النهايات

حالات عدم التعيين

❖حالة $\frac{\infty}{\infty}$:

1-نخرج عامل مناسب من البسط و من المقام

2-نختصر

3-نعوض

❖حالة $\infty - \infty$:

نميز حالتين :

أ- نهاية سعيدة : ضرب بالمرافق (في حال وجود جذر في البسط و جذر في المقام قد تحتاج للضرب بمرافق البسط و مرافق المقام)

ب- نهاية حزينة : إخراج عامل مشترك

❖حالة $\frac{0}{0}$:

نميز الحالات الآتية :

أ- في حال وجود جذر : ضرب بالمرافق

ب- في حال وجود توابع مثلثية : دساتير + مبرهنات

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ت- في حال السعي إلى الصفر : x^n عامل مشترك

ث- في حال السعي إلى عدد : تحليل البسط و المقام أو قسمة اقليدية

ج- تعريف العدد المشتق

❖حالة $0.\infty$:

أولاً : تغيير المتحول :

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

....

....

....

....

....

....

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

....

....

....

....

....

....

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

....

....

....

....

....

....

$$\lim_{x\to 0} x\ln^2 x$$

....

....

....

....

....

....

ثانياً: مهارات و تغيير صياغة

	تدرب 1
1	$f(x)=x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)\ ,a=+\infty$
2	$f(x)=\sin x\ .\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ \ ,a=0^+$
3	$f(x)=x(\ln x-1)\ \ ,a=0^+$

❖**حالة 1^∞ :**

إذا كان التابع المدروس $f(x)$:

1- نأخذ $\ln(f(x))$

2- نحسب نهايته غالباً

(بإظهار $\frac{\ln(1+t)}{t}$)

3- فبتكون النهاية المطلوبة هي :

$e^{\text{الجواب}}$

	تدرب2
1	$f(x)=\frac{6x^2+2-2\cos 2x}{2x^2}$ a=0
2	$f(x)=\frac{2\cos x-2}{\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{2}}$ $a=0$
3	$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}$ $a=+\infty$
4	$f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ $a=0$
5	$f(x)=(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ $a=1$
6	$f(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ $a=+\infty$
7	$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ $a=0$
8	$f(x)=-\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ $a=+\infty$
9	$f(x)=\frac{x^2+2-2\cos(\sqrt{x})}{x}$ $a=0$
10	$f(x)=(3+x)^{\frac{1}{x+2}}$ $a=-2$
11	$f(x)=\frac{7x-7}{\sqrt{3x+1}-2}$ $a=1$
12	$f(x)=\frac{\sqrt{4x+5}-3}{2-\sqrt{3x+1}}$ $:a=1$

النهايات اللوغارتمية :

	نهايات بسيطة
1	$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
2	$\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$

	نهايات عند $+\infty$
1	$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$
2	$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

و تعمم المبرهنات السابقة إلى :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0\ \ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}=+\infty$$

	نهايات عند الصفر و الواحد
1	$\lim_{x\to0^+}x\ln(x)=0^-$
2	$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
3	$\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$
4	$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$
5	$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=1$

تدرب3

1	$f(x)=\frac{lnx}{x}$
2	$f(x)=x-lnx$
3	$f(x)=\frac{1}{x}+lnx$
4	$f(x)=\frac{1}{x}-lnx$
5	$f(x)=\frac{x}{lnx}$
6	$f(x)=\frac{lnx}{x^2}$
7	$f(x)=x(1-lnx)$
8	$f(x)=\frac{1}{x}(lnx-1)$
9	$f(x)=\frac{x-lnx}{x}$
10	$f(x)=\frac{x+1}{lnx}$
11	$f(x)=\frac{xlnx}{x+1}$
12	$f(x)=\frac{xlnx}{x-1}$
13	$f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x)$
14	$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$
15	$f(x)=\frac{\ln(1+sinx)}{x}$, $a=0$
16	$f(x)=\frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)-ln\sqrt{2}}{x-1}$ $a=1$
17	$f(x)=\frac{ln\sqrt{x}}{x}$, $a=+\infty$
18	$f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}$

النهايات الأسية :

نهايات بسيطة	
$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$	1
$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$	2

نهايات عند $+\infty$	
$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$	1
$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$	2

نهايات عند $-\infty$	
$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$	1

نهايات عند الصفر	
$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$	1
$\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1$	2

تدرب 4

1	$f(x)=e^x-x^2$
2	$f(x)=\frac{2e^x+1}{1+e^x}$
3	$f(x)=\ln(x)-e^x$
4	$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$
5	$f(x)=(3-x)e^x$
6	$f(x)=\frac{e^x-1}{x-1}$
7	$f(x)=\frac{e^x-1}{2x}$
8	$f(x)=\ln(e^x+2)$
9	$f(x)=2xe^{-x}$
10	$f(x)=2x-1+e^{-x}$
11	$f(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{2x}-x-2$
12	$f(x)=x-\ln(e^x+1)$ $a=+\infty$

المقاربات :

❖الإثبات :

1- نشكل الفرق $f(x)-y_\Delta$

2- نثبت أن $\lim_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$

❖دراسة الوضع النسبي :

نميز حالتين :

الفرق واضح الإشارة	الفرق غير واضح الإشارة
نحدد فوراً : $f(x)>0$ يكون c فوق Δ ، $f(x)<0$ يكون c تحت Δ	ندرس الإشارة نشكل جدول

تدرب5

$\Delta: y=4x$	$f(x)=4x+\frac{1+\sin^2 x}{x^4+1}$
$\Delta: y=2x-1$	$f(x)=2x-1+\frac{1}{x}$
$\Delta: y=x+1$	$f(x)=x+1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
$\Delta: y=\frac{1}{2}x$	$f(x)=\frac{x^3+2x-2x\cos 2x}{2x^2}$

❖إيجاد معادلة المقارب المائل :

نميز الحالات الآتية :

1- إذا كان التابع من الشكل : $f(x)=ax+b+u(x)$

- نضع $\Delta: y=ax+b$
- يكون $f(x)-y_\Delta=u(x)$
- نحسب النهاية

2- إذا كان التابع كسر درجة بسطه أكبر من درجة مقامه :

- نقسم قسمة اقليدية

3- التفريق : عندما يكون المقام : $\frac{\dots\dots\dots\dots}{ax}$

4- الإتمام إلى مربع كامل:

$$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

- نتمم ما داخل الجذر إلى مربع كامل $a(x-x_0)^2$
- نضع:

$$h(x)=f(x)-\sqrt{a(x-x_0)^2}$$

$$h(x)=\sqrt{a(x-x_0)^2+k}-\sqrt{a(x-x_0)^2}$$

- نضرب بالمرافق:

$$h(x)=\frac{k}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}$$

- نحسب النهاية
- نستنتج :

$$d_{1,2}: y=\sqrt{a(x-x_0)^2}$$
$$y=|a(x-x_0)|$$

و نميز حالات القيمة المطلقة فنحصل على مقاربين

5- الطريقة العامة :

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax$$

تدرب6:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}$

1- جد عددين حقيقين a و b يحققان الشرط :

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

2- استنتج معادلة المقارب المائل Δ

3- ادرس الوضع النسبي له مع C

تدرب 7: (دورة 2021- تكميلي)

ليكن f المعرف على $]-\infty,0[$ وفق :

$$f(x)=\frac{2x^2+\cos^2 x}{x}$$

1- جد معادلة المقارب المائل للخط c_f

2- ادرس الوضع النسبي له مع c_f

تدرب 8: ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}$$

جد معادلة المقارب المائل للخط C_f ثم ادرس الوضع النسبي لهما

الاستمرار :

شرط الاستمرار عند النقطة a :

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

و يأتي السؤال على صيغتين :

1- ادرس استمرار التابع

2- عين الثابت m ليكون f مستمراً

تدرب 9 :

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x^3-1} & ;\ x\neq 1\\ \dfrac{4}{3} & :x=1\end{cases}$$

ادرس استمرار f على R

تدرب 10 :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-lnx} & :x>0\\ 0 & :x=0\end{cases}$$

ادرس استمرار التابع f عند الصفر

تدرب 11: جد قيمة الثابت A ليكون f مستمر على R

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2x} & :x\neq 0\\ 2A-\dfrac{1}{2} & :x=0\end{cases}$$

التفسير الهندسي للنهايات

أولاً: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

صيغة السؤال :

جد عدداً حقيقياً A بحيث $f(x)\in]a,b[$ من أجل $x>A$:

1- نحدد المركز $l=\frac{b+a}{2}$

2- نحدد نصف القطر $\varepsilon=b-l$

3- نعوض في القانون $|u_n-l|<\varepsilon$

تدرب 12:

ليكن f التابع المعرف على $]e^{-2},+\infty[$ وفق

$$: f(x)=\frac{lnx-1}{lnx+2}$$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و ما هو التفسير الهندسي

2- جد عدداً حقيقياً A يحقق الشرط : $f(x)\in]0.99,1.01[$ من أجل $x>A$

الحل :

-1

$$f(x)=\frac{lnx\left(1-\frac{1}{lnx}\right)}{lnx\left(1+\frac{2}{lnx}\right)}=\frac{1-\frac{1}{lnx}}{1+\frac{2}{lnx}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

2- نحدد المركز $l=\frac{1.01+0.99}{2}=1$

نحدد نصف القطر :

$\varepsilon=b-l$

$$\varepsilon = 1.01 - 1 = 0.01 = \frac{1}{100}$$

نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{lnx - 1}{lnx + 2} - 1\right| < \frac{1}{100}$$
$$\left|\frac{-3}{lnx + 2}\right| < \frac{1}{100}$$

و لأن $x \to +\infty$ فإن $lnx + 2 > 0$

$$\frac{3}{lnx + 2} < \frac{1}{100}$$
$$lnx + 2 > 300$$
$$lnx > 298$$
$$x > e^{298}$$

فنختار $A = e^{298}$ أو أي عدد حقيقي أكبر منه

ثانياً: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

صيغة أولى : جد عدداً حقيقياً α يحقق الشرط:

$f(x) > M$ من أجل $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$

صيغة ثانية : عين مجالاً I مركزه x_0 يحقق :

$f(x) > M$ عندما $x \in I$ (أو $x \in I\backslash\{x_0\}$)

1- نضع $f(x) > M$
2- بما أن $x \to x_0$ فنستبدل البسط بـ A حيث A يساوي تقريباً البسط
3- نعزل المقام لنحاول الوصول إلى الشكل :

$$|x - x_0| < \alpha$$

4- بذلك نكون أوجدنا قيمة α
5- إذا أردنا المجال , فحسب خواص القيمة المطلقة :

$$-\alpha < x - x_0 < \alpha$$

نضيف x_0 للأطراف :

$$x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$$

فنجد المجال المطلوب

تدرب 13 :

ليكن f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق :

$$f(x) = \frac{5x - 1}{(x - 1)^2}$$

1- احسب نهاية $f(x)$ عند الواحد
2- جد عدداً حقيقياً α يحقق الشرط :
$f(x) > 10^3$ عندما
$x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$

الحل :

-1

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

2- نضع :

$$f(x) > 10^3$$
$$\frac{5x - 1}{(x - 1)^2} > 10^3$$

بما أن $x \to 1$ فإن $5x - 1 = A \approx 4$

$$\frac{A}{(x - 1)^2} > 10^3$$
$$(x - 1)^2 < \frac{A}{10^3}$$

نختار $\alpha = 3.6$ (قريب من 4 و يمكن جذره)

$$(x - 1)^2 < \frac{3.6}{10^3}$$
$$(x - 1)^2 < \frac{36}{10^4}$$

نجذر :

$$|x - 1| < \frac{6}{10}$$
$$|x - 1| < 0.06$$

إذن $\alpha = 0.06$

و إذا كان المطلوب مجالاً :

$$-0.06 < x - 1 < 0.06$$
$$1 - 0.06 < x < 1 + 0.06$$
$$0.94 < x < 1.06$$
$$I =]0.94, 1.06[$$

ثالثاً : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

صيغة السؤال : جد عدداً حقيقياً A بحيث :

$x > A$ عندما $f(x) > M$

1- ننطلق من $f(x) > M$
2- نعزل x فنصل إلى $x > A$

رابعاً: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

صيغة السؤال :

جد مجالاً I مركزه x_0 بحيث $f(x) \in]a,b[$

من أجل $x \in I$

1- ننطلق من : $a < f(x) < b$
2- نعزل x فنصل إلى : $A < x < B$

نهاية تابع مركب :

إذا كان $g(x) = f(u(x))$ و طُلب حساب

$\lim_{x\to a} g(x)$

1- نحسب نهاية المضمون عند a أي :
$\lim_{x-a} u(x) = l$
2- نستبدل المضمون بـ u و نعوض في f فنحصل على : $f(u)$
3- نحسب نهاية التابع الجديد عندما $u \to l$

الصيغة الأولى : ليكن $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x+1}{3x+1}\right)$

احسب نهاية f عند $+\infty$

1- نرمز للمضمون $u(x)$:

$$u(x) = \frac{\pi x + 1}{3x + 1}$$

2- نحسب نهاية $u(x)$ عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \frac{\pi}{3}$$

3- نضع $f(x) = \cos(u)$

$$\lim_{u\to\frac{\pi}{3}} \cos(u) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

الصيغة الثانية :

استنتج $\lim_{x\to a} f(f(x))$

بشكل مشابه تماماً :

1- نفرض المضمون $u(x) = f(x)$
2- نحسب $\lim_{x\to a} u(x) = l$
3- نضع المضمون u فنحصل على :
$f(u)$
4- نحسب $\lim_{u\to l} f(u)$

مثال: ليكن $f(x) = \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2- استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

الحل :

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x) : \frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

2- نضع $u(x) = f(x)$:

وجدنا أن :

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$$

بالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{u\to0} f(u) = \lim_{u\to0} \frac{e^u-1}{e^{2u}+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

تابع الجزء الصحيح :

تدرب 14 :

$$f(x) = 2x + E(x) \quad : x \in [0,3[$$

1- اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$
2- ادرس استمرار f على المجال $[0,3[$
3- ارسم c_f
4- احسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2+1}$

بنك النهايات

السؤال الأول : ليكن $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$ خطه البياني C

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)$

ثم استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$

السؤال الثاني : ليكن C الخط البياني للتابع :

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- أثبت أن $d: y=x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي لـ d مع C

4- أثبت أن f فردي

السؤال الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع :

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

1- جد الأعداد a,b,c التي تحقق أن :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$$

2- استنتج معادلة المقارب المائل و ادرس وضعه النسبي مع C

السؤال الرابع: احسب $\lim\limits_{x\to0} x(lnx)^2$

السؤال الخامس : ليكن $f(x)=\frac{3}{2+cosx}$

1- أثبت محدودية f

2- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2f(x)$

السؤال السادس : ليكن f التابع المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{2+lnx}{1+lnx}$$

1- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعطِ عدداً حقيقياً A يحقق أن $f(x)$ من المجال $]0.9,1.1[$ عندما x > A

2- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

السؤال السابع : ليكن f التابع المعرف وفق على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xsinx}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x\neq0\\ m & : x=0\end{cases}$$

جد قيمة m ليكون f مستمراً عند الصفر

السؤال الثامن : احسب

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+sinx)}{x}$$

السؤال التاسع : $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}$

1- جد عددين a, b يحققان :

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$$

2- استنتج معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي له مع C

السؤال العاشر : ليكن $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$

1- احسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

2- جد مجالاً I مركزه -1 يحقق الشرط:

إذا انتمت x إلى I كان $f(x)>10^2$

السؤال الحادي عشر : أوجد نهاية التابع :

$$f(x)=\frac{cosx-1}{x^2}+\frac{1}{2}$$

عند الصفر

السؤال الثاني عشر :

ليكن $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- أثبت أن $d: y = x - 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي

السؤال الثالث عشر :

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

ما نهاية f عند $-\infty$

السؤال الرابع عشر : ليكن

$$g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2- نضع $f(x) = \frac{g(x)}{x}$. احسب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

السؤال الخامس عشر :

ليكن $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}$

احسب نهاية f عند أطراف مجال تعريفه

السؤال السادس عشر : احسب :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

السؤال السابع عشر :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(1 + lnx)$$

الاشتقاق

تعريف العدد المشتق :

الصيغة الأولى : أثبت أن التابع f قابل للاشتقاق عند النقطة a

1- نشكل التابع $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2- نحسب $\lim\limits_{x\to a} g(x)$

3- إذا كان الجواب : عدد فهو قابل (يقبل مماس ميله الجواب)

إذا كان الجواب : لانهاية غير قابل (يقبل مماس شاقولي $x = a$)

4- في حال وجود قيمة مطلقة فإننا نحسب النهاية من اليمين و النهاية من اليسار فإذا كان :

$$\lim_{x\to a^+} g(x) \neq \lim_{x\to a^-} g(x)$$

فهو غير قابل للاشتقاق (يقبل نصفي مماسين)

تدرب 15:

	ادرس قابلية اشتقاق f عند a
1	$f(x) = x\ln(x+1)$, $a = 0$
2	$f(x) = \sin(\sqrt{x})$, $a = 0^+$
3	$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - lnx} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ $a = 0$

الصيغة الثانية : إزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

تدرب 16 :

ليكن $f(x) = e^x$ و المطلوب:

1- احسب $f(ln2)$ و $f'(x)$ و $f'(ln2)$

2- استنتج قيمة النهاية :

$$\lim_{x\to ln2} \frac{e^x - 2}{x - ln2}$$

تدرب 17 : باستخدام تعريف العدد المشتق احسب النهاية :

$$\lim_{x \to e} \frac{x\ln x - e}{x - e}$$

معادلة المماس و نصف المماس :

لتعيين معادلة المماس نحتاج معرفة :

1- الفاصلة a
2- التراتيب $f(a)$
3- الميل $m = f'(a)$

لنعوض في القانون :

$$T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

أما نصف المماس من اليمين :

$$T: y = f'(a^+)(x-a) + f(a)$$

و نصف المماس من اليسار :

$$T: y = f'(a^-)(x-a) + f(a)$$

تدرب 18 : اكتب معادلة المماس الأفقي للخط C_f للتابع $f(x) = e^{2x} - 2x$

تدرب 19 : اكتب معادلة المماس للخط C_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب حيث :

$$f(x) = \ln(x+1)$$

تدرب 20 : اكتب معادلة الماس للخط C_f للتابع

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

الموازي للمستقيم $y - 4x = 0$

تدرب 21 :

ليكن $f(x) = \frac{x+|x|}{x+2}$

1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر

2- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للتابع f

التقريب التآلفي :

نجزئ العدد صعب الحساب إلى جزأين :

a , h

نعوض في القانون :

$$\boxed{f(a+h) \approx hf'(a) + f(a)}$$

تدرب 22 :

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

1- أثبت أن f مستمر عند الصفر
2- احسب $f'(x)$ على R^*
3- جد قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$

الاشتقاق المركب :

الصيغة الأولى :

أثبت أن التابع $g(x) = f\big(u(x)\big)$ اشتقاقي على I :

يجب تحقق شرطان :

1- المضمون اشتقاقي على المجال المعطى
2- المضمون ينتمي إلى مجال اشتقاقية f

الصيغة الثانية : احسب مشتق $g(x) = f(u(x))$

$$g'(x) = f'\big(u(x)\big).u'(x)$$

تدرب 23 : ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{lnx}{x+1}$$

1- احسب $f'(x)$
2- نضع $g(x)=f(sinx)$
أ- أثبت أن g اشتقاقي على $I=]0,\frac{\pi}{2}[$
ب- احسب $g'(x)$ على I

تدرب 24 : ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x^2}$$

1- احسب $f'(x)$
2- استنتج مشتقات التوابع :

$$g(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$$

$$h(x)=\frac{e^{sinx}-1}{\sin^2 x}$$

المشتقات من مراتب عليا :

1- نحسب $f'(x),f''(x)$
2- نثبت بالتدريج صحة العلاقة التي تعطي صيغة $f^{(n)}(x)$ بدلالة n

حيث للانتقال من الفرض إلى الطلب نشتق الطرفين مع مراعاة أن :

$$(f^{(n)}(x))'=f^{(n+1)}(x)$$

تدرب 25:

$$f(x)=-\ln(1-x)$$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$
2- أثبت بالتدريج أنه من أجل كل $n\geq 1$:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

دراسة اطراد تابع و حل المتراجحات المختلطة:

1- نشتق التابع f
2- نعدم المشتق
3- ننظم جدول اطراد

و في حال طُلب استنتاج متراجحة فإننا نستنتجها من جدول الاطراد و تحديداً من حقل $f(x)$

تدرب 26 : ليكن $g(x)=e^x+2-x$

1- ادرس اطراد $g(x)$
2- استنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x)>0$

تدرب 27 :

أثبت أن $\ln(x+1)\leq\sqrt{x+1}$ مهما يكن $x>-1$

التابع الفردي و التابع الزوجي

الشرط الأول : $x\in D_f\rightarrow -x\in D_f$

الشرط الثاني : $f(-x)=\begin{cases} f(x): \text{زوجي} \\ -f(x): \text{فردي}\end{cases}$

الصفات التناظرية :

التابع الفردي متناظر بالنسبة للمبدأ

التابع الزوجي متناظر لمحور التراتيب

تدرب 28 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,2]$ وفق :

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$$

1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $a=2$ و $a=-2$ و فسر النتائج هندسياً

2- أثبت أن f فردي و اذكر الصفة التناظرية

3- ادرس تغيرات f على المجال $[0,2]$

4- ارسم c_f

5- استنتج الخط البياني للتابع g المعرف وفق :

$$g(x)=|x|\sqrt{4-x^2}$$

تدرب 29 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق :

$$f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

1- تحقق أن $D_f=]-2,2[$

2- أثبت أن f فردي و استنتج الصفة التناظرية

3- ادرس تغيرات f على المجال $]-2,0]$

4- ارسم c_f

5- استنتج الخط البياني للتابع:

$$g(x)=\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

مركز التناظر

تكون النقطة $I(a,b)$ مركز تناظر للخط c_f إذا تحقق شرطان :

الشرط الأول :

$$x\in D_f \to 2a-x\in D_f$$

1- ننطلق من $x\in D_f$

2- نضرب الطرفين بناقص (إذا كانت مجموعة التعريف على شكل مجال نعكس ترتيب الأطراف)

3- نضيف للطرفين $2a$

4- نصل إلى $2a-x\in D_f$

الشرط الثاني :

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

1- نحسب $f(2a-x)$ باستبدال كل x بـ $2a-x$

2- نحسب المجموع :

$$f(2a-x)+f(x)$$

3- نصل إلى $2b$

تدرب 30 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$

1- أثبت أن $I(-1,-3)$ مركز تناظر

2- جد الأعداد a,b,c بحيث يكون $f(x)=a+b+\frac{c}{x+1}$

3- استنتج معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي لهما

4- ادرس تغيرات f

5- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم c_f

6- استنتج الخط البياني للتابع :

$$g(x)=\frac{2x^2-x+7}{1-x}$$

تدرب 31 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]1,3[$ وفق :

