

احسب النهايات الآتية :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2} -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin x}{\sqrt{x}} -2$$

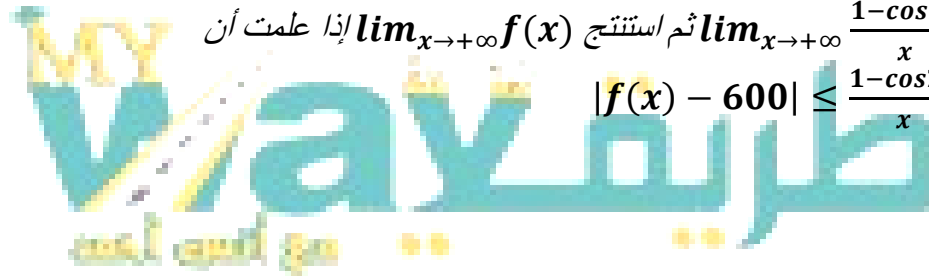
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 x}{x+1} -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - |\cos x|}{x^2 + 7} -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1} -5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ ثم استنتج } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} -6$$

$$|f(x) - 600| \leq \frac{1 - \cos 2x}{x}$$



الحلول :

التمرين الأول :

نلاحظ أن مضمون $\sin$ يسعى الى $+\infty$ لذلك نطبق نظرية الإحاطة

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نقسم على x^2 :

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

فحسب نهايات الأطراف :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

يجب الانتباه الى النقاط التالية:

- 1- عند ضرب طرفي المتراجحة بمقدار سالب تقلب إشارة المتراجحة .
- 2- عند القسمة لطرفي المتراجحة على عدد سالب تقلب إشارة المتراجحة.
- 3- عند إضافة عدد سالب او موجب لا تتأثر المتراجحة.
- 4- عند الضرب او القسمة بمجهول ننتبه اذا كان موجباً او سالباً أو ((هيك وهيك))

التمرين الثاني :

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نضرب ب 2

$$-2 \leq 2 \sin x \leq 2$$

نقسم على : $\sqrt{x} > 0$

$$\frac{-2}{\sqrt{x}} \leq \frac{2 \sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

ومنه حسب نظرية الإحاطة فإن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

التمرين الثالث :

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \quad \text{لدينا}$$

نقسم على $x + 1 > 0$ (لان $x \rightarrow \infty$ وبالتالي $x + 1 \rightarrow \infty$ إذن $x + 1 > 0$)

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{x + 1} \leq \frac{1}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + 1} = 0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 x}{x + 1} = 0$$

التمرين الرابع :

$$0 \leq |\cos x| \leq 1 \quad \text{لدينا}$$

نضرب الطرفين ب (-1)

$$0 \geq -|\cos x| \geq -1$$

نضيف x :

$$x \geq x - |\cos x| \geq x - 1$$

نقسم على $x^2 + 7 > 0$

$$\frac{x}{x^2 + 7} \geq \frac{x - |\cos x|}{x^2 + 7} \geq \frac{x - 1}{x^2 + 7}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 7} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 + 7} = 0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - |\cos x|}{x^2 + 7} = 0$$

التمرين الخامس :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2x + \sin x}{x - 1}$$

لدينا :

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نضيف $2x$:

$$2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$$

نقسم على $x - 1 < 0$ لأن $x \rightarrow -\infty$

$$\frac{2x - 1}{x - 1} \leq \frac{2x + \sin x}{x - 1} \leq \frac{2x + 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x - 1} = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2$$

فحسب الإحاطة :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

السؤال السادس :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x}$$

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1$$

نضرب -1

$$1 \geq -\cos 2x \geq -1$$

نضيف 1 :

$$2 \geq 1 - \cos 2x \geq 0$$

نقسم على x :

$$\frac{2}{x} \geq \frac{1 - \cos 2x}{x} \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} = 0$$

فحسب الإحاطة

و حسب الإحاطة الثالثة يكون :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 600$$