$$(EF):\begin{cases}x=t\\y=0\,;t\in\mathbb{R}\\z=1\end{cases}$$

الطلب الرابع:

لدينا معادلة المستوي $(HNT)$ :

$$-5x+5y+3z-8=0$$

لدينا التمثيل الوسيطي للمستقيم $(EF)$ :

$$(EF):\begin{cases}x=t\\y=0\,;t\in\mathbb{R}\\z=1\end{cases}$$

نوجد نقطة تقاطع المستقيم $(EF)$ مع المستوي $(HNT)$ ولتكن $J$ بحل جملة أربعة معادلات وفق

$$-5x+5y+3z-8=0\ldots(1)$$
$$x=t\ldots(2)$$
$$y=0\ldots(3)$$
$$z=1\ldots(4)$$

نعوض $(2)$ و $(3)$ و $(4)$ في $(1)$ :

$$-5(t)+5(0)+3(1)-8=0$$
$$-5t+3-8=0$$
$$-5t-5=0$$
$$-5t=5$$
$$t=-1$$

نعوض $t$ في $(2)$ و $(3)$ و $(4)$ وفق:

$$x=-1$$
$$y=0$$
$$z=1$$

ومنه: $J(-1,0,1)$

التمرين السابع:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(1,2,-3)$ و $B(6,3,1)$ والشعاعان $\vec{u}(2,1,1)$ و $\vec{v}(1,-1,2)$ ولدينا $d$ هو المستقيم المار بالنقطة $A$ والموجه بالشعاع $\vec{u}$ والمستقيم $d'$ هو المستقيم المار بالنقطة $B$ والموجه بالشعاع $\vec{v}$ والمطلوب:
أثبت أن المستقيمين $d$ و $d'$ متقاطعين ثم عين إحداثيات $I$ نقطة تقاطعهما.

الحل:

كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم $d$ :

تحديد النقطة: معلومة $A(1,2,-3)$

تحديد شعاع التوجيه: $\vec{u}(2,1,1)$

$$(d):\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2\;\;;t\in\mathbb{R}\\z=t-3\end{cases}$$

كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم $d'$ :

تحديد النقطة: معلومة $B(6,3,1)$

تحديد شعاع التوجيه: $\vec{v}(1,-1,2)$

$$(d'):\begin{cases}x=s+6\\y=-s+3\,;t\in\mathbb{R}\\z=2s+1\end{cases}$$

إثبات أنّ المستقيمان $(d)$ و $(d')$ متقاطعان وفق

$$\vec{u}(2,1,1)$$
$$\vec{v}(1,-1,2)$$

نلاحظ أنّ المركبات غير متناسبة ومنهُ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ومنهُ المستقيمان $(d)$ و $(d')$ إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

نحل جملة المعادلات:

$$\begin{cases}2t+1=s+6\ldots(1)\\t+2=-s+3\ldots(2)\\t-3=2s+1\ldots(3)\end{cases}$$

نحل جملة المعادلتين $(1)$ و $(2)$ وفق:

$$\begin{cases}2t+1=s+6\ldots(1)\\t+2=-s+3\ldots(2)\end{cases}$$

بجمع $(1)$ و $(2)$ نجد أنّ:

$$3t+3=9$$
$$3t=6$$
$$t=2$$

نعوض في $(1)$ :

$$2(2)+1=s+6$$
$$5=s+6$$
$$s=-1$$

نتحقق في $(3)$ :

$$(2)-3=2(-1)+1$$
$$2-3=-2+1$$
$$-1=-1$$

ومنه يوجد للجملة حل ألا وهو:

$$t=2$$
$$s=-1$$

ومنه المستقيمان $(d)$ و $(d')$ متقاطعان.

تحديد نقطة التقاطع ويتم وفق إما تعويض قيمة $t$ في المستقيم $(d)$ أو قيمة $s$ في المستقيم $(d')$ .