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

1- ادرس تغيرات f

2- أثبت أن $I(2,0)$ مركز تناظر

3- ارسم c_f

تعيين الثوابت :

الحالة الاولى : صيغ متكافئة

نعطى صيغتين إحداهما معلومة و الأخرى تشتمل على ثوابت يُطلب تعيينها

نصلح إحدى الصيغ (بنشرٍ أو قسمة اقليدية أو توحيد مقامات) و نطابق الصيغتين

تدرب 32

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x + 1}$$

عين a, b إذا علمت $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

الحل:

بالقسمة الإقليدية

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x + 1}$$

بالمقارنة مع

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

نجد

$$a = 1 \,, b = 2 \,, c = 2$$

تدرب33 :

بفرض $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$

أوجد عددين حقيقين a, b يحققان أن :

$$f(x) = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}$$

الحل :

نوحد مقامات :

$$f(x) = \frac{a(x - 2) + b(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}$$

نطابق البسوط :

$$x = a(x - 2) + b(x - 1)$$

نضع $x = 1$:

$$1 = -a$$

$$\boxed{a = -1}$$

نضع $x = 2$:

$$\boxed{2 = b}$$

و بالتالي :

$$f(x) = \frac{-1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2}$$

تدرب 34 :

ليكن $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$, جد عددين حقيقين a, b يحققان أن :

$$f(x) = a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}$$

الحل :

نوحد مقامات :

$$f(x) = \frac{a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c}{(x - 1)^2}$$

نطابق البسوط :

$$x^2 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$$

نضع $x = 1$:

$$\boxed{c = 1}$$

نضع $x = 0$:

$$0 = a - b + 1$$

$$\boxed{a - b = -1} \dots (1)$$

نضع $x = 2$:

$$4 = a + b + 1$$

$$\boxed{a + b = 3} \dots (2)$$

بجمع 1 و2 :

$$\boxed{a = 1}$$

نعوض في 1 :

$$\boxed{b = 2}$$

$$a = 1 \quad , \quad b = 2 \quad , c = 1$$

تدرب 35:

بفرض $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2+2x+3}$

عين عددين حقيقين a, b و تابعاً $u(x)$ يحقق أن :

$$f(x) = ax + b + \frac{u(x)}{x^2 + 2x + 3}$$

الحل :

لدينا $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2+2x+3}$ بالقسمة الاقليدية :

$$f(x) = x - 2 + \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3}$$

بالمقارنة مع :

$$f(x) = ax + b + \frac{u(x)}{x^2 + 2x + 3}$$

نجد أن :

$$a = 1 \quad , \quad b = -2 \quad , \quad u(x) = x + 2$$

تدرب 36:

ليكن $f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$. جد عددين a, b, c

تحقق أن :

$$f(x) = a + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 2}$$

الجواب :

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x + 1} + \frac{8}{x - 2}$$

الحالة الثانية : معطيات عددها يساوي عدد المجاهيل و يوضح الجدول الآتي كيف نترجم كلاً من المعطيات إلى عبارة رياضية

المعطى	العلاقة المكافئة
الخط البياني للتابع يمر من نقطة $A(x_0, y_0)$ أو النقطة $A(x_0, y_0)$ تنتمي للخط البياني	بما ان النقطة تنتمي للخط البياني فإن : $f(x_0) = y_0$
الخط البياني يقبل مماساً ميله m في النقطة التي فاصلتها x_0	من عبارة الميل : $f'(x_0) = m$
الخط البياني للتابع يقبل مماساً ميله m في نقطة منه $A(x_0, y_0)$	هنا لدينا معلومتين : 1- النقطة A تنتمي للتابع إذن : $f(x_0) = y_0$ 2- الميل عند A هو m : $f'(x_0) = m$ تذكر إذا ذكر أن المماس أفقي فإن $m = 0$

للتابع قيمة حدية عند x_0	بما أنها قيمة حدية فهي تعدم المشتق : $f'(x)=0$
للتابع قيمة حدية عند x_0 مساوية لـ y_0	هنا لدينا معلومتين : $f'(x_0)=0$ $f(x_0)=y_0$

تدرب 37:

① $f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$

عين a,b لتكون $y=4x+3$ معادلة المماس للخط C_f في النقطة التي فاصلتها 0.

الحل:

من الميل $\boxed{f'(0)=4}$ والتابع يمر من النقطة (x_0,y_0)

حيث $x=0$ لكن y_0 غير معلومة فنحسبها من المستقيم :

$$y_0=4(0)+3=3$$

$$f(x_0)=y_0\Rightarrow \boxed{f(0)=3}$$

اشتقاق f على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{(9x^2+a)(x^2+1)-2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$1)\quad f'(0)=4\Rightarrow a=4$$

$$2)\quad f(0)=3\Rightarrow b=3$$

②

$$f(x)=ax^3+3x^2+3x+b$$

عين a إذا علمت أنه يقبل قيمة حدية عند $x=-1$ مساوية للعدد 2 .

الحل: لدينا معلومتان :

$\boxed{f'(-1)=0}$, $\boxed{f(-1)=2}$

اشتقاق f

$$f'(x)=3ax^2+6x+3$$

$$f'(-1)=0$$

$$3ax^2+6x+3=0$$

$$3a-3=0$$

$$a=1$$

$$f(-1)=-a+3-3+b=2$$

$$-a+b=2$$

$$-1+b=2$$

$$b=3$$

③ $f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$

عين a,b إذا علمت أن $f(-1)=0$ قيمة حدية.

الحل:

$$\boxed{f(-1)=0}$$

$$\frac{a-b+1}{-2}=0$$

$$a-b=-1 \ldots ❶$$

$$\boxed{f'(-1)=0}$$

اشتقاق f على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(-1)=0$$

$$\frac{(-2a+b)(-2)-(a-b+1)}{4}=0$$

$$4a-2b-a+b-1=0$$

$$3a-b=1 \dots ❷$$

بالجمع بين ❶ و ❷ نجد

$$-2a=-2$$

$$a=1$$

استنتاج الخط البياني انطلاقاً من خط معلوم:

الانسحاب:

إذا كان $g(x)=f(x)+b$ فإن c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $b\vec{j}$ (انسحاب شاقولي)

إذا كان $g(x)=f(x+a)$ فإن c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $-a\vec{i}$ (انسحاب أفقي)

التناظر :

إذا كان $g(x)=f(-x)$ فإن c_g نظير c_f بالنسبة لمحور التراتيب

إذا كان $g(x)=-f(x)$ فإن c_g نظير c_f بالنسبة لمحور الفواصل

إذا كان $g(x)=-f(-x)$ فإن c_g نظير c_f بالنسبة للمبدأ

القيمة المطلقة:

إذا كان $g(x)=|f(x)|$ فإن c_g ينتج عن c_f باستبدال النقاط التي تحت محور الفواصل بنظائرها بالنسبة لمحور الفواصل

أمثلة و تدريبات :

استنتج في كلٍ من الحالات التالية الخط البياني c_g للتابع g انطلاقاً من c_f الخط البياني للتابع f المعرف بالشكل :

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

-1 $g(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(-x)=\frac{(-x+1)^2}{(-x)^2+1}=\frac{(1-x)^2}{x^2+1}$$

$$\underset{\text{نخرج ناقص}}{=}\frac{\left(-(x-1)\right)^2}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$=g(x)$$

و منه c_g نظير c_f بالنسبة لمحور التراتيب .

-2 $g(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(x-1)=\frac{(x-1+1)^2}{(x-1)^2+1}$$

$$=\frac{x^2}{(x-1)^2+1}$$

$$=g(x)$$

و بالتالي C_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $1\,\vec{i}$.

-3 $g(x) = \frac{(x+1)^2+x^2+1}{x^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(x)+1 = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}+1 = \frac{(x+1)^2+x^2+1}{x^2+1} = g(x)$$

و بالتالي c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $1\vec{j}$

دراسة تغيرات تابع :

تدرب 38:

ليكن c_f الخط البياني للتابع :

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

1- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

2- جد معادلة المماس للخط c_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

3- ارسم المماس و المقاربات ثم ارسم c_f

تدرب 39 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق : $f(x) = x\sqrt{3-x}$

على المجال $]-\infty, 3]$:

1- أثبت أن C يقبل مماساً شاقولياً

2- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً به

3- ارسم c_f

تدرب 40 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1- أثبت أن f فردي

2- أثبت أن المستقيم $y = x-1$ مقارب مائل للخط C_f عند $+\infty$

3- أثبت أن المستقيم $y = x+1$ مقارب مائل للخط C_f عند $-\infty$

4- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

5- أيقبل C مماساً أفقياً ؟

6- ارسم C

تدرب 41 :

ليكن التابع f المعرف بالشكل:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2) اوجد معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي

3) أثبت أن f فردي

4) ارسم المقارب المائل وارسم c_f

5) بفرض $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ و $u_0 = 2$

أ- أثبت بالتدريج $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$

ب- استنتج أن المتتالية متقاربة و عين نهايتها

تدرب 42 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب ما تجده من مقاربات

2- جد معادلة المقارب المائل للخط C عند $+\infty$ و $-\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب المائل

4- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

5- اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

6- أثبت أن النقطة $A(-1,2)$ هي مركز تناظر للخط C

7- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم T ثم ارسم C

8- استنتج الخط البياني للتابع g المعرف وفق :

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

أسئلة دورات :

السؤال الأول : ليكن التابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ و المطلوب:

1- عين التابع المشتق f' للتابع f

2- ليكن g التابع المعرف وفق $g(x) = f(\sqrt{x})$ على $J =]1, +\infty[$ أثبت أن g اشتقاقي على J ثم احسب $g'(x)$ على J

السؤال الثاني : ليكن التابع f المعرف وفق :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$$

عين العددين الحقيقين a, b لتكون $f(-1) = 0$ قيمة حدية للتابع .

السؤال الثالث : ليكن التابع f المعرف على R وفق :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad f(0) = 0$$

و المطلوب :

1- أثبت أن f اشتقاقي عند $x = 0$

2- احسب $f'(x)$ على R^*

3- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

السؤال الرابع : $f(x) = x - sinx$ اثبت أن f متزايد

السؤال الخامس : $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$: $]2, +\infty[$

1- ادرس تغيرات f على المجال $]2, +\infty[$ و نظم جدولاً بها

2- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

3- اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 3$

السؤال السادس :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = ax + b - \frac{lnx}{x}$$

1- عين a,b إذا علمتت ان المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم $d: y=3x$

2- من أجل $a=4, b=-4$ أثبت أن المستقيم $y=4x-4$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$ و ادرس الوضع النسبي

التمرين السابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1- احسب $lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $lim_{x\to-\infty}f(x)$

2- أثبت أن Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي

السؤال الثامن : أولاً : ليكن التابع g المعرف وفق

$$g(x)=\frac{x^2+bx+a}{x-1}$$

جد العددين a,b علماً أن التابع g يقبل قيمة محلية عند $x=0$ قيمتها تساوي 2

ثانياً بفرض التابع $f(x)=x+3+\frac{1}{x-1}$

1- اثبت أن $\Delta: y=x+3$ مقارب مائل

2- ادرس نهايات عند حدود مجال تعريفه

3- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

4- استنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً حقيقياً واحداً α ينتمي إلى المجال $]-3,-2[$

التكامل و التوابع الأصلية

ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I , نقول إن التابع F تابع أصلي للتابع f على I , إذا

وفقط 1- F اشتقاقي على I

2- $F'(x)=f(x)\,;\forall x\in I$

قواعد إيجاد التوابع الأصلية :

الجدول 1: التوابع الأولية

$f(x)$	$F(x)$	ملاحظات
a	ax	-
1	x	-
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n\neq-1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	نزيل القيمة المطلقة
e^x	e^x	-
$\cos x$	$\sin x$	-
$\sin x$	$-\cos x$	-
$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x$	-
$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$	$-\cot x$	-
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	-

ملاحظة : إذا كان المضمون $ax+b$ فإننا نطبق نفس القواعد ولكن مع الضرب بـ $\frac{1}{a}$

أوراق الجلسات المكثفة

الجدول 3: $u'f(u(x)) \Rightarrow F(u(x))$

$f(x)$	$F(x)$
$H'H^n$	$\frac{H^{n+1}}{n+1}$
$\frac{H'}{H}$	$\ln\lvert H\rvert$
$H'\cos(H)$	$\sin(H)$
$H'\sin(H)$	$-\cos(H)$
$H'e^H$	e^H
$\frac{H'}{\sqrt{H}}$	$2\sqrt{H}$

إذا كنا أمام تابع مركب فإنه لا يمكن إيجاد تابعه الأصلي إلا بعد إظهار مشتق المضمون خارج التابع

① نظهر التابع H'

② نحذف المشتق ونكامل التابع

تدرب 43 :

جد تابعاً أصلياً للتابع f في كلٍ من الحالات الآتية :

① $f(x) = (x-2)(x^2-4x+5)^3$

نلاحظ أن : $H(x) = x^2-4x+5$

$H'(x) = 2x-4$

نظهر H' بأن نضرب ونقسم بـ 2

$$f(x) = \frac{1}{2}\underbrace{(2x-4)}_{H'}\underbrace{(x^2-4x+5)^3}_{H^3}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+5)^4}{4} + k$$

$$= \frac{1}{8}(x^2-4x+5)^4 + k$$

② $f(x) = x\,e^{x^2}$

نلاحظ أن $H(x) = x^2$ و $H' = 2x$

نظهر H' بالضرب والقسمة ب 2

$$f(x) = \frac{1}{2}\underbrace{2x}_{H'}\underbrace{e^{x^2}}_{e^H}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$$

لا تنسَ: التابع الاصلي لـ e^x هو e^x

③ $f(x) = \frac{1}{x.\ln(x)}$; $x \in]1,+\infty[$

$$F(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(x)}$$

نلاحظ أن: $H(x) = \ln(x)$ و $H'(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = H'.\frac{1}{H} = \frac{H'}{H}$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln|H(x)| + k$$

$$= \ln|\ln(x)| = \ln(\ln(x)) + k$$

④ $f(x) = (x+3)\cos(x^2+6x)$

نلاحظ أن: $H(x) = x^2+6x$

$H'(x) = 2x+6$

نظهر H' :

$$f(x) = \frac{1}{2}(2x+6)\cos(x^2+6x)$$

$$= \frac{1}{2}H'\cos(H)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin(x^2+6x) + k$$

⑤ $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

$$f(x) = (2x+1)(x^2+x)^{-2}$$

نلاحظ أن : $H(x) = x^2+x$

$H'(x) = 2x+1$

$$f(x) = \underbrace{2x+1}_{H'}\underbrace{(x^2+x)^{-2}}_{H^n}$$

$$F(x) = \frac{(x^2+x)^{-1}}{-1} + k$$

$$F(x) = \frac{-1}{x^2+x} + k$$

⑥ $f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$

نلاحظ أن: $H(x) = x^2-x$

$H'(x) = 2x-1$

نظهر H'

$$f(x) = 2\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$F(x) = 2\left[2\sqrt{x^2-x}\right] + k$$

$$= 4\sqrt{x^2 - x} + k$$

⑦ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}2\sqrt{x^2-9} + k$$

$$F(x) = \sqrt{x^2-9} + k$$

⑧ $f(x) = x^2\sqrt[3]{(x^3+1)^2}$

$$= x^2(x^3+1)^{\frac{2}{3}}$$

نلاحظ أن: $H(x) = x^3 + 1$

$$H'(x) = 3x^2$$

نظهر $H'(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{3}\underbrace{3x^2}_{H'}\underbrace{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}_{H^n}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}\frac{(x^3+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{(x^3+1)^5} + k$$

⑨ $f(x) = tan(x) \; ; \; x \in \left]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right[$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

نلاحظ أن: $H(x) = \cos(x)$

$$H'(x) = -\sin(x)$$

نظهر H':

$$f(x) = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$F(x) = -\ln|\cos x| + k$$

$$F(x) = -\ln(-\cos x) + k$$

إيجاد التوابع الأصلية للتوابع الكسرية:

♡ لايمكن إيجاد تابع أصلي لتابع كسري ما لم تكن درجة بسطه أصغر تماماً من درجة مقامه وإن لم يحقق ذلك نقسم البسط على المقام

$$f(x) = \text{ناتج القسمة} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

♡ التوابع الاصلية للكسور البسيطة:

① **التوابع من الشكل** $\frac{\propto}{ax+b}$

نخرج $\propto$: $\propto \frac{1}{ax+b}$

نضرب ونقسم ب a

$$\frac{\propto}{a}\frac{a}{ax+b}$$

أصبح من الشكل $\frac{H'}{H}$ إذن:

$$F(x) = \frac{\propto}{a}\ln|ax+b|$$

أمثلة:

1

$f(x) = \frac{3}{2x-1} \quad ; x \in]-\infty, 0[$

$$f(x) = 3\frac{1}{2x-1}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{2}{2x-1}$$

$$F(x) = \frac{3}{2}\ln|2x-1| + k$$

$$= \frac{3}{2}\ln(-2x+1) + k$$

2

$f(x) = \frac{5}{x-1} \quad ; x \in]1, +\infty[$

$$f(x) = 5\frac{1}{x-1}$$

$$F(x) = 5\ln|x-1| + k$$

$$= 5\ln(x-1) + k$$

3

$f(x) = \frac{6}{1-2x} \; ; x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

$$f(x) = 6\frac{1}{1-2x}$$

$$f(x) = \frac{6}{-2}\frac{-2}{1-2x}$$

$$F(x) = -3\ln|1-2x| + k$$

$$= -3\ln(1-2x) + k$$

② **التوابع من الشكل** $\frac{\propto}{ax^2+bx+c}$

نتمم المقام إلى مربع كامل

يصبح من الشكل

$$f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^n} = A(x-x_0)^{-n}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{A(x-x_0)^{-n+1}}{-n+1}$$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{1-2x+x^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^{-2}$$

$$F(x)=\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+k$$
$$=\frac{-1}{(x-1)}+k$$

③ **التوابع من الشكل** $\frac{ax+b}{cx+d}$

نقسم البسط على المقام

$$f(x)=\underbrace{A}_{Ax}+\underbrace{\frac{B}{Cx+D}}_{\text{نوع أول}}$$

أمثلة:

1

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$$

نقسم

$$f(x)=2+\frac{1}{x+1}$$
$$F(x)=2x+\ln|x+1|+k$$

2

$$f(x)=\frac{3x-5}{x-2}$$

$$f(x)=3+\frac{1}{x-2}$$
$$F(x)=3x+\ln|x-2|+k$$

3

$$f(x)=\frac{5x+1}{x+5}$$

$$f(x)=5-\frac{24}{x+5}$$
$$=5-24\frac{1}{x+5}$$
$$F(x)=5x-24\ln|x+5|+k$$

④ **باقي التكاملات الكسرية:** تحل بتفريق الكسور + تكامل محدد

كيف نفرق كسر إلى كسور جزئية:

❶ نحل المقام إلى عوامل درجة أولى $(x-a)(x-b)$

❷ نضع الكسر المكامل بالشكل

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\quad \dots\dots\dots(\star)$$

❸ نضرب الطرفين ب $(x-a)(x-b)$

❹ نعوض $x=b$ في الطرفين فنحصل على A

❺ نعوض $x=a$ في الطرفين فنحصل على B

❻ نعوض في $(\star)$ فيصبح لدينا توابع من النوع الأول

أمثلة: أوجد التوابع الأصلية للتوابع التالية:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2-x-2}$

قد تحاول حله بالاتمام إلى مربع كامل ، لكن ذلك لن ينجح لانك لن تصل لمقام من الشكل $(x-x_0)^2$

لذلك نلجأ إلى تفريق الكسور:

$\boxed{1}$ نحل المقام

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

$\boxed{2}$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}\quad(\star)$$

$\boxed{3}$ نضرب الطرفين ب $(x+1)(x-2)$

$$1=A(x-2)+B(x+1)$$

$\boxed{4}$ نضع $x=-1$ فنجد:

$$1=A(-1-2)+B(-2+2)$$
$$1=-3A$$
$$\boxed{A=-\frac{1}{3}}$$

مرة أخرى نضع $x=2$:

$$1=A(2-2)+B(2+1)$$
$$1=3B$$
$$\boxed{B=\frac{1}{3}}$$

نعوض في $(\star)$

$$f(x)=\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}$$
$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{x-2}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + k$$

(2 $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$

$$= \frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

نضرب $(x-1)(x+1)$

$$x+3 = A(x+1) + B(x-1)$$

نضع $x = 1$:

$$4 = 2A$$

$$\boxed{A = 2}$$

نضع $x = -1$:

$$2 = -2B$$

$$\boxed{B = -1}$$

نعوض :

$$f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + k$$

(3 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$

نقسم البسط على المقام

$$f(x) = \underbrace{x+1}_{\text{سهل}} + \frac{3x}{x^2-x-2}$$

لنضع

$$g(x) = \frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{3x}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

....

....

....

....

....

....

.

التكامل المحدد:

ليكن f تابعاً مستمراً على المجال I و $a, b \in I$ عندئذٍ نرمز للتكامل المحدد للتابع f على المجال $[a, b]$ بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

وإذا كان F تابعاً أصلياً لـ f عندئذٍ

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

التكامل بالتجزئة: يستخدم التكامل بالتجزئة لحساب تكاملات لتوابع على شكل جداء تابعين مختلفين أي:

① أسي x صحيح	② مثلثي x صحيح
③ لوغارتمي x صحيح	④ أسي x مثلثي

خطة الحل:

❶ نفرض أحد التابعين u والأخر v'

❷ نشتق u أي نوجد u'

ونوجد التابع الأصلي لـ v' أي v

$$u = ------ \Rightarrow u' = ------$$

$$v' = ------ \Rightarrow v = ------$$

❸ نعوض في القانون:

$$I = [u.v]_a^b \int_a^b u'v\ \,dx$$

❹ نوجد قيمة التكامل المتبقي ونعوض الحدود

مثال:

$$I \int_0^1 x\,e^{-x}\ dx$$

نفرض $u = x$ و $v' = e^{-x}$ إذن :

$$u = x \quad \Rightarrow \quad u' = 1$$

$$v' = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x}$$

$$I = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}.1\ dx$$

$$[-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\ dx$$

$$= [-xe^{-x}]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1$$

$$[(-1e^{-1}) - (-0e^{-0})]$$

$$+ [(-e^{-1}) - (-e^{-0})]$$

$$= [-e^{-1} - 0] + [-e^{-1} + 1]$$

$$= \boxed{-2e^{-1} + 1}$$

كيف نختار v' و u ؟ :

❶ $\underbrace{\text{أسي}}_{v'} \times \underbrace{\text{صحيح}}_{u}$

❷ $\underbrace{\text{مثلثي}}_{v'} \times \underbrace{\text{صحيح}}_{u}$

❸ $\underbrace{\text{لوغاريتمي}}_{u} \times \underbrace{\text{صحيح}}_{v'}$

❹ $\underbrace{\text{أسي}}_{u \text{ أو } v'} \times \underbrace{\text{مثلثي}}_{u \text{ أو } v'}$

ملاحظة: في الحالة الأخيرة:

لك حرية اختيار الفرضيات

ستجزأ مرتين مع المحافظة على الفرضيات

(إذا فرضت u هو الأسي في المرة الأولى فيجب أن تفرض u هو الأسي في المرة الثانية)

بعد التجزئة الثانية سيظهر التكامل الأصلي فنستبدله باسمه الأصلي وننقله إلى الجهة الثانية ثم نعزله.

