تمارين

1- لدينا:

$$z = -3 + \sqrt{3}i$$

$$x = -3\,, y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos\theta = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z = 3 - 3i$$

$$r = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$z = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = \sqrt{2}i - \sqrt{6}$$

$$r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}-3i}{3+3\sqrt{3}i} = \frac{(\sqrt{3}-3i)(3-3\sqrt{3}i)}{9+27}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-9i-9i-9\sqrt{3}}{36} = \frac{-6\sqrt{3}-18i}{36}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\frac{3}{36}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\,, \qquad sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2- لدينا:

$$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right] = -1 + i$$

$$z = e^{i\frac{9\pi}{4}} = \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z =$$

$$z=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right]=-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمارين

التمرين الأول

$$z=\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$$

$$z=\overline{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\imath\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)}$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$$

$$z=\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{10}$$

$$=2^{10}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$$

التمرين الثاني

1- لدينا:

$$\boldsymbol{Z_1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}}$$
$$x=\frac{\sqrt{6}}{2}\quad\&\quad y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$r=\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{2}$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta&=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow\boldsymbol{Z_1}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{Z_2=1-i}$$
$$x=1\quad\&\quad y=-1$$
$$r=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow\boldsymbol{Z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$\frac{\boldsymbol{Z_1}}{\boldsymbol{Z_2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\frac{Z_1}{Z_2}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

2- لدينا:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}i}{2}}{1-i}$$

نضرب بالمرافق

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}{2}$$
$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i}{2}$$
$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

3- لدينا:

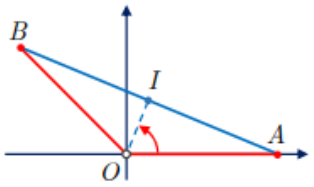
$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)_{\text{مثلثي}}=\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)_{\text{جبري}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+isin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

بالمطابقة نجد:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

التمرين الثالث



1- العدد $a = 2$ عدد طويلته 2 , إذن $OA = 2$ و أن العدد $b = 2e^{\frac{3i\pi}{4}}$ أيضاً طويلته2

إذن $OB = 2$ فالمثلث متساوي الساقين

و لما كانت I منتصف $[AB]$ فإن OI متوسط في المثلث OAB , و لكن نعلم أن المتوسط في المثلث متساوي الساقين هو منصفٌ أيضاً ,,,و عليه يكون $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$

2- لحساب العدد العقدي z_I بالشكل الجبري :

$$z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}\left(2 + 2e^{\frac{i3\pi}{4}}\right)$$
$$= 1 + e^{\frac{i3\pi}{4}}$$

لكن هذا ليس شكلاً جبرياً , يجب أن نعود من الشكل $e^{\frac{3i\pi}{4}}$ إلى الشكل الجبري :

$$e^{\frac{i3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{4\pi - \pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi - \pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

فالزاوية هنا زاوية موجودة في الربع الثاني (راجع الدائرة المثلثية و ارسمها هنا)

$$\Rightarrow e^{\frac{i3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

نعوض في z_I :

$$z_I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \boxed{z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

أما لكتابته بالشكل الأسي : فلدينا أولاً زاويته من الطلب الأول $\frac{3\pi}{8}$ و لنحسب الطويلة :

$$|z_I| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

فالشكل الأسي له هو :

$$z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

لاستنتاج النسب المثلثية للزاوية $\frac{3\pi}{8}$ نضع :

$$z_{\text{جبري}} = z_{\text{أسي}}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{8}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

نقسم على أمثال $e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$$e^{\frac{i3\pi}{8}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{i\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

نرد الأسي إلى مثلثي :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$
$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

بالمقارنة نجد أن :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

التمرين الرابع

$$z_1.z_2 = e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + isin(a+b)$$

ولكن بالشكل الجبري:

$$z_1.z_2 = [\cos(a) + isin(a)][\cos(b) + isin(b)]$$
$$= \cos(a)\cos(b) + icos(a)\sin(b)$$
$$+isin(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]$$
$$+i[cos(a)\sin(b) + sin(a)\cos(b)]$$

بالمقارنة بين الشكل الجبري والمثلثي:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = cos(a)\sin(b) + sin(a)\cos(b)$$

تمارين

التمرين الأول

$$z = \frac{1+\cos(x) - i\sin(x)}{1+\cos(x) + i\sin(x)} = \frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}}$$

$$= \frac{\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}}}{e^{ix}+1} = e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

يكون موجوداً بشرط:

$$1 + e^{ix} \neq 0$$
$$e^{ix} \neq -1$$
$$e^{ix} \neq e^{i\pi+2\pi k}$$
$$x \neq \pi + 2\pi k$$

$$z = \frac{\cos(x) + i\sin(x)}{\cos(x) - i\sin(x)} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{i2x}$$
$$= \cos(2x) + i\sin(2x)$$

يكون موجوداً بشرط:

$$e^{-ix} \neq 0$$
$$e^{-ix} \neq e^{i2\pi k}$$
$$-x \neq 2\pi k$$
$$x \neq -2\pi k$$

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} + e^{\frac{i\pi}{6}}\right)$$
$$= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$$
$$= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

التمرين الثاني

1- لدينا مجموع متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها α وعدد حدودها 5

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0 = 1\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}$$

$$= 1\frac{1-\left(e^{2i\frac{\pi}{5}}\right)^5}{1-e^{2i\frac{\pi}{5}}}$$

$$= \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{2i\frac{\pi}{5}}}$$

لكن $e^{2i\pi} = 1$

$$\Rightarrow 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$$

إذا كان A, B حلول المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ عندئذٍ

$$A + B = \frac{-b}{c} \Leftrightarrow A + B = -1$$

$$A.B = \frac{c}{a} \Leftrightarrow A.B = -1$$

البرهان:

$$A + B = (\alpha + \alpha^4) + (\alpha^2 + \alpha^3)$$

حسب الطلب السابق :

و هو المطلوب $A + B = -1$

$$A.B = (\alpha + \alpha^4)(\alpha^2 + \alpha^3)$$

$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7$$

$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5.\alpha + \alpha^5.\alpha^2$$

$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha + \alpha^2 = -1$$

إذاً A, B جذرا المعادلة $(*)$

-2

$$\alpha^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{10\pi-2\pi}{5}} = e^{i\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)} = e^{-i2\pi 5}$$

$$\Rightarrow A = \alpha + \alpha^4 = e^{\frac{i2\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

-3

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$a = 1\,, b = 1\ , c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-1) = 5$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

بملاحظة أن $A > 0$ و $x_2 > 0$ هما الجذر الموجب للمعادلة $(*)$ نجد أن

$$A = x_2$$

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

التمرين الثالث

$$z = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{2isin(\theta)}{2\cos(\theta)} = itan(\theta)$$

تمارين

التمرين الأول

1- لدينا:

$$|u| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

2- لدينا:

$$\bar{W} = \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}}$$

وبما أن $|u| = 1$ فإن $\bar{u} = \frac{1}{u}$:

$$\bar{W} = \frac{\bar{z} - \frac{1}{u}z}{1 - \frac{1}{u}} = \frac{\bar{z}u - z}{u - 1} = \frac{-(z - u\bar{z})}{-(1-u)} = W$$

حقيقي.

التمرين الثاني

1- لدينا:

$$|W| = \left|\frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}\right| = \frac{\sqrt{\beta^2+3}}{\sqrt{3+\beta^2}} = 1$$

2- لدينا:

$$W = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$$

نضرب بسط ومقام بـ i:

$$= \frac{i\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{1 + i\sqrt{3}} = i$$

ويكون W^{12}:

$$i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$$

حقيقي.

التمرين الثالث

لدينا:

$$(z+z')(\bar{z}+\bar{z'}) + (z-z')(\bar{z}-\bar{z'})$$
$$= z\bar{z} + z\bar{z'} + z'\bar{z} + z'\bar{z'} + z\bar{z} - z\bar{z'} - z'\bar{z} + z'\bar{z'}$$
$$= 2z\bar{z} + 2z'\bar{z'} = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

بنوك الأعداد العقديّة

1) الجواب: $d : \overline{z_1} = 2 - 4i$.

2) الجواب: $\boxed{b : \overline{z_3} = \frac{5}{2}i}$.

3) الجواب: $\boxed{a : 5 + 3i}$:

$$z_1 + z_2 = 2 + 4i + 3 - i = 5 + 3i$$

4) الجواب: $\boxed{a : -\frac{13}{2}i - 2}$:

$$z_3 - z_1 = -\frac{5}{2}i - 2 - 4i$$
$$= \frac{-5i - 8i}{2} - 2 = -\frac{13}{2}i - 2$$

5) الجواب: $\boxed{c : 10 + 10i}$:

$$z_1 . z_2 = (2 + 4i)(3 - i)$$
$$= 6 - 2i + 12i - 4i^2$$
$$= 6 + 10i + 4 = 10 + 10i$$

6) الجواب: $\boxed{b : 0}$:

$$z_3 = 0 - \frac{5}{2}i \implies Re(z_3) = 0$$

7) الجواب: $\boxed{b : -1}$:

$$z_2 = 3 - 1i \implies Im(z_2) = -1$$

8) الجواب: $\boxed{a : -12 + 16i}$:

$$z_1^2 = (2 + 4i)^2 = 4 + 16i - 16$$
$$= -12 + 16i$$

9) الجواب: $\boxed{c : |z_1| = 1}$

$$z_1 = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$
$$z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

بالمطابقة نجد أنّ :

$$|z_1| = r = 1$$

10) الجواب: $\boxed{c : |z_2| = 3}$:

$$z_2 = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$
$$z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

بالمطابقة نجد أنّ :

$$|z_2| = r = 3$$

11) الجواب: $\boxed{a : \overline{z_1} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$:

حسب قاعدة: ((عندما نأخذ مرافق الشكل المثلّثي للعدد العقدي فقط نضع اشارة سالب(-) للزاوية)) .

12) الجواب: $\boxed{c : \overline{z_2} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$.

13) الجواب: $\boxed{c : \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}}$.

14) الجواب: $\boxed{a : \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{3}\right)}$, التفسير:

$$(z_1)^7 = \left(1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^7$$
$$z_1^7 = 1^7\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$$
$$\implies z_1^7 = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$$

15) الجواب:

$$\boxed{d : z_2^3 = 27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$$

16) الجواب: $\boxed{a : 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$:

ضرب الطويلات و جمع الزوايا:

$$z_1 . z_2 = 3 \times 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

17) الجواب: $\boxed{b : \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)}$:

قسمة الطويلات و طرح الزوايا:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$$
$$\implies \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

18) الجواب: $\boxed{c : 3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)}$:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$\implies \frac{z_2}{z_1} = 3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

19) الجواب: $\boxed{b\ :\ \frac{2}{5}+\frac{1}{5}\,i}$:

$$z=\frac{1}{2-i}$$

ما بصير يكون في i بالمقام لذلك , نضرب البسط

و المقام بمرافق المقام:

$$z=\frac{2+i}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i}{4+1}=\frac{2+i}{5}$$

$$\Rightarrow z=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$$

20) الجواب: $\boxed{c:\sqrt{2}i}$:

$$e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow z=(1+i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}i=\sqrt{2}i$$

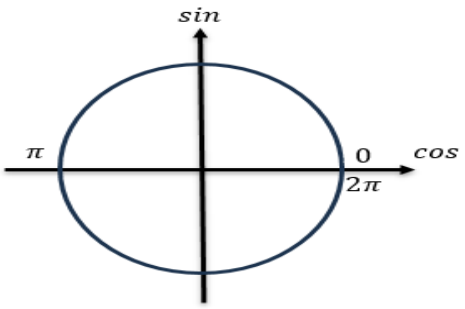
21) الجواب: $\boxed{d\ :\ \text{غير ذلك}}$:

$$z=\sqrt{3}-3+0i$$

$$r=\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2+0^2}=\sqrt{3}-3$$

$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3}=1$$

$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}=\frac{0}{\sqrt{3}-3}=0$$



وبالتالي:

$\theta=0$ أو $\theta=2\pi$

$$\Rightarrow z=(\sqrt{3}-3)(\cos(0)+i\sin(0))$$

22) الجواب: $\boxed{a:\ 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)}$:

$$z=-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z=-2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z=2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

23) الجواب: $\boxed{a:\ \cos(2\pi)+i\sin(2\pi)}$, التفسير:

$$z^8=\left(\frac{3i-1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right)^8$$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

$$z=\frac{(3i-1)(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)}$$

$$z=\frac{3\sqrt{2}i+6\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2+8}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i}{10}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$|z|=r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

و بالتالي فإنّ الشكل المثلّثي لـ z يعطى بالشكل:

$$z=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z^8=1^8\left(\cos\left(\frac{8\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z^8=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$$

24) الجواب: $\boxed{a:\ (\sqrt{2}-1)e^{i\frac{4\pi}{3}}}$, التفسير:

$$z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=-(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\pi}(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$=e^{i\pi+i\frac{\pi}{3}}(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

25) الجواب: $\boxed{a:\ 32e^{-i\frac{4\pi}{3}}}$, التفسير:

$$z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$$

نفرض:

$$w=\frac{\sqrt{3}-i}{i}$$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

$$w=\frac{(\sqrt{3}-i)(-i)}{(i)(-i)}=\frac{-\sqrt{3}i-1}{-i^2}$$

$$=-\sqrt{3}i-1$$

$$\Rightarrow |w|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=-\frac{1}{2}$$

$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow\ \theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow w=2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$$
$$z=w^5=\left(2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^5=2^5.e^{i\frac{20\pi}{3}}=32\,e^{i\frac{20\pi}{3}}$$

الإرجاع الى الرّبع الأوّل:

$$\frac{20\pi}{3}=\frac{24\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=8\pi-\frac{4\pi}{3}=-\frac{4\pi}{3}$$
$$\Rightarrow\ z=32\,e^{-\frac{4\pi}{3}i}$$

26) الجواب: $\boxed{d:\ (a\ ,b)}$, التفسير:

$$z=\left(1+\sqrt{3}i\right)^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

نفرض أنّ:

$$w=1+\sqrt{3}i\Rightarrow x=1\ ,\ \ y=\sqrt{3}$$
$$r=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$
$$\Rightarrow\cos(\theta)=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$
$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و بالتالي فإنّ: $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$w=2\,e^{\frac{\pi}{3}i}$$
$$\Rightarrow w^4=\left(2\,e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^4=2^4\ e^{\frac{4\pi}{3}i}=16\,e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

و بالتالي إمّا:

$$z=16\,e^{\frac{4\pi}{3}i}\ e^{\frac{4\pi}{3}i}=16\,e^{\frac{8\pi}{3}i}$$

أو , بالإرجاع الى الربع الأوّل:

$$\frac{8\pi}{3}=2\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

و بالتالي:

$$z=16\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

27) الجواب: $\boxed{c:\ z=2^{1008}}$, التفسير:

$$(1+i)^{2016}=((1+i)^2)^{1008}=(2i)^{1008}$$
$$=2^{1008}\times\ i^{1008}=2^{1008}\times\ i^4$$
$$=2^{1008}\times 1=2^{1008}$$