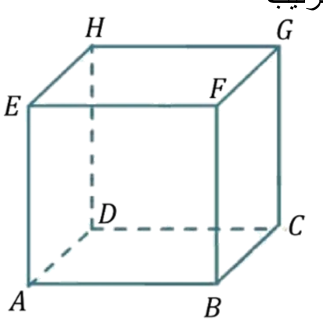
نعوض قيمة $t$ في المستقيم $(d)$ وفق:

$$x=2(2)+1\rightarrow x=5$$
$$y=2+2\rightarrow y=4$$
$$z=2-3\rightarrow z=-1$$
$$\rightarrow I(5,4,-1)$$

## حل كل من المسائل الآتية:

المسألة الأولى:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه $1$ والنقاط $K$ و $J$ و $I$ منتصفات الأضلاع $[FG]$ و $[BC]$ و $[AD]$ بالترتيب ، نختار المعلم المتجانس $\left(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ والمطلوب:



١. احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{HJ}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{AK}$
٢. أثبت أن النقاط $F$ و $H$ و $I$ تشكل مستوي
٣. اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$
٤. هل النقطة $K$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$
٥. هل المستقيمان $(ID)$ و $(FE)$ متعامدان؟

الطلب الأول:

إحداثيات رؤوس المكعب:

| | |
|---|---|
| $H(0,0,1)$ | $D(0,0,0)$ |
| $E(1,0,1)$ | $A(1,0,0)$ |
| $G(0,1,1)$ | $C(0,1,0)$ |
| $F(1,1,1)$ | $B(1,1,0)$ |

إحداثيات $I$ و $J$ و $K$ وفق:

| | |
|---|---|
| $J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ | $K\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ |
| $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ | |

حساب مركبات الأشعة:

$$\overrightarrow{HJ}\left(\frac{1}{2},1-1\right)$$
$$\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$$
$$\overrightarrow{AK}\left(-\frac{1}{2},1,1\right)$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ $F$ و $H$ و $I$ تشكل مستوي:

$$\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$$
$$\overrightarrow{HF}(1,1,0)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HF}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط $F$ و $H$ و $I$ ليست على استقامة واحدة.

الطلب الثالث:

كتابة معادلة المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ :

تحديد النقطة:بما أنّ المستوي هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ فإنّ النقطة $N$ منتصف القطعة $[BC]$ تنتمي إلى المستوي حيث: $N\left(\frac{1}{2},1,0\right)$

تحديد الناظم:

بما أنّ المستوي هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ فإنّ $\vec{n}=\overrightarrow{BC}$ أيّ: $\vec{n}(-1,0,0)$

نكتب المعادلة وفق:

$$-1\left(x-\frac{1}{2}\right)+0(y-1)+0(z-0)=0$$
$$-x+\frac{1}{2}=0 \qquad \times 2$$
$$-2x+1=0$$

الطلب الرابع:

اختبار انتماء النقطة $K\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ ويتم وفق تعويض إحداثيات النقطة $K$ في معادلة المستوي $[BC]$ وفي حال كانت المعادلة محققة نقول أنّها تنتمي وفي حال كانت المعادلة غير محققة نقول أنّها لا تنتمي.

$$-2x+1=0$$
$$-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=0$$
$$-1+1=0$$
$$0=0$$

محققة

إذاً $K$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[BC]$

الطلب الخامس:

$\overrightarrow{ID}\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$

$\overrightarrow{FE}(0,-1,0)$

نوجد $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{FE}=0$

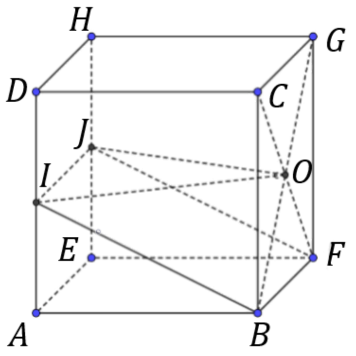
$$\left(-\frac{1}{2}\right)(0)+(0)(-1)+(0)(0)=0$$

$$0=0$$

إذاً $(ID)$ و $(FE)$ متعامدان.

المسألة الثانية:

$ABCDEFGH$ مكعب فيه $I$ و $J$ منتصفا $[AD]$ و $[EH]$ و $O$ مركز الوجه $(BCGF)$ نتخذ المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً والمطلوب:




١. أوجد إحداثيات النقاط $B$ و$F$ و $I$

٢. تأكد أنّ $\vec{n}(1,0,2)$ ناظم على المستوي $(BFJI)$ ثم اكتب معادلته.