تدرب 44 :

جد قيمة كلاً من التكاملات :

①

$$I = \int_1^e x\ln(x)\,dx$$

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[\left(\frac{e^2}{2}\underbrace{\ln(e)}_{=1}\right) - \underbrace{\left(\frac{1^2}{2}\ln(1)\right)}_{=0}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2+1}{4}}$$

②

$$I = \int_0^1 (2x+x)e^{2x}\,dx$$

$$u = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad u' = 2$$

$$v' = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$I\left[(2x+2)\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}.2\,dx$$

$$= \left[(2+2)\frac{1}{2}e^2 - (0+2)\frac{1}{2}e^0\right]$$

$$-\int_0^1 e^{2x}\,dx$$

$$= (2e^2 - 1) - \frac{1}{2}[e^{2x}]_0^1$$

$$= (2e^2 - 1) - \frac{1}{2}(e^2 - e^0)$$

$$2e^2 - 1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3e^2 - 1}{2}}$$

③

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,dx$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad u' = 1$$

$$v' = \sin(2x) \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$I = \left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\pi}_{-1}\right) - 0\right] + \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}\left[\underbrace{\sin(\pi)}_{0} - \underbrace{\sin(0)}_{0}\right] = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

{special} ④

$$I = \int_1^e \ln(x)\,dx$$

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e 1\,dx$$

$$[ein(e) - 1\ln(1)] - [x]_1^e$$

$$= e - [e - 1] = \boxed{1}$$

⑤

$$I = \int_{e}^{e^2} x\ln(x^2)\,dx$$

$$= \int_{e}^{e^2} 2x\ln(x)\,dx$$

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = 2x \quad \Rightarrow \quad v = x^2$$

$$I = [x^2\ln(x)]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,x^2\,dx$$

$$= [e^4 \ln e^2 - e^2 \ln e] - \left[\frac{x^2}{2}\right]_e^{e^2}$$

$$= 2e^4 - e^2 - \left[\frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2}\right]$$

$$\boxed{\frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2}$$

⑥ **{special}**

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$$

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = e^x$$
$$v' = \sin x \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

$$I = [-e^x\cos x]_0^{\pi} - -\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$$

$$= (-e^{\pi}\cos\pi) - (-e^0\cos 0)$$
$$+ \int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$$

$$= e^{\pi} + 1 + \underbrace{\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx}_{J} \qquad (\star)$$

لنحسب:

$$J = \int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$$

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = e^x$$
$$v' = \cos x \quad \Rightarrow \quad v = \sin x$$

$$J = [e^x\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{e^x\sin x\,dx}_{\text{نفسه } I}$$

$$= e^{\pi}\sin\pi - e^0\sin 0 - I$$

نعوض في $(\star)$

$$I = e^{\pi} + 1 - I$$

$$2I = e^{\pi} + 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{e^{\pi}+1}{2}}$$

⑦

$$I = \int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$$

$$u = \cos x \quad \Rightarrow \quad u' = -\sin x$$
$$v' = e^x \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$I = [e^x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -e^x\sin x\,dx$$

$$= e^{\pi}\cos\pi - e^0\cos 0 + \int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$$

$$-e^{\pi} - 1 + \underbrace{\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx}_{J}$$

$$I = -e^{\pi} - 1 + J \qquad (\star)$$

لنحسب J:

$$J = \int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$$

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad u' = \cos x$$
$$v' = e^x \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$J = \underbrace{[e^x\sin x]_0^{\pi}}_{0} - \underbrace{\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx}_{I}$$

$$J = -I$$

نعوض في $(\star)$

$$I = -e^{\pi} - 1 - I$$

$$2I = -e^{\pi} - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{-e^{\pi}-1}{2}}$$

⑧

$$N = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad u' = 2x$$
$$v' = e^x \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$N = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2x\,e^x\,dx$$

$$= e - J \qquad (\star)$$

لنحسب J:

$$J = \int_0^1 2x\,e^x\,dx$$

$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad u' = 2$$
$$v' = e^x \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$J = [2x\,e^x]_0^1 - \int_0^1 2\,e^x dx$$

$$= 2e - 0 - 2[e^x]_0^1$$

$$= 2e - 2[e - e^0] = \boxed{+2}$$

فائدة: يمكن استخدام التكامل بالتجزئة لإيجاد تابع أصلي لتوابع جداء

1. نستبدل كل x ب t
2. نضع التكامل $\int_a^x f(t)\,dx$

مثال: أوجد تابعاً أصلياً لكلٍ من التوابع التالية:

①

$$f(x) = (x+1)e^x$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x (t+1)e^t \; dt$$

$u = t+1 \quad \Rightarrow \quad u' = 1$

$v' = e^t \quad \Rightarrow \quad v = e^t$

$$F(x) = [(t+1)e^t]_0^x - \int_0^x e^t \; dt$$

$$= [(x+)e^x - (0+1)e^0] - [e^t]_0^x$$

$$(x+1)e^x - 1 - (e^x - e^0)$$

$$(x+1)e^x - 1 - e^x + 1$$

$$(x+1)e^x - e^x = e^x[x+1-1]$$

$$\Rightarrow F(x) = \boxed{xe^x}$$

②

$$f(x) = e^{2x}\cos(2x)$$

$$f(t) = e^{2t}\cos(2t)$$

$$F(x) = \int_0^x e^{2t}\cos(2t)\, dt$$

$u = \cos(2t) \quad \Rightarrow \quad u' = -2\sin(2t)$

$v' = e^{2t} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2t}$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\cos(2t)\right]_0^x + \int_0^x e^{2t}\sin(2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} + J \qquad (\star)$$

$$J = \int_0^x e^{2t}\sin(2t)\, dt$$

$u = \sin(2t) \quad \Rightarrow \quad u' = 2\cos(2t)$

$v' = e^{2t} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2t}$

$$J = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\sin(2t)\right]_0^x - \underbrace{\int_0^x e^{2t}\cos(2t)\, dt}_{F(x)}$$

$$J = \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x) - F(x)$$

نعوض في $(\star)$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x) - F(x)$$

$$2F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x)$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2x}\sin(2x)}$$

كيف نكامل القيمة المطلقة؟

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

❶ نعدم $f(x)$ أي نضع $f(x) = 0$

❷ نحل المعادلة فنجد أن $x = c$

❸ نجزء التكامل:

$$\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|\, dx$$

❹ على المجال الذي يكون عليه $f(x)$ سالباً نضع $|f(x)| = -f(x)$

وعلى المجال الذي يكون عليه $f(x)$ موجباً نضع $|f(x)| = f(x)$

ثم نكامل.

مثال:

$$I = \int_1^5 |2x-4|\, dx$$

$2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$$I = \int_1^2 |2x-4| \; dx + \int_2^5 |2x-4|\, dx$$

$$= \int_1^2 (-2x+4)\, dx + \int_2^5 (2x-4) \; dx$$

$$= [-x^2+4x]_1^2 + [x^2-4x]_2^5$$

$$= [(-4+8) - (-1+4)] + [(25-20) - (4-8)]$$

$$= [1] + [9] = \boxed{10}$$

$\boxed{\text{أنت} = \int_0^{600} \left(\text{النجااح}\right) dx}$ 😊

التكامل وحساب المساحة:

① **حالة $f(x) \geq 0$:**

إذا كان التابع f تابع مستمر على المجال $[a\,,b\,]$ ويحقق أن $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a\,,b\,]$ فإن مساحة السطح المحصور بين منحني التابع f ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ هي قيمة التكامل

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

مسألة: ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالشكل

$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

1- ادرس تغيرات f

2- ارسم c_f

3- احسب مساحة السطح المحصور بين c_f ومحور الفواصل و $x=\ln(2)$ و $x=-1$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(0) \text{ ح ع ت}$$

$$f(x)=(x+1)e^{-x}=x\,e^{-x}+e^{-x}$$
$$=\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0+0=0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(-\infty)(+\infty)$$
$$=-\infty$$

f أشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=1e^{-x}-e^{-x}(x+1)$$
$$=e^{-x}(1-x-1)=-xe^{-x}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow \boxed{x=0}\Rightarrow f(0)=1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+++$	0	$---$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ $+\infty$

$$S=\int_{-1}^{\ln(2)}(x+1)e^{-x}\,dx$$

نكامل بالتجزئة:

$$u=x+1 \Rightarrow u'=1$$
$$v'=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x}$$
$$S=[-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{\ln(2)}$$
$$+\int_{-1}^{ln2} e^{-x}\,dx$$
$$=-\left[\left((1+ln2)e^{-ln2}\right)-(0)\right]$$
$$-[e^{-x}]_{-1}^{ln2}$$
$$=-(1+ln2)e^{\ln\frac{1}{2}}-[e^{-ln2}-e]$$
$$=-(1+ln2)\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}-e\right]$$
$$-\frac{1+ln2}{2}-\frac{1}{2}+e$$
$$=\frac{-1-ln2-1+2e}{2}$$
$$=\boxed{\frac{2e-2-\ln(2)}{2}}$$

مسألة عامة: ليكن التابع المعرف f بالشكل $f(x)=\frac{2a+bln(x)}{x}$

1. عين a و b إذا علمت أن التابع f يقبل مماساً أفقياً عند النقطة التي فاصلتها $\sqrt{e}$ معادلته $T: y=\frac{1}{\sqrt{e}}$

2. أذا علمت أن $b=1$, $a=\frac{1}{4}$:

1 ادرس تغيرات f وارسمه

2 احسب مساحة السطح المحصور بين C_f و xx' و $x=\sqrt{e}$, $x=1$

الحل: أ) لدينا $f'(\sqrt{e})=0$

نحسب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{b\frac{1}{x}x-(2a+b\ln x)}{x^2}$$
$$=\frac{b-2a-b\ln(x)}{x^2}$$
$$\Rightarrow f'(\sqrt{e})=\frac{b-2a-b\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e}=0$$
$$b-2a-b\frac{1}{2}=0$$
$$\frac{b}{2}-2a=0\Rightarrow \underbrace{\boxed{b=4a}}_{1}$$

لدينا:

$$f(\sqrt{e})=\frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$\frac{2a+b\ln(\sqrt{e})}{\sqrt{e}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$
$$2a+b\frac{1}{2}=1$$
$$\underbrace{\boxed{2a+\frac{b}{2}=1}}_{2}$$

نعوض 1 في 2

$$2a+2a=1 \;\Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

نعوض في 1 $\Leftarrow$ $\boxed{b=1}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{1}{4}+\ln(x)}{x}$$

3. إن f معرف على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

c يقع على يمين مقاربه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}}{x}+\frac{\ln(x)}{x}$$
$$=0$$

$y=0$ مقارب افقي في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{1-\frac{1}{2}-\ln(x)}{x^2}$$

أوراق الجلسات المكثفة

$$= \frac{\frac{1}{2} - \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$++++$	0	$----$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

$$f(x) = 0$$

$$\frac{1}{4} + \ln x = 0$$

$$\ln x = -\frac{1}{4}$$

$$x = e^{-\frac{1}{4}}$$

$$S = \int_{e^{-\frac{1}{4}}}^{e^{\frac{1}{2}}} \frac{\frac{1}{4} + \ln(x)}{x} dx$$

$$= \int_{e^{-\frac{1}{4}}}^{e^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{4}\frac{1}{x} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{H'} \underbrace{\ln(x)}_{H}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{\ln^2 x}{2}\right]_{e^{-\frac{1}{4}}}^{e^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{\ln^2 e^{\frac{1}{2}}}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\ln e^{-\frac{1}{4}} + \frac{\ln^2 e^{-\frac{1}{4}}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) - \left(-\frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{16}}{2}\right)$$

$$\frac{2}{8} + \frac{1}{32} = \boxed{\frac{9}{32}}$$

من أسئلة الوحدة:

①:

- نريد حساب $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$
- احسب $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ ثم $I + J$
- استنتج قيمة I

الحل:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{2\cos x}^{H'}}{\underbrace{1 + 2\sin x}_{H}} dx$$

$$= \frac{1}{2}[\ln|1 + sinx|]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{2}\ln(2)}$$

$$I + J$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x) + \cos x}{1 + 2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x + \cos x}{1 + 2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,(2\sin x + 1)}{1 + 2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow I + J = 1$$

$$I + \frac{1}{2}\ln 2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 1 - \frac{1}{2}\ln 2}$$

②:

- نريد حساب $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$
- احسب $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ ثم $I + J$
- استنتج I

الحل:

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}[\ln|1 + x^2|]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx$$
$$= \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

إذن:

$$I + J = \frac{1}{2}$$
$$I + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}$$
$$\boxed{I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)}$$

③ ليكن:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

1) جد الأعداد c, b, a التي تحقق أن $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

2) احسب $J = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx$

الحل:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^2$$
$$= 1 + 2(1)\left(\frac{1}{x-1}\right) + \left(\frac{1}{x-1}\right)^2$$
$$1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 1$$
$$J = \int_{-3}^{0}\left(1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$
$$= \int_{-3}^{0}\left(1 + 2\frac{1}{x-1} + (x-1)^{-2}\right)dx$$
$$= \left[x + 2\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^{0}$$
$$= \left[\left(0 + 0 + \frac{(-1)^{-1}}{-1}\right) - \left(-3 + 2\ln(2) + \frac{(-4)^{-1}}{-1}\right)\right]$$
$$= -1 + 3 - 2\ln(2) + \frac{1}{-4}$$
$$= 2 - \frac{1}{4} - 2\ln(2) = \boxed{\frac{7}{4} - 2\ln(2)}$$

④ أثبت أن $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ ثم احسب $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

$$l_2 = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}$$
$$= \frac{1}{1+e^x} = l_1$$
$$I = \int_0^1 1 - \frac{\underbrace{e^x}_{H'}}{\underbrace{1+e^x}_{H}}dx$$
$$= [x - \ln|1+e^x|]_0^1$$
$$= (1 - \ln(1+e)) - (0 - \ln(2))$$
$$= \boxed{1 - \ln(1+e) + \ln(2)}$$

المعادلات اللوغارتمية

مجموعة تعريف	المضمون > 0
خواص	❶ $\ln(1) = 0$ ❷ $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ ❸ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ ❹ $\ln(a^n) = n.\ln(a)$ ❺ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ ❻ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ ❼ $\ln(e) = 1\,; e \approx 2.7$

المعادلات اللوغارتمية

	النوع الأول: $\ln(u) = \ln(v)$
1	نوجد شرط تعريف الطرف الأبسط
2	نتخلص من اللوغارتمات و نحل
3	نقبل الحلول وفق شرط الحل

ملاحظة: في حالة المتراجحات :

1- نختار شرط الطرف الأصغر حصراً
2- الحلول تكون على شكل مجال
3- لمعرفة الحلول المقبولة نقاطع المجال مع شرط الحل

النوع الثاني : عدد $= \ln(u)$	
نوجد شرط اللوغارتم	1
$u = e^{\text{العدد}}$	2
نحل المعادلة	3
نقبل و نرفض	4

النوع الثالث : أكثر من لوغارتم	
نوجد شرط كل لوغارتم	1
نقاطع الحلول	2
نطبق الخواص	3
نتخلص من اللوغارتمات و نحل	4
نرفض و نقبل	5

في المتراجحات نطبق الخطوات و لكن الحلول تكون على شكل مجال فنقاطعها مع شرط الحل و يكون شرط الحل في الحالة الأولى هو شرط الطرف الأصغر

تدرب 45

حل في R كلاً من المعادلات أو المتراجحات الآتية :

(1 $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$

✓لنوجد E مجال التعريف للطرف الأول

$3x - 4 > 0$ ومنه $3x > 4$

$$\Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

فيكون المجال $\mathrm{E} =]\frac{4}{3}, +\infty[$

$$\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$$

نتخلص من اللوغارتمات:

$$\Leftrightarrow (3x-4) = (x^2-4)$$

$$\Rightarrow 3x - 4 - x^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(3-x) = 0$$

ومنه إما $\boxed{x = 0}$ وهو مرفوض لأنه خارج المجال E

أو $3 - x = 0$ وبالتالي $\boxed{x = 3}$ وهو مقبول لأنه ضمن المجال E

(2 $\boldsymbol{ln(x^2-4) \leq ln\ (-3x)}$

مجموعة تعريف الطرف الأصغر E_1

$$x^2 - 4 > 0$$

$$E_1 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

و سنكتفي بها حسب الفائدة السابقة

$$\ln(x^2-4) \leq \ln\ (-3x)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4 \leq -3x$$
$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x+4)(x-1) = 0$$

إما $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ أو

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

ننظم جدول الإشارة كما يلي:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
≤ 0		غ.م		م		غ.م	

فتكون مجموعة الحلول هي:

$$S = [-4,1]$$

$$E = E_1 \cap S = [-4, -2[$$

(3 $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

E_1: $2x-3>0$ وبالتالي يكون

$2x>3 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$

ومنه $\boxed{E_1=]\frac{3}{2},+\infty[}$

E_2 $6-x>0$ وبالتالي يكون

$-x>-6 \Rightarrow x<6$

ومنه $\boxed{E_2=]-\infty,6[}$

E_3: $x>0$ فيكون المجال

$\boxed{E_3=]0,+\infty[}$

-تقاطعها: $\boxed{\boxed{E=]\frac{3}{2},6[}}$

$$\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$$

$$\Rightarrow \ln(2x-3)^{\frac{1}{2}}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2x-3)=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$$

$$\underset{\text{بضرب بـ}2}{\Rightarrow} \ln(2x-3)=2\ln(6-x)-\ln x$$

$$\Rightarrow \ln(2x-3)=\ln(6-x)^2-\ln x$$

$$\Rightarrow \ln(2x-3)=\ln\left(\frac{(6-x)^2}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x-3=\frac{(6-x)^2}{x}$$

$$\Rightarrow x(2x-3)=(6-x)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x=36-12x+x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x-36+12x-x^2=0$$

$$\Rightarrow x^2+9x-36=0$$

$$\Rightarrow (x+12)(x-3)=0$$

إما $x+12=0$ ومنه $x=-12$

مرفوض

أو $x-3=0$ ومنه $x=3$ مقبول

4) $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

E_1 مجموعة تعريف الحد الأول

الذي يكافئ $x-2>0 \Rightarrow x>2$

فيكون المجال $E_1=]2,+\infty[$

E_2 مجموعة تعريف الحد الثاني

الذي يكافئ $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

فيكون المجال $E_2=]-1,+\infty[$

أي

فيكون تقاطعهما

$$E=E_1\cap E_2 \Rightarrow E=]2,+\infty[$$

$$\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=2$$

$$\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)}=e^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x+1}\right)=e^2$$

$$\Rightarrow x-2=e^2(x+1)$$

$$\Rightarrow x-2=xe^2+e^2$$

$$\Rightarrow x-xe^2=e^2+2$$

$$\Rightarrow x(1-e^2)=e^2+2$$

$$\Rightarrow x=\frac{(e^2+2)}{1-e^2}$$

قيمة x مرفوضة لأنها لا تقع ضمن المجال لأنها أقل من العدد 2

النوع الرابع : تحوي لوغارتم مربع و لوغارتم	
1	نوجد شرط اللوغارتم
2	نفرض $t = \ln^2 x$
3	نحل المعادلة
4	نعود إلى المتحول الأصلي
5	نرفض و نقبل

تدرب 46

1) $(\ln x)^2 - 5\ln x = 6$

بشرط $x > 0$ نفرض $\ln x = t$ فتصبح

المعادلة من الشكل:

$$t^2 - 5t = 6 \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0$$
$$\Rightarrow (t-6)(t+1) = 0$$

إما $t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow \ln x = 6$

$\Rightarrow \boxed{x = e^6}$

أو $t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow \boxed{x = e^{-1}}$

2) $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 \leq 0$

بشرط $x > 0$ نفرض $\ln x = t$ فتصبح

العلاقة:

$$(t-3)(t-2) \leq 0$$
$$\Rightarrow (t-3)(t-2) = 0$$

إما $t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3$ ومنه

$\ln x = 3$

$\Rightarrow \boxed{x = e^3}$

أو $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ ومنه $\ln x =$

2

$\Rightarrow \boxed{x = e^2}$

ننظم جدول الإشارة

x	0	e^2	e^3	$+\infty$
متراجحة	$+$	0 $-$	0	$+$
≤ 0	م.غ	م	م.غ	

وبالتالي مجموعة التعريف

$$S = [e^2, e^3]$$

النوع الخامس: جمل المعادلات	
1	نوجد شرط اللوغارتمات
2	نحاول الوصول إلى تجانس
3	نغير المتحول
4	نحل الجملة
5	نعود للمتحول الأصلي

تدرب 47

$$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$$

تدرب 48

نفترض وجود عددين حقيقين موجبين

تماماً a, b يحققان :

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

جد $\frac{a}{b}$

المعادلات الأسية

النوع الأول : $e^{u(x)} = e^{v(x)}$	
1	نوجد شرط u و v و نقاطعهما
2	نتخلص من ال e
3	نوجد الحلول و نقبل و نرفض

النوع الثاني : عدد $= e^{u(x)}$	
1	نوجد شرط التعريف
2	نأخذ لوغارتم للطرفين
3	نقبل و نرفض

النوع الثالث : تحوي e^x, e^{-x}	
1	نوجد شرط التعريف
2	نضرب الطرفين بـ e^x
3	نوجد الحلول كمعادلات الدرجة الثانية

المعادلات من النمط a^x	
1	نوجد المجاهيل
2	نوجد الحلول
3	نأخذ لوغارتم الطرفين

تدرب 49:

حل في R كلاً من المعادلات :

1	$e^{x^2-2} \le e^{4-x}$
2	$e^{2x^2-1} \ge 3$
3	$4e^{2x} - e^x + 2 = 0$
4	$e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$
5	$e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$
6	$e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$
7	$\frac{e^{-x}-1}{e^{x}-1} = -2$

تدرب 50 :

حل في R كلاً من المعادلات :

1	$\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$
2	$4^x + 2^{x+1} - 3 \le 0$
3	$4e^{2x} - e^x + 2 = 0$
4	$2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \ge 0$
5	$3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \ge 7$

تدرب 51 :

حل في R كلاً من جمل المعادلات :

1	$\begin{cases} 3^{x+y} = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$
2	$\begin{cases} e^x - \frac{1}{2}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$
3	$\begin{cases} e^{4x}e^y = \frac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$

المعادلات التفاضلية

النمط الأول : حل المعادلات التفاضلية التي من الشكل $y' = ay + b$

1- قانون الحل : $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

2- إذا وجد شروط ابتدائية نستفيد منها لحساب k

تدرب 52 :

$y' = 2y$ والحل f يحقق الشرط أن $f(0) = 1$

$$y' = 2y$$

$$y' = ay$$

$$\Rightarrow y = ke^{ax} \Rightarrow y = ke^{2x}$$

بما أن $f(0) = 1 \Leftarrow$ النقطة $(0,1)$

تحقق المعادلة

$$1 = ke^{2(0)} \Rightarrow \mathrm{k} = 1$$

فالحل المطلوب

$$y = e^{2x}$$

تدرب 53 :

$y' + 5y = 0$ والخط البياني C للحل يمر من النقطة $A(-2,1)$

تدرب 54 :

$y' + 2y = 0$ و ميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$

النمط الثاني : الحل معلوم :

مثال : عين قيمة λ ليكون التابع $f(x) = (x+2)e^{-x}$

حل للمعادلة التفاضلية :

$$y' + y = \lambda e^{-x}$$

الحل :

$$y = f(x) = (x+2)e^{-x}$$
$$y' = e^{-x} - e^{-x}(x+2)$$
$$y' = e^{-x}(1-x-2)$$
$$y' = e^{-x}(-x-1)$$

نعوض في المعادلة :

$$e^{-x}(-x-1) + (x+2)e^{-x} = \lambda e^{-x}$$
$$e^{-x} = \lambda e^{-x}$$
$$\lambda = 1$$

مسائل عامة

المسألة الأولى

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2e^x - x - 2$.

1) جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.
2) ادرس تغيرات f ونظم جدول تغيرات بها.
3) استنتج من الطلب الثاني أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين، أحدهما يساوي الصفر.
4) نرمز إلى جذر الآخر للمعادلة $f(x) = 0$ بالرمز α. أثبت أن $-2 < \alpha < -1$.
5) ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x

المسألة الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$.

1) جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.
2) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.
3) أثبت أن المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.
4) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
5) اكتب معادلة المماس T للخط البياني f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

المسألة الثالثة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

1) a. بين أن التابع f فردي، ادرس تغيرات f وارسم C.
   b. اكتب معادلة المماس d للخط C في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم d.

أوراق الجلسات المكثفة

2) a. ليكن m عدداً حقيقياً. أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$. ليكن α هذا الحل.

b. أثبت أن المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2me^{x} - 1 = 0$, ثم استنتج أن $\alpha = \ln\left(m + \sqrt{m^2 + 1}\right)$

3) أثبت ان f هو حل للمعادلة التفاضلية $y^2 - (y')^2 = 1$

4) استنتج الخط البياني C' للتابع $g(x) = -\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}}$

المسألة الرابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$.

1) تحقق من كل من المقولات الآتية:

a. f معرف على $\mathbb{R}$.

b. يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.

c. المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط C.

d. الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها 0 منه.

4) ارسم كلاً من d و Δ و T, ثم ارسم C في المعلم ذاته.

المسألة الخامسة :

$$f(x) = (1 - x)2^{x}$$

ادرس تغيرات f و نظم جدولاً به ثم ارسم الخط البياني

المسألة السادسة :

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

② أثبت أن $d : y = x - \ln(2)$ مقارب مائل للخط C_f عند $+\infty$ وادرس وضعه النسبي

③ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α يقع في المجال $]1, 2[$

④ عين معادلة المماس للتابع f عند $a = 1$

⑤ ارسم d ثم C_f

المسألة السابعة :

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :
$\mathrm{f}(x) = \frac{2}{e^{2x}+1} + x$

1- أثبت أن d_1 الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط C في جور $+\infty$

2- أثبت أن d_2 الذي معادلته $y = x + 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

3- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

4- أثبت أن $A(0,1)$ مركز تناظر للخط C

5- اكتب معادلة المماس T في النقطة A للخط C و ادرس الوضع النسبي لـ C مع T

6- ارسم في معلم متجانس كلاً من d_1 و d_2 و T ثم ارسم C

المسألة الثامنة :

أولاً : ليكن g التابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق : $g(x) = x^2 + lnx - 1$

1- ادرس تغيرات g و نظم جدولاً با

2- أثبت أن $\alpha = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل $f(x) = x + 1 - \frac{lnx}{x}$:

1- احسب نهايات f عند أطراف المجال و فسر النتيجة هندسياً

2- أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج جدول تغيرات f

3- عين القيمة الحدية للتابع f و استنتج معادلة المماس الأفقي لـ C

4- أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x + 1$ مقارب مائل للخط C ثم ادرس الوضع النسبي

5- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم C

المسألة التاسعة :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=x-1-\frac{lnx}{x^2}$$

و g التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$g(x)=x^3-1+2lnx$$

1- ادرس تغيرات g

2- احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

3- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

4- أثبت أن $d: y=x-1$ مقارب للخط c_f ثم ادرس الوضع النسبي لهما

5- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم c_f

6- استنتج الخط البياني للتابع h المعرف وفق :

$$h(x)=x-1+\frac{lnx}{x^2}$$

7- ناقش حسب قيم m حلول المعادلة $f(x)=m$

المسألة العاشرة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x+x(lnx)^2$$

وليكن التابع g المعرف وفق:

$$g(x)=(lnx+1)^2$$

والمطلوب:

1) أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$.

2) أثبت أن $f'(x)=g(x)$.

3) حل المعادلة $g(x)=0$.

4) نظم جدول تغيرات f.

5) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x=\frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C

المسألة الحادية عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x}{e^x}$$

1) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب معادلة المقارب الأفقي.

2) ادرس تغيرات التابع f.

3) في معلم متجانس ارسم الخط C.

4) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x=1$.

5) استنتج رسم الخط C_1 للتابع g وفق: $g(x)=2xe^x$.

6) أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية: $y'+y=2e^{-x}$

المسألة الثانية عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$$

والمطلوب:

1) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

2) أثبت ان $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$

3) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الجدية مبيناً نوعها.

4) ارسم C في معلم متجانس.

5) استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع g المعرف وفق:

$$g(x)=(x-1)^2e^x$$

6) جد مجموعة تعريف التابع:

$$h(x)=ln(f(x))$$

المسألة الثالثة عشر :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=e^{-x}(1+ln(x))$$

والتابع g المعرف على I وفق:

$$g(x)=\frac{1}{x}-1-ln\,x$$

المطلوب:

1) ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

2) بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً α, ثم تحقق أن $\alpha=1$.

3) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

4) أثبت أن: $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$

راسلني كلما لزمك شيء
مهما يكن بسيطا
فأنا لك أخٌ و بخدمتك دوماً

أوراق الجلسات المكثفة

5) مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

6) في معلم متجانس ارسم الخط C_f.

المسألة الرابعة عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$$

المطلوب:

1) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C و Δ.

3) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها, ثم بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين في $\mathbb{R}$ أحدهما ينتمي للمجال $[-1, 0]$.

4) ارسم Δ و C, ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و C و Δ والمستقيم $x = 1$.

5) استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرف وفق:

$$g : x \mapsto -e^{-2x} + 2x + 2$$

المسألة الخامسة عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 1[$ وفق:

$$f(x) = e^x + \ln(1 - x)$$

وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

المطلوب:

1) ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x) \le 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$.

2) تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$ على المجال $]-\infty, 1[$, ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3) اكتب معادلة المستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

4) في معلم متجانس ارسم المستقيم T, ثم ارسم C الخط البياني للتابع f.

المسألة السادسة عشر

ليكن $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

-1 أثبت أن $f(x) + f(-x) = 2$

-2 استنتج أن $I(0,1)$ مركز تناظر للخط c_f

-3 ادرس تغيرات f و اذكر ماله من مقاربات

-4 ارسم c_f و ناقش تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة $(3 - m)e^x - 1 - m = 0$

-5 أثبت أن $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ ثم احسب مساحة السطح المحصور بين منحني التابع و محور الفواصل و المستقيمان $x = 0, x = ln2$

المتتاليات ونهاية متتالية

المتتالية الحسابية والهندسية	
المتتالية الحسابية	
أثبت	-1 نوجد u_{n+1} -2 نشكل الفرق: $u_{n+1} - u_n$ -3 نثبت أن $u_{n+1} - u_n = r$
u_n بدلالة n	$u_n = u_m + (n - m)r$
المجموع	$S = \frac{a + l}{2} \times$ عدد الحدود
ثلاث حدود متعاقبة a, b, c	القانون الأول: $a + c = 2b$ القانون الثاني: $b = a + r \quad , \quad c = a + 2r$
المتتالية الهندسية	
أثبت	-1 نوجد u_{n+1} -2 نشكل النسبة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ -3 نثبت أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
u_n بدلالة n	$u_n = u_m . q^{n-m}$
المجموع	$S = a \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$
ثلاث حدود متعاقبة a, b, c	القانون الأول: $ac = b^2$ القانون الثاني: $b = aq \quad , \quad c = aq^2$

حالة خاصة : المجموع مع قفزات :

مثلاً : $u_2+u_4+u_6+\cdots+u_{2n}$

نطبق نفس القانون مع مراعاة ما يلي :

$$\text{عدد الحدود الجديد} = \frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}} + 1$$

الأساس الجديد :

في حالة <u>الهندسية</u>: $q' = q^{\text{طول القفزة}}$

في حالة <u>الحسابية</u> : $r' = \text{طول القفزة} \times r$

نهاية المتتالية الهندسية :

مبرهنة : لحساب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ نميز الحالات :

1- إذا كان $q>1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

2- إذا كان $-1<q<1$ فإن :

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

تدرب 55

بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بالشكل

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $v_n = u_n + 6$

1- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية و عين أساسها و حدها العام ثم احسب نهايتها

2- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب نهايتها

3- بفرض $w_n = \ln(v_n)$ أثبت أن (w_n) حسابية ثم احسب المجموع

$w_0 + w_1 + \cdots + w_5$

تدرب 56

احسب نهاية المتتالية المعرفة وفق : $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

تدرب 57

ليكن $u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$ بسط u_n ثم احسب نهايتها

الاطراد :

المعيار	النوع الموافق
الفرق $u_{n+1} - u_n$ و نقارن مع الصفر	يصلح لكل المتتاليات غالباً
معيار الاشتقاق $f'(x)$ نقارن مع الصفر	المتتاليات الصريحة
معيار النسبة : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و نقارن مع الواحد	للقوى و العاملي
تعريف قضية	للمتتاليات التدريجية

الإثبات بالتدريج :

① نرمز للقضية $E(n)$

② نثبت صحة القضية من أجل أول قيمة لـn ولتكن n_0

③ نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة ... (الفرض)

④ نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ ... (الطلب)

مستفيدين من (الفرض)

مصطلحات :

المحدودة من الأعلى	$u_{n+1} \leq M$ وندعو M عنصر راجح
المحدودة من الأدنى	$u_{n+1} \geq m$ و ندعو m عنصر قاصر
المحدودة	$m \leq u_n \leq M$

<u>مبرهنة :</u>

-كل متزايدة و محدودة من الأعلى متقاربة

-كل متناقصة و محدودة من الأدنى متقاربة

تدرب 58:

نتأمل المتتالية المعرفة وفق $u_0 = \frac{5}{2}$ و

$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$

1- أثبت أن $1 \leq u_n \leq 2$

2- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

3- استنتج أنها متقاربة وعين نهايتها

تدرب 59 :

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \quad , \quad u_0 = 3$$

1- أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$ ثم نظم جدولاً بها

2- أثبت أن $d: y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل و ادرس الوضع النسبي

3- أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

4- استنتج أنها متقاربة و عين نهايتها

5- ارسم المستقيم $\Delta: y = x$ ثم ارسم d و c_f و مثل الحدود u_0, u_1 على محور الفواصل

تدرب 60 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ و $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ و $u_0 = e^3$ و v_n متتالية معرفة وفق $v_n = \ln(u_n) - 2$ و المطلوب :

1- أثبت أن v_n هندسية و عين أساسها و حدها الأول

2- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3- احسب نهاية u_n

تدرب 61 :

لتكن المتتالية $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$:

1- ادرس اطراد u_n

2- أثبت أن العدد 2 عنصر راجح على u_n

3- استنتج أنها متقاربة ثم احسب نهايتها

المجاميع :

النوع الأول : (المقارنة مع هندسية) :

تدرب 62 :

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة وفق :

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

1- برهن أن $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$ مهما يكن $n \geq 1$

2- استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و عين عنصراً راجحاً

3- أثبت أن (u_n) متزايدة و استنتج أنها متقاربة

النوع الثاني : مجموع مباشر:

أكبر حد × عدد الحدود $\leq u_n \leq$ أصغر حد × عدد الحدود

تدرب 63 :

احسب نهاية المتتالية :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

المتتاليتان المتجاورتان :

نقول عن المتتاليتين u_n و v_n إنهما متجاورتان إذا تحقق الشرطان :

1- إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة

2- نهاية الفرق $u_n - v_n$ تساوي الصفر

تدرب 64 :

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

1- ادرس اطراد كلٍ من u_n و v_n

2- بسط عبارة u_n

3- استنتج أن u_n و v_n متجاورتين

تدرب 65 :

دراسة متتاليتين متجاورتين

نتأمّل المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$، المعرّفتين تدريجياً وفق:

- $t_0 = 1$ و $s_0 = 12$.
- $t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3}$ و $s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4}$.

1. أثبت أنَّ المتتالية $(v_n - t_n)_{n\geq 0}$ هندسية. واحسب نهايتها.
2. أثبت أنَّ المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.
3. أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = 3t_n + 8s_n$ ثابتة.
4. ماذا تستنتج فيما يتعلق بالمتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$؟

تدرب 66 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = xe^{-x}$

1- احسب نهاية التابع f عند $+\infty, -\infty$ ثم احسب $f'(x)$ و ادرس اطراد f و نظم جدولاً بتغيراته و عين ما له من قيم حدية ثم ارسم C

2- احسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0 , x = 1$

3- بين أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين

4- لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي: $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ و ذلك مهما كان الدليل n

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ثم بين أنها متقاربة و احسب نهايتها .

بنك المتتاليات

المسألة الأولى :

لتكن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $\boldsymbol{x_0 = 4}$, $\boldsymbol{x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2}$

1- احسب x_1, x_2

2- بفرض $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل : $y_n = x_n - 8$

أ- أثبت أن y_n هندسية

ب- عين حدها العام

ت- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

المسألة الثانية :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$$

1- أثبت $0 < u_n < 1$

2- نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالشكل $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$:

أ- أثبت انها هندسية ثم استنتج حدها العام

ب- اكتب u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

المسألة الثالثة:

نتأمل متتاليتين معرفتين كما يلي : $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$ $\quad x_n = \frac{4n+5}{n+1}$

أثبت أنهما متجاورتين

المسألة الرابعة :

احسب قيمة المجموع $S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 15$

المسألة الخامسة :

ليكن لدينا المتتالية $u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} \ldots + \frac{n}{e^n}$

1- أثبت بالتدريج أن $n \leq 2^n$

2- عين عنصراً راجحاً على u_n

3- أثبت أن u_n متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة

المسألة السادسة :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

1- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً به

2- نضع $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- أثبت أن $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$

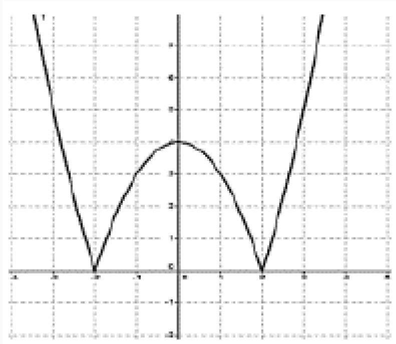
ب- استنتج أنها متناقصة و هل هي متقاربة

ت- احسب نهايتها في حالة التقارب

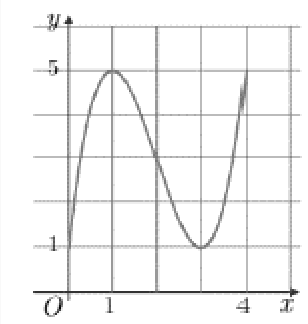
أولاً: عن مجموعات التعريف:

لإيجاد مجموعة تعريف تابع من خطه البياني نميز حالات:

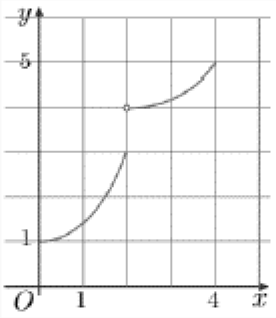
1- **الحالة الأولى:** إذا كان منحني التابع خط وحيد ومستمر (لا يحوي انقطاع):
عندئذ تكون مجموعة التعريف من فواصل أقصى نقطة اليسار (أو $-\infty$) إلى فواصل أقصى نقطة من اليمين (أو $+\infty$).



$D_f=]-\infty,+\infty[$



$D_f=[0,4]$



$D_f=[0,2]\cup]2,4]$

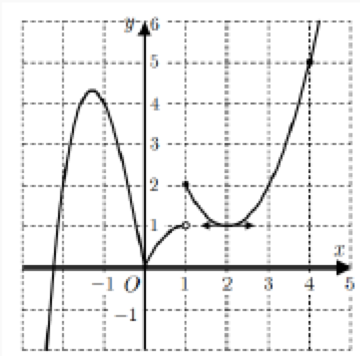
$D_f=[0,4]$

2- **الحالة الثانية:** المنحني عبارة عن اجتماع أكثر من خط.
نوجد مجموعة تعريف كل فرع لوحده ثم نضع بينها اجتماعات وتجدر الإشارة هنا أن التابع سيكون عبارة عن خطين يفصل بينهما إما مقارب شاقولي (وعنده يكون المجال دائماً مفتوح) أو نقطة انقطاع (وعندها نفتح المجال عن النقطة المفتوحة) ونغلقه عند النقطة المغلقة.

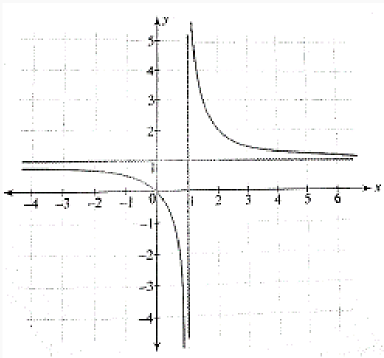
ثانياً: عن النهايات:

عندما نجد سؤالاً يطلب فيه نهايات يفضل أن نكتب ما نجده من مقاربات قبل البدء فمثلاً:

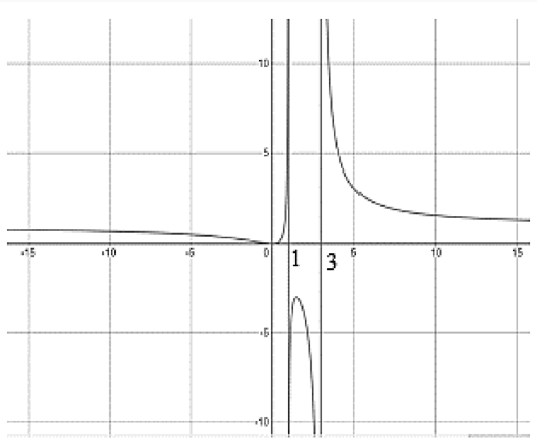
إذا وجدنا $y=1$ مقارب أفقي عند $+\infty$ فهذا يعطينا معلومة أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.



$D_f=]-\infty,1[\cup[1,+\infty[$
$D_f=]-\infty,+\infty[$



$D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$



$D_f=]-\infty,1[\cup]1,3[\cup]3,+\infty$

وإذا وجدنا أن $\underbrace{x=2}_{x\to2}$ مقارب شاقولي عند $\underbrace{+\infty}_{\lim f(x)=+\infty}$ (نحو الأعلى) و C يقع على $\underbrace{\text{يمين مقاربه}}_{x\to2^+}$

وبذلك نتمكن من الإجابة عن أسئلة النهايات وعن أسئلة تعيين المقاربات.

مثال1:

هنا لدينا :

$y=1$ مقارب أفقي عند $+\infty$ و عند $-\infty$ بالتالي

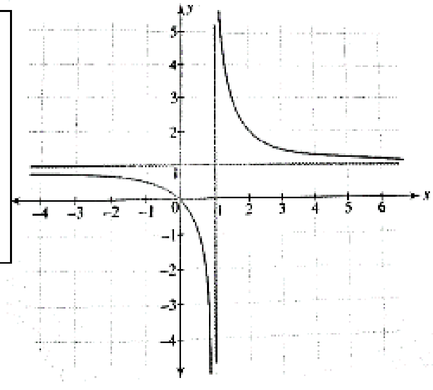
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1\,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

$x=1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ على اليمين :

$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و على اليسار :

$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$

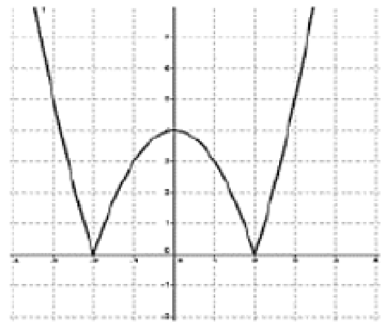


ملاحظة: إذا كان التابع لا يملك مقاربات فغالباً يكون الجواب $+\infty$ (نحو الأعلى) و $-\infty$ (نحو الأدنى).

مثال2:

هنا نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



ثالثاً: عن المقارب المائل:

-1 عندما يطلب حساب $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$:

فيجب أن تتذكر أن هذه النهاية تساوي أمثال x في معادلة المقارب المائل (أي تمثل ميله) وعليه يكون:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a=m_{\text{المقارب}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

حيث $A(x_1,y_1)\,,\ B(x_2,y_2)$ نقاط يمر منها المقارب يمكن إيجادها من الرسم.