28) الجواب: $\boxed{c:\ 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$, التفسير:

$$z=\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.-\ i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نفرض أنّ:

$$w=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نعوّض في z :

$$z=\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\ i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نضرب الطويلات و نجمع الزوايا:

$$z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

29) الجواب: $\boxed{b:\ z=3e^{-i\frac{\pi}{6}}}$, التفسير:

$$\overline{z}=\frac{9}{z}\Rightarrow z.\overline{z}=9\Rightarrow|z|^2=9\Rightarrow|z|=3$$
$$\arg(iz)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\arg(z)=\frac{\pi}{3}-\arg(i)$$
$$\Rightarrow\arg(z)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow z=3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

30) الجواب: $c:\ 1$

31) الجواب: $\boxed{c:\ 2[\cos(-\pi)+isin(-\pi)]}$,

التفسير:

$$w=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^5$$
$$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)^5$$
$$=2\left(e^{-i\frac{\pi}{5}}\right)^5$$
$$=2e^{-i\pi}$$
$$=2(\cos(-\pi)+isin(-\pi))$$

32) الجواب: $\boxed{b:\ -\frac{5\pi}{14}}$, التفسير:

$$z=2\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$$
$$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)\right)$$
$$=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)$$
$$\Rightarrow\overline{z}=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{14}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right)\right)$$

33) الجواب: $\boxed{d:\frac{1}{2}}$, التفسير:

$$z=1+i$$
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+i}$$

نضرب بمرافق المقام و نقسم عليه:

$$\frac{1}{z}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$
$$\Rightarrow Re\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$$

34) الجواب: $\boxed{c\ :\ z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}}$, التفسير:

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$$

نفرض أنّ البسط:

$$u = 1+\sqrt{3}i$$
$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2}\ ,\quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

و نفرض أنّ المقام:

$$v = 1+i \Rightarrow v = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

و بالتالي:

$$z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$$

35) الجواب: $\boxed{c\ :z = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$, التفسير:

$$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

$$z = \alpha + \alpha^4$$

$$\Rightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{5}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$$
$$= e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

$$\frac{8\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \underbrace{2\pi}_{\text{يُهمَل}} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

36) الجواب: $\boxed{a\ :\ |\bar{z}| = 2}$, التفسير:

$$z = \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^4}$$

نفرض أنّ:

$$u = 1+\sqrt{3}i \Rightarrow u = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

و نفرض أنّ:

$$v = \sqrt{2}+\sqrt{2}i \Rightarrow r = \sqrt{2+2} = 2$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow v = 2\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(2\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4} = \frac{2^5\,e^{i\frac{5\pi}{3}}}{2^4\,e^{i\pi}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}-\pi\right)} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow |\bar{z}| = 2$$

37) الجوب:

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

التمرين الأول

1- M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(3,4)$

$$z' = z + z_{\vec{w}}$$
$$z' = 3+5i+3+4i = 6+9i$$

2- M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $2\vec{u} - \vec{v}$

$$z' = z + z_{\vec{w}}$$
$$z' = 3+5i+2-i = 5+4i$$

3- M' صورة M وفق تحاكٍ مركزه $A(2+i)$ و نسبته -3 :

$$z' - w = k(z-w)$$
$$z' - (2+i) = -3(3+5i-2-i)$$
$$z' - (2+i) = -3(2+4i)$$
$$z' - (2+i) = -6-12i$$
$$z' = -6-12i+2+i$$
$$z' = -4-11i$$

4- M' صورة M وفق تناظر محوري محوره Ox

$$z' = \bar{z}$$
$$z' = 3-5i$$

5- M' صورة M وفق دوران مركزه المبدأ و زاويته $\frac{\pi}{6}$

$$z' - w = e^{i\theta}(z-w)$$
$$z' - 0 = e^{\frac{i\pi}{6}}(3+5i-0)$$
$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(3+5i)$$
$$z' = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{2}i-\frac{5}{2}$$
$$z' = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}+\frac{5\sqrt{3}-5}{2}i$$

التمرين الثاني

$$R(G) = H$$

$$z' - w\ ,e^{i\theta}(z-w)$$

$$h = e^{i\theta}(g)$$

$$e^{i\theta} = \frac{h}{g} = \frac{3+\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}$$

$$e^{i\theta} = \frac{\sqrt{12}e^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{12}e^{-\frac{i\pi}{6}}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$(\vec{u},\vec{v}) = \theta$$

$$(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH}) = \frac{\pi}{3}$$

الصيغة العقدية $z' = e^{\frac{i\pi}{3}}z$

ملاحظة:

$$(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH}) = \arg\left(\frac{h-o}{g-o}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{h}{g}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}\right)$$

$$= \arg\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

تمارين صفحة 77:

تمرين الأول

-1

$$\Omega A = |Z_{\Omega A}| = |Z_A - Z_\Omega| = |a-w|$$

$$= |2-2i+1-2i| = |3-4i| = \sqrt{9+16}$$
$$= 5$$

$$\Omega B = |Z_{\Omega B}| = |b-w|$$

$$= |-1+7i+1-2i| = |5i| = 5$$

وبالمثل $\Omega C = 5$ ، $\Omega D = 5$ فإن A, B, C, D

تقع على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها $r = 5$

-2 E منتصف $[AB]$

$$e = \frac{a+b}{2} = \frac{1+5i}{2}$$

$$L_1 = \frac{a-e}{d-e} = \frac{2-2i-\frac{1+5i}{2}}{-4-2i-\frac{1+5i}{2}}$$
$$= \frac{4-4i-1-5i}{-8-4i-1-5i}$$
$$= \frac{3-9i}{-9-9i}$$
$$= \frac{1-3i}{-3-3i} \times \frac{-3+3i}{-3+3i}$$
$$= \frac{-3+3i+9i+9}{9+9}$$
$$= \frac{6}{18} + \frac{12}{18}i$$
$$L_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$L_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ بنفس الأسلوب

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$$

(EA) منتصف DEC

التمرين الثاني

-1

$$a = 2 \quad , \quad b = 1+\sqrt{3}i \quad , \quad c = -1+\sqrt{3}i$$

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}i}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i2\pi}{3}}$$

إما:

$$\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

ABC منفرج الزاوية B

أو:

$$\left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1$$

$$\Rightarrow AB = CB$$

ABC متساوي الساقين رأسه $B \Rightarrow$

-2

$$a' = \bar{a} = 2$$
$$b' = \bar{b} = 1 - \sqrt{3}i$$
$$c' = \bar{c} = -1 - \sqrt{3}i$$

التمرين الثالث

-1

$$a = 8 \ , b = -4 + 4i \ , c = -4i$$
$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8+4i}$$
$$= \frac{-4+8i}{8+4i} = \frac{-1+2i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$$
$$\frac{-2+i+4i+2}{4+1} = i$$
$$\frac{b-c}{a-c} = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

إما:

$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \frac{\pi}{2}$$

أو:

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = 1$$

ABC قائم في C ومتساوي الساقين

-2 D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

$$d' - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(a \,.\, 6)$$
$$d' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)(8)$$
$$d' = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$$
$$c - a = e - b$$
$$e = c - a + b$$
$$= -4i - 8 - 4 + 4i$$
$$e = -12$$

التمرين الرابع

-1

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}$$
$$= \frac{-12+4i}{-24+8i}$$
$$= \frac{(-12+4i)}{2(-12+4i)} = \frac{1}{2} \in R$$

$C \, , B, A$ على استقامة واحدة

-2

$$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$$
$$d - 0 = e^{i\theta}(a - 0)$$
$$d = e^{i\theta} \, a$$
$$e^{i\theta} = \frac{d}{a} = \frac{1+6i}{6-i}$$
$$e^{i\theta} = i$$
$$e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

-3

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DN}$$
$$a = n - d$$
$$n = a + d$$
$$n = 7 + 5i$$

التمرين الخامس

$$z = -1 + i$$

إما:

$$z = \sqrt{2}e^{i3\frac{\pi}{4}}$$
$$z^8 = \sqrt{2}^8 \, e^{i3\frac{\pi}{4}\cdot 8}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}\cdot 8} e^{i6\pi}$$
$$= 2^4 e^{i0}$$
$$= 16 \in R$$

أو:

$$z^8 = (-1+i)^8$$
$$= [(-1+i)^2]^4$$
$$= [1 - 2i - 1]^4$$
$$= [-2i]^4$$
$$= 16 \in R$$

التمرين السادس

$$a = -1\,, \qquad b = 2 + i\sqrt{3}$$

$$c = \bar{b} = 2 - i\sqrt{3}\,, \qquad d = 3$$

-1

$$AB = |Z_{AB}| = |b - a| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |Z_{AC}| = |c - a| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |Z_{BC}| = |c - b| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

-2

$$\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \arg\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)$$
$$= \arg\left[\frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{1+3}\right]$$
$$= \arg\left[\frac{-3+3i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3}{4}\right]$$
$$= \arg(i)$$
$$= \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

قائم في C

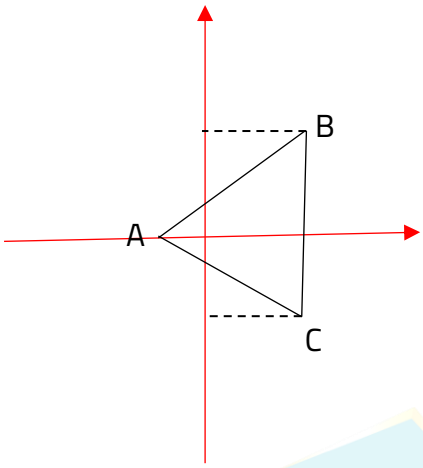
$$D:\ (A,-1)\ ,(B,2)\ ,(C,2)$$
$$\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$
$$-(a-d) + 2(b-d) + 2(c-d) = 0$$
$$-a + d + 2b - 2d + 2c - 2d = 0$$
$$-3d - a + 2b + 2c = 0$$
$$-3(3) - (-1) + 2(2 + i\sqrt{3}) + 2(2 - i\sqrt{3}) = 0$$
$$-9 + 1 + 4 + 2i\sqrt{3} + 4 - 2i\sqrt{3} = 0$$

محققة

مسائل صفحة 79:

المسألة (1)

-1 لدينا:



$$b' - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - b)$$
$$b' = i(c - b) + b$$
$$= ic - ib + b$$

-2 A' صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$a' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a)$$
$$a' = i(c - a) + a$$

-3 لدينا:

$$m = \frac{a' + b'}{2}$$
$$= \frac{i(c-a) + a + i(c-b) + b}{2}$$
$$= \frac{ic - ia + a + ic - ib + b}{2}$$
$$= \frac{a+b}{2} + i\frac{2c - b - a}{2}$$

المسألة (2)

-1 نعرف معلماً:

$$(A; \vec{u}, \vec{v})$$

C' صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$:

$$c' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$
$$c' = -ic$$

B' صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$b' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$
$$b' = ib$$

N منتصف القطعة $[CB]$:

$$n = \frac{c+b}{2} = \frac{1}{2}(c+b)$$

2- لدينا:

$$\frac{c'-b}{c-b'} = \frac{-ic-b}{c-ib} = \frac{c-bi}{i(c-ib)}$$
$$= \frac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

3- لدينا:

$$\arg\left(\frac{c'-b}{c-b'}\right) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\left|\frac{c'-b}{c-b'}\right| = 1$$

فيكون:

$$C'B \perp CB'$$
$$C'B = CB'$$

4- لدينا:

$$\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC'} + 2\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$c - a + 3(c'-a) + 2(b'-a) + (b-a) = 0$$

ولكن $a = 0$:

$$c + 3c' + 2b' + b = 0$$
$$c - 3ic + 2bi + b = 0$$

نقسم على b:

$$\frac{c}{b} - \frac{3ic}{b} + 2i + 1 = 0$$
$$\frac{c}{b} - 3i\frac{c}{b} = -1 - 2i$$
$$\frac{c}{b}(1-3i) = -1 - 2i$$
$$\frac{c}{b} = \frac{-1-2i}{1-3i} = \frac{(-1-2i)(1+3i)}{1+9}$$
$$= \frac{-1-3i-2i+6}{10}$$
$$= \frac{5}{10} - \frac{5i}{10} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

أي:

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

المسألة (3)

1- لدينا:

A صورة النقطة B وفق دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$:

$$a - o = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-o)$$
$$a = -ib$$
$$\Rightarrow b = ia$$

D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$d - o = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-o)$$
$$d = ic$$

E صورة النقطة D وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$e - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(d-a)$$
$$e = i(d-a) + a$$
$$= i(ic-a) + a$$

$$= -c - ia + a$$

$$= a - c - ia$$

ولدينا:

$$Z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{a+ia}{2} = \frac{1}{2}(a+ia)$$

$$Z_J = \frac{d+c}{2} = \frac{ic+c}{2} = \frac{1}{2}(c+ic)$$

$$z_K = \frac{d+e}{2} = \frac{ic+a-c-ia}{2}$$

$$= \frac{a-c+i(c-a)}{2} = \frac{a-c}{2} + i\frac{c-a}{2}$$

2- لدينا:

$$\ell_1 = z_K - z_I = \frac{a-c}{2} + i\frac{c-a}{2} - \frac{a}{2} - i\frac{a}{2}$$

$$= -\frac{c}{2} + i\frac{c-2a}{2}$$

ولدينا:

$$\ell_2 = i(z_J - a) = i\left(\frac{c}{2} + i\frac{c}{2} - a\right)$$

$$= i\left(\frac{c-2a}{2} + i\frac{c}{2}\right)$$

$$= i\frac{c-2a}{2} - \frac{c}{2} = \ell_1$$

بما أن:

$$z_K - z_I = i(z_J - a)$$

$$\frac{z_K - z_I}{z_J - a} = \frac{IK}{AJ} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left|\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

فيكون:

$$AJ = IK \quad \text{و} \quad (AJ) \perp (IK)$$

مثال صفحة 80:

1- لدينا:

$$Z_O = 0\ , \qquad Z_A = 3$$

$$Z_B = 4\ , \qquad Z_D = 7 + i$$

$$Z_E = 6 + 3i$$

$$Z_{\overrightarrow{OE}} = Z_E - Z_O = 6 + 3i$$

$$Z_{\overrightarrow{AE}} = Z_E - Z_A = 6 + 3i - 3 = 3 + 3i$$

$$Z_{\overrightarrow{BD}} = Z_D - Z_B = 7 + i - 4 = 3 + i$$

2- لدينا:

$$Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}} = (6+3i)(3+3i)(3+i)$$

$$= (18 + 18i + 9i - 9)(3+i)$$

$$= (9 + 27i)(3+i)$$

$$= 27 + 9i + 81i - 27 = 90i = 90e^{i\frac{\pi}{2}}$$

3- لدينا:

$$\arg\left(Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}}\right) = re^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$

وأيضاً:

$$\arg\left(Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}}\right) = 90e^{i\frac{\pi}{2}}$$

فتكون:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

تمارين صفحة 80 (في الأسفل):

$$\boldsymbol{z + 2\bar{z} = 3 + 3i}$$

بفرض $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$:

$$x + iy + 2x - 2iy = 3 + 3i$$

$$3x - iy = 3 + 3i$$

بالمقارنة نجد:

$$3x = 3 \Rightarrow x = 3$$

$$-y = 3 \Rightarrow y = -3$$

$$\Rightarrow z = 3 - 3i$$

$$\boldsymbol{-\bar{z} + 3i = 2i\bar{z} + 1}$$

نأخذ مرافق الطرفين:

$$-z - 3i = -2iz + 1$$

$$-z + 2iz = 1 + 3i$$

$$z(-1 + 2i) = 1 + 3i$$

$$z = \frac{1 + 3i}{-1 + 2i} = \frac{(1 + 3)(-1 - 2i)}{1 + 4}$$

$$= \frac{-1 - 2i - 3 - 6i}{5} = -\frac{4}{5} - i\frac{8}{5}$$

$$\boldsymbol{-2z + 3 = iz}$$

$$3 = iz + 2z$$

$$3 = z(i + 2)$$

$$z = \frac{3}{i + 2} = -i + 2$$

تمارين صفحة 82:

التمرين الأول

$$\boldsymbol{z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0}$$

$$\Delta = (1 + 4i)^2 - 4(1)(-5 - i)$$

$$= 1 + 8i - 16 + 20 + 4i = 5 + 12i$$

نوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي الناتج بفرض:

$$w^2 = 5 + 12i$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$x^2 - y^2 = 5$$

$$2xy = 12$$

بجمع المعادلة الأولى والثانية:

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

بطرح المعادلة الأولى والثانية نجد:

$$2y^2 = 8$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

من المعادلة الثالثة نجد أن $2xy > 0$ فالحلو من إشارات متماثلة:

$$w_1 = 3 + 2i$$

$$w_2 = -3 - 2i$$

وتكون حلول المعادلة:

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-1 - 4i + 3 + 2i}{2}$$

$$= \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$z_2 = \frac{-b - w_1}{2a} = \frac{-1 - 4i - 3 - 2i}{2}$$

$$= -2 - 3i$$

$$\boldsymbol{z^2 = -3 + 4i}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$x^2 - y^2 = -3$$

$$2xy = 4$$

بجمع المعادلة الأولى والثانية:

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

بطرح المعادلة الأولى والثانية:

$$2y^2 = 8$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

من المعادلة الثالثة نجد أن $2xy > 0$ فالحلول من إشارات متماثلة:

$$z_1 = 1 + 2i \ , z_2 = -1 - 2i$$

$$z^2 + 2(1+i)z + i + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Delta = 4(1+i)^2 - 4(1)\left(i + \frac{3}{4}\right)$$

$$= 4(1 + 2i - 1) - 4i - 3$$

$$= 8i - 4i - 3 = -3 + 4i$$

Δ نفسا حلينا جذورها التربيعية من شوي , فرضها w وشتغل:

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-2 - 2i + 1 + 2i}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{-b - w_1}{2a} = \frac{-2 - 2i - 1 - 2i}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} - 2i$$

$$\mathbf{2z^2 - 5z + 6 = 0}$$

$$\Delta = 25 - 4(2)(6) = 25 - 48$$

$$= -23 < 0$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$z_1 = \frac{5 + i\sqrt{23}}{4}$$

$$z_2 = \frac{5 - i\sqrt{23}}{4}$$

$$\mathbf{z^2 - 2\sin(\theta) + 1 = 0}$$

$$\Delta = 4\sin^2\theta - 4 = -4(1 - \sin^2\theta)$$

$$= -4\cos^2\theta < 0$$

للمعادلة حلان عقديان:

$$z_1 = \frac{2\sin(\theta) + i\sqrt{4\cos^2\theta}}{2}$$

$$= \sin(\theta) + i\cos(\theta)$$

والحل الآخر مرافقه:

$$z_2 = \overline{z_1} = \sin(\theta) - i\cos(\theta)$$

$$\mathbf{z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0}$$

$$\Delta = 4(1+\sqrt{2})^2 - 4(1)(2)(\sqrt{2}+2)$$

$$= 4(1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 4)$$

$$= -4 < 0$$

للمعادلة جذران عقديان:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + 2i}{2}$$

$$= (1+\sqrt{2}) + i$$

والحل الآخر مرافقه:

$$z_2 = (1+\sqrt{2}) - i$$

التمرين الثاني

1- ننشر:

$$P(Z) = Z^4 + 4Z^3 + 2aZ^2 + aZ^3 + 4aZ^2$$

$$+2a^2Z + bZ^2 + 4bZ + 2ab$$

$$= Z^4 + (4+a)Z^3 + (6a+b)Z^2$$

$$+(2a^2 + 4b)Z + 2ab$$

بالمطابقة بين شكلي $P(Z)$ نجد أن:

$$4 + a = 0 \quad ①$$

$$6a + b = -19 \quad ②$$

$$2a^2 + 4b = 52 \quad ③$$

$$2ab = -40 \quad ④$$

من ① نجد أن $a = -4$

نعوض في ② $b = 5$

نعوض في باقي المعادلات للتحقق:

③ $\Rightarrow 32 + 20 = 52$ صحيحة

④ $\Rightarrow 2(-4)(5) = -40$ صحيحة

2- نستفيد من الشكل الجديد:

$$(Z^2-4Z+5)(Z^2+4Z-8)=0$$

إما

$$Z^2-4Z+5=0$$

أو $Z^2+4Z-8=0$

أكمل الحل و أنجزه.

التمرين الثالث

-1

$$(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=0$$

$$-1-3-3+7=0$$

$$0=0$$

إذن $z=-1$ حلّ لها .

-2 نقسم على $Z+1$

-3 وبالتالي المعادلة تكتب بالشكل :

$$(Z+1)(Z^2-4Z+7)=0$$

إما

$$Z+1=0$$

$$Z=-1$$

أو

$$Z^2-4Z+7=0$$

أكمل الحل .

التمرين الرابع

$$P(z)=z^3-2(\alpha+i\sqrt{3})z^2-4(\alpha-i\sqrt{3})z+8$$

-1 لدينا $z=2$ حلاً لها:

$$P(2)=0$$

$$8-8(\alpha+i\sqrt{3})-8(\alpha-i\sqrt{3})+8=0$$

$$16-16\alpha-8\sqrt{3}i+8\sqrt{3}i=0$$

$$16\alpha=16$$

$$\alpha=1$$

-2 بالقسمة الإقليدية على $z-2$:

$$P(z)=(z-2)(z^2-2\sqrt{3}iz-4)$$

$$P(z)=0$$

إما:

$$z-2=0\Rightarrow z=2$$

أو:

$$z^2-2\sqrt{3}iz-4=0$$

$$\Delta=-12-4(-4)(1)=4>0$$

$$z_1=\frac{2\sqrt{3}i+2}{2}=1+\sqrt{3}i$$

$$z_2=\overline{z_1}=1-\sqrt{3}i$$

التمرين الأول (في أسفل الصفحة 82)

$$z^3=1$$

$$z^3=e^{i(0+2\pi k)}$$

بفرض $z=re^{i\theta}$:

$$r^3e^{i3\theta}=1.e^{i2\pi k}$$

بالمقارنة:

$$r=1$$

$$3\theta=2\pi k$$

$$\theta=\frac{2\pi k}{3}$$

الحل الأول: $k=0$

$$\theta_1=0$$

الحل الثاني: $k=1$

$$\theta_2=\frac{2\pi}{3}$$

k = 2 الحل الثالث:

$$\theta_3 = \frac{4\pi}{3}$$

فالحلول:

$$z_1 = e^{i0}\,, z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}\,, z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\boldsymbol{3j^3 - 27i = 0}$$

$$3j^3 = 27i$$

$$j^3 = 8i$$

بفرض $j = re^{i\theta}$:

$$r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi k}$$

بالمقارنة:

$$r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$$

$k = 0$ الحل الأول:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}$$

$k = 1$ الحل الثاني:

$$\theta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

k = 2 الحل الثالث:

$$\theta_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$$

فالحلول:

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}\,, z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}\,, z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

التمرين الثاني

$$z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$1 + z + z^2 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= 0$$

بما أنها معادلة من الدرجة الثانية والمعاملات a, b, c حقيقية فإن لها حلان مترافقان:

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

والشكل الجبري لهما:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

تمارين صفحة 83:

التمرين الأول

$$\boldsymbol{|z + 2| = |z - 1 + i|}$$

$$|z - (-2)| = |z - (1 - i)|$$

تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث:

$$a = -2\,, b = 1 - i$$

$$\boldsymbol{|z| = 3}$$

تمثل دائرة مركزها O ونصف قطرها 3.

$$\boldsymbol{|z - 1| = \sqrt{2}}$$

تمثل دائرة مركزاه $a = 1$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

$$\boldsymbol{Re(iz) = 3}$$

بفرض $z = x + iy$:

$$Re(ix - y) = 3$$

$$-y = 3$$

$$y = -3$$

تمثل المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = -3$.

$$\arg(iz^2) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\arg(i) + \arg(z^2) = \frac{2\pi}{3}$$

$$2\arg(z) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

تمثل نصف مستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{12}$ مع محور الفواصل دون المبدأ.

$$\arg(\bar{z}) = \arg\left(\frac{1}{i}\right)$$

$$\arg(\bar{z}) = \arg(1) - \arg(i)$$

$$\arg(\bar{z}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}$$

تمثل نصف مستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{2}$ مع محور الفواصل دون المبدأ.

التمرين الثاني

1- أولاً بما أنه في نص المسألة أشار إلى أن $z = x + iy$ و $Z = X + iY$ فيمكن أن نبدل في الكسر المعطى فنضع :

$$Z = \frac{2 + \bar{z}}{1 + \bar{z}}$$

$$X + iY = \frac{2 + x - iy}{1 + x - iy}$$

لكن الطرف الأيسر كسر فيجب أن نضرب بالمرافق و إذا لاحظنا أن المقام $1 + x - iy$ فيكون مرافقه $1 + x + iy$ إذن لنضرب البسط و المقام بـ $1 + x + iy$:

$$X + iY = \frac{(2 + x - iy)(1 + x + iy)}{(1 + x - iy)(1 + x + iy)}$$

في المقام لدينا العدد ضرب مرافقه فيمكن أن نضع جوابه مباشرة $\boxed{\text{حقيقي}^2 + \text{تخيلي}^2}$.

و الحقيقي هو $1 + x$ و التخيلي y

$$X + iY = \frac{(2 + x - iy)(1 + x + iy)}{(1 + x)^2 + y^2}$$

و ننشر البسط :

$$X + iY$$

$$= \frac{2 + 2x + 2iy + x + x^2 + iyx - iy - ixy - \underbrace{i^2}_{-1} y^2}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$X + iY = \frac{x^2 + 3x + y^2 + iy}{(1 + x)^2 + y^2}$$

نفرق الكسر لجزأيه الحقيقي و التخيلي

$$X + iY = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1 + x)^2} + i\frac{y}{(1 + x)^2 + y^2}$$

بالمقارنة بين الطرفين نجد أنّ:

$$X = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$Y = \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2}$$

2- حتى يكون العدد $Z = X + iY$ حقيقي يجب أن يكون قسمه التخيلي معدوم أي :

$$Y = 0$$

$$\frac{y}{(1 + x)^2 + y^2} = 0$$

ينعدم الكسر إذا انعدم البسط :إذن $y = 0$ و هي تمثل معادلة مستقيم أفقي

و لكن بما أن Y تابع كسري فيجب أن نحذف النقاط التي تعدم المقام

و ينعدم المقام إذا كان $(1+x)^2+y^2=0$ أي $x=-1$ و $y=0$ فالنقطة التي يجب حذفها $A(-1,0)$

الخلاصة: مجموعة النقاط التي تجع العدد Z تخيلي هي المستقيم $y=0$ محذوفٌ منه النقطة $A(-1,0)$

3- حتى يكون العدد $Z=X+iY$ تخيلي بحت يجب أن يكون قسمه الحقيقي معدوم أي :

$$X=0$$
$$\frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2}=0$$
$$x^2+3x+y^2+2=0$$

و نعلم من دراستنا للأشعة أنه لإصلاح معادلة تحوي x^2, y^2 نقوم بالاتمام لمربع كامل (الكتابة بالشكل القانوني) لذلك نضيف و نطرح مربع نصف أمثال x :

أمثال x هي 3 و نصفها $\frac{3}{2}$ فمربعها $\frac{9}{4}$ إذن نضيف و نطرح $\frac{9}{4}$:

$$x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+2=0$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2-\frac{9}{4}+2=0$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

وهي من الشكل :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

فهي تمثل دائرة مركزها $B(-\frac{3}{2},0)$ و نصف قطرها $r=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ و كذلك محذوف منها النقطة $A(-1,0)$

خواص الـ arg

1) الجواب:

المستقيم (EA) منصف للزاوية $\widehat{DEC}$: a ,

التفسير:

$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$$

- $\left|\frac{a-e}{d-e}\right|=\left|\frac{c-e}{a-e}\right| \Rightarrow \frac{EA}{ED}=\frac{EC}{EA}$
$\Rightarrow EA^2=ED\,.\,EC$

- $\arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right)=\arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$
$\Rightarrow (\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})=(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})$
$\Rightarrow \widehat{DEA}=\widehat{AEC}$

و بالتالي EA منصّف في المثلّث DEC .

2) الجواب: قائم في B و متساوي الساقين : b ,

التفسير:

$$\frac{d-b}{c-b}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- $\left|\frac{d-b}{c-b}\right|=1 \Rightarrow \frac{BD}{BC}=1 \Rightarrow BD=BC$
- $\arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right)=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=\frac{\pi}{2}$

و بالتالي المثلث BCD قائم في B و متساوي الساقين.

3) الجواب: دوران : b , التفسير:

$$b=ia=e^{i\frac{\pi}{2}}a$$

4) الجواب:

b : $\arg(z_1)+\arg(z_2)$

5) الجواب:

قائم في B ومتساوي الساقين

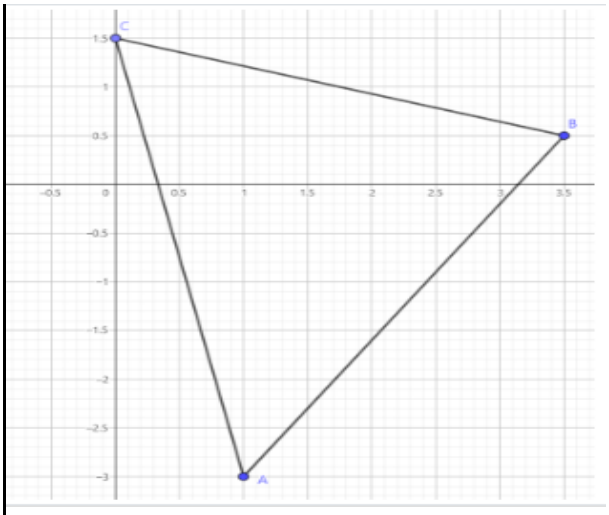
6) الجواب:

تحاكٍ نسبته 2 : a , التفسير:

$$a-1=2b-2$$

الجواب: $a-1=2(b-1)$

7) الجواب: c , التفسير:



$a = 1 - 3i \Rightarrow A(1, -3)$

$b = \frac{7}{2} + i \Rightarrow B\left(\frac{7}{2}, 1\right)$

$c = \frac{3}{2}i \Rightarrow C\left(0, \frac{3}{2}\right)$

8) الجواب: $\boxed{b: \begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{2} + 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = -1 + \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

$= \frac{7}{2} + i - 1 + 3i$

$= 4i + \frac{7}{2} - \frac{2}{2} = \frac{5}{2} + 4i$

$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A$

$= \frac{3}{2}i - 1 + 3i$

$= -1 + \frac{3}{2}i + \frac{6}{2}i = -1 + \frac{9}{2}i$

$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B$

$= \frac{3}{2}i - \frac{7}{2} - i = \frac{3}{2}i - \frac{2}{2}i - \frac{7}{2}$

$= \frac{1}{2}i - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$

9) الجواب: $\boxed{b: \begin{cases} AB = \frac{\sqrt{89}}{2} \\ AC = \frac{\sqrt{85}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{50}}{2} \end{cases}}$, التفسير:

$AB = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (4)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 16}$

$= \sqrt{\frac{25 + 64}{4}} = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$

$AC = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{81}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4 + 81}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$

$BC = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49 + 1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

10) الجواب: $\boxed{d: \text{مختلف الأضلاع}}$, التفسير:

لنختبر ان كان قائم حسب عكس فيثاغورث:

$L_1 = BC^2 =^? AB^2 + AC^2 = L_2$

$L_1 = \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$

$L_2 = \left(\frac{\sqrt{89}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{85}}{2}\right)^2$

$= \frac{89}{4} + \frac{85}{4} = \frac{174}{4}$

و بالتالي $L_1 \neq L_2$ اذاً المثلث ABC مختلف الأضلاع.