٣. احسب بعد $O$ عن المستوي $(BFGI)$

٤. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $d$ العمودي على المستوي $(BFJI)$ والمار بالنقطة $O$

٥. احسب إحداثيات النقطة $N$ نقطة تقاطع المستقيم $d$ مع المستوي $(BFJI)$

٦. أثبت أنّ النقطة $N$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,\alpha)$ و $(B,\beta)$ و $(F,\gamma)$ حيث $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ ثوابت يطلب تعيينها

الطلب الأول:

إحداثيات رؤوس المكعب:

| | |
|---|---|
| $D(0,0,1)$ | $A(0,0,0)$ |
| $C(1,0,1)$ | $B(1,0,0)$ |
| $H(0,1,1)$ | $E(0,1,0)$ |
| $G(1,1,1)$ | $F(1,1,0)$ |

إحداثيات $I$ و $J$ و $K$ وفق:

| | |
|---|---|
| $J\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ | $I\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ |

الطلب الثاني:

لدينا:

$$\overrightarrow{BF}(0,1,0)$$

$$\overrightarrow{BI}\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{BI}$ غير مرتبطين خطياً لأن أحدهما لا ينتج عن الآخر بضربه بعدد إذاً النقاط $B$ و $F$ و $I$ تشكل مستوي.

تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أن الشعاعين $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{BI}$ من المستوي فإنهما يعامدان الناظم أيّ:

$$\vec{n}.\overrightarrow{BI}=0$$

$$-a+\frac{1}{2}b=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{BF}=0$$

$$b=0$$

لدينا:

$$\begin{cases}-a+\frac{1}{2}c=0\ldots(1)\\ b=0\quad\ldots(2)\end{cases}$$

بفرض $c=2$ نعوض:

$$\begin{cases}-a+1=0\ldots(1)\\ b=0\quad\ldots(2)\end{cases}$$

من $(1)$ نجد أنّ $a=1$

من $(2)$ نجد أنّ $b=0$

ومنه $\vec{n}(1,0,2)$

تحديد النقطة: معلومة $B(1,0,0)$

نكتب معادلة المستوي $(BFJI)$ وفق:

$$1(x-1)+0(y-0)+2(z-0)=0$$

$$x-1+2z=0$$

$$x+2z-1=0$$

الطلب الثالث:

لدينا $O$ مركز الوجه $(BCGF)$ تكون إحداثياتها هي منتصف القطر $(BG)$ أو منتصف $(FC)$ ومنه النقطة $O$ منتصف القطر $(BG)$ أيّ:

$$O\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

حساب بُعد $O$ عن $(BFJI)$ وفق:

$$dist(O,BFJI)=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

حساب حجم الهرم $(OBFJI)$

نحسب مساحة المربع $(BFJI)$ وفق:

$$\overrightarrow{BF}(0,1,0)\to BF=1$$

$$\overrightarrow{BI}\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)\to BI=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{BFJI}=BF\times BI=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

الارتفاع:

$$h=dist(O,BFJI)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ومنهُ:
$$V_{OBFJI}=\frac{1}{3}S_{BFJI}\times h$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{6}$$

الطلب الرابع:

تحديد النقطة: معلومة $O\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

تحديد شعاع التوجيه $\overrightarrow{u_d}$ : بما أنّ $d$ عمودي على المستوي $(BFJI)$ فإنّ:
$$\overrightarrow{u_d}=\vec{n}$$
$$\overrightarrow{u_d}(1,0,2)$$

نكتب التمثيل الوسيطي وفق:
$$(d):\begin{cases}x=t+1\\ y=\frac{1}{2}\\ z=2t+\frac{1}{2}\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

الطلب الخامس:

لحساب $N$ نقطة تقاطع المستقيم $(d)$ مع المستوي $(BFJI)$ نحل جملة المعادلات الآتية:
$$x+2z-1=0\ \ldots(1)$$
$$x=t+1\ \ldots(2)$$
$$y=\frac{1}{2}\ \ldots(3)$$
$$z=2t+\frac{1}{2}\ \ldots(4)$$
نعوض $(2)$ و $(3)$ و $(4)$ في $(1)$ وفق:
$$t+1+2\left(2t+\frac{1}{2}\right)-1=0$$
$$t+1+4t+1-1=0$$
$$5t+1=0$$
$$t=-\frac{1}{5}$$
نعوض قيمة $t$ في كل من $(2)$ و $(3)$ و $(4)$
$$x=-\frac{1}{5}+1\to x=\frac{4}{5}$$
$$y=\frac{1}{2}$$
$$z=2\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\to z=\frac{1}{10}$$
ومنهُ:
$$N\left(\frac{4}{5},\frac{1}{2},\frac{1}{10}\right)$$