مثال1:

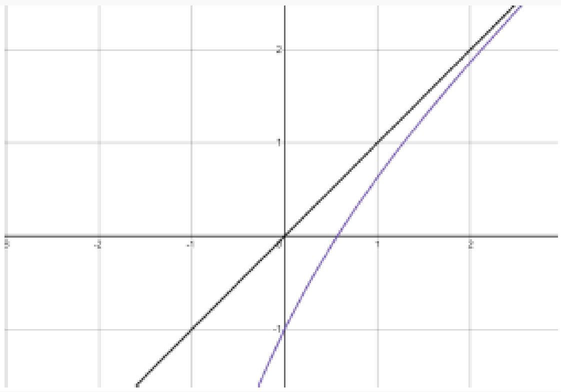
هنا نلاحظ أن المستقيم المرسوم مقارب مائل في جوار $+\infty$

و بالتالي عندما يطلب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ فهو يريدنا أن نحسب ميله

و نلاحظ أن المستقيم هنا يمر من $A(0,0)$ و $B(1,1)$

و بالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m_d=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-0}{1-0}=1$$



-2 إذا طلب إيجاد معادلة المقارب المائل:

أ- نوجد الميل من القانون:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ب- نطبق قانون معادلة المستقيم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ففي المثال السابق:

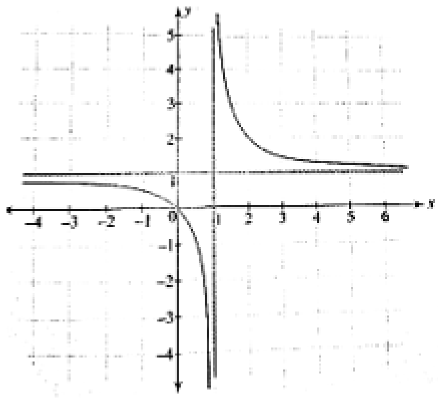
$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

رابعاً: عن الاشتقاق:

1- قابلية الاشتقاق:

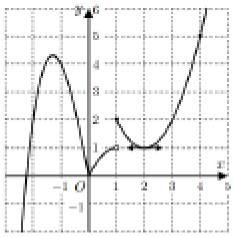
يكون f غير قابل للاشتقاق عند نقطة a في الحالات الآتية:

أ- إذا كانت a لا تنتمي لمجموعة التعريف.



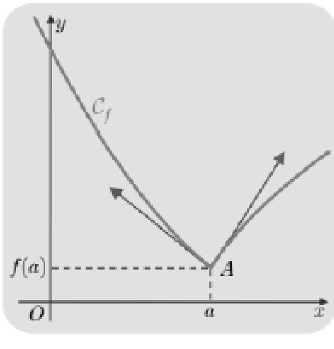
هنا f غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأن غير معرف عندها

ب- إذا كانت a تنتمي إلى مجموعة التعريف ولكن f غير مستمر عندها (منقطع).



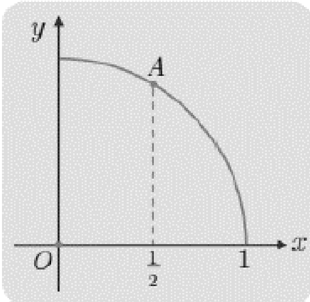
نلاحظ أن f معرف عند $x=1$ لكنه غير مستمر عندها فهو غير اشتقاقي عند $x = 1$

ت- إذا كان التابع يقبل نصفي مماس عند a (منكسر).



نلاحظ أن f يقبل نصفي مماس عند $x = a$ فهو غير اشتقاقي عند $x = a$

ث- <u>إذا كان التابع يقبل مماساً شاقولياً عند a (يكون التابع مغلق عند طرفه):</u>



f غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأنه يقبل مماساً شاقولياً عند $x = 1$

2- حساب $f'(a)$ نميز حالتين هنا:

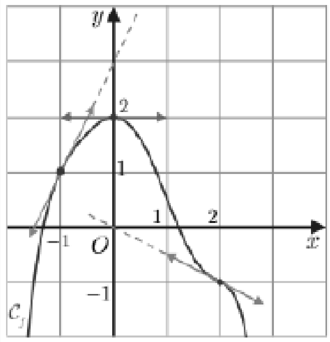
أ- عند a يوجد للتابع مماس افقي (أو قيمة حدية): عندها $f'(a) = 0$ مباشرةً.

ب- عند a يوجد مماساً مائلاً/ عندها يكون $f'(a) = m_{\text{المماس}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ولإيجاد معادلة المماس نطبق قانون معادلة المستقيم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال1:



حساب $f'(0)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$ و بالتالي $f'(0) = 0$
لكن $f(0) = 2$ (تصوير)
معادلته :

$$y - 2 = 0(x - 0)$$
$$y = 2$$

حساب $f'(-1)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً مائلاً عند $x = -1$ و هذا المماس يمر من النقطتين :
$A(0,3)\ ,B(-1,1)$
و بالتالي :

$$f'(-1) = \frac{1-3}{0-(-1)} = -2$$

معادلته : $y - 3 = -2(x - 0)$

$$y = -2x + 3$$

حساب $f'(2)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً مائلاً عند $x = 2$ و هذا المماس يمر من النقطتين :
$A(0,0)\ ,B(2,-1)$
و بالتالي :

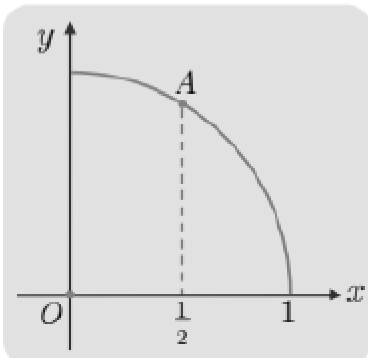
$$f'(2) = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

معادلته:

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$
$$y = -\frac{1}{2}x$$

3- القيم الحدية:

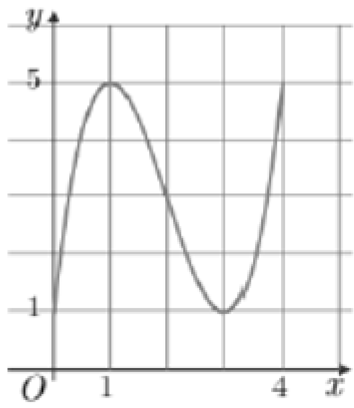
الأمر سهل هنا لكن مع ملاحظة أنه قد يكون هناك قيم حدية على **<u>أطراف المجال</u>** كما يلي:



هنا $f(1) = 0$ قيمة حدية صغرى و $f(0)$ قيمة حدية كبرى

(لم نضع تراتيبها لأنها غير مكتوبة على الرسم)

4- المتراجحات $f'(x) > 0$ تعني متى يكون التابع متزايد (على أي مجال؟).
المتراجحات $f'(x) < 0$ تعني متي يكون التابع متناقص (على أي مجال؟).



$f'(x) < 0 \;\rightarrow\; S =]1,3[$
لأنه متناقص على هذا المجال
أما:
$f'(x) > 0 \;\rightarrow\; S =]0,1[\cup]3,4[$
لأنه متزايد على كل من هذين المجالين

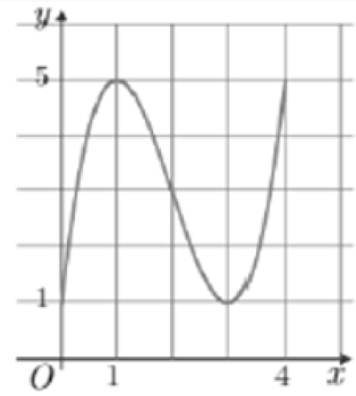
خامساً: تتمات في الخطوط البيانية:

1- حلول المعادلة $f(x) = k$:

متى يقطع التابع المستقيم الأفقي $y = k$ **وهناك عدة أسئلة:**

أ- ما عدد الحلول: أي كم حل (حل وحيد، حلان، ثلاث حلول ....)
ب- ما هي حلول: هنا يجب كتابة فاصلة نقطة التقاطع (.... x_1 , x_2)

مثال1:

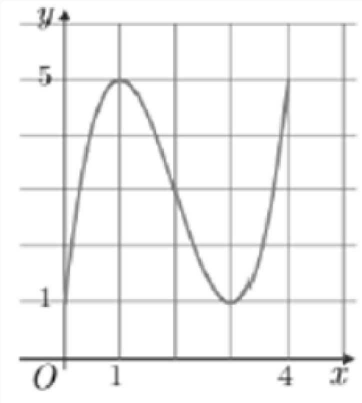


ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$: ثلاث حلول.

ماهي حلول المعادلة $f(x) = 1$: الحلول هي:

$$x_1 = 0 , x_2 = 3$$

مثال2:



ناقش حسب قيم m حلول المعادلة $f(x) = m$.

الحل:

$$f(x) = m \begin{cases} m \in]-\infty, 1[& \text{لا يوجد حلول} \\ m = 1 & \text{حلان} \\ m \in]1,5[& \text{ثلاث حلول} \\ m = 5 & \text{حلان} \\ m \in]5, +\infty[& \text{لا يوجد حلول} \end{cases}$$

مررنا مستقيماً افقياً من أسفل الرسمة إلى أعلى الرسمة وراقبنا عدد مرات تقاطع المستقيم الافقي مع المنحني.

2- حل المتراجحات من الشكل:

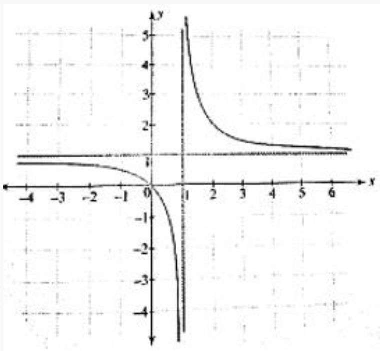
$$f(x) > m \ , f(x) < m \ , f(x) \leq m \ , f(x) \geq m$$

أي متى يكون التابع فوق أو تحت المستقيم الأفقي $y = m$ ويكون حلها مجال.

مثال1:

ما هي حلول المتراجحة $f(x) > 1$: الحلول هي $]1, +\infty[$

أخذنا المجال الذي يكون عليه $f(x)$ فوق المستقيم $y = 1$.



3- تصوير مجال:

ونميز الحالات الآتية:

أ- التابع متزايد: فتكون صورة المجال $[a, b]$ هي $[f(a), f(b)]$ مع المحافظة على شكل المجالات.

ب- التابع متناقص: فتكون صورة المجال $[a, b]$ هي $[f(b), f(a)]$ مع المحافظة على شكل المجالات.

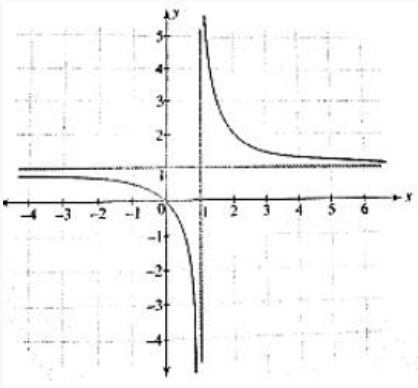
ت- التابع غير مطرد: نسقط القطعة من التابع التي على المجال $[a, b]$ على محور yy' ونحدد المجال المطلوب.

ملاحظة هامة: في الحالة الأخيرة عندما نسقط المنحني على محور yy' نحصل على مجال ما طرفيه (وايات أدنى نقطة إلى وايات أعلى نقطة)

إذا كانت هذه الوايات تقابل نقطة تنتمي إلى المجال المعطى نغلق المجال.

إذا كانت هذه الوايات تقابل نقطة لا تنتمي إلى المجال المعطى نفتح المجال.

مثال$_1$:



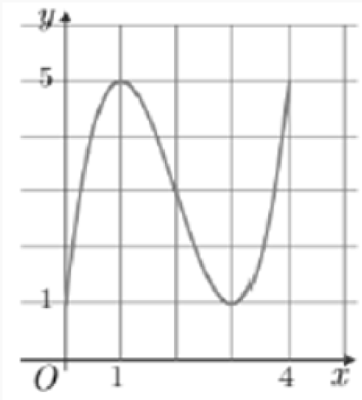
$f(]-\infty,1[)=]-\infty,1[$

قمنا بتصوير الفرع المقابل للمنحني على المجال $]-\infty,1[$ فنلاحظ أن مسقطه على محور التراتيب يغطي القيم $]-\infty,1[$.

$f(]1,+\infty[)=]1,+\infty[$

قمنا بتصوير الفرع المقابل للمنحني على المجال $]1,+\infty[$ فنلاحظ أن مسقطه على محور التراتيب يغطي القيم $]1,+\infty[$.

مثال$_2$:



$f([0,1])=[1,5]$

$f(]0,1[)=]1,5[$

حافظنا على شكل المجالات لأن التابع متزايد.

$f([1,3])=[1,5]$

$f(]1,3[)=]1,5[$

حافظنا على شكل المجالات لأن التابع متناقص.

$f(]0,3[)=]1,5]$

أغلقنا المجال عند 5 لأنه يقابل النقطة $x=1$ وهي تنتمي للمجال $]0,3[$ وفتحنا المجال عند 1 لأنه يقابل النقطتين $x=3$, $x=0$ وكلاهما لا ينتمي للمجال $]0,3[$.

ملاحظة: المستقر الفعلي:

$$\boldsymbol{f(D_f)=E_f}$$

أي صورة مجموعة التعريف كاملة وهي من وايات أدنى نقطة إلى وايات أعلى نقطة.

4- مجموعات تعريف توابع مختلطة:

$$\sqrt{f(x)}\ ,\ln(f(x))\ ,\frac{1}{f(x)}\ ,\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

نضع شرط التعريف الأصلي فنحصل على متراجحة ونعود للحالات السابقة.

مثال:

إذا كان $h(x)=\sqrt{f(x)}$ فهو معرف بشرط $f(x)\geq 0$.

إذا كان $g(x)=\ln(f(x))$ فهو معرف بشرط $f(x)>0$.

إذا كان $l(x)=\frac{1}{f(x)}$ فالحل هو $\mathbb{R}$ ماعدا حلول المعادلة $f(x)=0$.

السؤال الأول

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

لحساب النهاية:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{4x^2+5}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + \left(4 + \frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \frac{|x|\sqrt{4 + \frac{5}{x^2}}}{x}$$

في جوار $+\infty$ إن $|x| = x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

لحساب النهاية:

$$f(x) - 2x = \sqrt{4x^2+5} - 2x$$

$$= \frac{(\sqrt{4x^2+5} - 2x)(\sqrt{4x^2+5} + 2x)}{\sqrt{4x^2+5} + 2x}$$

$$= \frac{4x^2 + 5 - 4x^2}{\sqrt{4x^2+5} + 2x} = \frac{5}{\sqrt{4x^2+5} + 2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$$

وبفرض:

$$y_\Delta = ax + b$$

تكون:

$$y = 2x$$

ويكون:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$$

السؤال الثاني

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1- النهايات:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= x + \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$= \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 - 1}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_d = 0$$

إذن d مقارب مائل في جوار $+\infty$.

3- نلاحظ من الطلب السابق أن:

$$f(x) - y_d < 0$$

C تحت d.

4- الشرط الأول:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -x - \frac{x}{\sqrt{(-x)^2+1}}$$

$$= -\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -f(x)$$

السؤال الثالث

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 3}$$

1- بالقسمة الإقليدية للتابع نجد:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+3}$$

بالمقارنة نجد:

$$a = 1\ , b = -1\ , c = 1$$

2- بفرض $y_d = x - 1$:

$$f(x) - y_d = \frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

إذن d مقارب مائل في جوار $\pm\infty$.

الوضع النسبي:

عندما $x < -3$ يكون C تحت d.

عندما $x > -3$ يكون C فوق d.

السؤال الرابع

لحساب النهاية:

$$x(lnx)^2 = \left(\sqrt{x}lnx\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2 = 0$$

السؤال الخامس

$$f(x) = \frac{3}{2+\cos x}$$

-1 لدينا:

$$-1 \le \cos x \le 1$$

نضيف 2:

$$1 \le 2 + cosx \le 3$$

نقلب:

$$1 \ge \frac{1}{2+cosx} \ge \frac{1}{3}$$

نضرب بـ 3:

$$3 \ge \frac{3}{2+cosx} \ge 1$$

$$3 \ge f(x) \ge 1$$

-2 نضرب المتراجحة السابقة بـ $x^2 > 0$:

$$3x^2 \ge \frac{3x^2}{2+cosx} \ge x^2$$

بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الثالثة:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = +\infty$$

السؤال السادس

$$f(x) = \frac{2+\ln x}{1+\ln x}$$

-1 النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x\left(\frac{2}{ln\, x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)} = 1$$

لدينا:

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$r = \frac{1.1-0.9}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

نعوض في القانون:

$$|f(x) - l| < r$$

$$\left|\frac{2+lnx}{1+lnx} - 1\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{2+lnx-1-lnx}{1+lnx}\right| < 10$$

$$\left|\frac{1}{1+lnx}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{1+lnx} < \frac{1}{10}$$

نقلب:

$$1 + lnx > 10$$

$$lnx > 9$$

$$x > e^9$$

-2 النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{X\to 1} f(X) = 2$$

السؤال السابع

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xsinx}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; x \ne 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$$

شرط الاستمرار عند الصفر:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = m$$

نوجد النهاية:

$$f(x) = \frac{xsinx}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$= \frac{x sinx\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{x sinx\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}$$

$$= \frac{x sinx\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2}$$

$$= \frac{sinx}{x}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1(2) = 2$$

بالتعويض في قانون الاستمرار نجد:

$$m = 2$$

السؤال الثامن

نعرف تابعاً:

$$f(x) = \ln(1+sinx)$$

$$f(0) = 0$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{cosx}{1+sinx}$$

$$f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

حسب تعرف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+sinx)}{x}$$

$$= f'(0) = 1$$

السؤال التاسع

$$f(x) = \frac{2x^2-7x-3}{x-3}$$

-1 لدينا:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{2x^2-7x-3}{x-3}}{x} = \frac{2x^2-7x-3}{x^2-3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x$$

$$f(x) - 2x = \frac{2x^2-7x-3}{x-3} - 2x$$

$$= \frac{2x^2-7x-3-2x^2+6x}{x-3} = \frac{-x-3}{x-3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = -1$$

-2 بفرض:

$$y = ax + b = 2x - 1$$

نشكل الفرق:

$$f(x) - y = \frac{2x^2-7x-3}{x-3} - (2x-1)$$

$$= \frac{2x^2-7x-3-(2x^2-7x+3)}{x-3}$$

$$= \frac{2x^2-7x-3-2x^2+7x-3}{x-3}$$

$$= \frac{-6}{x-3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$$

إذن هو مقارب مائل في جوار $+\infty$.

الوضع النسبي:

نلاحظ أن عندما $x > 3$ يكون C تحت المقارب.

وعندما $x < 3$ يكون C فوق المقارب.

السؤال العاشر

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

-1 النهاية:

$$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$$

-2 لدينا:

$$f(x) > 10^2$$

$$\frac{x+2}{(x+1)^2} > 10^2$$

عندما $x \to -1$ يكون البسط ≈ 1:

$$\frac{1}{(x+1)^2} > 10^2$$

نقلب:

$$(x+1)^2 < 10^{-2}$$

نجذر:

$$|x+1| < 0.1$$

وهذا يكافئ:

$$x \in]-1-0.1\,,-1+\ 0.1[$$

$$x \in]-1.1\,,-0.9[$$

$$I =]-1.1\,,-0.9[$$

السؤال الحادي عشر

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{cosx - 1}{x^2} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$= -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2} = 0$$

السؤال الثاني عشر

$$\boldsymbol{f(x) = 2e^{-x} + x - 2}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = x^{-1}\left(\frac{2e^{-x}}{x^{-1}} + \frac{x}{x^{-1}} - \frac{2}{x^{-1}}\right)$$

$$= x^{-1}\left(2xe^{-x} + x^2 + \frac{2}{x^{-1}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(0+\infty+0) = +\infty$$

2- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = 2e^{-x} = \frac{2}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_d = 0$$

إذن d مقارب مائل في جوار $+\infty$.

3- الوضع النسبي:

نلاحظ أن $f(x) - y_d > 0$ وبالتالي C فوق d.

السؤال الثالث عشر

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}}$$

عند $-\infty$ تكون $|x| = -x$:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

السؤال الرابع عشر

$$\boldsymbol{g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

1- لدينا:

$$g(x) = x^2\left(\frac{\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = x\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty(1) = +\infty$$

2- لدينا:

$$f(x) = \frac{g(x)}{x} = xsin\left(\frac{1}{x}\right)$$

لدينا:

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

نضرب بـ $x > 0$ في جوار 0^+.

$$-x \le xsin\left(\frac{1}{x}\right) \le x$$

$$\lim_{x\to0^+} -x = \lim_{x\to0^+} x = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$$

ولدينا:

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

نضرب بـ $x < 0$ عند 0^-:

$$-x \ge xsin\left(\frac{1}{x}\right) \ge x$$

$$\lim_{x\to0^-} -x = \lim_{x\to0^-} x = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$$

بما أن:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

فإن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

السؤال الخامس عشر

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$D_f =]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$$

$$f(x) = \frac{1 + lnx}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

السؤال السادس عشر

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

$$\frac{(x+1)^2}{e^x} = \frac{x^2+2x+1}{e^x}$$

$$= \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{e^x} = \frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0$$

السؤال السابع عشر

$$\lim_{x\to +\infty} e^{-x}(1+\ln x)$$

$$e^{-x}(1+lnx) = xe^{-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{e^x}\left(\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{e^x}\left(\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}\right)\right) = 0$$

حلول أسئلة دورات - الاشتقاق

السؤال الأول

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

-1 لدينا:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 1(2x-3)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x-2-2x+3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2}$$

-2 لدينا:

$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

لدينا التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ معرف على $[0,+\infty[$ واشتقاقي على $]0,+\infty[$ وبالتالي التابع g اشتقاقي على $J =]1+\infty[$ ويكون المشتق:

$$g'(x) = f'(\sqrt{x})(\sqrt{x})'$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(x-1)^2\sqrt{x}}$$

السؤال الثاني

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

$$f(-1) = 0$$

$$f'(-1) = 0$$

لدينا:

$$f(-1) = \frac{a-b+1}{-2}$$

$$0 = a-b+1$$

$$a-b = -1$$

ولدينا:

$$f'(-1) = 0$$

$$f'(x)$$

$$= \frac{(2ax+b)(x-1) - (ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{(-2a+b)(-2) - a + b - 1}{4}$$

$$0 = \frac{-4a-2b-a+b-1}{4}$$

$$-5a - b = 1$$

$$a - b = -1$$

بالطرح نجد:

$$-6a = 2$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

فتكون b:

$$-\frac{1}{3} - b = -1$$

$$b = \frac{2}{3}$$

السؤال الثالث

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

1- ليكون اشتقاقي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x sin\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \text{إحاطة}$$

لدينا:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

نضرب بـ $x > 0$ عند 0^+:

$$-x \leq x sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$\lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

حسب الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

وعند 0^- نضرب بـ $x < 0$:

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	0	$- - - - - - - - - - - - - - -$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

$$-x \geq x sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

$$\lim_{x\to 0^-} x = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

فالتابع اشتقاقي عند $a = 0$.

2- لدينا:

$$f'(x) = 2x sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

3- لدينا:

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} x \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

السؤال الرابع

$$\boldsymbol{f(x) = x - \sin x}$$

التابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} > 0$$

المشتق موجب فالتابع متزايد.