11) الجواب: $\boxed{a: Z_1 = \frac{9}{4} - i}$, التفسير:

$z_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{1 - 3i + \frac{7}{2} + i}{2}$

$= \frac{-2i + \frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{9 - 4i}{2}}{2} = \frac{9 - 4i}{4}$

$\Rightarrow z_1 = \frac{9}{4} - i$

12) الجواب: $\boxed{c: g = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}i}$, التفسير:

$z_G = \frac{a + b + c}{3} = \frac{1 - 3i + \frac{7}{2} + i + \frac{3}{2}i}{3}$

$= \frac{-2i + \frac{3}{2}i + \frac{9}{2}}{3} = \frac{\frac{-4i + 3i + 9}{2}}{3}$

$= \frac{-i + 9}{6} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6}i = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}i$

13) الجواب: $\boxed{d: Z_M = \frac{11}{4} - \frac{13}{4}i}$, التفسير:

$z_M = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}$

$= \frac{2(1 - 3i) + 1\left(\frac{7}{2} + i\right) - 1\left(\frac{3}{2}i\right)}{2 + 1 - 1}$

$= \frac{2 - 6i + \frac{7}{2} + i - \frac{3}{2}i}{2} = \frac{2 + \frac{7}{2} - 5i - \frac{3}{2}i}{2}$

$= \frac{\frac{4 + 7 - 10i - 3i}{2}}{2} = \frac{11}{4} - \frac{13}{4}i$

14) الجواب: a : نعم , التفسير:

$$Z_{\overrightarrow{OC}} = Z_C - Z_O = \frac{3}{2}i - 0 = \frac{3}{2}i$$

$$|Z_{\overrightarrow{OC}}| = OC = \sqrt{\frac{9}{4} + 0} = \frac{3}{2} = r$$

15) الجواب: a : نعم , التفسير:

$$Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$|Z_{\overrightarrow{BC}}| = BC = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = r$$

16) الجواب: b : مختلف الأضلاع و قائم , التفسير:

$$Z_A = -2 \ , Z_B = 2 \ , Z_C = -1 + i \ , Z_D = 1 - 3i$$

اطوال أضلاع المثلث ACD :

$$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A$$
$$= -1 + i + 2 = 1 + i$$
$$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A$$
$$= 1 - 3i + 2 = 3 - 3i$$
$$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{AD}}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D$$
$$= -1 + i - 1 + 3i = -2 + 4i$$
$$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{DC}}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

لنختبر ان كان قائم حسب عكس فيثاغورث:

$$L_1 = DC^2 =^? AC^2 + AD^2 = L_2$$
$$L_1 = DC^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 4 \times 5 = 20$$
$$L_2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 2 + (3 \times 2)$$
$$= 2 + 18 = 20$$

$$\Rightarrow L_1 \neq L_2$$

اذاً المثلث ACD قائم في A و مختلف الأضلاع.

17) الجواب: a : متساوي الساقين و قائم , التفسير:

اطوال اضلاع المثلث BCD :

$$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = -1 + i - 2 = -3 + i$$
$$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{BC}}| = BC = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$
$$Z_{\overrightarrow{BD}} = Z_D - Z_B = 1 - 3i - 2 = -1 - 3i$$
$$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{BD}}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$
$$Z_{\overrightarrow{DC}} = -2 + 4i$$
$$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{DC}}| = DC = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

لنختبر ان كان قائم حسب عكس فيثاغورث:

$$L_1 = DC^2 =^? BC^2 + BD^2 = L_2$$

$$L_1 = \left(\sqrt{20}\right)^2 = 20$$
$$L_2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10 + 10 = 20$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

و بالتالي المثلث BCD قائم في B و متساوي الساقين.

18) الجواب: d : $Z_E = -2 - 2i$, التفسير:

$$Z_D = 1 - 3i \ , Z_C = -1 + i \ , Z_B = 2$$

$$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_{\overrightarrow{DE}}$$
$$\Rightarrow Z_C - Z_B = Z_E - Z_D$$
$$-1 + i - 2 = Z_E - 1 + 3i$$
$$\Rightarrow Z_E = -1 + i - 2 + 1 - 3i$$
$$\Rightarrow Z_E = -2 - 2i$$

19) الجواب: a : متوازيان , التفسير:

$$\frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_E} = \frac{-1 + i - 2}{1 - 3i + 2 + 2i}$$
$$= \frac{-3 + i}{3 - i} = \frac{-(3 - i)}{3 - i} = -1$$
$$\arg\left(\frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_E}\right) = \pi$$

و بالتالي المستقيمان ED و BC متوازيان.

20) الجواب: b : متعامدان , التفسير:

$$\frac{Z_D - Z_C}{Z_E - Z_B} = \frac{1 - 3i + 1 - i}{-2 - 2i - 2}$$
$$= \frac{2 - 4i}{-4 - 2i} = \frac{(2 - 4i)(-4 + 2i)}{(-4 - 2i)(-4 + 2i)}$$
$$= \frac{-8 + 4i + 16i + 8}{16 + 4} = \frac{20i}{20} = i$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_E - Z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

و بالتالي المستقيمان DC و BE متعامدان.

21) الجواب: c : $Z_I = -i$, التفسير:

$$Z_I = \frac{c + d}{2} = \frac{-1 + i + 1 - 3i}{2}$$
$$= -\frac{2i}{2} = -i$$

22) الجواب: a : تقع على استقامة واحدة , التفسير:

$$Z_E = -2 - 2i$$
$$Z_I = -i \ , \quad Z_B = 2$$
$$Z_{\overrightarrow{IB}} = Z_B - Z_I = 2 + i$$
$$Z_{\overrightarrow{IE}} = Z_E - Z_I = -2 - 2i + i$$
$$= -2 - i$$
$$\frac{Z_{\overrightarrow{IB}}}{Z_{\overrightarrow{IE}}} = \frac{2 + i}{-2 - i} = \frac{2 + i}{-(2 + i)} = -1$$
$$\Rightarrow Z_{\overrightarrow{IB}} = -Z_{\overrightarrow{IE}}$$

و منه $\overrightarrow{IE}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطان خطيّاً و بالتالي النقاط $I\ ,B\ ,E$ تقع على استقامة واحدة.

23) الجواب: $\boxed{a : e = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i}$, التفسير:

$a = 2 - 2i\ ,\quad b = -1 + 7i$

$c = 4 + 2i\ ,\quad d = -4 - 2i$

$e = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2 - 2i - 1 + 7i}{2}$

$= \dfrac{1 + 5i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$

24) الجواب: $\boxed{c : \text{المستقيم منصف في المثلث } ACD}$

, التفسير:

$$L_1 = \frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e} = L_2$$

$$L_1 = \frac{a-e}{d-e} = \frac{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i}{\frac{-8-1}{2} + \frac{-4i-5i}{2}} = \frac{\frac{3-9i}{2}}{\frac{-9-9i}{2}}$$

$$= \frac{3 - 9i}{-9 - 9i} = \frac{3(1-3i)(1-i)}{-9(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{3(1 - i - 3i - 3)}{9(1+1)} = \frac{3(-4i-2)}{9 \times 2}$$

$$= \frac{-4i - 2}{3 \times 2} = -\frac{4i}{6} - \frac{2}{6}$$

$$= -\frac{2}{3}i - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(+1 + 2i)$$

$$L_2 = \frac{c-e}{a-e} = \frac{4 + 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}$$

$$= \frac{4 - \frac{1}{2} + 2i - \frac{5}{2}i}{2 - \frac{1}{2} - 2i - \frac{5}{2}i} = \frac{\frac{8}{2} - \frac{1}{2} + \frac{4}{2}i - \frac{5}{2}i}{\frac{4}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{2}i - \frac{5}{2}i}$$

$$= \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i} = \frac{(7-i)(3+9i)}{(3-9i)(3+9i)}$$

$$= \frac{21 + 63i - 3i - 9\,i^2}{9 + 81}$$

$$= \frac{(30 + 60i) \quad \times \frac{1}{10}}{9 \qquad \times \frac{1}{10}} = \frac{3 + 6i}{9} = \frac{3}{9} + \frac{6}{9}i$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i = \frac{1}{3}(1 + 2i)$$

و بالتالي:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

و منه:

$$\left|\frac{a-e}{d-e}\right| = \left|\frac{c-e}{a-e}\right|$$

$$\frac{EA}{ED} = \frac{EC}{EA} \Longrightarrow EA^2 = EC \,.\, ED$$

- $\arg\left(\dfrac{a-e}{d-e}\right) = \arg\left(\dfrac{c-e}{a-e}\right)$

$(\overrightarrow{ED}\ ,\overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{EA}\ ,\overrightarrow{EC})$

$\widehat{DEA} = \widehat{AEC}$

اذاً EA منصّف في المثلث ACD .

25) الجواب: $\boxed{b : e^{\frac{2\pi}{3}i}}$, التفسير:

$a = 2\ ,\quad b = 1 + \sqrt{3}i\ ,\quad c = -1 + \sqrt{3}i$

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2 - 1 - \sqrt{3}i}{-1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}i}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x = -\frac{1}{2}\ ,\quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Longrightarrow \cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{a-b}{c-b} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{a-b}{c-b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

26) الجواب: $\boxed{d\ :\ i}$, التفسير:

$a = 8\ ,\quad b = -4 + 4i\ ,\quad c = -4i$

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4 + 4i + 4i}{8 + 4i} = \frac{-4 + 8i}{8 - 4i}$$

$$= \frac{(-4 + 8i)(8 - 4i)}{(8 + 4i)(8 - 4i)}$$

$$= \frac{-32 + 16i + 64i + 32}{64 + 16} = \frac{80i}{80} = i$$

27) الجواب: $\boxed{a : \text{قائم و متساوي الساقين}}$, التفسير:

- $\left|\dfrac{b-c}{a-c}\right| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

$\dfrac{CB}{CA} = 1 \Longrightarrow CB = CA$

- $\arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow (\overrightarrow{CA}\ ,\overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{2}$

و بالتالي المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

28) الجواب: $\boxed{a : \frac{1}{2}}$, التفسير:

$a = 6 - i \ , \quad b = -6 + 3i$

$c = -18 + 7i$

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}$$

$$= \frac{-12+4i}{8i-24} = \frac{4(-3+i)}{8(i+3)}$$

$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

29) الجواب:

$\boxed{a : \text{النقاط } A, B, C \text{ تقع على استقامة واحدة}}$

,التفسير:

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2\,AB$$

و بالتالي النقاط $A\,,B\,,C$ تقع على استقامة واحدة.

30) الجواب: $\boxed{b : \frac{\pi}{2}}$, التفسير:

$d = 1 + 6i$

$d - 0 = (a-0)e^{i\theta} \Rightarrow d = a\,e^{i\theta}$

$1 + 6i = (6-i)e^{i\theta}$

$$\frac{1+6i}{6-i} = e^{i\theta}$$

$$\frac{(1+6i)(6+i)}{36+1} = e^{i\theta}$$

$$\frac{6+i+36i-6}{37} = e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{37i}{37} = e^{i\theta} \Rightarrow i = e^{i\theta} \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\theta}$$

بالمقارنة نجد:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

31) الجواب: $\boxed{c : \sqrt{3}i}$, التفسير:

$a = -1 \ , \quad b = 2 + \sqrt{3}i$

$c = \overline{b} = 2 - \sqrt{3}i \ , \quad d = 3$

$$\frac{a-c}{d-c} = \frac{-1-(2-\sqrt{3}i)}{3-(2-\sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{-1-2+\sqrt{3}i}{3-2+\sqrt{3}i} = \frac{-3+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{(-3+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{-3+3\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+3}{1+3} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$$

32) الجواب: $\boxed{b : \frac{\pi}{2}}$, التفسير:

- $\left|\frac{a-c}{d-c}\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \sqrt{3} \Rightarrow CA = \sqrt{3}CD$$

اذا غير متساوي الساقين

- $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{CD}\,, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$$

33) الجواب: $\boxed{d : \text{قائم الزاوية}}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = 2 - \sqrt{3}i + 1 = 3 - \sqrt{3}i$

$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A = 3 + 1 = 4$

$Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D = 2 - \sqrt{3}i - 3 = -1 - \sqrt{3}i$

$\Rightarrow AC = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AD = \sqrt{16} = 4$

$DC = \sqrt{1+3} = 2$

حسب عكس فيثاغورث:

$L_1 = AD^2 \overset{?}{=} AC^2 + DC^2 = L_2$

$L_1 = (4)^2 = 16$

$L_2 = 12 + 4 = 16$

$\Rightarrow L_1 = L_2$

و بالتالي المثلث ADC قائم.