الطلب السادس:

النقاط $B$ و $F$ و $I$ و $N$ تقع في مستوٍ واحد وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BN}$ مرتبطة خطياً وبالتالي يوجد عددين حقيقيين $a$ و $b$ بحيث:
$$\overrightarrow{BN}=a\overrightarrow{BF}+b\overrightarrow{BI}$$
$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{10}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\ a\\ -\frac{1}{2}b\end{pmatrix}$$
ومنهُ نجد أنّ:
$$a=\frac{1}{2}$$
$$b=\frac{1}{5}$$
$$\to\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BI}$$
$$10\overrightarrow{BN}=5\overrightarrow{BF}+2\overrightarrow{BI}$$
$$10\overrightarrow{BN}=5\overrightarrow{BN}+5\overrightarrow{NF}+2\overrightarrow{BN}+2\overrightarrow{NI}$$
$$3\overrightarrow{BN}+5\overrightarrow{FN}+2\overrightarrow{IN}=0$$
وبالتالي $N$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,2)$ و $(F,5)$ و $(B,3)$

المسألة الثالثة:

نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ وليكن $P$ المستوي المار بالنقطة $B$ ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً له وليكن $Q$ المستوي الذي معادلته: $x-y+2z+4=0$ وأخيراً لتكن الكرة $S$ التي مركزها $A$ ونصف قطرها $AB$ .

١. أثبت أنّ $2x+y-z-8=0$ هي معادلة للمستوي $P$ .
٢. جد معادلة الكرة $S$
٣. أثبت أن المستوي $Q$ مستوي مماس للكرة $S$
٤. أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة $A$ على المستوي $Q$
٥. ليكن $d$ المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً:

$$d:\begin{cases}x=t\\ y=12-5t\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=4-3t\end{cases}$$

a) أثبت أن المستقيم $d$ هو الفصل المشترك للمستويين $P$ و $Q$
b) أثبت أن المستقيم $d$ محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}(2,1,-1)$$

١. المستوي $P$ مار من النقطة $\vec{n}=\overrightarrow{AB}(2,1,-1),B(3,2,0)$ بالتالي:

$$2(x-3)+1(y-2)-1(z+0)=0\Longrightarrow$$
$$P:2x+y-z-8=0$$

٢. الكرة $S$ التي مركزها $A(1,1,1)$ ونصف قطرها

$$R=AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$
$$S:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$
$$\Longrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$$

٣.

$$dist(A,Q)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=R$$

إذاً المستوي $Q$ مماس للكرة $Q$.

٤. $\overrightarrow{CA}=(1,-1,2)$ و $\overrightarrow{AC}$ هو ناظم المستوي $Q$ ولنتحقق أن: $C\in Q$

$$0-2-2+4=0$$
محققة

وبالتالي النقطة C هي مسقط النقطة $A$ على المستوي $Q$

٥.

a) : يكون $d$ هو الفصل المشترك للمستويين إذا حقق معادلتيهما:

$$P:2t+12-5t-4+3t-8=0$$
$$\Longrightarrow 0=0 \text{ محققة}$$
$$Q:t-12+5t+8-6t+4=0$$
$$\Longrightarrow 0=0 \text{ محققة}$$

إذا المستقيم $d$ هو الفصل المشترك للمستويين $P$و$Q$.

b) لتكن $H$ منتصف $[BC]$ فيكون:

$$\overrightarrow{BC}=(-3,0,-1) \text{ و } H\left(\frac{3}{2},2,-\frac{1}{2}\right)$$

فيكون:

$$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+0(y-2)-1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\Longrightarrow 3x+z-4=0$$

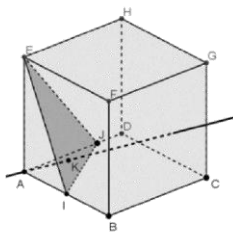
نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم $d$ في معادلة المستوي نجد:

$$6t+8-6t=8\Longrightarrow 8=8 \text{ محققة}$$

إذاً المستقيم $d$ محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

المسألة الرابعة:

ليكن $ABCDEFGH$ مكعباً طول حرفه يساوي 4 ولتكن النقطة $I$ منتصف $[AB]$ والنقطة $J$ تحقق $4\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AD}$ نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$




والمطلوب:

جد إحداثيات رؤوس المكعب والنقطتين $I$ و $J$

أثبت أن معادلة المستوي $(EIJ)$ هي: $6x+4y+3z-12=0$

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم $d$ المار من $A$ وعمودياً على المستوي $(EIJ)$

ثم جد إحداثيات النقطة $K$ نقطة تقاطع $d$ مع $(EIJ)$

احسب بعد $A$ عن المستوي $(EIJ)$

الحل:

١. $A(0,0,0), B(4,0,0), D(0,4,0), E(0,0,4),$
$C(4,4,0), F(4,0,4), H(0,4,4), G(4,4,4)$

$$4\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

وبالتالي $I(2,0,0), J(0,3,0)$

٢. الشعاعين $\overrightarrow{Ej}(2,0,-4), \overrightarrow{EJ}(0,3,-4)$
غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالنقاط $E, I, J$ ليست على استقامة واحدة.
لنوجد معادلة المستوي $(EIJ)$، بفرض $\vec{n}_{EIJ}(a.b.c)$ ناظم المستوي $(EIJ)$

$$\begin{cases}\vec{n}_{EIJ}.\overrightarrow{EI}=0 \Longrightarrow 2a-4c=0 \Longrightarrow a=2c \ (1)\\ \vec{n}_{EIJ}.\overrightarrow{Ej}=0 \Longrightarrow 3b-4c=0 \Longrightarrow b=\frac{4}{3}c \ (2)\end{cases}$$

بفرض $c=3$ نجد $b=4$ يكون $a=6$ وبالتالي:
$\vec{n}_{EIJ}(6,4,3)$ والمستوي مار من $E(0,0,4)$

$$6(x-0)+4(y-0)+3(z-4)=0 \Longrightarrow$$
$$(EIJ): 6x+4y+3z-12=0$$

٣. المستقيم $d$ عمودي على المستوي $EIJ$
إذاً $\vec{u}=\vec{n}(6,4,3)$ وهو يمر بالنقطة $A(0,0,0)$

$$d:\begin{cases}x=6t\\ y=4t : t\in\mathbb{R}\\ z=3t\end{cases}$$

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم $d$ في معادلة المستوي

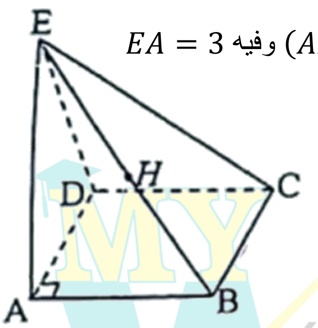
$$6(6t)+4(4t)+3(3t)-12=0$$
$$\Longrightarrow t=\frac{12}{16}\Longrightarrow$$
$$k\left(\frac{72}{16},\frac{48}{16},\frac{36}{16}\right)$$

٥. $dist(A,EIJ)=\frac{|6(0)+4(0)+3(0)-12|}{\sqrt{6^2+4^2+3^2}}$
$\frac{12}{\sqrt{61}}$

المسألة الخامسة:

$EABCD$ هرم رباعي رأسه $E$ قاعدته مربع طول ضلعه 3 وفيه $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ وفيه $EA=3$
نختار المعلم المتجانس: $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

والمطلوب:
١. عين إحداثيات $A$ و $B$ و $C$ و $D$ و $E$
٢. جد معادلة المستوي $(EBC)$
٣. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $d$ المار من $A$ ويعامد المستوي $(EBC)$
٤. استنتج أن $H$ منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم للنقطة $A$ على المستوي $(EBC)$




الحل:

١. $A(0,0,0), B(3,0,0), C(3,3,0), D(0,3,0), E(0.0,3)$
٢. $\overrightarrow{EB}(3,0,-3), \overrightarrow{EC}(3,3,-3)$
غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظماً على المستوي $(EBC)$

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{EB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{EC}=0\end{cases}\Longrightarrow$$
$$\begin{cases}3a-3c=0\\ 3a+3b-3c=0\end{cases}\Longrightarrow$$
$$\begin{cases}a=c\\ a+b-c=0\end{cases}\Longrightarrow$$

بفرض $c=1$ بالتالي $a=1$ و $b=0$ ومنه $\vec{n}(1,0,1)$
والمستوي مار من $E(0,0,3)$

$$(x-0)+0(y-0)+1(z-3)=0 \Longrightarrow$$
$$(EBC): x+z-3=0$$

٣. المستقيم $d$ يعامد المستوي بالتالي $\vec{u}=\vec{n}(1,0,1)$ ويمر من $A(0,0,0)$ إذاً يقبل $\vec{n}(1,0,1)$ شعاع توجيه ويمر من $A(0,0,0)$

٤. $E(0,0,3), B(3,0,0) \Longrightarrow H\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$

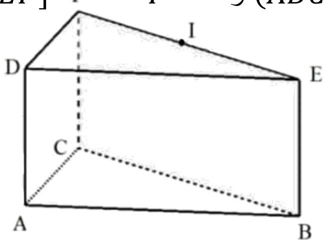
بما أن المستقيم $d$ يعامد المستوي $(EBC)$ فإن المسقط القائم للنقطة $A$ على المستوي $(EBC)$ هو نقطة تقاطع المستقيم $d$ مع المستوي $(EBC)$ بالتالي نعوض معادلة المستقيم في المستوي:

$$t+t-3=0 \Longrightarrow t=\frac{3}{2}\Longrightarrow A'\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)\Longrightarrow$$
$$A'=H$$

**المسألة السادسة:**

نتأمل جانباً الموشور $ABCDEF$ قاعدته المثلث $ABC$ قائم الزاوية وفيه $(AD)$ عمودي على المستوي $(ABC)$ والنقطة $I$ منتصف $[EF]$

ونعلم أن $AD = 1$ و $AC = 2$ و $AB = 4$ نختار المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$




والمطلوب:

١. أوجد إحداثيات النقاط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ و $E$ و $F$ و $I$
٢. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $ACI$
٣. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $(DE)$
٤. استنتج أن $J$ منتصف $[DE]$ هي نقطة تقاطع المستقيم $(DE)$ مع المستوي $ACI$

١. $A(0.0.0), B(4,0,0), C(0,2,0)$
$D(0,0,1)\ , E(4,0,1), F(0,2,1), I(2,1,1)$

٢. معادلة المستوي $ACI$ من الشكل:
$$ax + by + cz + d = 0$$
نعوض $A(0,0,0)$:
$$0 + d = 0$$
$$d = 0$$
$$ax + by + cz = 0$$
نعوض $C(0,2,0)$:
$$0 + 2b + 0 = 0$$
$$2b = 0$$
$$b = 0$$
$$ax + cz = 0$$
نعوض $I(2,1,1)$:
$$2a + cz = 0$$
نعوض $I(2,1,1)$:
$$2a + c = 0$$
$$C = -2a$$
$$ax - 2az = 0\ (\div\ a)$$
$$ACI: x - 2z = 0$$

٣. $\overrightarrow{DE}(4,0,0)$
$$(DE): \begin{cases} x = 4t \\ y = 0 \quad\quad t \in R \\ z = 1 \end{cases}$$

٤. $J\left(\frac{x_D+x_E}{2},\frac{y_D+y_E}{2},\frac{z_D+z_E}{2}\right)$
$$J(2,0,1)$$
لتكن $N$ نقطة تقاطع $(DE)$ مع $(ACI)$، نعوض في المعادلات الوسيطية للمستقيم $(DE)$ في معادلة المستوي $(ACI)$:
$$4t - 2 = 0 \quad t = \frac{1}{2}$$
$$x = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ \ , y = 0, z = 1$$
$$N(2,0,1)$$
نلاحظ أن $J = N$
فالنقطة $J$ هي ذاتها نقطة تقاطع $(DE)$ مع المستوي $(ACI)$.

**انتهى حل الاسئلة**