السؤال الخامس

$$\boldsymbol{f(x) = x - 4 + \sqrt{x - 2}\ ;\ ]2, +\infty[}$$

1- نوجد النهايات:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 - 4 + 0 = -2$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع اشتقاقي على $]2, +\infty[$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x-2} + 1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2\sqrt{x-2} + 1}{2\sqrt{x-2}} = 0$$

$$2\sqrt{x-2} + 1 = 0$$

$$2\sqrt{x-2} = -1$$

$$\sqrt{x-2} = -\frac{1}{2}$$

مستحيلة.

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	0	$- - - - - - - - - - - - - - -$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

نجد من جدول التغيرات السابق أن للمعادلة $\boldsymbol{f(x) = 0}$ حلاً وحيداً.

2- نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

$$= \frac{7}{2}(x - 3) + 0$$

$$= \frac{7}{2}x - \frac{21}{2}$$

السؤال السادس

$$f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}\ ;x\in]0,+\infty[$$

1- لدينا:

$$f(1)=0\,,f'(1)=3$$

$$f(1)=a+b$$

$$a+b=0$$

وأيضاً:

$$f'(x)=a-\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x}$$

$$=\frac{ax-lnx-1}{x}$$

$$f'(1)=a-1$$

$$a-1=3$$

$$a=4$$

نعوض:

$$4+b=0$$

$$b=-4$$

2- لدينا:

$$f(x)-y_d=-\frac{lnx}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y_d=0$$

بالتالي المستقيم d مقارب مائل.

لدينا:

$$f(x)-y_d=-\frac{lnx}{x}$$

$$f(x)-y_d=0$$

$$lnx=0$$

$$x=1$$

x	0	1	$+\infty$
$-\frac{lnx}{x}$	$+++++$	0	$------$
الوضع	Δ فوق C		Δ تحت C

السؤال السابع

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ ;D_f=\mathbb{R}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=-\infty$$

2- لدينا:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$$

$$=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{x^2-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y_\Delta=0$$

إذن Δ مقارب مائل للتابع.

3- نلاحظ أن:

$$f(x)-y_\Delta<0$$

Δ تحت C

السؤال الثامن

$$g(x)=\frac{x^2+bx+a}{x-1}$$

أولاً:

$$f(0)=2$$

$$f'(0)=0$$

$$f(0)=\frac{a}{-1}$$

$$\frac{a}{-1}=2$$

$$a=-2$$

ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2x+b)(x-1)-(x^2+bx+a)}{(x-1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-b-a}{1}$$
$$0 = -b - a$$
$$b = 2$$

ثانياً:

$$f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$$

1- لدينا:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-1}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

إذن Δ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$.

2- لدينا:

$$D_f =]-\infty.1[\cup]1,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 4 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 4 + \frac{1}{0^-} = -\infty$$

3- f اشتقاقي على $]-\infty.1[\cup]1,+\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2+2x+1-1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

نعدم:

$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$

إما:

$$x = 0$$

أو:

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$
$$f(0) = 2\,, f(2) = 6$$

الجدول:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$			0		‖		0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

4- لدينا:

التابع معرف ومستمر ومتزايد على المجال $]-3,-2[$ و:

$$0 \in f(]-3,-2[) =]f(-3), f(-2)[$$
$$=]-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً على المجال $]-3,-2[$.

حلول بنك المتتاليات

المسألة الأولى

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2 \quad , \quad x_0 = 4$$

1- لحساب الحدود:

$$x_1 = \frac{3}{4}(4) + 2 = 5$$
$$x_2 = \frac{3}{4}(5) + 2 = \frac{15+8}{4} = \frac{23}{4}$$

2- لدينا:

$$y_n = x_n - 8$$

أ) **نوجد y_{n+1}:**

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 8$$
$$= \frac{3}{4}x_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}x_n - 6$$

نشكل النسبة:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{3}{4}x_n - 6}{x_n - 8} = \frac{\frac{3}{4}(x_n - 8)}{x_n - 8}$$
$$= \frac{3}{4} = q$$

هندسية وأساسها $\frac{3}{4}$.

ب) **لإيجاد حدها العام:**

$$y_n = y_0 . q^n$$
$$y_0 = x_0 - 8 = 4 - 8 = -4$$
$$\Rightarrow y_n = -4\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ت) لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$$

لأن $-1 < q < 1$.

ولدينا:

$$y_n = x_n - 8 \Rightarrow x_n = y_n + 8$$
$$= -4\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 8$$

المسألة الثانية

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n} \; ; u_0 = \frac{1}{2}$$

-1 نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ...... $0 < u_n < 1$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ...... $0 < u_{n+1} < 1$

البرهان: نعرف التابع f على المجال $[2,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x}{2-x}$$

f اشتقاقي على $[2,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$$

التابع متزايد, لدينا من الفرض:

$$0 < u_n < 1$$

نصور الأطراف في التابع f:

$$f(0) < f(u_n) < f(1)$$

$$0 < u_{n+1} < 1$$

القضية صحيحة.

-2 المتتالية $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$:

أ) لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2-u_n}{u_n} - 1}{\frac{1}{u_n} - 1} = \frac{\frac{2-u_n-u_n}{u_n}}{\frac{1-u_n}{u_n}}$$

$$= \frac{2(1-u_n)}{1-u_n} = 2 = q$$

هندسية وأساسها $q = 2$.

الحد العام:

$$v_n = v_0 . q^n = 1.2^n = 2^n$$

ب) لكتابة الحد العام لـ u_n:

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1$$

$$\frac{1}{u_n} = v_n + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2^n + 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

-3 نهاية المتتالية v_n:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

لأن $q > 1$.

المسألة الثالثة

$$x_n = \frac{4n+5}{n+1} \quad , \quad y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

ندرس اطراد كل من المتتاليتين:

دراسة اطراد x_n:

نعرف التابع:

$$f(x) = \frac{4x+5}{x+1}$$

f اشتقاقي على $[0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4x+4-4x-5}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

المتتالية متناقصة.

دراسة إطراد y_n:

نعرف التابع:

$$f(x) = \frac{4x+1}{x+2}$$

f اشتقاقي على $[0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4x+8-4x-1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$$

المتتالية متزايدة.

نشكل الفرق:

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{(4n+5)(n+2) - (4n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{4n^2 + 8n + 5n + 10 - 4n^2 - 4n - n - 1}{n^2 + 3n + 2}$$

$$= \frac{8n+9}{n^2+3n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n - y_n = 0$$

المتتاليتان متجاورتان.

المسألة الرابعة

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 15}$$

نضرب بالعدد 3:

$$3S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 45$$

نلاحظ أنه مجموع متتالية حسابية أساسها $r = 1$ و $a = 1$ و $l = 45$ و $n = 45$:

$$3S = \frac{1+45}{2}(45)$$

$$3S = 23(45)$$

$$\Rightarrow S = 23(15) = 345$$

المسألة الخامسة

$$\boldsymbol{u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots \frac{n}{e^n}}$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$1 < 2$$

محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ...... $n \le 2^n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ...... $n+1 \le 2^{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$n \le 2^n$$

نضرب بالعدد 2:

$$n \le 2n \le 2^{n+1}$$

$$n \le 2^n$$

فالقضية صحيحة.

2- لدينا من الطلب السابق:

$$n \le 2^n$$

نقسم على e^n:

$$\frac{n}{e^n} \le \frac{2^n}{e^n}$$

نبدأ بالتعويض في المتراجحة من $n = 1$ إلى n ثم نجمع المتراجحات:

$$u_n \le \frac{2}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \cdots + \frac{2^n}{e^n}$$

نلاحظ أنها متتالية هندسية وأساسها $q = \frac{2}{e}$ وحدها الأول $\frac{2}{e}$:

$$S_q = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{2}{e}\frac{\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{e}}$$

$$= \frac{2}{e}\frac{\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}{\frac{e-2}{e}} = \frac{2}{e-2}\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)$$

نعوض:

$$u_n \le \frac{2}{e-2}\underbrace{\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}_{\text{يهمل}} < \frac{2}{e-2}$$

وبالتالي $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية.

3- لدينا:

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots \frac{n}{e^n}}_{u_n} + \frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$$

متزايدة.

بما أنها محدودة من الأعلى ومتزايدة فهي متقاربة.

المسألة السادسة

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2x}\ ;x\in]0,+\infty[$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2x(2x)-2x^2-4}{4x^2}$$

$$=\frac{4x^2-2x^2-4}{4x^2}=\frac{2x^2-4}{4x^2}$$

نعدم:

$$2x^2-4=0$$

$$2x^2=4$$

$$x^2=2$$

$x=+\sqrt{2}$ مقبول

$x=-\sqrt{2}$ مرفوض

$$f(\sqrt{2})=\frac{2+2}{2\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

الجدول:

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

2- لدينا:

$$u_{n+1}=\frac{u_n^2+2}{2u_n}\ ;u_0=2$$

أ) نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2}\le\frac{3}{2}\le 2$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ... ... $\sqrt{2}\le u_{n+1}\le u_n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... ... $\sqrt{2}\le u_{n+2}\le u_{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2}\le u_{n+1}\le u_n$$

نصور الأطراف في f:

$$\sqrt{2}\le u_{n+2}\le u_{n+1}$$

القضية صحيحة.

ب) من الطلب السابق أثبتنا أن:

$$u_{n+1}\le u_n$$

فهي متناقصة وبما أنها محدودة من الأدنى فهي متقاربة.

ت) لحساب نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x)=x$$

$$\frac{x^2+2}{2x}=x$$

$$x^2+2=2x^2$$

$$x^2=2$$

$x=\sqrt{2}$ مقبول

$x=-\sqrt{2}$ مرفوض

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{2}$$

السؤال الأول:

أوجد نهاية كل من التوابع الآتية:

1. $f(x)=\frac{2sinx+5}{\sqrt{x+1}}\ ; a=+\infty$

2. $f(x)=\frac{x-|sinx|}{x^2} ; a=+\infty$

الحل:

1. نستعمل مبرهنات الإحاطة لوجود $\sin(+\infty)$

$-1\le sinx\le 1$

نضرب ب 2:

$-2\le 2sinx\le 2$

نضيف 5:

$3\le 2sinx+5\le 7$

نقسم على $\sqrt{x+1}\ge 0$:

$$\frac{3}{\sqrt{x+1}}\le\frac{2sinx+5}{\sqrt{x+1}}\le\frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{\sqrt{x+1}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+1}}=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{2sinx+5}{\sqrt{x+1}}=0$$

2. نستعمل مبرهنة الإحاطة لوجود $\sin(+\infty)$

$0\le|sinx|\le 1$

نضرب ب -1:

$0\ge-|sinx|\ge-1$

نضيف $x\ge 0$ لأن $(x\to+\infty)$:

$x\ge x-|sinx|\ge x-1$

نقسم على $x^2\ge 0$:

$$\frac{x}{x^2}\ge\frac{x-|sinx|}{x^2}\ge\frac{x-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2}=0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-|sinx|}{x^2}=0$$

السؤال الثاني:

ليكن التابع f الذي يحقق العلاقة:

$$\frac{3x+\sin(2x)}{x^2}\le f(x)\le\frac{3x+8}{x^2+1}$$

أوجد نهاية f عند ال$+\infty$.

الحل:

نحسب النهاية الأولى وهي:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+8}{x^2+1}=\frac{3}{+\infty}=0$$

نحسب النهاية الثانية وهي:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sin(2x)}{x^2}=\sin(+\infty)\Rightarrow \text{إحاطة}$$

$$-1\ge\sin(2x)\ge 1$$

نضيف $3x\ge 0$:

$$3x-1\ge 3x+\sin(2x)\ge 3x+1$$

نقسم على $x^2\ge 0$:

$$\frac{3x-1}{x^2}\ge\frac{3x+\sin(2x)}{x^2}\ge\frac{3x+1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x^2}=0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sin(2x)}{x^2}=0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R بالشكل :

$$\boldsymbol{f(x)=\sqrt{1+x^2}}$$

1- أثبت أن C لا يقبل مقاربات أفقية
2- أثبت أن $f(x)-x=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$
ثم استنتج أن C يملك مقارباً مائلاً Δ في جوار $+\infty$
3- ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ

الحل:

1- $(x)=\sqrt{x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

2- $f(x)-x=\sqrt{x^2+1}-x$

نضرب بالمرافق:

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

نستنتج أن معادلة المقارب المائل:

$$y_\Delta=x$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0$$

3- نلاحظ أن:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}>0$$

C فوق Δ.

السؤال الرابع:

ليكن التابع f المعرف بالشكل $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-5x+6}}$

1- أوجد مجموعة تعريف f وعين ما له من مقاربات شاقولية.
2- عين معادلة مقارب مائل للخط C_f .
3- ادرس الوضع النسبي لـ C_f مع المقارب المائل.

الحل:

1- نعدم المقام:

$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-3)(x-2)=0$$

إما:

$$x-3=0\Rightarrow x=3$$

أو:

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$

فإن:

$$D_f=\mathbb{R}\backslash\{2,3\}$$
$$=]-\infty,2[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\frac{15}{0^-}=-\infty$$

$x=2$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$.

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\frac{15}{0^+}=+\infty$$

$x=2$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$.

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\frac{43}{0^+}=+\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$.

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\frac{43}{0^-}=-\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$.

2- بقسمة البسط على المقام القسمة الإقليدية نجد:

$$f(x)=x+7+\frac{28x+1}{x^2-5x+6}$$

نفرض:

$$y_\Delta=x+7$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

فهو مقارب مائل في كل من الجوارين $\pm\infty$.

3- لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=0$$
$$\frac{28x+1}{x^2-5x+6}=0$$
$$28x+1=0$$
$$28x=-1$$
$$x=-\frac{1}{28}$$

x	$-\infty \quad -\frac{1}{28} \quad 2 \quad 3 \quad +\infty$
$\frac{28x+1}{x^2-5x+6}$	$- \quad 0 \quad + \quad \Vert \quad - \quad \Vert \quad +$
الوضع النسبي	تحت | فوق | تحت | فوق

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x+2}{x^2+1}}$$

1- جد مجموعة تعريف التابع f
2- جد معادلة المقارب الأفقي للتابع
3- ادرس الوضع النسبي للمقارب الافقي مع C.

الحل:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x+2}{x^2+1}}$$

1- نعدم مقام التابع:

$$x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1$$

مستحيلة.

$$D_f=\mathbb{R}$$

2- لإيجاد معادلة المقارب الأفقي:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

$y=0$ مقارب افقي في جوار $\pm\infty$.

3- نشكل الفرق ونعدم:

$$f(x)-0=\frac{x+2}{x^2+1}$$

نعدم:

$$\frac{x+2}{x^2+1}=0\Rightarrow x+2=0$$
$$\Rightarrow x=-2$$

عندما $x < -2$ فإن C تحت المقارب الأفقي.
عندما $x > -2$ فإن C تحت المقارب الأفقي.

السؤال السادس:

ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق:

$$\boldsymbol{f(x) = x + \frac{E(x)}{x+1}}$$

-1 اثبت أن Δ الذي معادلته $y_\Delta = x + 1$ مقارب مائل لـ f

-2 احسب $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

الحل:

-1 نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{E(x)}{x+1} - 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = E(\infty) \Rightarrow \text{إحاطة}$$

$$x - 1 \le E(x) \le x$$

نقسم على $x + 1 > 0$ في جوار الـ $+\infty$

$$\frac{x-1}{x+1} \le \frac{E(x)}{x+1} \le \frac{x}{x+1}$$

نطرح 1:

$$\frac{x-1}{x+1} - 1 \le f(x) - y_\Delta \le \frac{x}{x+1} - 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} - 1 = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

وبالتالي Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

-2 لحساب النهاية:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = \sqrt{2} + \frac{E(\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

السؤال السابع:

ادرس استمرار كلٍ من التوابع الآتية عند $a = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \ne 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

الحل:

شرط استمرار تابع:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)}$$

التابع الأول:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty(0) \text{ح ع ت}$$

نضرب ونقسم على $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \frac{1}{x} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = 0(1) = 0$$

و $f(0) = 1$ فالتابع غير مستمر عند 0 لأن

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) \ne f(0)}$$

السؤال الثامن: ادرس قابلية الاشتقاق عند النقطة a الموافقة:

.1 $f(x) = 2\sqrt{x} + x \,;\, a = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ ح ع ت}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{2\sqrt{x} + x - 2 - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{(2\sqrt{x} - 2) + (x - 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} + 1$$

$$= \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

فالتابع قابل للاشتقاق عند $x = 1$.

.2 $f(x) = \sqrt{2 - x} \,;\, a = 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2-x}}{-(2-x)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{-\sqrt{2-x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

غير قابل للاشتقاق عند $x = 2$.

.3 $f(x) = \sin(2x) \,;\, a = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(2x)}{2x}$$

$$= 2(1) = 2$$

قابل للاشتقاق عند $x = 0$.

.4 $f(x) = (2x - 4)\sqrt{x - 2} \,;\, a = 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)\sqrt{x-2}}{x - 2} = 0$$

السؤال التاسع: **أوجد معادلة المماس عند النقطة a الموافقة:**

سنستخدم هذا القانون في الحل:

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

.1 $f(x) = x^2 + 2 \,,\, a = 1$

$$f'(x) = 2x$$

$$f(1) = 3$$

$$f'(1) = 2$$

$$y = 2(x - 1) + 3 = 2x - 2 + 3 = 2x + 1$$

.2 $f(x) = \sqrt{2x + 1} \,,\, a = 2$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f(2) = \sqrt{5}$$

$$f'(2)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2)+\sqrt{5}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2+5}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{7}{\sqrt{5}}$$

.3 $\boldsymbol{f(x)=\sin(x)\ ,a=\frac{\pi}{2}}$

$$f'(x)=cosx$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$
$$y=0\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1=1$$

.4 $\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{x+1}\ ,a=0}$

$$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$f(0)=0$$
$$f'(0)=1$$
$$y=1(x-0)+0$$
$$y=x$$

.5 $\boldsymbol{f(x)=x^2+\frac{1}{x}\ ,a=-1}$

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$$
$$f(-1)=1-1=0$$
$$f'(-1)=-2-1=-3$$
$$y=-3(x+1)+0$$
$$=-3x-3$$

.6 $\boldsymbol{f(x)=1-\frac{3}{x}\ ,a=1}$

$$f'(x)=+\frac{3}{x^2}$$
$$f(1)=-2$$
$$f'(1)=3$$
$$y=3(x-1)-2$$
$$=3x-3-2=3x-5$$

.7 $\boldsymbol{f(x)=sinx\ ,a=0}$

$$f'(x)=cosx$$
$$f(0)=0$$
$$f'(0)=1$$
$$y=1(x-0)+0$$
$$y=x$$

.8 $\boldsymbol{f(x)=tanx\ ,a=\frac{\pi}{4}}$

$$f'(x)=1+\tan^2 x$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+1=2$$
$$y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$$
$$=2x-\frac{\pi+2}{2}$$

السؤال العاشر:

اكتب معادلة المماس الذي ميله 4.

الحل:

$$f(x)=2x-x^2$$
$$f'(x)=2-2x$$
$$f'(a)=4$$
$$2-2a=4$$
$$\Rightarrow a=-2$$
$$f(-2)=-4-4=-8$$
$$y=4(x+2)-8$$
$$=4x$$

السؤال الحادي عشر:

اكتب معادلة المماس في النقطة التي ترتيبها -1.

الحل:

$$f(x)=x^2-5x+5$$
$$f'(x)=2x-5$$
$$f(a)=-1$$
$$a^2-5a+5=-1$$
$$a^2-5a+6=0$$
$$(a-3)(a-2)=0$$

إما:

$$a=3$$
$$f(3)=9-15+5=-1$$
$$f'(3)=2(3)-5=1$$
$$\Rightarrow y_1=1(x-3)-1=x-4$$

أو:

$$a=2$$
$$f(2)=4-10+5=-1$$
$$f'(2)=-1$$
$$\Rightarrow y_2=-1(x-2)-1=x-3$$

السؤال الثاني عشر:

اكتب معادلة المماس في نقطة التقاطع مع محور الفواصل.

الحل:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$$

في التقاطع مع محور الفواصل نضع:

$$y=0$$
$$f(a)=0$$
$$\frac{a+1}{a-1}=0$$
$$\Rightarrow a=-1$$
$$f'(-1)=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}(x+1)+0$$
$$=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

السؤال الثالث عشر:

اكتب معادلة المماس في نقطة التقاطع مع محور التراتيب.

الحل:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}$$
$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

في التقاطع مع محور التراتيب نضع:

$$x=0$$
$$f(0)=-1$$
$$f'(0)=-\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow y=-\frac{1}{4}(x-0)-1$$
$$=-\frac{1}{4}x-1$$

السؤال الرابع عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع $f(x)=\sqrt{x-1}$

1- ادرس قابلية الاشتقاق عند $a=1$

2- فسر النتيجة هندسياً

الحل:

1- لدراسة قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$$

غير قابل للاشتقاق عند $a=1$.

2- إن f يقبل مماساً شاقولياً عند $a=1$ ومعادلته $x=1$.

السؤال الخامس عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع $f(x)=\frac{x+3|x|}{x^2+3}$

1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $a=0$

2- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للخط c_f عند $a=0$

3- اكتب معادلة نصف المماس من اليسار للخط c_f عند $a=0$

الحل:

1- لدراسة قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

نزيل القيمة المطلقة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{x^2+3};x\in]-\infty,0]\\ \dfrac{-2x}{x^2+3};x\in]0,+\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4x}{x^2+3}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4}{x^2+3}$$
$$=\frac{4}{3}=f'(0^+)$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-2x}{x^2+3}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{x^2+3}$$
$$=-\frac{2}{3}=f'(0^-)$$

2- معادلة نصف المماس اليميني:

$$y_{T_1}=f'(0^+)(x-0)+f(0)$$
$$=\frac{4}{3}x$$

3- معادلة نصف المماس اليساري:

$$y_{T_2}=f'(0^-)(x-0)+f(0)$$
$$=-\frac{2}{3}x$$

السؤال السادس عشر:

ليكن c_f الخط البياني للتابع $f(x)=\frac{2}{|x|+\sqrt{2}}$

1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $a=0$

2- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للخط c_f عند $a=0$

3- اكتب معادلة نصف المماس من اليسار للخط c_f عند $a=$
0

الحل:

1- لدراسة قابلية الاشتقاق سنكتب التابع بصيغة مستقلة عن القيمة المطلقة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+\sqrt{2}} & ; x\in[0,+\infty[\\ \dfrac{2}{-x+\sqrt{2}} & ; x\in]-\infty,0[\end{cases}$$

نميز حالتين:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x+\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{2}-2x-2\sqrt{2}}{x(x+\sqrt{2})(\sqrt{2})}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2}{(x+\sqrt{2})(\sqrt{2})}$$

$$=-1=f'(0^+)$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{2}{\sqrt{2}-x}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2x}{x(\sqrt{2}-x)\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{x(\sqrt{2}-x)\sqrt{2}}=1=f'(0^-)$$

2- لكتابة معادلة نصف المماس اليميني:

$$y_{T_1}=f'(0^+)(x-0)+f(0)$$

$$=-1(x-0)+\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$=-x+\frac{2}{\sqrt{2}}$$

3- لكتابة معادلة المماس اليساري:

$$y_{T_2}=f'(0^-)(x-0)+f(0)$$

$$=1(x-0)+\frac{2}{\sqrt{2}}=x+\frac{2}{\sqrt{2}}$$

السؤال السابع عشر:

ليكن $f(x)=2\cos(3x)$ أثبت أن $f''(x)+9f(x)=0$.