34) الجواب: $\boxed{a : \ b = 3 - i}$, التفسير:

$\vec{w}(2\,, -2)$

$b = a + 2 - 2i$

$b = 1 + i + 2 - 2i$

$b = 3 - i$

35) الجواب: $\boxed{d : c = 0}$, التفسير:

$z' - w = k(z - w)$

$c - 2 - 2i = 2(a - 2 - 2i)$

$c - 2 - 2i = 2(1 + i - 2 - 2i)$

$c - 2 - 2i = 2(-1 - i)$

$\Rightarrow c = 2 + 2i - 2 - 2i = 0$

36) الجواب: $\boxed{b : d = 2 + 2i}$, التفسير:

$d - 0 = 2(a - 0) \Rightarrow d = 2a$

$\Rightarrow d = 2(1 + i) \Rightarrow d = 2 + 2i$

37) الجواب: $\boxed{a \ : \ e = 1 - 3i}$, التفسير:

$e - 3 + i = e^{\frac{\pi}{2}i}(a - 3 + i)$

$\Rightarrow e - 3 + i = i(1 + i - 3 + i)$

$\Rightarrow e - 3 + i = i(2i - 2)$

$\Rightarrow e = -2 - 2i + 3 - i$

$\Rightarrow e = 1 - 3i$

38) الجواب: $\boxed{c : m = \sqrt{2}i}$, التفسير:

$m = e^{\frac{\pi}{4}i}\,a$

$$\Rightarrow m = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)(1+i)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(1+i)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2}i$$

39) الجواب: $\boxed{d \ : \ b = 1 + 3i}$, التفسير:

$$z' = \overline{z} \Longrightarrow b = \overline{a} = 1 + 3i$$

40) الجواب: $\boxed{c \ : \ c = -1 + 3i}$, التفسير:

$$z' = -z \Longrightarrow c = -a = -1 + 3i$$

41) الجواب: $\boxed{c : d = -1 + 3i}$, التفسير:

$$d - 0 = -(a - 0)$$
$$\Longrightarrow d = -a = -1 + 3i$$

42) الجواب: $\boxed{a \ : \ e = 3 - 7i}$, التفسير:

$$e - (2 - 5i) = -(a - 2 + 5i)$$
$$\Longrightarrow e - 2 + 5i = -(1 - 3i - 2 + 5i)$$
$$\Longrightarrow e - 2 + 5i = -(2i - 1)$$
$$\Longrightarrow e - 2 + 5i = -2i + 1$$
$$\Longrightarrow e = 3 - 7i$$

43) الجواب: $\boxed{b \ : \ b + i(b - c)}$, التفسير:

$$b' - b = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c - b)$$
$$\Longrightarrow b' - b = -i(c - b)$$
$$\Longrightarrow b' - b = -ic + ib$$
$$\Longrightarrow b' = b + i(b - c)$$

44) الجواب: $\boxed{a \ : \ a' = a + i(c - a)}$, التفسير:

$$a' - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(c - a)$$
$$\Longrightarrow a' - a = i(c - a)$$
$$\Longrightarrow a' = a + i(c - a)$$

45) الجواب: $\boxed{d \ : \ \frac{(b+a)+i(b-a)}{2}}$, التفسير:

$$M = \frac{a' + b'}{2}$$

$$\Longrightarrow M = \frac{a + i(c - a) + b + i(b - c)}{2}$$

$$\Longrightarrow M = \frac{a + ic - ia + b + ib - ic}{2}$$

$$\Longrightarrow M = \frac{(a + b) + i(b - a)}{2}$$

46) الجواب: $\boxed{a \ : \ \begin{cases} n = \frac{b+c}{2} \\ b' = ib \\ c' = -ic \end{cases}}$, التفسير:

$$n = \frac{c + b}{2}$$

b' صورة b وفق دوران مركزه A و زاويته:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

و بالتالي:

$$b' - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(b - a)$$
$$\Longrightarrow b' = ib$$

c' صورة c وفق دوران مركزه A و زاويته:

$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

و بالتالي:

$$c' - a = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c - a)$$
$$\Longrightarrow c' - a = -i(c - a)$$
$$\Longrightarrow c' = -ic$$

47) الجواب: $\boxed{b \ : \ -i}$, التفسير:

$$\frac{c' - b}{c - b'} = \frac{-ic - b}{c - ib}$$
$$= \frac{(-ic - b)(c + ib)}{c^2 + b^2}$$
$$= \frac{-ic^2 + cb - bc - ib^2}{c^2 + b^2}$$
$$= \frac{-i(c^2 + b^2)}{c^2 + b^2} = -i$$

الجواب: $\boxed{d \ : \ e^{-\frac{\pi}{2}i}}$, التفسير:

$$-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

48) الجواب: $\boxed{\text{متعامدان و متساويان} : b}$, التفسير:

من النسبة:

$$\frac{c' - b}{c - b'} = -i$$

نجد أنّ:

- $\arg\left(\frac{c' - b}{c - b'}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

و بالتالي المستقيمان (BC') و $(B'C)$ متعامدان.

- $\left|\frac{c' - b}{c - b'}\right| = |-i|$

$$\Longrightarrow \sqrt{(-i)^2} = 1$$
$$\Longrightarrow \frac{BC'}{B'C} = 1 \Longrightarrow BC' = B'C$$

و بالتالي المستقيمان (BC') و $(B'C)$ متساويان.

49) الجواب: $\boxed{a : \begin{cases} a = 3 \ , \ b = 4 \\ c = 7 \ , \ d = 7 + i \\ e = 6 + 3i \end{cases}}$, التفسير:

$$A(3\,,0) \Longrightarrow a = 3$$
$$B(4\,,0) \Longrightarrow b = 4$$
$$D(7\,,1) \Longrightarrow d = 7 + i$$
$$E(6\,,3) \Longrightarrow e = 6 + 3i$$

50) الجواب: $\boxed{d \ : \begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}} = 3 + i \\ Z_{\overrightarrow{AE}} = 3 + 3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}} = 6 + 3i \end{cases}}$, التفسير:

$$Z_{\overrightarrow{OE}} = e - o = 3 + 3i$$
$$Z_{\overrightarrow{AE}} = e - a = 6 + 3i - 3 = 3 + 3i$$
$$Z_{\overrightarrow{BD}} = d - b = 7 + i - 4 = 3 + i$$

51) الجواب: $\boxed{a \ : \ 90i}$, التفسير:

$$Z_{\overrightarrow{BD}} . Z_{\overrightarrow{AE}} . Z_{\overrightarrow{OE}}$$

$$= (3+i)(3+3i)(6+3i)$$
$$= (9+9i+3i-3)(6+3i)$$
$$= (6+12i)(6+3i)$$
$$= 36+18i+72i-36$$
$$= 90i$$

52) الجواب: $\boxed{c : 90\, e^{\frac{\pi}{2}i}}$, التفسير:

$$90i = 90\, e^{\frac{\pi}{2}i}$$

53) الجواب: $\boxed{b : \frac{\pi}{2}}$, التفسير:

$$\alpha+\beta+\gamma = \arg\big((3+i)(3+3i)(6+3i)\big)$$

54) $= \arg(90i) = \frac{\pi}{2}$

المعادلات العقديّة

1) الجواب: $\boxed{c : -1}$, التفسير:

$$3z-2 = 6z+1$$
$$-1-2 = 6z-3z$$
$$-3 = 3z \Longrightarrow z = -1$$

2) الجواب: $\boxed{c : 2+i}$, التفسير:

$$2z + i\overline{z} = 5+4i$$

نفرض:

$$z = x+iy \Longrightarrow \overline{z} = x-iy$$

و بالتالي يكون:

$$2(x+iy)+i(x-iy) = 5+4i$$
$$\Longrightarrow 2x+2iy+xi+y = 5+4i$$
$$\Longrightarrow 2x+y+(2y+x)i = 5+4i$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2x+y=5 & \dots(1) \\ 2y+x=4 & \dots(2) \quad \times -2 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x+y=5 & \dots(1) \\ -4y-2x=-8 & \dots(2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$-3y = -3 \Longrightarrow y = 1$$

نعوّض في (1):

$$2x+y=5 \Longrightarrow 2x+1=5$$
$$\Longrightarrow 2x = 4 \Longrightarrow x = 2$$
$$\Longrightarrow z = 2+i$$

3) الجواب: $\boxed{d : 3i}$, التفسير:

$$\frac{\overline{z}-3}{\overline{z}+3} = i$$

نأخذ مرافق الطرفين:

$$\frac{z-3}{z+3} = -i$$

نضرب الوسطين بالطرفين:

$$z-3 = -iz-3i$$
$$z+iz = 3-3i$$
$$z(1+i) = 3(1-i)$$
$$\Longrightarrow z = \frac{3(1-i)}{1+i}$$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

$$z = \frac{3(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3(1-i)^2}{1+1}$$
$$= \frac{3(-2i)}{2} = \frac{-6i}{2} = -3i$$

و بالتالي فإنّ:

$$\overline{z} = 3i$$

4) الجواب: $\boxed{a : 0 , -\frac{3}{7i}}$, التفسير:

$$7z^2 = -3i\, z$$
$$\Longrightarrow 7z^2 + 3i\, z = 0$$
$$\Longrightarrow z(7z+3i) = 0$$

إمّا: $z = 0$

أو: $7z+3i = 0$ و بالتالي:

$$7z = -3i \Longrightarrow z = -\frac{3}{7i}$$

5) الجواب: $\boxed{b : \overline{z} = 1-i}$, التفسير:

$$-7\,\overline{z} = -7+7i$$

نقسم على -7 :

$$\overline{z} = 1-i$$

6) الجواب: $\boxed{c : 5 , -5}$, التفسير:

$$4\,z^2 - 100 = 0$$
$$\Longrightarrow 4\,z^2 = 100$$
$$\Longrightarrow z^2 = \frac{100}{4} = 25$$

نجذر الطرفين:

$$\sqrt{z^2} = \sqrt{25} \Longrightarrow z = |5|$$
$$\Longrightarrow z = +5 \ , \ z = -5$$

7) الجواب: $\boxed{c : z_1 = 3+2i , z_2 = -3-2i}$,

التفسير:

$$z^2 = 5+12i$$

نفرض w هو الجذر التربيعي لِ z :

$$x^2+y^2 = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \quad \dots(1)$$
$$x^2-y^2 = 5 \quad \dots.(2)$$
$$2xy = 12 > 0 \quad \dots.(3)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2 = 18 \Longrightarrow x^2 = 9$$
$$x = 3 \ , \ x = -3$$

بطرح (1) و (2) نجد:

$$2y^2 = 8 \Longrightarrow y^2 = 4$$
$$y = 2 \ , \ y = -2$$

و بالتالي تكون الحلول:

$$z_1 = 3+2i \quad , \quad z_2 = -3-2i$$

8) الجواب: $\boxed{c : z_1 = 1+2i \ , \ z_2 = -1-i}$, التفسير:

$$i\,z^2 + z + 3 + i = 0$$
$$a = i \ , \ b = 1 \ , \ c = 3+i$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(i)(3+i)$$
$$= 1 - 12i + 4 = 5 - 12i$$

نفرض w هو الجذر التربيعي لِ Δ :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25+144}$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{169} = 13 \ \ldots(1)$$
$$x^2 - y^2 = a = 5 \quad \ldots(2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9$$
$$x = 3 \ , \ x = -3$$

بطرح (1) و (2) نجد:

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4$$
$$y = 2 \ , \ y = -2$$

و بالتالي تكون الحلول:

$$w_1 = 3 - 2i \ \ , \ \ w_2 = -3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-1-3+2i}{2i}$$
$$= \frac{-4+2i}{2i} = \frac{(-4+2i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$
$$= \frac{8i+4}{4} \Rightarrow z_1 = 1+2i$$
$$\Rightarrow z_2 = \frac{-b+w_2}{2a} = \frac{(-1+3-2i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$
$$= \frac{(2-2i)(-2i)}{4} = \frac{-4i-4}{4} \Rightarrow z_2 = -1-i$$

9) الجواب: $\boxed{b \ : z = \frac{1+\sqrt{3}}{2}}$, التفسير:

$$z^2 - (1+\sqrt{3})z + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$a = 1 \ , \qquad b = -1-\sqrt{3} \ , \ c = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1-\sqrt{3})^2 - 4(1)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4 - 2\sqrt{3} = 1 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

10) الجواب: $\boxed{c : \begin{cases} 1+i \\ 1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i \end{cases}}$, التفسير:

$$(z-1-i)(z^2 - 2z + 4) = 0$$

إمّا: $z - 1 - i = 0$ و بالتالي:

$$z_1 = 1+i$$

أو: $z^2 - 2z + 4 = 0$ و بالتالي:

$$a = 1 \ , \qquad b = -2 \ , \ c = 4$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4)$$
$$= 4 - 16 = -12 < 0$$

و منه للمعادلة حلّان عقديّان مترافقان:

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2}$$
$$= \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$
$$z_3 = \overline{z_2} = 1 + i\sqrt{3}$$

11) الجواب: $\boxed{b : \ z_1 = 1 \, , z_2 = -2}$, التفسير:

$$(2 - z - z^2)^3 = 0$$
$$(-z^2 - z + 2)^3 = 0$$

نفرض أنّ:

$$w = -z^2 - z + 2$$
$$\Rightarrow a = -1 \ , \ \ b = -1 \, , \ c = 2$$
$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(-1)(2)$$
$$= 1 + 4(2) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$
$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2(-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

12) الجواب: $\boxed{b : \begin{cases} 3e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ 3e^{i\frac{\pi}{3}} \\ 3e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{cases}}$, التفسير:

$$z^3 = 27i \Rightarrow z^3 - 27i = 0$$
$$\Rightarrow z^3 + (3i)^3 = 0$$
$$\Rightarrow (z+3i)(z^2 - 3iz - 9) = 0$$

و بالتالي إمّا :

$$z = -3i \ \Rightarrow z = 3\,e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

أو:

$$z^2 - 3iz - 9 = 0$$
$$\Rightarrow a = 1 \ , \ \ b = -3i \, , \ c = -9$$
$$\Rightarrow \Delta = -9 - 4(1)(-9) = -9 + 36$$
$$\Rightarrow \Delta = 27 > 0 \ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

و منه يوجد للمعادلة جذرين مختلفين:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3i - 3\sqrt{3}}{2}$$
$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$
$$r_1 = \sqrt{\frac{9 \times 3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow z_1 = 3\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3i+3\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$r_2 = 3 \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \sin(\theta) = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow z_2 = 3\,e^{i\frac{\pi}{6}}$$

13) الجواب: $\boxed{b : \text{تخيّلي بحت}}$, التفسير:

$$w = \frac{z - u\,\overline{z}}{i - iu}$$
$$; |u| = 1 \ , \ \overline{u} = \frac{1}{u}$$

لنحسب مرافق w :

$$\overline{w} = \frac{\overline{z} - \overline{u}\,z}{-i - i\overline{u}} = \frac{\overline{z} - \frac{1}{u}z}{-i + i\frac{1}{u}}$$
$$= \frac{\frac{\overline{z}\,u - z}{u}}{\frac{-iu+i}{u}} = \frac{\overline{z}u - z}{-iu+i} = \frac{-(z-u\overline{z})}{i-ui}$$
$$\Rightarrow \overline{w} = -w$$

و بالتالي w تخيّلي بحت.

14) الجواب: $\boxed{b : \ |Z|^2 + |Z'|^2}$, التفسير:

$$|z - z'|^2 + z'\overline{z} + z\,\overline{z}' =$$
$$(z - z')(\overline{z} - \overline{z}') + z'\overline{z} + z\,\overline{z}' =$$
$$z\,\overline{z} - z\,\overline{z}' - z'\overline{z} + z'\overline{z}' + z'\overline{z} + z\,\overline{z}' =$$
$$z\,\overline{z} + z'\overline{z}' = |Z|^2 + |Z'|^2$$

15) الجواب: $\boxed{c : 1}$, التفسير:

$$z = \sin(\theta) + i\cos(\theta)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$\Rightarrow |z| = 1$$

16) الجواب: $\boxed{a : \frac{\pi}{4}}$, التفسير:

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

17) الجواب: $\boxed{c : \frac{\sqrt{2}}{2}}$, التفسير:

من الطلب السابق **(44)**.

18) الجواب: $\boxed{a : \text{حقيقي}}$, التفسير:

$$|z| = 1 \ , \quad \overline{z} = \frac{1}{z}$$
$$|w| = 1 \ , \quad \overline{w} = \frac{1}{w}$$
$$z = \frac{z+w}{zw+1}$$
$$\overline{z} = \frac{\overline{z} + \overline{w}}{\overline{z}\,\overline{w} + 1} = \frac{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{w}\right)}{\frac{1}{zw} + 1}$$
$$= \frac{\frac{w+z}{zw}}{\frac{1+wz}{zw}} = \frac{w+z}{zw+1}$$
$$\Rightarrow \overline{z} = z$$

إذاً z حقيقي .

19) الجواب: $\boxed{a : P(z) = (z-1)(5z^2+2z+1)}$,

التفسير:

$$P(z) = 5z^3 - 3z^2 - z - 1$$

لنجرّب:

$$P(+1) = 5 - 3 - 1 - 1 = 2 - 2 = 0$$

اذاً بالقسمة الإقليديّة ل $P(z)$ على $(z-1)$ نجد:

$$P(z) = (z-1)(5z^2+2z+1)$$

20) الجواب: $\boxed{c : \left\{1, -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\,, -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right\}}$, التفسير:

$$P(z) = 0$$
$$(z-1)(5z^2+2z+1) = 0$$

إمّا:

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$$

أو:

$$5z^2 + 2z + 1 = 0$$
$$a = 5 \ , \quad b = 2 \ , \quad c = 1$$
$$\Rightarrow \Delta = 4 - 4(5)(1) = 4 - 20 = -16 < 0$$

و بالتالي للمعادلة حلّان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2 - i\sqrt{16}}{2(5)}$$
$$= -\frac{2}{10} - \frac{4}{10}i = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$
$$\Rightarrow z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

21) الجواب: $\boxed{d : 0}$, التفسير:

$$P(z) = 2z^3 - 5z^2 + 3z - 2$$
$$\Rightarrow P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 3(2) - 2$$
$$= 16 - 20 + 6 - 2 = 20 - 20 = 0$$

22) الجواب: $\boxed{d : P(z) = (z+2)(2z^2 - z + 1)}$,

التفسير:

بالقسمة الإقليدية لِ $P(z)$ على $(z-2)$

23) الجواب: $\boxed{a \ : \ 3}$, التفسير:

لأنّ $P(z)$ معادلة من الدرجة الثالثة.

24) الجواب: $\boxed{d : z = 1 - i}$, التفسير:

$$2iz + \overline{z} = 3 + 3i$$

نفرض أنّ:

$$z = a + ib \quad , \quad \overline{z} = a - ib$$

و بالتالي:

$$2i(a+ib) + (a - ib) = 3 + 3i$$
$$\Rightarrow 2ia - 2b + a - ib = 3 + 3i$$
$$\Rightarrow a - 2b + i(2a - b) = 3 + 3i$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 3 & \dots (1) \\ 2a - b = 3 & \dots (2) \end{cases}$$

من (1) نجد:

$$a = 3 + 2b \ \dots (*)$$

نعوّض في (2) :

$$2(3 + 2b) - b = 3$$
$$\Rightarrow 6 + 4b - b = 3$$
$$\Rightarrow 6 + 3b = 3$$
$$\Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1$$

نعوّض في $(*)$:

$$\Rightarrow a = 3 - 2 = 1$$
$$\Rightarrow z = 1 - i$$

25) الجواب: $\boxed{b : p = i - 2 \ , \ q = 3 - i}$, التفسير:

$$z_1 = 1 + i \quad , \quad z_2 = 1 - 2i$$
$$z^2 + pz + q = 0$$
$$p = z_1 + z_2$$
$$= 1 + i + 1 - 2i = 2 - i$$
$$\Rightarrow p = i - 2$$
$$q = z_1 . z_2 = (1+i)(1-2i)$$
$$= 1 - 2i + i + 2 = 3 - i$$

26) الجواب: a

$$z_1 = e^{-ix} \quad , \quad z_2 = e^{ix}$$
$$p = z_1 + z_2 = e^{-ix} + e^{ix}$$
$$= 2\cos(x) \Rightarrow p = -2\cos(x)$$
$$q = z_1 . z_2 = e^{-ix} . e^{ix} = e^0 = 1$$

المجموعات النقطيّة

1) الجواب: $\boxed{b}$, تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل.

2) الجواب: $\boxed{b : \text{تمثّل محور لقطعة مستقيمة}}$,

التفسير:

$$|2z - 4 + 6i| = |2z - 4|$$
$$\Rightarrow |z - 2 + 3i| = |z - 2|$$
$$\Rightarrow |z - (2 - 3i)| = |z - 2|$$

3) الجواب: $\boxed{b : \text{المستقيم الشاقولي } x = 2}$.

4) الجواب: $\boxed{c \ : \ \frac{3\pi}{14}}$, التفسير:

$$\theta = -\frac{25\pi}{14} = -\frac{28\pi}{14} + \frac{3\pi}{14} = \underbrace{-2\pi}_{\text{يُهمل}} + \frac{3\pi}{14} = \frac{3\pi}{14}$$

5) الجواب: $\boxed{b \ : \ -\frac{5\pi}{6}}$, التفسير:

$$\theta = \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \underbrace{2\pi}_{\text{يُهمل}} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

6) الجواب: $\boxed{b \ : \ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}$.

7) الجواب: $\boxed{a \ : \ |z| = \sqrt{2}}$, التفسير:

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} \frac{\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$= e^{i\frac{4\pi}{3}} \frac{\sqrt{2}}{1+i} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$= \sqrt{2}\ e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{\frac{16\pi - 3\pi i}{12}}$$
$$\Rightarrow z = \sqrt{2} e^{i\frac{13\pi}{12}} \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$$

8) 23) الجواب:

$\boxed{b : Cos(a+b) = cosa\, cosb - sina\, sinb}$,

التفسير:

$$z = e^{ia} \quad , \quad z' = e^{ib}$$
$$zz' = e^{ib} e^{ia} = e^{i(a+b)}$$
$$zz' = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$$

9) الجواب: $\boxed{b \ : \ z = e^{-ix}}$, التفسير:

$$z = \frac{1 + \cos(x) - i\sin(x)}{1 + \cos(x) + i\sin(x)}$$
$$= \frac{1 + e^{-ix}}{1 + e^{ix}} = \frac{e^{-ix}(e^{ix} + 1)}{1 + e^{ix}} = e^{-ix}$$

10) الجواب: $\boxed{b : xy = \alpha\beta}$, التفسير:

$$a = \alpha + i\,\beta$$
$$z = x + i\,y$$

$$z^2 - a^2 = \overline{z}^2 - \overline{a}^2$$

$$\underbrace{(x+iy)^2 - (\alpha + i\beta)^2}_{L_1} = \underbrace{(x-iy)^2 - (\alpha - i\beta)^2}_{L_2}$$

$$L_1 = (x+iy)^2 - (\alpha + i\beta)^2$$
$$= x^2 + 2xyi - y^2 - (\alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2)$$
$$= x^2 + 2xyi - y^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta i + \beta^2$$

$$L_2 = (x - yi)^2 - (\alpha - \beta i)^2$$
$$= x^2 - 2xyi - y^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta i - \beta^2)$$
$$= x^2 - 2xyi - y^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta i + \beta^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta i + \beta^2$$
$$= x^2 - 2xyi - y^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta i + \beta^2$$

$$\Rightarrow 2xyi + 2xyi - 2\alpha\beta i - 2\alpha\beta i = 0$$
$$\Rightarrow 4xyi = 4\alpha\beta i$$

بالمطابقة نجد:

$$4xy = 4\alpha\beta$$
$$\Rightarrow xy = \alpha\beta$$

11) الجواب: $\boxed{b \ : \ t = i\tan(\theta)}$, التفسير:

$$t = \frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1}$$

نفرض أنّ البسط:

$$u = e^{2i\theta} - 1$$

و نفرض أنّ المقام:

$$v = e^{2i\theta} + 1$$

و بالتالي:

$$u = e^{2i\theta} - 1 = e^{i(\theta+\theta)} - e^{i0}$$
$$= e^{i(\theta+\theta)} - e^{i(\theta-\theta)} = e^{i\theta}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$
$$= e^{i\theta}(2i\sin(\theta))$$

$$v = e^{2i\theta} + 1 = e^{i(\theta+\theta)} + e^{i0}$$
$$= e^{i(\theta+\theta)} + e^{i(\theta-\theta)} = e^{i\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$
$$= e^{i\theta}(2\cos(\theta))$$

نعوّض في t :

$$t = \frac{e^{i\theta}(2i\sin(\theta))}{e^{i\theta}(2\cos(\theta))} = i\tan(\theta)$$

12) الجواب: $\boxed{c \ : \ z_1 + z_2 = 0}$, التفسير:

$$w = -3 + 4i$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \ldots (1)$$
$$x^2 - y^2 = a = -3 \quad \ldots . (2)$$
$$2xy = +4 > 0 \quad \ldots . (3)$$

$\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ لهما نفس الإشارة، بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$$
$$\Rightarrow x = -1 \ , \ x = 1$$

بطرح (1) و (2) نجد:

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4$$
$$\Rightarrow y = -2 \ , \ y = 2$$

و بالتالي:

$$z_1 = -1 - 2i \ , \ z_2 = +1 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 0$$

13) الجواب: $\boxed{c : 0}$.

14) الجواب: $\boxed{c : 0}$.

15) الجواب: $\boxed{c \ : \ 0}$, التفسير:

$$z = e^{i\frac{2\pi}{11}}$$
$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{10}$$
$$= z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + \cdots + z^{10}$$
$$= \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^0 + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^1 + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^2$$
$$+ \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^{10}$$

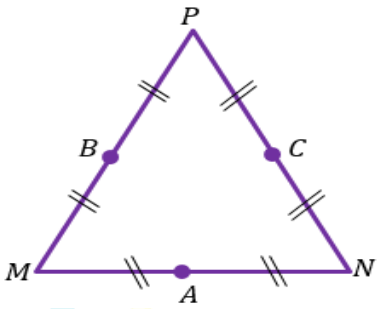
و هي متتالية هندسيّة أساسها:

$$q = e^{i\frac{2\pi}{11}}$$

مجموعها يُعطى بِ:

$$S = a\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{(1)\left(1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^{11}\right)}{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)}$$
$$= \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{11}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{11}}} = \frac{0}{1 - e^{i\frac{2\pi}{11}}} = 0$$

16) الجواب: $\boxed{a \ : \ g' = g}$, التفسير:



$$c = \frac{n + p}{2} \ , \ b = \frac{m + p}{2} \ , \ a = \frac{m + n}{2}$$
$$\Rightarrow g = \frac{\frac{m + n}{2} + \frac{m + p}{2} + \frac{n + p}{2}}{3}$$
$$= \frac{n + p + m}{3} = g' \Rightarrow g = g'$$

17) الجواب:

c محور لقطعة مستقيمة.

التحليل التوافقي والاحتمالات

1) الجواب:

$$b \ : \ (3!)^2 = (3 \times 2 \times 1)^2 = (6)^2 = 36$$

2) الجواب:

$$c \ : \ P_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

3) الجواب:

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

4) الجواب:

$$b : \ P_4^3 \times 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 576$$

5) الجواب:

$$a : \ 7 \times 3 \times 2 \times 1 = 42$$

6) الجواب: c

$$P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1$$
$$n+2 \geq 3 \quad n+2 \geq 1$$
$$n \geq 1 \quad n \geq -1$$
$$(n+2)(n+1)n = 6(n+2)$$
$$\Rightarrow n^2 + n = 6$$
$$n^2 + n - 6 = 0$$
$$(n+6)(n-5) = 0$$

$n = -6$ مرفوض

$n = 5$ مقبول

7) الجواب: c

$$3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2} \ , \ n \geq 4 \quad n \geq 2$$
$$\frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{14n(n-1)}{2 \times 1}$$
$$n^2 - 5n + 6 = 56$$
$$n^2 - 5n - 50 = 0$$
$$(n-10)(n+5) = 0$$

$n = 10$ مقبول

$n = -5$ مرفوض

8) الجواب: c

$$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$$
$$10 \geq 2n \quad 10 \geq n+2$$
$$n \leq 5 \quad n \leq 8$$
$$3n + 4 + 2 = 10 \quad 3n = n + 2$$
$$4n + 2 = 10 \quad n = 1$$
$$4n = 8 \quad n = 2$$

9) الجواب: b

$$\binom{10}{2n} = \binom{10}{n+1}$$
$$10 \geq 2n \quad 10 \geq n+1$$
$$n \leq 5 \quad n \leq 9$$
$$2n + n + 1 = 10 \quad 2n = n + 1$$
$$n = 3 \quad n = 1$$

مسائل التوافيق

1) الجواب:

45 مصافحة، حيثُ:

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 2}{2 \times 1} = \frac{90}{2} = 45$$

2) الجواب:

44 مصافحة، حيثُ:

$$\binom{10}{2} - \binom{2}{2} = 45 - 1 = 44$$

3) الجواب: الجواب 6 حيثُ:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

4) الجواب:

n عدد الأشخاص

$$\binom{n}{2} = 66 \ ; n \geq 2 \quad , \quad P_2^n = 66$$
$$\frac{(n)(n-1)}{2} = 66$$
$$\Rightarrow \frac{n^2 - n}{2} = 66 \Rightarrow n^2 - n = 132$$
$$\Rightarrow n^2 - n - 132 = 0$$
$$\Rightarrow (n-12)(n+11) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} n = 12 & \text{مقبول} \\ n = -11 & \text{مرفوض} \end{cases} \Rightarrow n = 12$$

5) الجواب c :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

6) الجواب a :

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

7) الجواب i : b

8) الجواب : a 1

9) الجواب b :

$$\frac{3\pi}{8}$$

10) الجواب b :

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

11) الجواب:

$\binom{8}{3} = 72$ مثلث

12) الجواب:

$$\binom{9}{3} = 84$$

13) الجواب: 16 مثلث قائم :

$$4 \times 4 = 16$$

14) الجواب:

$$\binom{8}{4} = 70$$

15) الجواب: 6 مستطيلات

16) الجواب: 24 مثلّث منفرج الزاوية.