الحل:

$$f'(x)=-6\sin(3x)$$

$$f''(x)=-18\cos(3x)$$

لننطلق من طرف لنصل إلى أخر:

$$f''(x)+9f(x)$$

$$=-18\cos(3x)+18\cos(3x)=0$$

السؤال الثامن عشر:

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=\frac{1}{x}$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$

2- أثبت أن $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

الحل:

1- نحسب المشتقات:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=-\frac{-2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

$$f^{(3)}(x)=-\frac{3}{x^4}$$

2- نستخدم الاثبات بالتدريج:

$$E(n): f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$ ... ... الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$$ .... الطلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

نشتق:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)(n+1)x^n(-1)^n n!}{x^{2n+2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{2n+2-n}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$$

فالمساواة صحيحة.

دراسة تغيرات تابع

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب ما تجده من مقاربات

2- جد معادلة المقارب المائل للخط C عند $+\infty$ و $-\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب المائل

4- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

5- اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

6- أثبت أن النقطة $A(-1,-2)$ هي مركز تناظر للخط C

7- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم T ثم ارسم C

8- ناقش بيانياً حلول المعادلة $3+m(-x-1)+x^2=0$

الحل:

1- نوجد مجموعة التعريف:

$$D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

1- $x=-1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.

2- بقسمة التابع قسمة إقليدية:

$$f(x)=x-1+\frac{4}{x+1}$$

نشكل الفرق:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{4}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

3- لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=0$$

$$4\neq 0$$

مستحيلة.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{4}{x+1}$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	تحت	|	فوق

4- لدراسة التغيرات:

التابع f معرف واشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$x^2+2x-3=0$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f(x)$			0		$\|\|$		0		
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↗	2	↘	$+\infty$

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$x_1=1\ ,x_2=-3$$

$$f(1)=\frac{4}{2}=2$$

$$f(-3)=\frac{12}{-2}=-6$$

5- التقاطع مع محور التراتيب:

$$x=0$$

$$y_T=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$=-3(x-0)+3=-3x+3$$

6- النقطة $A(-1,-2)$:

$$x\in\mathbb{R}\Rightarrow -2-x\in\mathbb{R}$$

$$f(x)+f(2a-x)=2b$$

$$f(x)+f(-2-x)$$

$$=\frac{x^2+3}{x+1}+\frac{(-2-x)^2+3}{-2-x+1}$$

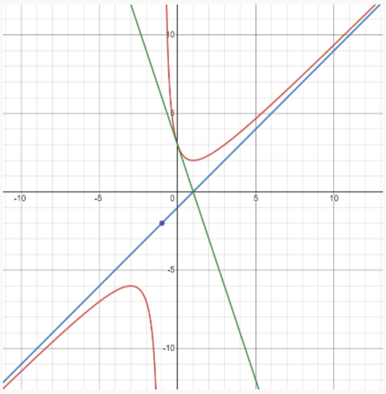
$$=\frac{x^2+3}{x+1}+\frac{4+4x+x^2+3}{-x-1}$$

$$=\frac{x^2+3-(7+4x+x^2)}{x+1}$$

$$=\frac{x^2+3-7-4x-x^2}{x+1}$$

$$=\frac{-4(x+1)}{(x+1)}=-4$$

7- الرسم:



8- ننطلق من:

$$3+m(-x-1)+x^2=0$$

$$m(-x-1)=-x^2-3$$

$$m=\frac{-(x^2+3)}{-(x+1)}=f(x)$$

$$f(x)=m$$

الحلول بيانياً
$$\begin{cases} m\in]-\infty,-6[& \text{حلان} \\ m=-6 & \text{حل وحيد} \\ m\in]-6,2[& \text{لا يوجد حلول} \\ m=2 & \text{حل وحيد} \\ m\in]2,+\infty[& \text{حلان} \end{cases}$$

المسألة الثانية:

$$f(x)=x-4+\sqrt{x-2}\ \ :]2,+\infty[$$

1- ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ و نظم جدولاً بها

2- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

3- اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=3$

الحل:

1- نوجد النهايات:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2-4+0=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع اشتقاقي على $]2,+\infty[$.

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x-2}+1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{2\sqrt{x-2}+1}{2\sqrt{x-2}}=0$$

$$2\sqrt{x-2}+1=0$$

$$2\sqrt{x-2}=-1$$

$$\sqrt{x-2} = -\frac{1}{2}$$

مستحيلة.

x	$+2$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+++\ ++++++$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2- نجد من جدول التغيرات السابق أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً.

3- نعوض في قانون معادلة المماس:

$$\begin{aligned} y &= f'(3)(x-3) + f(3) \\ &= \frac{7}{2}(x-3) + 0 \\ &= \frac{7}{2}x - \frac{21}{2} \end{aligned}$$

المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = (3-x)\sqrt{x-3}$

1- جد مجموعة تعريف التابع f

2- أثبت أن f قابل للاشتقاق عند $a = 3$ ثم استنتج معادلة المماس عند $a = 3$

3- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

4- ارسم C

1- التابع $\sqrt{x-3}$ معرف على:

$$x - 3 \geq 0$$
$$x \geq 3$$
$$\Rightarrow D_{\sqrt{x-3}} = D_f = [3, +\infty[$$

2- نعوض في تعريف العدد المشتق:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)\sqrt{x-3}}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)\sqrt{x-3}}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3} -\sqrt{x-3} = 0 \end{aligned}$$

معادلة المماس الأفقي:

$$y = 3$$

3- ندرس النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

f اشتقاقي على $[3, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{x-3} + \frac{3-x}{\sqrt{x-3}} \\ &= \frac{3-x+3-x}{\sqrt{x-3}} = \frac{6-2x}{\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

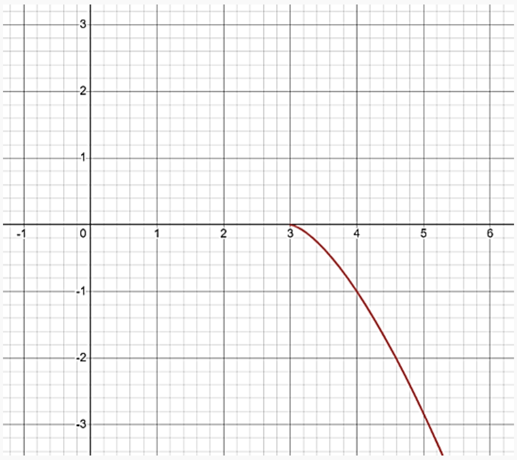
نعدم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6 - 2x = 0$$
$$\Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = 0$$

x	3		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-----------$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

4- الرسم:



المسألة الرابعة:

ليكن $f(x) = x - sinx$ اثبت أن f متزايد

الحل:

التابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} > 0$$

المشتق موجب فالتابع متزايد.

المسألة الخامسة:

ليكن التابع **f** المعرف بالشكل:

$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}}$$

1- ادرس تغيرات **f** ونظم جدولاً بها.

2- اوجد معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي

3- أثبت أن **f** فردي

4- ارسم المقارب المائل وارسم c_f

5- بفرض $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ و $u_0 = 2$

أ- أثبت بالتدريج $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$

ب- أستنتج أن المتتالية متقاربة و عين نهايتها

الحل:

1- مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.

f اشتقاقي على $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$
$$x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$
$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$
$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

2- نفرض معادلة المقارب المائل:

$$y_\Delta = \frac{1}{2}x$$
$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

وبالتالي Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = 0$$
$$\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$$

مستحيلة

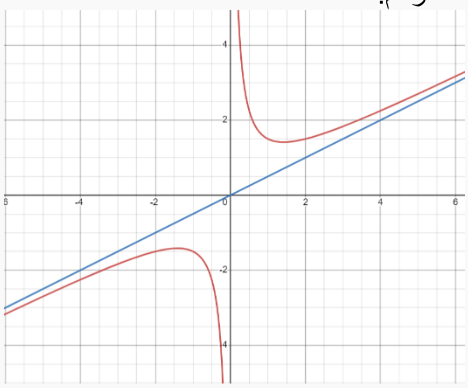
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$-$	||	$+$
الوضع	تحت	||	فوق

3- لإثبات أن التابع فردي:

$$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$
$$f(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)$$
$$= -f(x)$$

فالتابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

4- الرسم:



5- لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}, u_0 = 2$$

أ) الإثبات:

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): \sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2} \le \frac{3}{2} \le 2$$

صحيحة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$ ... فرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$ ... الطلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

نعرف تابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$ ولدينا من الجدول السابق أن f متزايد على $[\sqrt{2}, +\infty[$ وبالتالي نصور الأطراف:

$$f(\sqrt{2}) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n)$$
$$\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة.

ب) لدينا من اقضية السابقة:

$$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

بالتالي المتتالية متناقصة لأنّ:

$$u_{n+1} \le u_n$$

ومحدودة من الأدنى لأنّ:

$$\sqrt{2} \le u_n$$

فالمتتالية متقاربة ولتعيين نهايتها نحل المعادلة الآتية:

$$f(x) = x$$
$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x$$
$$\frac{x^2 + 2}{2x} = x$$
$$x^2 + 2 = 2x^2$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

$x = \sqrt{2}$ مقبول

$x = -\sqrt{2}$ مرفوض

وبالتالي:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$

التابع اللوغارتمي

السؤال الأول:

ليكن f التابع المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{\ln(x)+2}{\ln(x)+1}$$

1- احسب نهاية التابع f عند $+\infty$.
2- جد عدداً حقيقياً A ليحقق الشرط: $f(x) \in]0.9,1.1[$ عندما $x > A$.
3- استنتج نهاية $f(f(x))$ عند $+\infty$.

الحل:

1- لحساب النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)\left(1+\frac{2}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)} = 1$$

2- لإيجاد العدد A:

$$|f(x)-l| < \varepsilon$$
$$l = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$
$$\varepsilon = b - l = 0.1 = \frac{1}{10}$$

نعوض:

$$\left|\frac{\ln(x)+2}{\ln(x)+1} - 1\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{\ln(x)+2-\ln(x)-1}{\ln(x)+1}\right| = \frac{1}{10}$$
$$\frac{1}{\ln(x)+1} < \frac{1}{10}$$

نقلب:

$$\ln(x)+1 > 10$$
$$\ln(x) > 9$$
$$x > e^9$$

نختار $A = e^9$

3- لاستنتاج النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to1} f(X) = 2$$

السؤال الثاني:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

$$\ln(x^2+1) = \ln(7x)$$
$$\ln(x^2-4) = \ln(2x-4)$$

الحل:

المعادلة الأولى:

$$\ln(x^2+1) = \ln(7x)$$
$$E_1 =]-\infty,+\infty[\,,E_2 =]0,+\infty[$$
$$\Rightarrow E = E_1 \cap E_2 =]0,+\infty[$$
$$x^2+1 = 7x$$
$$x^2-7x+1 = 0$$
$$\Delta = 49-4(1)(1) = 45 > 0$$

$x_1 = \dfrac{7+\sqrt{45}}{2} = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$ مقبول

$x_2 = \dfrac{7-\sqrt{45}}{2} = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ مقبول

والحلان مقبولان حسب شرط الحل.

المعادلة الثانية:

$$\ln(x^2-4) = \ln(2x-4)$$
$$E_1 =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$$
$$E_2 =]2,+\infty[$$
$$\Rightarrow E = E_1 \cap E_2 =]2,+\infty[$$
$$x^2-4 = 2x-4$$
$$x^2-2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$

إما:

$x = 0$ مرفوض

أو:

$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$ مرفوض

السؤال الثالث:

ليكن لدينا التابعان f و g المعرفان وفق:

$$g(x) = 2x^2+1-\ln(x)$$

والتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = 2x-2+\frac{\ln(x)}{x}$$

أولاً:

1) ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها.
2) استنتج إشارة $g(x)$ من جدول التغيرات.

ثانياً:

1) احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.
2) أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ واستنتج جدول تغيرات f.

ثالثاً:

1) أثبت وجود عددين حقيقيين a و b يحققان أن:

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\ ,\qquad b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x$$

2) استنتج معادلة المقارب Δ للخط C_f, وادرس الوضع النسبي.

3) اكتب معادلة المماس d في نقطة من C_f التي فاصلتها (1).

رابعاً: ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f.

الحل:

أولاً:

1- النهايات:

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2x + \frac{1}{x} - \frac{lnx}{x}\right)$$

$$= +\infty(+\infty + 0 - 0) = +\infty$$

g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2-1}{x}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$x = \frac{1}{2}$ مقبول

$x = -\frac{1}{2}$ مرفوض

الجدول:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$ $-\,-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+\,+\,+$
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$ $\searrow$	$\frac{3}{2}+\ln(2)$	$\nearrow$ $+\infty$

2- نلاحظ أن:

$$g(x) \geq \frac{3}{2} + \ln(2) > 0$$

$$g(x) > 0$$

ثانياً:

1) لحساب النهايات:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = 2 + \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$$

الجدول:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

ثالثاً:

1) نوجد النهايات:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x.x}\right)}{x}$$

$$= 2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2 = a$$

$$f(x) - 2x = 2x - 2 + \frac{\ln(x)}{x} - 2x$$

$$= -2 + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = -2 = b$$

2) المعادلة:

$$y_\Delta = 2x - 2$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

إذن هو مقارب مائل.

$$f(x) - y_\Delta = 0$$

$$\ln(x) = 0$$

$$x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$\frac{\ln(x)}{x}$	$\|\|$ $-\,-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+\,+\,+$
وضع	$\|\|$ تحت		فوق

3) لكتابة معادلة المماس:

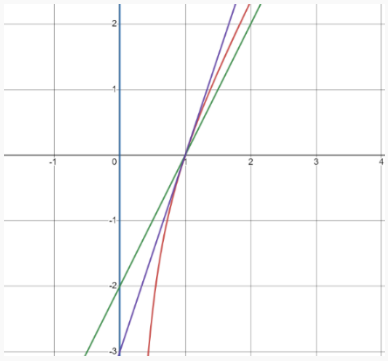
$$y_d = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$f'(1) = 3$$

$$f(1) = 0$$

$$\Rightarrow y_d = 3(x-1) + 0 = 3x - 3$$

رابعاً: الرسم:



السؤال الرابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2^n}\quad ; \quad u_0=0$$

ولنضع المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ وفق $v_n=u_{n+1}-u_n$:

1) أثبت أن v_n هندسية وعين أساسها وحدها العام.

2) من أجل كل $n\geq1$ نضع $w_n=\ln(v_n)$:

أ) أثبت أنها حسابية وعين أساسها.

ب) اكتب w_n بدلالة n.

ت) حسب قيمة المجموع:

$$S=1-\frac{w_1}{\ln(2)}-\frac{w_2}{\ln(2)}-\cdots-\frac{w_5}{\ln(2)}$$

الحل:

1- لإثبات أن المتتالية هندسية:

$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{2^n}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2^n}=v_n$$

$$\Rightarrow v_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n.2}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{2^n.2}}{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}=q$$

المتتالية هندسية وأساسها $q=\frac{1}{2}$, وحدها العام $v_n=\frac{1}{2^n}$.

2- لدينا:

$$w_n=\ln(v_n)$$

أ- نوجد w_{n+1}:

$$w_{n+1}=\ln(v_{n+1})$$

نوجد الفرق:

$$w_{n+1}-w_n=\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)$$

$$=\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)=r$$

فالمتتالية حسابية وأساسها $r=-\ln(2)$.

ب- لإيجاد الحد العام نعوض في:

$$w_n=w_0+n.r=\ln(1)-n.\ln(2)$$

$$=n.\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

ت- لحساب قيمة المجموع:

$$S=1-\frac{w_1}{\ln(2)}-\frac{w_2}{\ln(2)}-\cdots-\frac{w_5}{\ln(2)}$$

$$=1-\left(\frac{w_1}{\ln(2)}+\frac{w_2}{\ln(2)}+\cdots+\frac{w_5}{\ln(2)}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\ln(2)}(w_1+w_2+\cdots+w_5)$$

ونلاحظ أن لدينا مجموع متتالية حسابية وهو:

$$w_1+w_2+w_3+w_4+w_5$$

$$S=n.\frac{a+l}{2}$$

$$n=5-1+1=5$$

$$a=w_1=0$$

$$l=w_5=5\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow w_1+w_2+\cdots+w_5=5.\frac{0+5\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2}=-\frac{\ln(2)}{2}$$

نعوض في S:

$$S=1-\frac{1}{\ln(2)}\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

السؤال الخامس:

ادرس اطراد التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\sqrt{x}-\ln(x)$$

واستنتج حلول المتراجحة $\sqrt{x}\geq\ln(x)$.

الحل:

g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=0$$

$$\Rightarrow x-\sqrt{x}=0$$

$$x=\sqrt{x}$$

نربع الطرفين بشرط $x>0$ وهي كذلك على مجموعة التعريف:

$$x^2=x$$

$$x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0$$

إما:

$x=0$ مرفوض

أو:

$x=1$ مقبول

الجدول:

نلاحظ أن:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$---$	0	$+++$	
$g(x)$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$\sqrt{x} \geq \ln(x)$$

$$\sqrt{x} - \ln(x) \geq 0$$

$$g(x) \geq 0$$

من الجدول نلاحظ أن حلها:

$$s = [1, +\infty[$$

المتتاليات

مثال 1: لتكن لدينا المتتالية $u_n = 2 \times 3^n$ و المطلوب :

1- أثبت أنها هندسية

2- احسب قيمة المجموع

$$S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{10}$$

3- احسب المجموع :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$$

الحل: 1 – إثبات أنها هندسية :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3 = q$$

2-حساب المجموع:

$$S = a\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$a = u_2 = 2 \times 3^2 = 18$$

عدد الحدود : $10 - 2 + 1 = 9$

$$S = 18.\frac{1 - 3^9}{1 - 3} = -9(1 - 3^9)$$

3-حساب المجموع :

$$S_n = a\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$a = u_0 = 2$$

$$l = u_n = 2 \times 3^n$$

عدد الحدود : $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = 2\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}$$

$$S_n = -1(1 - 3^{n+1}) = 3^{n+1} - 1$$

1- ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$, أثبت أنها هندسية .

الحل :

1) نحسب u_{n+1} وذلك باستبدال كل n بـ $n+1$

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

2) نحسب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right)}{\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n.2^1}{3^n.3^2} \cdot \frac{3^n.3^1}{2^n}$$

$$\frac{u_{(n+1)}}{u_n} = \frac{2}{3} = q$$

هندسية وأساسها $q = \frac{2}{3}$

2- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $u_n = 3 - n$, أثبت أنها حسابية .

الحل :

1) نحسب u_{n+1}

$$u_{n+1} = 3 - (n + 1) = 2 - n$$

2) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = (2 - n) - (3 - n) = -1 = r$$

حسابية وأساسها $r = -1$

3- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$, احسب u_{20}

الحل :

من العلاقة بين حدين

$$u_n = u_m + (n - m)r$$

$$u_5 = u_2 + (5 - 2)r$$

$$\Rightarrow -13 - 41 = 3r$$

$$-54 = 3r$$

$$\Rightarrow r = -\frac{54}{3} = -18$$

مرة أخرى

$$u_n = u_m + (n - m)r$$

$$u_{20} = u_2 + (20 - 2)r$$

$$\Rightarrow u_{20} = 41 - 324$$

$$\Rightarrow u_{20} = -324 + 41 = -283$$

4- $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية فيها $u_4 = 16$ و $u_1 = 2$, احسب u_3 .

الحل :

من قانون الحدين $u_n = u_m q^{n-m}$

$$u_4 = u_1.q^{4-1} \Rightarrow \frac{16}{2} = q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

مرة أخرى :

$$u_n = u_m . q^{n-m}$$

$$u_3 = u_1 . 2^{3-1}$$

$$u_3 = 2 \times 4 \Rightarrow u_3 = 8$$

-5 $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1) احسب u_n بدلالة n

2) احسب المجموع $u_{30} + u_{31} + u_{32}$

3) احسب المجموع $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$

الحل :

1) من قانون الحدين

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_n = u_1 + (n-1)3$$
$$u_n = 2 + 3n - 3$$
$$u_n = 3n - 5$$

2) من قانون مجموع حدود متتالية حسابية :

$$u_{30} + u_{31} + u_{32} = n\frac{(a+l)}{2}$$

حيث $a = u_{30} = 3(30) - 5 = 85$ (تم حسابه من تعويض n=30 في الحد العام)

و $l = u_{32} = 3(32) - 5 = 91$ (تم حسابه من تعويض $n =$ 32 في الحد العام)

وعدد الحدود $n = 32 - 30 + 1 = 3$ (آخر دليل ناقص أول دليل + 1)

بالتعويض:

$$u_{30} + u_{31} + u_{32} = 3\frac{(85+91)}{2} = 264$$

3) أيضاً من قانون مجموع حدود متتالية حسابية :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = n\frac{(a+l)}{2}$$
$$a = u_1 = -2$$
$$l = u_{20} = 3(20) - 5 = 55$$
$$n = 20 - 1 + 1 = 20$$
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = 20\frac{(-2+55)}{2} = 530$$

-6 $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها 2 و $u_0 = 1$, احسب $u_3 + u_4 + \cdots + u_{10}$

الحل : لنوجد الحد العام أولاً

$$u_n = u_0 . q^n = 1.2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow u_n = 2^n$$

$$S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{10} = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a = u_3 = 2^3 = 8$$

$$q = 2$$

$$n = 10 - 3 + 1 = 8$$

$$S = 8.\frac{1-2^8}{1-2} = 8\frac{1-2^8}{-1} = 8(2^8 - 1) = 2040$$

فائدة هامة (مجموع مع قفزات)

نطبق نفس القوانين مع مراعاة :

عدد الحدود= $\mathbf{1} + \frac{\text{أول دليل} - \text{آخر دليل}}{\text{طول القفزة}}$

في الهندسية $q' = q^{\text{القفزة}}$

في الحسابية $r' = r \times$ القفزة

مثال :

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها 3 و فيها $u_1 = -2$

1) احسب u_n بدلالة n

2) احسب قيمة المجموع $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$

3) احسب قيمة المجموع $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$

الحل :

1) من قانون الحدين

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \Rightarrow \frac{u_n}{u_1} = q^{n-1} \Rightarrow \frac{u_n}{-2} = 3^{n-1}$$

$$u_n = -2.(3)^{n-1}$$

2) $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7 = a.\frac{1-q^n}{1-q}$

$$a = u_1 = -2.(3)^{1-1} = -2$$

$$q = 3$$

$$n = 7 - 1 + 1 = 7$$

$$S = -2\frac{1-3^7}{1-3} = 1 - 3^7 = -2186$$

3) نلاحظ أن المجموع المطلوب هنا عبارة عن مجموع لحدود ليست متعاقبة (يوجد قفزة قدرها 2 بين كل دليل و الآخر) لذا نتبع الخطوات التالية :

عدد الحدود الجديد $n = 1 + \frac{2n-2}{2}$

الأساس الجديد $q' = 3^2 = 9$

الحد الأول : $u_2 = -6$

القانون :

$$S = a\frac{1-(q')^n}{1-q'}$$
$$S = -6\frac{1-9^n}{1-9}$$

الإثبات بالتدريج

إذا كانت $E(n)$ قضية متعلقة بالعدد الطبيعي n حيث $n \geq n_0$ وأردنا إثبات أنها صحيحة مهما تكن $n \geq n_0$ فإن أفضل الطرق لذلك هي "الإثبات بالتدريج" أو ما يعرف بال " الاستقراء الرياضي" .

طريقة الإثبات بالتدريج :

① نرمز للقضية $E(n)$

② نثبت صحة القضية من أجل أول قيمة لـn ولتكن n_0

③ نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة ... (الفرض)

④ نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ ... (الطلب) مستفيدين من (الفرض)

النمط الأول من التمارين (المضاعفات) :

❶ أثبت صحة الخاصة

$E(n)$:"العدد 4^n+5 مضاعف للعدد 3 " ;$n \geq 1$

الحل:

نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل$n=1$:

$4^1+5=4+5=9$

من مضاعفات العدد 3

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$4^n+5=3k$ ... (الفرض)

حيث $k \in \mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$4^{n+1}+5=3m$ ... (الطلب)

حيث $m \in \mathbb{Z}$

البرهان: لدينا من الفرض :

$4^n+5=3k$

نضرب الطرفين بـ 4^1

$4^{n+1}+20=12k$

نضيف و نطرح 5 :

$4^{n+1}+5-5+20=12k$

$4^{n+1}+5+15=12k$

$4^{n+1}+5=12k-15$

$4^{n+1}+5=3m$

و هو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة مهما يكن $n \geq 1$

❷ أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: " $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 "

الحل:

نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل$n=1$:

$2^3-1=8-1=7$

من مضاعفات العدد 7

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$2^{3n}-1=7k$ ... (الفرض)

حيث $k \in \mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$2^{3(n+1)}-1=7m$

$2^{3n+3}-1=7m$ ... (الطلب)

حيث $m \in \mathbb{Z}$

البرهان : لدينا من الفرض

$2^{3n}-1=7k$

نضرب الطرفين بـ 2^3 :

$$2^{3n+3}-2^3=2^3(7k)$$
$$2^{3n+3}-8=56k$$

نطرح 1 و نضيف 1 :

$$2^{3n+3}-1+1-8=56k$$
$$2^{3n+3}-1-7=56k$$
$$2^{3n+3}-1=56k+7$$
$$2^{3n+3}-1=7\underbrace{(8k+1)}_{m}$$
$$2^{3n+3}-1=7m$$

و هو المطلوب .فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall n \geq 1$

❸ أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: " n^3+2n مضاعف للعدد 3 "

الحل:

نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n=1$:

$$1^3+2(1)=3$$

مضاعف للعدد 3

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$n^3+2n=3k \ldots (\text{الفرض})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$(n+1)^3+2(n+1)=3m \ldots (\text{الطلب})$$

حيث $m \in \mathbb{Z}$

البرهان :

$$l_1=(n+1)^3+2(n+1)$$

$$l_1=n^3+3n^2+3n+1+2n+2$$

$$l_1=(n^3+2n)+3n^2+3n+3$$

ولكن حسب (الفرض) لدينا

$$n^3+2n=3k$$

نعوض:

$$l_1=3k+3n^2+3n+3$$

$$l_1=3(k+n^2+n+1)$$

$$l_1=3m$$

وهو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall n \geq 1$

النمط الثاني من التمارين (المجاميع) :

1 $E(n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

نثبت صحة الخاصة من أجل $n=1$:

$$l_1=1 \quad , \quad l_2=\frac{1(1+1)}{2}=1 \quad \Rightarrow l_1=l_2$$

فالخاصة محققة من أجل $n=1$

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$: \quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \ldots (\text{الفرض})$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \ldots (\text{الطلب})$$

البرهان : "دائماً في المجاميع ننطلق من (الفرض) ثم نضيف للطرفين الحد الناقص للوصول للطلب , ثم نصلح الطرف الثاني"

لدينا من (الفرض) :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

نضيف للطرفين $(n+1)$:

$$1+2+3+\cdots+n+\mathbf{(n+1)}=\frac{n(n+1)}{2}+\mathbf{(n+1)}$$

نوحد المقامات :

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

و هو المطلوب.

2

$$E(n): \quad 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نثبت صحة الخاصة E(n) من أجل n=1 :

$$l_1=1^3=1 \qquad l_2=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1 \quad \Rightarrow l_1=l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$: أي :

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \ldots (\text{الفرض})$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad \ldots . (\text{الطلب})$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$: \quad 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نضيف للطرفين $(n+1)^3$:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+\mathbf{(n+1)^3}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\mathbf{(n+1)^3}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(\boldsymbol{n+1})^3=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(\boldsymbol{n+1})^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

و هو المطلوب .

النمط الثالث من التمارين (المتراجحات)

1 $E(n):(1+x)^n\geq 1+nx$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left.\begin{matrix} l_1=1+x \\ l_2=2+x \end{matrix}\right\} l_1\geq l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$(1+x)^n\geq 1+nx\ ...$ (الفرض)

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x$$

أو : $(1+x)^n\geq 1+nx+x$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$(1+x)^n\geq 1+nx$$

نضرب الطرفين ب $(1+x)$

$$(1+x)^{n+1}\geq(1+nx)(1+x)=1+x+nx+nx^2$$

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+x(n+1)+nx^2\geq 1+x(n+1)$$

حيث nx^2 يمكن إهمالها لنحصل على مقدار أصغر

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+nx+x$$

و هو المطلوب .

2 $E(n):n!\geq 2^{n-1}$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left.\begin{matrix} l_1=1!=1 \\ l_2=2^{1-1}=1 \end{matrix}\right\} l_1\geq l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$n!\geq 2^{n-1}\ ...$ (الفرض)

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$(n+1)!\geq 2^n$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$n!\geq 2^{n-1}$$

نضرب الطرفين ب $(n+1)$

$$(n+1)n!\geq(n+1)2^{n-1}$$

$$(n+1)!\geq(n+1)2^n.2^{-1}$$

$$(n+1)!\geq 2^n\frac{(n+1)}{2}\geq 2^n$$

حيث $\frac{(n+1)}{2}$ مهملة فنحصل على مقدار أصغر

$$(n+1)!\geq 2^n$$

و هو المطلوب

النمط الرابع من التمارين $(u_{n+1}=f(u_n))$

الحالة الأولى: $u_{n+1}=f(u_n)$

و u_n ذكرت مرة واحدة فقط

عندها ننطلق من (الفرض) ونطبق عمليات جبرية (ضرب , جمع , طرح) للوصول لشكل f

1 لتكن $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ و $u_0=1$

1) أثبت أن $0\leq u_n\leq 2$ أياً كان $n\geq 0$

نعرف القضية

$E(n):"\ 0\leq u_n\leq 2\ "$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0\leq u_0=1\ \leq 2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$0\leq u_n\leq 2\ ...$ (الفرض)

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$0\leq u_{n+1}\leq 2\ ....$ (الطلب)

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$0\leq u_n\leq 2$$

نضيف للطرفين 2

$$2\leq 2+u_n\leq 4$$

نجذر

$$0\leq\sqrt{2}\leq\sqrt{2+u_n}\leq 2$$

$$0 \le \sqrt{2+u_n} \le 2$$

$$0 \le u_{n+1} \le 2$$

وهو المطلوب

2) أثبت أن المتتالية السابقة $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة

نعرف القضية

$$E(n): "\ u_n \le u_{n+1}\ "$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 = \sqrt{2+1} &= \sqrt{3} \end{aligned}\right\} u_0 \le u_1$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n \le u_{n+1} \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$u_{n+1} \le u_{n+2}$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$u_n \le u_{n+1}$$

نضيف للطرفين 2

$$2+u_n \le 2+u_{n+1}$$

نجذر

$$\sqrt{2+u_n} \le \sqrt{2+u_{n+1}}$$

$$u_{n+1} \le u_{n+2}$$

وهو المطلوب

الحالة الثانية: $u_{n+1} = f(u_n)$ و u_n **ذكرت أكثر من مرة** عندها

① نعرف التابع $f(x)$

② نحسب $f'(x)$

③ نثبت أن f متزايد أي $f'(x) \ge 0$

④ نصور به أطراف المتراجحة

تمرين :

$(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \ge 0$

1) أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \le 1$ أياً كان العدد n .

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً .

الحل:

في الطلب الأول تم تعريف التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ وهو مستخلص من شكل المتتالية في نص التمرين (قد لا يأتي التابع في نص التمرين ويكون من المفروض أن تصطنعه أنت ...)

إن f اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ومشتقه $f'(x) = \frac{14}{(2x+6)^2}$ مهما تكن $x \ge 0$ وبالتالي التابع f تابع متزايد

الآن لنفرض الخاصة :

$$E(n): "\ \frac{1}{2} < u_n \le 1"$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\frac{1}{2} < u_0 = 1 \le 1$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$\frac{1}{2} < u_n \le 1 \dots (\text{الفرض})$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \le 1$$

البرهان :

نلاحظ أننا لا نستطيع الانطلاق من الفرض والحصول على الهدف بعمليات جبرية , لذلك سيكون من المفيد الاستفادة من التابع f المتزايد :

لدينا من الفرض

$$\frac{1}{2} < u_n \le 1$$

و f متزايد إذاً :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \le f(1)$$

$$\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)+2}{2\left(\frac{1}{2}\right)+6} < \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \le \frac{3(1)+2}{2(1)+6}$$

$$\frac{7}{14} < u_{n+1} \le \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \le \frac{5}{8} \le 1$$

وهو المطلوب .

النمط الأول من أسئلة التقارب : (دراسة تقارب متتالية معطاة بحد عام $(u_n = f(n))$

فإنه يكفي أن نوجد النهاية عندما $n \to +\infty$ كما كنا نفعل في التوابع (وكل ما كنت تفعله في التوابع مجازٌ من إحاطة و مقارنة و طرق لإزالة عدم التعيين....)

14) سنواجه حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$:

$$u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}$$

$$u_n = \sqrt{n^2+n} - \left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\left[\sqrt{n^2+n} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\left[\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{n^2+n-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)} = 0$$

فهي متتالية متقاربة من الصفر .

15) اعلم أولاً أن $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$, عندها ستلاحظ اننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

$$u_n = \frac{n!-2}{n!} = \frac{n!}{n!} - \frac{2}{n!} = 1 - \frac{2}{n!} \quad then \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 - 0 = 1$$

فمتقاربة من الصفر

يترك الباقي كتمارين للتدرب عليها ☺

النمط الثاني من أسئلة التقارب : (دراسة تقارب متتالية هندسية)

قانون هام جداً (كل دورة يرد سؤال عليه)

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1<q<1 \\ +\infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ \text{ليس لها نهاية} & q \le -1 \end{cases}$$

تمارين :

1) احسب نهاية كل من المتتاليات التالية:

$$x_n = \frac{4^n}{3^n} \quad , \quad y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n} \quad , \quad t_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

سنحاول رد كل منها إلى الشكل q^n و الاستعانة بالفقرة السابقة :

$$x_n = \frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad then$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad because\ q^n\ \&\ q = \frac{4}{3} > 1$$

$$y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n} = \left(\frac{10}{10.1}\right)^n \quad then$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0 \quad because\ \ q^n\ \&\ q = \frac{10}{10.1} < 1$$

$$t_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3\times 3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad then$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{1}{3}(0) = 0 \ \ because\ q^n \& q = \frac{2}{3} < 1$$

2) ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالشكل : $u_n = \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

نخرج صاحب الأساس الأكبر عاملاً مشتركاً من البسط و من المقام (أي نخرج 3^n عاملاً مشتركاً) :

$$u_n = \frac{3^n\left[1-\frac{2^n}{3^n}\right]}{3^n\left[1+\frac{2^n}{3^n}\right]} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

حيث أن $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

(لأن الأساس $q = \frac{2}{3} < 1$)

3) ادرس تقارب المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالشكل $v_n = \frac{10^n-1}{10^n+1}$

تُحل بأسلوب مماثل للتمرين السابق (أخرج 10^n عامل مشترك) يترك للطالب

النمط الثالث من أسئلة التقارب : (حصر المتتالية ضمن مجال)

1) حصر المتتالية ضمن مجال من الشكل $]a,b[$:

-نوجد نصف قطر المجال $r = \frac{b-a}{2}$

-نوجد مركز المجال $l = \frac{b+a}{2}$ (أو يُحسب المركز بطريقة أخرى حيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$)

-نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < r$$

ثم نوجد مقامات أو نصلح حتى نصل إلى الشكل $n > A$ فنختار $n_0 \ge A$ يتم المطلوب

(بدها مثال مو !!)

مثال: أوجد عدداً طبيعياً n_0 بحيث يكون $u_n \in]1.9, 2, 1[$ عندما $n > n_0$ حيث :

$$u_n = \frac{2n-1}{n+3}$$

الحل :

نلاحظ أن الهدف هنا أن نحصر حدود المتتالية في مجال من الشكل $]a,b[$ حيث $a = 1.9\ ,b = 2.1$

لنتبع الخطوات المذكورة قبل قليل :

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = \frac{0.2}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$l = \frac{b+a}{2} = \frac{2.1+1.9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < r$$
$$\left|\frac{2n-1}{n+3} - 2\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{-7}{n+3}\right| < \frac{1}{10}$$

و بسبب القيمة المطلقة نكتب :

$$\frac{7}{n+3} < \frac{1}{10}$$

نقلب الطرفين :

$$\frac{n+3}{7} > 10$$
$$n + 3 > 70$$
$$n > 67$$

و بالتالي نأخذ $n_0 \geq 67$ فيتم المطلوب.

2) حصر المتتالية في مجال من النمط $]a,+\infty[$:

إن قولنا أن $u_n \in]a,+\infty[$ فهذا يعني أن u_n هي عدد أكبر تماماً من a لذلك ننطلق من المتراجحة:

$$u_n > a$$

و نعزل n لنصل لمتراجحة من الشكل $n \geq n_0$

مثال : **لتكن المتتالية $u_n = n\sqrt{n}$, عين عدداً طبيعياً n_0 بحيث تنتمي حدود المتتالية إلى المجال $]10^3,+\infty[$ بدءاً من n_0**

الحل :

$u_n > 10^3$

$n\sqrt{n} > 10^3$

$n^3 > 10^6$ نربع

$n > 100$ نجذر من المرتبة 3

و بالتالي من أجل $n \geq 100$ فإن $u_n \in]10^3,+\infty[$

النمط الرابع من أسئلة التقارب : (دراسة تقارب متتاليات معرفة بالتدريج $u_{n+1} = f(u_n)$)

- كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى تكون متقاربة

-كل متتالية متناقصة و محدودة من الأدنى تكون متقاربة

و لكن كيف نستفيد من هذه المبرهنة ؟!

هذه هي المبرهنة التي سنستخدمها لدراسة المتتاليات المعرفة تدريجياً بالشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

1- نثبت أن المتتالية متزايدة (أو متناقصة) و ذلك وفق ما تعلمناه في الوحدة الأولى

2- نثبت أن المتتالية محدودة من الأعلى (أو من الأدنى) " غالباً بالتدريج – أو طلبات متدرجة"

3- نستفيد من المبرهنة السابقة

أخيراً : بعد إثبات تقارب المتتالية $u_{n+1} = f(u_n)$ يُمكن إيجاد نهاية هذه المتتالية من حل المعادلة $f(x) = x$

1- نعرف التابع f باستبدال u_n بـ x

2- نحل المعادلة $f(x) = x$

3- نقبل الحل المناسب (المحقق لصفة الاطراد أو المحدودية)

و توضح الأمثلة التالية كل ما سبق ^_^

مثال: لنتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بشرط البدء $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

1- أثبت أنها متزايدة

2- أثبت أن $u_n \leq 2$

3- استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها

الحل :

1- وظيفة

2- وظيفة

3- بما أنها متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

و لحساب نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$ حيث $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$\sqrt{1+x} = x$$
$$1 + x = x^2$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad ,$$
$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

و لكن كون حدود المتتالية موجبة فإننا نقبل الحل الموجب إذن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

مسائل :

المسألة الأولى : **المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالشكل :**

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \quad , u_0 = \frac{3}{2}$$

1- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

أياً يكن $n \in N$

2- A- أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$

B-استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

3- أهي متقاربة

الحل :

1- لنفرض القضية $E(n): \ll 1 \leq u_n \leq 2 \gg$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$1 \leq u_0 \leq 2$$

$$1 \le \frac{3}{2} \le 2$$

محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$1 \le u_n \le 2 \ldots \text{(الفرض)}$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$1 \le u_{n+1} \le 2 \ldots . \text{(الطلب)}$$

البرهان : لنعرف التابع f على المجال $[1,2]$ بالشكل

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

فنلاحظ أن $f'(x) = 2x - 2 \ge 0$ لكل $x \in [1,2]$

فالتابع f متزايد على المجال $[1,2]$:

لدينا من $(*)$:

$$1 \le u_n \le 2$$

و بما أن f متزايد فيمكن أن نصور أطراف المتراجحة وفقه :

$$f(1) \le f(u_n) \le f(2)$$

$$1 \le u_{n+1} \le 2$$

و هو المطلوب . فالقضية صحيحة مهما تكن $n \in N$

-2 لدينا :

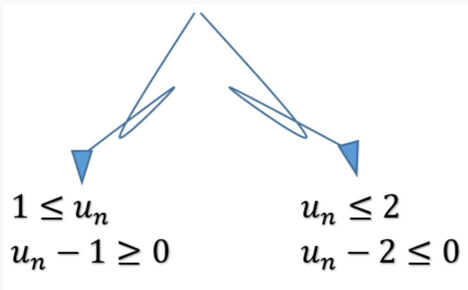
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$$
$$= u_n^2 - 3u_n + 2$$

بالتحليل المباشر :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

و لاستنتاج أنها متناقصة نلاحظ من الطلب السابق :

$$1 \le u_n \le 2$$



و بالتالي $u_n - 2$ سالب و $u_n - 1$ موجب فجداؤهما سالب :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1) < 0$$

و هذا يعني أن المتتالية (u_n) متناقصة

-3 و لما كانت u_n محدودة من الأدنى بالعدد 1 فنستنتج أنها متقاربة لأنها متناقصة و محدودة من الأدنى .

المسألة الثانية : ليكن عند كل عدد طبيعي n

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

-1 أوجد عددين حقيقين a, b يحققان عند كل عدد طبيعي n أن :

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

-2 ليكن في حالة عدد طبيعي n :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

عبر عن s_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\ge0}$

الحل :

-1 لدينا :

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2b+1}$$
$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a(2n+1) + b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2a+2b)n + a - b}{(2n-1)(2n+1)}$$

نحذف المقامات و نطابق البسوط فنجد:

$$2a + 2b = 0$$
$$a - b = 1$$

بالحل المشترك نجد :

$$a = \frac{1}{2} \quad , \qquad b = -\frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

-2 الآن :

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$s_n = \frac{1}{2}\left[-1 - \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}(-1+0) = -\frac{1}{2}$$

المسألة الثالثة : المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

-1 أثبت أن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ثم استنتج أنها متقاربة نحو الصفر

-2 المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ معرفة عند كل $n \ge 1$ وفق :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

A- استفد من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n

B- استنتج نهاية v_n

الحل :

1- بضرب البسط و المقام بالمرافق :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

فهي متقاربة نحو الصفر

2- لدينا :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$v_n = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

$$v_n = 1 - 1 + \sqrt{n} = \sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

المتتاليات المتجاورة :

نقول عن متتاليتين x_n, y_n إنهما متجاورتين إذا تحقق الشرطان :

1- إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة

2- $\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$

أمثلة :

التمرين الأول : أثبت أن المتتاليتين :

$s_n = \frac{1}{n+1}$, $t_n = \frac{-1}{2n+4}$

متجاورتين

الحل : ندرس اطراد s_n فنعرف التابع :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

فالمتتالية s_n متناقصة

ندرس اطراد t_n فنعرف التابع :

$$f(x) = -\frac{1}{2x+4} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{(2x+4)^2} \geq 0$$

فالمتتالية t_n متزايدة

$$s_n - t_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4} = \frac{3n+5}{(n+1)(2n+4)}$$

$$= \frac{3n+5}{2n^2+6n+4}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(s_n - t_n) = 0$$

فالمتتاليتان (t_n) و (s_n) متجاورتان

التمرين الثاني : أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتين

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

الحل : ندرس اطراد x_n :

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

نشكل الفرق :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{4n+3}{(2n+2)(2n+1)} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(4n+3)(n+1) - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{4n^2+7n+3-4n^2-6n-2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

إذن x_n متزايدة

لندرس اطراد y_n :

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n-2(2n+1)}{2n(2n+1)(n+1)} = \frac{-3n-2}{2n(2n+1)(n+1)} < 0$$

إذن y_n متناقصة

أخيراً : $y_n = x_n + \frac{1}{n}$

$$y_n - x_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$$

فالمتتاليتان متجاورتان.

اسئلة دورات :

السؤال الاول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية فيها $q = 2$ و $u_0 = 1$

احسب u_3 ثم استنتج قيمة المجموع

$$S = u_3 + u_4 + \cdots + u_7$$

السؤال الثاني : لتكن المتتالية المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \quad , \quad u_0 = 1$$

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق :

$$v_n = u_n + 3$$

1- أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية
2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n
3- ليكن في حالة عدد طبيعي n :
$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
عبر عن s_n بدلالة n ثم استنتج نهاية $(s_n)_{n\geq0}$

السؤال الثالث : بفرض أن
$u_n = n^2 - \ln(n)$ أثبت أن u_n متزايدة

السؤال الرابع : بفرض $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1- أثبت أن u_n متزايدة
2- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$
3- استنتج أن u_n متقاربة و احسب نهايتها .

السؤال الخامس : بفرض

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + .. + \frac{1}{3^n}$$

1- أثبت أن s_n متزايدة
2- أثبت أن $S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$
3- استنتج عنصراً راجحاً على S_n و هل هي متقاربة

السؤال السادس : بفرض لدينا :

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^n}$$

1- أثبت أن $n \leq 2^n$
2- استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح عليها
3- أثبت أن المتتالية متقاربة