17) الجواب: 20

18) الجواب: عدد متوازيات الأضلاع 60 حيثُ:

$$\binom{5}{2}.\binom{4}{2} = \frac{5\times 4}{2\times 1}\times\frac{4\times 3}{2\times 1} = 10\times 6 = 60$$

19) المستقيمات المتوازية:

$$\binom{4}{2}\binom{3}{2}+\binom{4}{2}\binom{2}{2}+\binom{3}{2}\binom{2}{2}$$

$$= (6)(3)+(6)(1)+(3)(1) = 27$$

20) توزيع 4 قوالب على أربع تلاميذ:

$$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$$

$n = 24\times 10 = 240$ طريقة

21) لدينا:

$$P_7^6 = 7.6.5.4.3.2 = 5040$$

22) لدينا:

$$\binom{10}{4} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$$

23) شركة توليدو:

عدد طرق اختيار مدير عام 15

عدد طرق اختيار أمين سر 14

وبالتالي:

$n = 15\times 14 = 210$ طريقة

24) الجواب: $\boxed{b: 504}$, التفسير:

$\{0,0,2,2,2,3,3,3,3\}$

$P_9^3 = 504$

25) الجواب: $\boxed{b: 42}$, التفسير:

$\{0,0,2\}\ \{0,0,3\} = 42$

26) الجواب: $\boxed{c: 132}$, التفسير:

$\{2,2,2\}\{2,3,3\}\{3,3,3\} = 132$

27) الجواب: $\boxed{d: 20}$, التفسير:

$$\binom{6}{3} = 20$$

28) الجواب: $\boxed{d: 60}$, التفسير:

$$P_5^2\times\frac{3!}{2!} = 20\times\frac{3\times 2\times 1}{2\times 1} = 60$$

29) الجواب: $\boxed{a: 90}$, التفسير:

$$5^2\frac{3!}{2!}+5^1\frac{3!}{2!}$$

$$25\times 3+15 = 90$$

30) الجواب: $\boxed{b: 5}$, التفسير:

$$P_5^1\times\frac{3!}{3!} = 5$$

31) الجواب: $\boxed{a: 156}$, التفسير:

$$5^3+1^3+5^2\times 1^1+5^1\times 1^1$$

$$= 125+1+25+5 = 156$$

32) الجواب: $\boxed{c: 80}$, التفسير:

$$P_5^3+P_5^2\times P_1^1$$

$$= 5\times 4\times 3+5\times 4\times 1$$

$$= 60+20 = 80$$

33) يمكن حساب المئات بـ 5 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 6 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 3 طريقة

$5.6.3 = 90$

34) يمكن حساب المئات بـ 6 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 6 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 1طريقة

$6.6.1 = 36$

35) نميز حالتين:

الحالة (1): إذا تم أخذ الصفر في خانة الآحاد:

يمكن حساب المئات بـ 5 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 4 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 1طريقة

$5.4.1 = 20$

الحالة (2): إذا لم يتم أخذ الصفر في خانة الآحاد:

يمكن حساب المئات بـ 4 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 4 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 1 طريقة

$$4.4.1 = 16$$

ومجموع الطرق الكلية:

$$20 + 16 = 36$$

36) الجواب:

5 نوطات ، 4 مكثفات

$$\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}_{\text{الخانات المتبقيّة}} \times \underbrace{3}_{\text{خانة 3}} \times \underbrace{4}_{\text{خانة 2}} \times \underbrace{5}_{\text{خانة 1}}$$

$$\Longrightarrow n = 43200$$

37) الجواب: اختيار لجنة مع تخاصم:

م : متخاصم (2)

مْ : غير متخاصم (5)

$$\left\{ \text{م م}' \text{م}' \times \frac{3!}{2!} \quad \text{أو} \quad \text{م م}' \text{م}' \right\}$$

$$\Longrightarrow n = 2 \times 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3$$
$$= 120 + 60 = 180$$

حول منشور ثنائي الحد

1) الجواب

2) الجواب

3) الجواب:

آحاد وعشرات العدد 11^{11} :

$$11^{11} = (1+10)^{11}$$
$$T_r = \binom{11}{r}(1)^{11-r}(10)^r$$
$$= \binom{11}{r}(10)^r$$

إذاً الحدود $T_1, T_2, \dots, T_{11}$ هي من مضاعفات المئة أي أنّ الآحاد والعشرات 1 لأنّ:

$$T_0 + T_1 = 111$$

4) الجواب:

5) الجواب:

6) الجواب:

$$f(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\binom{3}{0}.e^{3ix}.e^{-0xi} + \binom{3}{1}.e^{2xi}.e^{-1xi} + \binom{3}{2}.e^{1xi}.e^{-2xi} + \binom{3}{3}e^{0xi}.e^{-3xi}\right]$$
$$= \frac{1}{8}(e^{3xi} + 3e^{xi} + 3e^{-xi} + e^{-3xi})$$
$$= \frac{1}{8}(3[e^{xi} + e^{-xi}] + [e^{3xi} + e^{-3xi}])$$
$$= \frac{1}{8}(6\cos(x) + 2\cos(3x)$$
$$= \frac{6}{8}\cos(x) + \frac{2}{8}\cos(3x)$$
$$= \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$$

7) الجواب:

$$f(x) = \sin^3(x)$$
$$f(x) = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{xi} - e^{-xi})^3}{-8i}$$
$$= -\frac{1}{8i}\left[\binom{3}{0}e^{3xi}.e^{0xi} - \binom{3}{1}e^{2xi}.e^{-1xi} + \binom{3}{2}e^{1xi}.e^{-2xi} - \binom{3}{3}e^{0xi}.e^{-3xi}\right]$$
$$= -\frac{1}{8i}(e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} - e^{-3xi})$$
$$= -\frac{1}{8i}(2i\sin(3x) - 6i\sin(x))$$
$$= -\frac{2}{8}\sin(3x) + \frac{6}{8}\sin(x)$$

8) الجواب:

حسب اوبيتال:

$$\frac{-3sin(3x)}{-sin(x)} = \frac{3sin(3x)}{sin(x)}$$

$$lim_{x\to+\frac{\pi}{2}} \frac{3sin(3x)}{sin(x)} = -\frac{3}{1} = -3$$

9) الجواب:

الحد الذي يحوي x^2 :

$$T_r = \binom{n}{r}.a^{n-r}.b^r$$
$$T_r = \binom{10}{r}.x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{10}{r}.x^{10-2r}$$
$$10 - 2r = 2 \Longrightarrow r = 4$$
$$\Longrightarrow T_4 = \binom{10}{4}.x^2 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}x^2$$
$$\Longrightarrow T_4 = 210\,x^2$$

10) الجواب:

خواص n ليكون هناك حد ثابت:

$$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n \quad ; \quad a=x\,,b=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$T_r=\binom{n}{r}.x^{n-r}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$$

$$=\binom{n}{r}.x^{n-r}.x^{-\frac{1}{2}r}$$

$$=\binom{n}{r}.x^{n-\frac{3}{2}r}$$

$$n-\frac{3}{2}r=0\Longrightarrow n=\frac{3}{2}r\Longrightarrow r=\frac{2}{3}n$$

ومنه n يجب أن يكون من مضاعفات العدد 3

11) الجواب:

$$(2+10)^{12}=\binom{12}{r}2^{10-r}.10^r$$

$$T_0=\binom{12}{0}.2^{12}.10^0=4096$$

$$T_1=\binom{12}{1}2^{11}.10^1=245760$$

الآحاد: $T_0=4096$

العشرات: $T_0+T_1=4096+245760=249{,}856$

12) الجواب:

القيم المحتملة للمجموع $a+b$:

نجد أنّ $f'(a)=5a+4b$ وبحسب الفرض:

$$5a+4b=62$$

ولكن a و b موجبان

$$4(a+b)\le 5a+4b\le 5(a+b)$$

وهذا يكافئ:

$$\frac{62}{5}\le a+b\le\frac{62}{4}$$

$$\Longrightarrow 12.4\le a+b\le 15.5$$

$$\Longrightarrow a+b\in\{13\,,14\,,15\}$$

13) الجواب:

نعمل شبكة سحب تتالي بدون إعادة: نحذف

القطر الرئيسي:

-	1	1	2	2	3
1					
1					
2					
2					
3					

$$n=4$$

14) الجواب:

$$n=5$$

15) الجواب:

$$n=12$$

16) الجواب:

3 كتب لِـ A ، 4 كتب لِـ B

$$\underset{\text{خانة 7}}{\underbrace{1}}\times\underset{\text{خانة 6}}{\underbrace{2}}\times\underset{\text{خانة 5}}{\underbrace{3}}\times\underset{\text{خانة 4}}{\underbrace{4}}\times\underset{\text{خانة 3}}{\underbrace{2}}\times\underset{\text{خانة 2}}{\underbrace{3}}\times\underset{\text{خانة 1}}{\underbrace{4}}$$

$$\Longrightarrow n=576$$

17) الجواب:

3 كتب لِـ A ، 4 كتب لِـ B

$$1\times2\times3\times4\times5\times6\times\underset{\text{خانة 1}}{\underbrace{4}}$$

$$\Longrightarrow n=2880$$

18) الجواب:

$$\frac{1}{\binom{4}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r}}+\frac{1}{\binom{6}{r}}$$

$$\frac{1}{\frac{4!}{r!\,(4-r)!}}=\frac{1}{\frac{5!}{r!\,(5-r)!}}+\frac{1}{\frac{6i}{r!\,(6-r)!}}$$

$$\frac{(4-r)!}{\underset{(30)}{\underbrace{4\times3\times2\times1}}}=\frac{(5-r)!}{\underset{(6)}{\underbrace{5\times4\times3\times2\times1}}}+\frac{(6-r)!}{\underset{(1)}{\underbrace{6\times5\times4\times3\times2\times1}}}$$

$$\frac{30(4-r)!}{720}=\frac{6(5-r)!}{720}+\frac{1(6-r)!}{720}$$

$$\Longrightarrow 30(4-r)!=(6(5-r)(4-r)!)+(6-r)(5-r)(4-r)!$$

$$\Longrightarrow 30=30-6r+(6-r)(5-r)$$

$$\Longrightarrow 30=30-6r+30-6r-5r+r^2$$

$$\Longrightarrow r^2-17r+30=0$$

$$\Longrightarrow (r-15)(r-2)=0$$

$$\Longrightarrow r=15\quad,\quad r=2$$

19) الجواب:

مضاعفات 5 / أصغر من 500 :

شرط الآحاد $\{5\}$ ، شرط المئات $\{2\,,3\}$

عدد طرق اختيار الآحاد 1

عدد طرق اختيار العشرات 4

عدد طرق اختيار المئات 2

$\Rightarrow n = 1 \times 2 \times 4 = 8$

20) الجواب:

مصافحة مع 3 متخاصمين:

$$\binom{10}{2} - \binom{3}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} - 3$$

$$= 45 - 3 = 42 \text{ مصافحة}$$

مقدمة في الاحتمالات

التمرين (1)

1) $\{1, 3, 5\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2) $\{2, 3, 5\}$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3) $\{4, 5, 6\}$

$$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4) $C \cup B = \{2, 3, 5, 4, 5, 6\}$

$$P(C \cup B) = \frac{5}{6}$$

5) $A \cup B = \{1, 3, 5, 2, 3, 5\}$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

6) الجواب:

$$P(B \cap C) = \frac{1}{6}$$

7) الجواب:

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

8) الجواب:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

التمرين (2):

$$P(F \cap R) = P(F) + P(R) - P(A \cup R)$$

$$= \frac{30}{100} + \frac{40}{100} - \frac{60}{100}$$

$$= \frac{10}{100} = 10\%$$

يدرسون اللغتين معاً.

الاحتمال الشرطي

التمرين (1):

1) نكتب فضاء العينة:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} BBBB \\ BBBG, BBGB, BGBB, GBBB \\ GGGB, GGBG, GBGG, BGGG \\ BGBG, GBGB, BBGG, GGBB \\ BGGB, GBBG \\ GGGG \end{Bmatrix}$$

2) الجواب:

$$P(C) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

3) الجواب:

$$P(A) = \frac{2}{16}$$

4) الجواب:

$$P(B) = \frac{6}{16}$$

5) الجواب:

$$P(A \backslash C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{1}{8}$$

6) الجواب:

$$P(B \backslash C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{3}{8}$$

7) الجواب: مستقلان

8) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

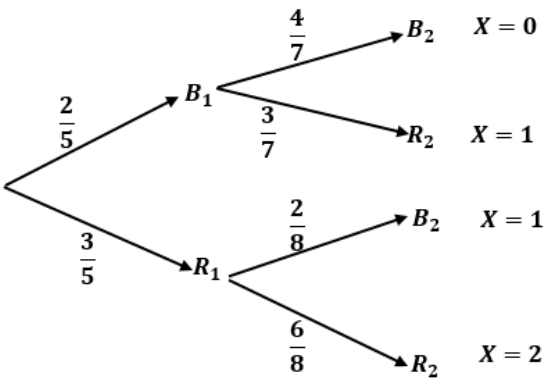
9) الجواب:

$$P(X = 4) = \frac{1}{16}$$

10) الجواب:

$$P(X = 1) = \frac{4}{16}$$

المسألة الأولى:



1) $P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2)$
$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{87}{140}$

2) S : $R_1 \cap R_2$ أو $B_1 \cap B_2$

$\Rightarrow P(S) = \frac{3}{5} \times \frac{6}{8} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{63}{140} + \frac{8}{35} = \frac{95}{140}$

3) $P(B_1) = \frac{2}{5}$

4) طريقة 1 :

S' : $R_1 \cap B_2$ أو $B_1 \cap R_2$

طريقة 2 :

$P(S') = 1 - P(S) = 1 - \frac{95}{140} = \frac{45}{140}$

5) $X = \{0\,,1\,,2\}$

6)

$E(x) = \frac{6}{35} + \frac{6}{40} + \frac{18}{40}$

المسألة الثانية:

-	B_2	B_1	R_1	R_2	w_1
B_2					
B_1					
R_1					
R_2					
w_1					

1) اهتمام باللون:

$P(A) = \frac{9}{25}$

2) $P(A') = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

3)

$P(C) = \frac{11}{25}$

4)

$P(D) = \frac{12}{25}$

5)

$P(A \cap C) = \frac{3}{25}$

المسألة الثالثة:

إعادة المسألة الثانية ولكن السحب دون إعادة.

	R_0	R_1	B_1	B_2	W_1
R_0	///////	$X=1$	$X=1$	$X=2$	$X=1$
R_1	$X=1$	///////	$X=2$	$X=3$	$X=2$
B_1	$X=1$	$X=2$	///////	$X=3$	$X=2$
B_2	$X=2$	$X=3$	$X=3$	///////	$X=3$
W_1	$X=1$	$X=2$	$X=2$	$X=3$	///////

1)

$P(A) = \frac{4}{20}$

2) $P(A') = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{14}{20} = \frac{16}{20}$

3)

$P(B) = \frac{8}{20}$

4)

$P(C) = \frac{12}{20}$

5) حدث مستحيل:

$P(D) = P(A \cap B) = 0$

$X = \{1\,,2\,,3\}$

x_i	1	2	3	$\sum$
P_i	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	1

$E(x) = \sum x_i P_i = \frac{6}{20} + \frac{16}{20} + \frac{18}{20} = \frac{40}{20} = 2$

المسألة الرابعة:

	R_0	R_1	B_1	B_2	W_1
R_0	//////	$X=1$	$X=1$	$X=2$	$X=1$
R_1	//////	//////	$X=2$	$X=3$	$X=3$
B_1	//////	//////	//////	$X=3$	$X=2$
B_2	//////	//////	//////	//////	$X=3$
W_1	//////	//////	//////	//////	//////

1)

$P(A) = \frac{5}{10}$

2)

$$P(B) = \frac{23}{10}$$

3)

$$P(C) = \frac{3}{10}$$

4)

$$P(D) = \frac{7}{10}$$

5) حدث مستحيل حيثُ:

$$P(A \cap C) = 0$$

6) $X = \{1\,,2\,,3\}$

x_i	1	2	3	$\sum$
P_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

7)

$$E(x) = \frac{3}{10} + \frac{6}{10} + \frac{12}{10} = \frac{21}{10}$$

8)

$$V(x) = \left(\frac{3}{10} + \frac{12}{10} + \frac{36}{10}\right) - \frac{441}{100} = \frac{4659}{100}$$

$$\Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{4659}{100}} = \frac{\sqrt{4659}}{10}$$

المسألة الخامسة:

سحب ثلاث كرات معاً:

$$n(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

1) A : RRR أو WWW

$$n(A) = \binom{6}{3} + \binom{3}{3} = 20 + 1 = 21$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{21}{120}$$

2) B : RRR'

$$\Rightarrow n(B) = \binom{6}{2}.\binom{4}{1} = 60$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{60}{120}$$

3) C : RWB

$$\Rightarrow n(C) = \binom{6}{1}.\binom{3}{1}.\binom{1}{1} = 18$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{18}{120}$$

4) D : $RR'R'$, RRR' , RRR

$$n(D) = \binom{6}{1}.\binom{4}{2} + \binom{6}{2}.\binom{4}{1} + \binom{6}{3}$$

$$= (6)(6) + (15)(4) + 20$$

$$= 36 + 60 + 20 = 116$$

$$\Rightarrow P(D) = \frac{116}{120}$$

المسألة السادسة:

$$6\,R \;\;,\;\; 3W \;\;,\;\; 1B$$

1) RRR أو WWW

$$P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} + \frac{3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8} = \frac{126}{720}$$

2) تباديل RRR'

$$P(B) = \frac{6 \times 5 \times 4}{720} \times \frac{3!}{2!} = \frac{360}{720}$$

3)

$$P(C) = \frac{6 \times 4 \times 1}{720} \times 6 = \frac{144}{720}$$

4) حدث ظهور ثلاث كرات غير حمراء

$$E' : \; R'R'R'$$

$$P(E') = \frac{4 \times 3 \times 2}{720} = \frac{14}{720}$$

$$\begin{cases} RR'R' \\ RRR' \\ RRR \end{cases} \Rightarrow P(E) = 1 - \frac{14}{720} = \frac{706}{720}$$

5)

$$P(D) = \frac{1 \times 9 \times 8}{720} \times 3 = \frac{216}{720}$$

المسألة السابعة:

1) RRR أو WWW أو BBB

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{244}{1000}$$

2) RRR' $\frac{3!}{2!}$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right)(3) = \frac{432}{1000}$$

3) RWB $\frac{3!}{1!}$

$$\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)(6) = \frac{108}{1000}$$

4) E حدث ظهور كرة حمراء على الأقل.

E' حدث ظهور ثلاث كرات غير حمراء.

$$E' : \; R'R'R'$$

$$\Rightarrow P(E') = \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{64}{1000}$$

$$\Rightarrow P(E) = 1 - \frac{64}{1000} = \frac{936}{1000}$$

5) F حدث ظهور كرة سوداء على الأقل.

F' حدث ظهور ثلاث كرات غير سوداء.

$F' : B'B'B'$

$$\Rightarrow P(F') = \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{729}{1000}$$

$$\Rightarrow P(F) = 1 - \frac{729}{1000} = \frac{271}{1000}$$

6) X يدل على السوداء

$X = 2 \quad BBB'$

$X = 3 \quad BBB$

$X = 0 \quad B'B'B'$

$X = 1 \quad BB'B'$

$\Rightarrow X = \{0\,,1\,,2\,,3\}$

المسألة الثامنة:

	B_1	B_2	B_3	R_1	R_2
B_1	///////	$X=1$	$X=1$	$X=2$	$X=2$
B_2	///////	///////	$X=1$	$X=2$	$X=2$
B_3	///////	///////	///////	$X=2$	$X=2$
R_1	///////	///////	///////	///////	$X=1$
R_2	///////	///////	///////	///////	///////

1)

$$P(A) = \frac{5}{10}$$

2)

$$P(B) = \frac{4}{10}$$

3)

$$P(B\backslash A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{1}{5}$$

4) X عدد الألوان

$$X = \{1\,,2\}$$

5)

x_i	1	2	$\sum$
P_i	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

$$E(x) = \frac{4}{10} + \frac{12}{10} = \frac{16}{10}$$

6)

$$V(x) = \left(\frac{4}{10} + \frac{24}{10}\right) - \left(\frac{16}{10}\right)^2$$

$$= \frac{26}{10} - \frac{256}{100} = \frac{4}{100}$$

7)

$$\gamma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10}$$

المسألة التاسعة:

	1	1	2	2	3
1	//////	$X=2$	$X=3$	$X=3$	$X=4$
1	$X=2$	//////	$X=3$	$X=3$	$X=4$
2	$X=3$	$X=3$	//////	$X=4$	$X=5$
2	$X=3$	$X=3$	$X=4$	//////	$X=5$
3	$X=4$	$X=4$	$X=5$	$X=5$	//////

X مجموع الرقم الظاهر:

$$X = \{2\,,3\,,4\,,5\}$$

x_i	2	3	4	5	$\sum$
P_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	1

$$E(x) = \frac{4}{20} + \frac{24}{20} + \frac{24}{20} + \frac{20}{20} = \frac{72}{20}$$

$$V(x) = \left(\frac{8}{20} + \frac{72}{20} + \frac{96}{20} + \frac{100}{20}\right) - \frac{5184}{400} = \frac{336}{400}$$

$$\Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{336}{400}}$$

المسألة العاشرة:

	R_1	B_2	B_3
R_1	$y=2$ $x=0$	$x=1$ $y=3$	$x=1$ $y=4$
B_2	$y=3$ $x=1$	$x=2$ $y=4$	$x=2$ $y=5$
B_3	$y=4$ $x=1$	$x=2$ $y=5$	$x=2$ $y=6$

قيم x :

$$x : \{0\,,1\,,2\}$$

قيم y :

$$y : \{2\,,3\,,4\,,5\,,6\}$$

قانون x :

$$P(X=0) = \frac{1}{9}$$

$$P(X=1) = \frac{4}{9}$$

$$P(X=2) = \frac{4}{9}$$

x_i	0	1	2	$\sum$
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

قانون y :

y_i	2	3	4	5	6	$\sum$
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

القانون الاحتمالي للزوج:

$X \setminus Y$	2	3	4	5	6	قانون x
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9}$
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
قانون y	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$$P(X = 0 \cap Y = 2) = \frac{1}{9}$$

دراسة الاستقلال:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$P(X = 0 \cap Y = 2) = \frac{1}{9}$$

$$P(X = 0).P(Y = 2) = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)$$

$\frac{1}{9} \neq \frac{1}{9}.\frac{1}{9}$ غير مستقلان

المسألة 11:

-	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

عبي القيم لحالك.

1) $P(X = 0) = \frac{18}{36}$

2) $P(Y = 2) = \frac{9}{36}$

3) لدينا:

$$P(X = 0 \cap Y = 2) = \frac{9}{36}$$

نختبر شرط الاستقلال:

$$P(X = 0).P(Y = 2) = \frac{18}{36}.\frac{9}{36} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 0 \cap Y = 2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

إذن غير مستقلان احتمالياً

المسألة 12:

$$E = \{X_A = 2\ , X_B = 1\} \cup \{X_A = 1\ , X_B = 2\} \cup \{X_A = 1\ , X_B = 1\}$$

$$\Rightarrow P(E) = [P(X_A\ , X_B) = (2\ , 1)] + [P(X_A, X_B) = (2\ , 1)] + [P(X_A\ , X_B) = (1\ , 1)\ ]$$

وبما أنّ الحدثان مستقلان احتمالياً:

$$P(X_A\ , X_B) = P(X_A).P(X_B)$$

$$\Rightarrow P(E) = 0.04 + 0.06 + 0.1 = 0.2$$

المسألة 13:

$X \setminus Y$	0	1	2	قانون x
0	0.12	0.20	0.08	0.4
1	0.06	0.10	0.04	0.20
2	0.12	0.20	0.08	0.4
قانون y	0.3	0.50	0.20	1.0

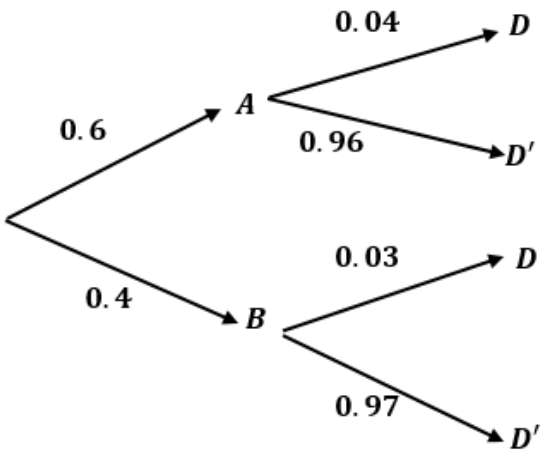
$$P(X = 1).P(Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1)$$

$$x \times 0.2 = 0.1 \Rightarrow x = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

وهكذا .....

قواعد استخدام التمثيل الشجري

المسألة الأولى :



1)

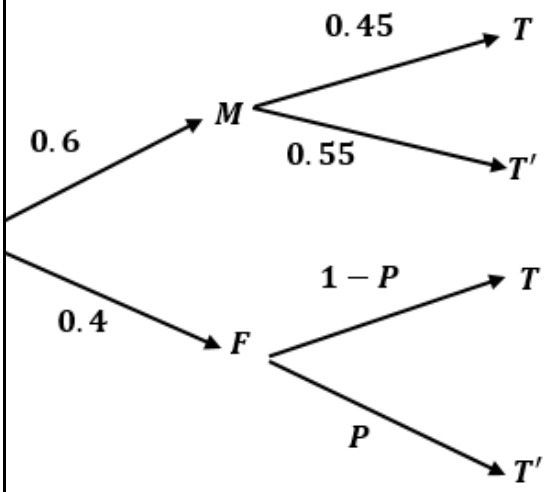
$$P(D) = (0.6)(0.004) + (0.4)(0.03) = 0.036$$

2)

$$P(A\backslash D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{(0.6)(0.04)}{0.036} = \frac{2}{3}$$

المسألة الثانية:

T يلعبون ، T' لا يلعبون



$$P(T'\backslash F) = ?$$

$$P(T'\backslash M) = 0.55$$
$$P(T) = 0.3$$
$$P(M) = 0.6$$

$$P(T) = 0.4(1-P) + (0.6)(0.45) = 0.925$$
$$= P(T'\backslash F)$$

المسألة الثالثة:

$$P(A).P(C) = P(A \cap C) \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}P\right) = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{18} + \frac{2}{9}P = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{9}P = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2}{9}P = \frac{2}{18} \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

المسألة الرابعة:

$$X = \{2, 3, 4\}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

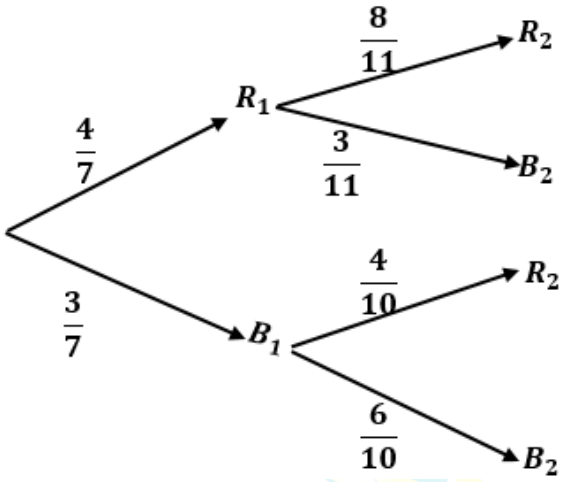
$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 4) = 1 - [P(X = 2) + P(X = 3)] = \frac{3}{5}$$

x_i	2	3	4
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

$$E(x) = 3.5$$

المسألة الخامسة:

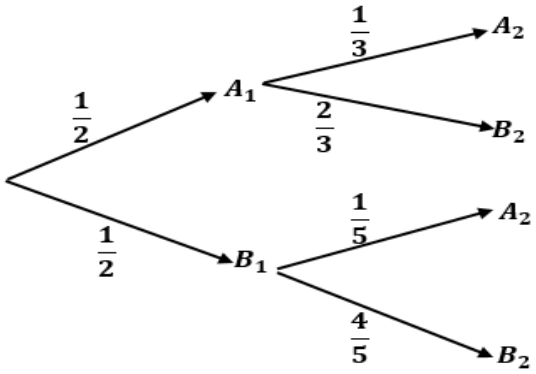


$$P(R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{8}{11} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{10} = \frac{32}{77} + \frac{12}{70} = \frac{3164}{5396} = \frac{791}{1349}$$

$$P(B_1\backslash R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{12}{70}}{\frac{791}{1349}} = \frac{12}{70} \times \frac{1349}{791} = \frac{16188}{55370}$$

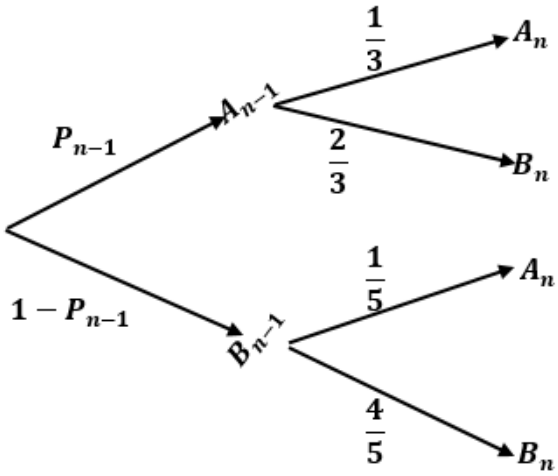
المسألة السادسة:

1)



$$P_2 = P(A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}$$

2)



$$P_n = P(A_n) = P_{n-1} \times \frac{1}{3} + (1 - P_{n-1}) \times \frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{15} P_{n-1}$$

3)

$$u_n = P_n - \frac{3}{13} = \frac{2}{15} P_{n-1} + \frac{1}{5} - \frac{3}{13}$$
$$= \frac{2}{15} P_{n-1} - \frac{2}{65}$$
$$= \frac{2}{15} u_{n-1}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{15} u_{n-1}$$

هندسية أساسها:

$$q = \frac{2}{15}$$

وحدّها الأوّل:

$$u_1 = P_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$$

4) $u_n = q^{n-1} . u_1$

$$\Rightarrow u_n = \frac{7}{26} \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$$
$$P_n = \frac{3}{13} + \frac{7}{26} \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$$
$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \frac{3}{13} + \frac{7}{26}(0) = \frac{3}{13}$$

المسألة السابعة:

1) الجواب:

$$c : \frac{1}{4}$$

2) الجواب:

$$c : \frac{1}{4} P(R_1) + \frac{1}{4}$$

3) الجواب:

$$c : \frac{1}{4} P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$$

4) الجواب:

$c : \frac{1}{4}$ هندسيّة أساسها

5) الجواب:

$$c : -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

6) الجواب:

$$c : \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{3}$$

التجربة البرنولية

التمرين (1):

تجربة برنوليّة: $n = 5$

1) $X = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

2) $P(X = 0) = ?$

$$P = \frac{2}{6} \quad ; \quad q = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$
$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5$$
$$= 1 \times \frac{32}{243} = \frac{32}{243}$$

3) $E(x) = n.P$

$$\Rightarrow E(x) = 5 \times \frac{2}{6} = \frac{10}{6}$$

4) $V(x) = n.q.P$

$$\Rightarrow V(x) = 5 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$$

التمرين (2):

n هي احتمال ظهور كتابة.

$2n$ هي احتمال ظهور صورة.

1) $X = \{0 , 1 , 2 , 3\}$

2) عدد مرات الرمي $n = 3$; $E(x) = n.p$

$$P = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow E(x) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

3) $V(x) = n.p.q$

$$\Rightarrow V(x) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

التمرين (3):

1) عدد الكرات البيضاء n

عدد الكرات الحمراء $3n$

$$3n + n = 4n$$

$$P(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

2) $X = \{0\,,1\,,2\,,3\}$

$$P = \frac{3}{4} \quad , \quad q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

والسحب هنا $n = 3$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

التمرين (4):

قيمة n : $n = 4$

قيمة P : لدينا:

$$P(X = 3) = \frac{1}{27}$$

$$\binom{3}{3}P^3q^{3-3} = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow P^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$$

قيمة q :

$$q = \frac{2}{3}$$

قيمة $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{3}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد