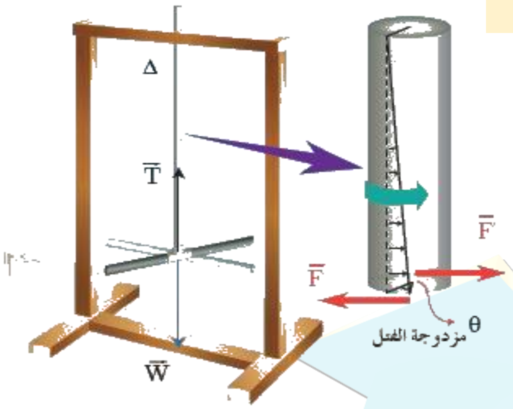
الدرس الثاني — الاهتزازات الدورانية غير المتخامدة
النواس الفتل

عرف النواس الفتل: هو عبارة عن ساق أو قرص متجانسة تعلق من مركزها بسلك فتل تهتز أفقياً حول محور شاقولي عند إزاحتها عن وضع التوازن الأفقي بزاوية θ

سؤال نظري -10- برهن في النواس الفتل أن العزم الحاصل هو عزم إرجاع .



جملة المقارنة : خارجية

القوى المؤثرة : $\vec{W}$ ثقل الساق (الجسم) , $\vec{T}$ توتر سلك التعليق

وعندما ندير الساق حول سلك الفتل تتولد مزدوجة فتل (عزم إرجاع) $\bar{\Gamma}_{\vec{\eta}} = -k\bar{\theta}$

$$\sum \bar{\Gamma}_{\vec{F}} = I_\Delta \bar{\alpha}$$

$$\Rightarrow \bar{\Gamma}_{\vec{\eta}} + \bar{\Gamma}_{\vec{T}} + \bar{\Gamma}_{\vec{W}} = I_\Delta \bar{\alpha}$$

- عزم كل من قوة الثقل $\Gamma_{\vec{W}} = 0$ وعزم قوة توتر السلك $\Gamma_{\vec{T}} = 0$ معدومين لأن حامل كل من القوتين منطبق على محور الدوران (سلك الفتل).

$$-k\bar{\theta} + 0 + 0 = I_\Delta \bar{\alpha}$$

$$\boxed{\sum \bar{\Gamma}_\Delta = \bar{\Gamma}_{\vec{\eta}}}$$

نجد أن المجموع الجبري للعزوم هو عزم إرجاع

سؤال نظري -11- انطلاقاً من العلاقة $-k\bar{\theta} = I_\Delta \bar{\alpha}$ استنتج طبيعة الحركة في النواس الفتل , ومن ثم استنتج دوره الخاص [دورة 2014-2017 الأولى]

التسارع الزاوي هو المشتق الثاني لتابع الفاصلة الزاوية $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t$

$$-k\bar{\theta} = I_\Delta (\bar{\theta})''_t \Rightarrow$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{k}{I_\Delta}\bar{\theta} \ldots (1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

نشتق مرتين:

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t = -\theta_{max}\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\boxed{\bar{\alpha} = -\omega_0^2\bar{\theta} \ldots (2)}$$

بالمساواة (1), (2) نجد: $-\omega_0^2\bar{\theta} = -\frac{k}{I_\Delta}\bar{\theta}$

النبض الخاص للنواس الفتل : $\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$

- **طبيعة حركة النواس الفتل : جيبية دورانية نبضها الخاص ω_0 بشرط I_Δ و k موجبان**

- **استنتاج الدور :** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}}$

أي أن الدور الخاص للنواس الفتل $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}}$

من علاقة الدور نستنتج :

- ✓ الدور لا يتعلق بالسعة θ_{max} ويقاس بالثانية (sec)
- ✓ الدور يتناسب طردا مع الجذر التربيعي لعزم عطالة جملة النواس حول محور الدوران (سلك الفتل) و واحدته $(kg.m^2)$
- ✓ الدور يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت فتل سلك التعليق $k = k'\frac{(2r)^4}{L}$ و واحدته **$(m.N.rad^{-1})$**

k' ثابت يتعلق بنوع مادة السلك . $2r$ قطر مقطع السلك . L طول السلك

تابعها الزمني للمطال الزاوي $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

- $\bar{\theta}$: المطال الزاوي في اللحظة ويقدر بالراديان rad
- θ_{max} : المطال الأعظمي الزاوي (السعة الزاوية) وتقدر بالراديان rad
- ω_0 : النبض الخاص للحركة ويقدر $rad.s^{-1}$
- $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$: طور الحركة في اللحظة t
- $\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي في اللحظة $t = 0$ ويقدر بالراديان rad
- ندعو كل من $\bar{\varphi}$, ω_0 , θ_{max} ثوابت الحركة

ملاحظات حل النواس الفتل:

1. الدور الخاص للنواس الفتل وواحدته [sec] T_0 حسب المعطيات من إحدى الطرق الثلاثة

$$T_0 \begin{cases} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} \\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_{0\,\text{النبض}}} \\ T_{0\,\text{تجريبياً}} = \frac{t\ \text{زمن الهزات}}{N\ \text{عدد الهزات}} \end{cases}$$

الدور الخاص للنواس الفتل: $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}}$

- ✓ الدور الخاص للنواس الفتل لاعلاقة له بالجاذبية g ولا بسعة الاهتزاز θ_{max} (يعني لما يغيرن يبقى الدور كما هو $T'_0 = T_0$)
- ✓ الدور الخاص للنواس الفتل له علاقة بعزم العطالة للنواس I_Δ (تناسب طردي) وبثابت فتل سلك الفتل k(تناسب عكسي)

2. عزم العطالة I_Δ :

$I_{\Delta/m}$: عزم عطالة أي نقطة مادية (كتلة نقطية) هو جداء الكتلة بمربع بعدها عن محور ثابت (سلك الفتل)

$$I_{\Delta/m} = m.r^2 \begin{cases} r = \frac{L}{2} \xrightarrow{\text{الكتل على طرفي الساق}} I_{\Delta/m} = m.\frac{L^2}{4} \\ I_{\Delta/m} = m.r^2\ \text{الكتلة على محيط القرص} \end{cases}$$

$I_{\Delta/c}$: عزم عطالة الجسم (ساق أو قرص) حول محور مار من منتصفه وعمودي على مستويه .

$I_{\Delta/c}$ معطى بنص المسألة $\begin{cases} I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}.mL^2\ \text{للساق} \\ I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}.mr^2\ \text{للقرص} \end{cases}$

$I_{\Delta/جملة}$ عزم عطالة الجملة بوجود كتل نقطية: هو مجموع عزوم عطالة مكونات النواس

$$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/c_{جسم(ساق\ أو\ قرص)}} + 2.I_{\Delta/m_1}$$

خلاصة عزم العطالة بالنواس الفتل I_Δ:
- لايوجد كتل: $I_{\Delta/c_{جسم(ساق\ أو\ قرص)}}$
- بوجود كتل: $I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/c_{جسم(ساق\ أو\ قرص)}} + 2.I_{\Delta/m_1}$

ثابت فتل السلك k: $(m.N.rad^{-1})$

✓ إذا أعطانا النبض الخاص ω_0: $\boxed{k = I_\Delta.\omega_0^2}$

✓ أو نحسبه من علاقة الدور بعد تربيعها: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} \xrightarrow{نربع} T_0^2 = 4\pi^2\frac{I_\Delta}{k} \Rightarrow \boxed{k = 4\pi^2\frac{I_\Delta}{T_0^2}}$

1. ملاحظات للاختيار من متعدد:

قانون ثابت فتل السلك $\boxed{K = k'\frac{(2r)^4}{L}}$ **تستخدم هذه العلاقة فقط عند التغير في سلك الفتل**

حيث: k': ثابت يتعلق بنوع السلك $2r$: قطر مقطع السلك (ثخنه) L: طول السلك

$\sqrt{L} \xrightarrow{عكساً} \sqrt{K} \xrightarrow{عكساً} T_0$ لما يغير طول سلك الفتل ويطلب T_0' الجديد هنا فقط نجذر نسبة الطول الجديد

✓ نجعل طول سلك الفتل أربع أضعاف ما كان عليه فيكون الدور الجديد: $T_0' = 2T_0$

✓ نجعل طول سلك الفتل ثلاثة أرباع ما كان عليه فيكون الدور الجديد: $T_0' = \frac{\sqrt{3}}{2}T_0$

✓ نحذف ثلاثة أرباع طول سلك الفتل فيكون الدور الجديد: $T_0' = \frac{1}{2}T_0$
(الطول الجديد هنا هو الربع لأنه حذف ثلاثة أرباع من طوله)

✓ نقسم سلك الفتل قسمين (متساويين ، ربع وثلاثة أرباع ، ثلث وثلثين) فيكون الدور الجديد بعد تعليق الساق بجزأي السلك معاً أحدهما من الأعلى والآخر من الأسفل ويطلب T_0' الجديد هنا نضرب نسبتي الطولين ونجذرهما .

- قسمين متساويين: $\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{T_0' = \frac{1}{2}T_0}$
- ثلث وثلثين: $\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{T_0' = \frac{\sqrt{2}}{3}T_0}$
- ربع وثلاثة أرباع: $\sqrt{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}} \rightarrow \boxed{T_0' = \frac{\sqrt{3}}{4}T_0}$

2. ملاحظات للمسائل وخصوصاً عند الدمج مع الثقلي المركب:

عند إضافة كتل على النواس فإن الذي يتغير هو عزم العطالة أما ثابت فتل السلك فلا يتغير وعند طلب الدور الجديد هنا ، ننسب الدورين

- الدور بدون كتل $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c_{جسم}}}{k}}$: $I_{\Delta/c_{جسم(ساق\ أو\ قرص)}}$ معطى بنص المسألة
- الدور بوجود كتل $T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{k}}$: $I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/c_{جسم(ساق\ أو\ قرص)}} + 2.I_{\Delta/m_1}$

$$\frac{T'_0}{T_0} \xrightarrow{ننسب\ الدورين} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c_{جسم}}}{k}}} \xrightarrow{نختصر\ k} \frac{T'_0}{T_0} = \sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{I_{\Delta/c_{جسم}}}}$$

نعوض قيم العزوم ونعزل المجهول المطلوب

إذا علقنا الساق بسلكي فتل معاً أطوالهما L_2, L_1 أحدهما من الأعلى والآخر من الأسفل وطلب حساب الدور الجديد .

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k_{جملة}}} : \xrightarrow{k_{جملة}=k_1+k_2} \begin{cases} k_1 = k'\frac{(2r)^4}{L_1} \\ k_2 = k'\frac{(2r)^4}{L_2} \end{cases} : \xrightarrow{\text{السلكين متماثلين}} L_1 = L_2 \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{2k_1}}$$

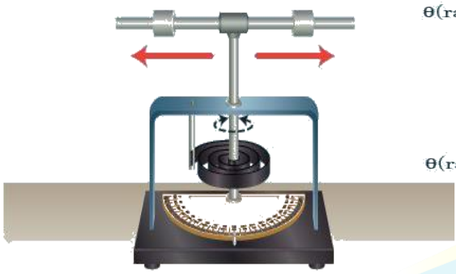
التشابه الشكلي بين النواس المرن والنواس الفتل

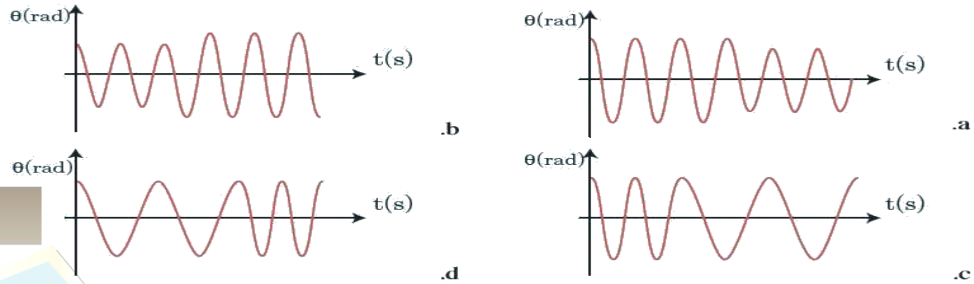
هزازة جيبية انسحابية	مرن (خطي)	هزازة جيبية دورانية	فتل (زاوي)
تابع المطال	$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	تابع المطال الزاوي	$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$
تابع السرعة الخطية	$\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	تابع السرعة الزاوية	$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$
السرعة الخطية العظمى (طويلة)	$v_{max} = \omega_0 X_{max}$	السرعة الزاوية العظمى (طويلة)	$\omega_{max} = \omega_0\theta_{max}$
العلاقة الذهبية للسرعة الخطية	$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$	العلاقة الذهبية للسرعة الزاوية	$\omega = \omega_0\sqrt{\theta_{max}^2 - \theta^2}$
التسارع الخطي	$\bar{a} = -\omega_0^2\bar{x}$	التسارع الزاوي	$\bar{\alpha} = -\omega_0^2\bar{\theta}$
التسارع الأعظمي (طويلة)	$a_{max} = \omega_0^2 X_{max}$	التسارع الأعظمي (طويلة)	$\alpha_{max} = \omega_0^2\theta_{max}$
الدور الخاص	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	الدور الخاص	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$
ثابت صلابة النابض	$(N.m^{-1})\ k = m.\omega_0^2$	ثابت فتل السلك	$(m.N.rad^{-1})\ k = I_\Delta.\omega_0^2$
قوة الإرجاع	$\bar{F} = -K_{صلابة}.\bar{x}$	عزم الإرجاع (الفتل)	$\bar{\Gamma} = -K_{فتل}.\bar{\theta}$
النبض الخاص	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	النبض الخاص	$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$
الطاقة الكلية (الميكانيكية)	$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2$	الطاقة الكلية (الميكانيكية)	$E_{tot} = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2$
الطاقة الكامنة المرونية	$E_P = \frac{1}{2}kX^2$	الطاقة الكامنة	$E_P = \frac{1}{2}k\theta^2$
الطاقة الحركية الانسحابية	$E_k = \frac{1}{2}m.v^2$	الطاقة الحركية الدورانية	$E_k = \frac{1}{2}I_\Delta.\omega^2$
كمية الحركة الانسحابية	$(kg.m.s^{-1})\ P = m.v$	العزم الحركي الدوراني	$L = I_\Delta.\omega$ $(kg.m^2.rad.s^{-1})$
سرعة المرور الأول بوضع التوازن بشرط ($t = 0$, $\theta = \pm\theta_{max}$)	$v = -\omega_0 X_{max}$	سرعة المرور الأول بوضع التوازن بشرط ($t = 0$, $\theta = \pm\theta_{max}$)	$\omega = -\omega_0\theta_{max}$

- **اختبر نفسي:**

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1- يهتز نواس فتل بدور خاص T_0، في لحظة ما أثناء حركته ابتعدت الكتلتان عن محور الدوران بالمقدار نفسه كما هو موضح بالشكل. فالرسم البياني الذي يعبر عن تغير المطال مع الزمن في هذه الحالة هو:



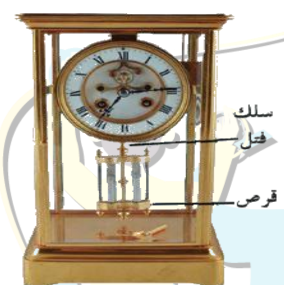


1- **الإجابة الصحيحة:** هي c)

توضيح اختيار الإجابة: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$

إن I_Δ عزم عطالة النواس يزداد و بالتالي سيزداد الدور (أي ينقص التواتر).

2- ميقاتية تعتمد في عملها على نواس فتل كما في الشكل المجاور، ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها، قدم الطلاب مقترحاتهم، فإن الاقتراح الصحيح هو:



.a **زيادة طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.**

.b **زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره.**

.c **إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.**

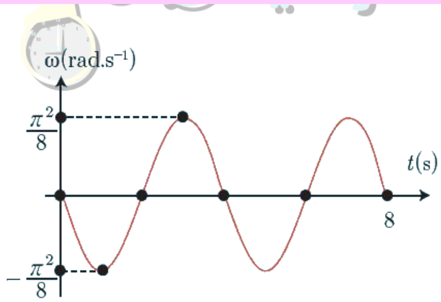
.d **زيادة قطر القرص مع المحافظة على كتلته.**

الإجابة الصحيحة: c)

توضيح اختيار الإجابة: التأخير بالوقت يعني الدور أكبر من $2s$ ويجب إنقاصه لذا يجب إنقاص l طول سلك الفتل بمقدار ضئيل

$T_0 = const\sqrt{l}$

3- يمثل الرسم البياني المجاور تغيرات السرعة الزاوية لنواس فتل بتغير الزمن، فإن تابع السرعة الزاوية الذي يمثله هذا المنحني هو



.a $\bar{\omega} = \frac{\pi^2}{8}\sin 3\pi t$

.b $\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8}\sin 2\pi t$

.c $\bar{\omega} = +\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{2}t$

.d $\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{2}t$

الإجابة الصحيحة: d) $\omega = -\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{2}t$

توضيح اختيار الإجابة: من الشكل نجد: $\omega_{\max} = \frac{\pi^2}{8} rad.s^{-1}$ $2T_0 = 8 \Longrightarrow T_0 = 4s$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}$	نعوض شروط البدء $(t = 0 ، \omega = 0)$ في التابع الزمني للسرعة الزاوية $\bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ $0 = -\omega_0\theta_{max}\sin(0 + \bar{\varphi})$ $\sin(\bar{\varphi}) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

سؤال نظري -12- انطلاقاً من مصونية الطاقة الميكانيكية برهن أن حركة نواس الفتل حركة جيبية دورانية .

تذكرة بالاشتقاق الضمني :

مشتق المقدار الثابت هو صفر أي أن مشتق الطاقة الميكانيكية E_{tot} بالنسبة للزمن هو صفر

مشتق المطال الزاوي بالنسبة للزمن هو السرعة الزاوية $(\bar{\theta})_t{}' = \bar{\omega}$

مشتق السرعة الزاوية بالنسبة للزمن هو التسارع الزاوي $(\bar{\omega})_t{}' = \bar{\alpha}$.

ونحن نعلم أن المشتق الضمني لتابع $\xRightarrow{\text{إذا كان}} f(t) = \bar{y}^2 \Rightarrow f'(t) = 2\bar{y}.\bar{y}' = 2\bar{y}(\bar{y})_t{}'$

أي أن $f(t) = \theta^2 \Rightarrow f'(t) = 2\bar{\theta}.(\bar{\theta})_t{}' = 2\bar{\theta}\bar{\omega}$, $f(t) = \omega^2 \Rightarrow f'(t) = 2\bar{\omega}.(\bar{\omega})_t{}' = 2\bar{\omega}\bar{\alpha}$

الحل :

$$E_{tot} = E_P + E_k = const$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 \dots\dots\dots (*)$$

نطبق التذكرة و نشتق طرفي العلاقة (*)بالنسبة للزمن نجد : $0 = \frac{1}{2}k\,2(\bar{\theta}\bar{\omega}) + \frac{1}{2}I_\Delta 2(\bar{\omega}\bar{\alpha}) \Longrightarrow 0 = \frac{1}{2}k\,2(\bar{\theta}\bar{\omega}) + \frac{1}{2}I_\Delta 2(\bar{\omega}\bar{\alpha})$

$$0 = k(\bar{\theta}) + I_\Delta(\bar{\theta})_t''$$

$(\bar{\theta})''_t = -\frac{k}{I_\Delta}(\bar{\theta}) \dots\dots(1)$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقق من صحة الحل: نشتق التابع (2) مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$(\bar{\theta})'_t = \bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = \bar{\alpha} = -\omega_0^2\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \dots\dots(2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجد أنَّ: $\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta}$

ومنه $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$ وهذا محقق لأنّ k , I_Δ موجبان **و بالتالي حركة نواس الفتل حركة جيبية دورانية.**

تابعها الزمني للمطال الزاوي : $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

سؤال نظري -13- **نعلق ساقين متماثلتين بسلكي فتل متماثلين طول الأول l_1 وطول الثاني l_2 فإذا علمت أن $T_{0_1} = 2T_{0_2}$ ، أوجد العلاقة بين طولي السلكين.**

الحل: **إن كل ساق معلقة من منتصفها بسلك فتل تشكل لنا نواس فتل أي لدينا نواسي فتل نكتب علاقة الدور الخاص للنواس الفتل ونعوض قانون ثابت فتل السلك فيها ونوجد علاقة الدور الخاص بطول سلك الفتل**

نحن نعلم أن علاقة ثابت فتل السلك $k = k'\frac{(2r)^4}{l}$, نعوض هذه العلاقة بقانون الدور نجد :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k'\frac{(2r)^4}{l}}} \xRightarrow{\text{نضرب بمقلوب المقام}} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta l}{k'(2r)^4}}$$

$\Rightarrow T_0 = const\sqrt{l}$ [علاقة الدور الخاص بطول سلك الفتل [تناسب طردي

للنواس الأول : $T_{01} = const\sqrt{l_1}$

للنواس الثاني : $T_{0_2} = const\sqrt{l_2}$

بأخذ النسبة لدوري النواسين نجد : $\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \frac{const\sqrt{l_1}}{const\sqrt{l_2}}$

$$\xRightarrow[T_{0_1}=2T_{0_2}]{\text{من الفرض}} \frac{2T_{0_2}}{T_{0_2}} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}} \xRightarrow{\text{نربع الطرفين}} \frac{4}{1} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow \boxed{l_1 = 4l_2}$$

ثالثاً: حل المسائل الآتية، في جميع المسائل [$4\pi = 12.5$, $\pi^2 = 10$, $g = 10m.s^{-2}$]

المسألة الأولى (درس) يتألف نواس فتل من قرص متجانس كتلته $m = 2kg$، نصف قطره $r = 4\ cm$، معلق من مركزه إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $k = 16 \times 10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$ ، ندير القرص في مستوٍ أفقي زاوية $\theta = +\frac{\pi}{4} rad$ عن وضع توازنه، ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$، **المطلوب:**

1- احسب الدور الخاص للنواس.

2- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.

3- احسب الطاقة الكامنة في وضع مطاله الزاوي $\theta = \frac{\pi}{8} rad$ ، ثم احسب الطاقة الحركية عندئذٍ.

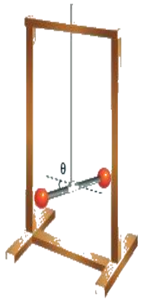
(عزم عطالة قرص حول محور عمودي على مستويه ومار من مركزه $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} mr^2$).

الحل

المسألة الثانية (درس) ساق **مهملة الكتلة** طولها L، نثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية $125\ g$ ، ونعلق الجملة من منتصفها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $16 \times 10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$ لتؤلف الجملة نواس فتل، نزيح الساق عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3} rad$ ونترك دون سرعة ابتدائية لحظة بدء الزمن، فتهتز بحركة جيبية دورانية، دورها الخاص $2.5\ s$، **المطلوب:**

1. استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.
2. احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها بوضع التوازن.
3. احسب طول الساق.

الحل



المسألة الثالثة(درس) ساق أفقية متجانسة طولها $L = ab = 40\ cm$ معلقة بسلك فتل شاقولي يمر من منتصفها.
ندير الساق في مستو أفقي بزاوية $\theta = 60°$ انطلاقاً من وضع توازنها، ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 1s$ فإذا علمت أن عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك الفتل $I_{\Delta/c} = 2 \times 10^{-3} kg.m^2$، **المطلوب:**

1. استنتج التابع الزمني للمطال الزاوية انطلاقاً من شكله العام.
2. احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن.
3. احسب قيمة التسارع الزاوي للساق عندما تصنع زاوية $(-30°)$ مع وضع توازنها.

a. نثبت بالطرفين a , b كتلتين نقطيتين $m_1 = m_2 = 75\ g$ استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للجملة المهتزة، ثم احسب قيمة ثابت فتل السلك.

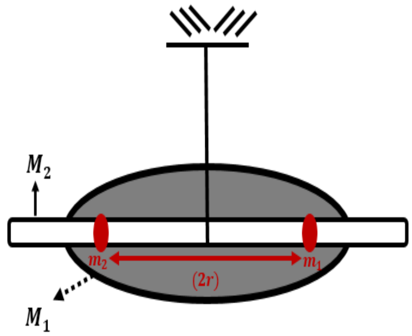
b. نقسم سلك الفتل قسمين متساويين، ونعلق الساق بعدئذٍ بنصفي السلك معاً؛ أحدهما من الأعلى ، و الآخر من الأسفل ومن منتصفها، و يثبّت طرف هذا السلك من الأسفل بحيث يكون شاقولياً. استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للساق (دون وجود كتل نقطية) افترض $\pi^2 = 10$

الحل

طلبات إضافية

1) نجعل طول سلك الفتل ضعفي ما كان عليه احسب قيمة الدور الجديد للجملة.	2) نقسم سلك الفتل إلى قسمين احداهما $\left(L_1 = \frac{1}{3}L\right)$ والآخر $\left(L_2 = \frac{2}{3}L\right)$ ونعلق الساق من منتصفها بجزأي السلك معاً أحدهما من الأعلى والأخر من الأسفل ، احسب الدور الجديد للجملة.

المسألة (3) عامة



تتألف ميقاتية من قرص نحاسي كتلته $M_1 = 0.12\ kg$ ، نصف قطره $R = 0.05\ m$ مثبت عليه ساق كتلتها $M_2 = 0.012\ kg$، طولها $L = 0.1\ m$ تحمل في طرفيها كتلتين متساويتين $m_1 = m_2 = 0.05\ kg$ نعدهما كتلتين نقطيتين تبعدان مسافة قدرها $2r = 0.04\ m$ يمكن تغييرها بواسطة بزال، نعلق الجملة من مركز عطالتها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $k = 8 \times 10^{-4} m.N.rad^{-1}$ كما في الشكل المجاور. **المطلوب:**

1- احسب دور الميقاتية.

2- إذا أردنا للدور أن يزداد بمقدار $0.86\ s$ وذلك بزيادة البعد بين الكتلتين m. كم يجب أن يصبح البعد الجديد بينهما؟

(عزم عطالة القرص حول محور مار من مركز عطالته $I_1 = \frac{1}{2} M_1 R^2$، وعزم عطالة الساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركزها $I_2 = \frac{1}{12} M_2 L^2$) $\pi = 3.14$ ، $\pi^2 = 10$)

المعطيات بعد التحويل: $M_1 = 12 \times 10^{-2}\ kg$ ، $R = 5 \times 10^{-2}\ m$ ، $M_2 = 12 \times 10^{-3}\ kg$ ، $L = 10^{-1}\ m$ ، $m_1 = m_2 = 5 \times 10^{-2}\ kg$ ، بعد الكتلة النقطية عن سلك الفتل : $2r = 0.04\ m \Longrightarrow r = 2 \times 10^{-2}\ m$

الحل:

نموذج مؤتمت في النواس الفتل

1- تعطى علاقة عزم الإرجاع في النواس الفتل بالعلاقة:							
A	$\Gamma = -K\theta$	B	$\Gamma = +K\theta$	C	$\Gamma = -\frac{K}{\theta}$	D	$\Gamma = -K^2\theta$
2- المعادلة التفاضلية في النواس الفتل:							
A	$(\theta)'' = +\frac{K}{I_\Delta}\theta$	B	$(\theta)'' = -\frac{K}{I_\Delta}$	C	$(\theta)'' = -\frac{I_\Delta}{K}\theta$	D	$(\theta)'' = -\frac{K}{I_\Delta}\theta$
3- عند دراسة حركة نواس الفتل غير المتخامد نستخدم العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني:							
A	$\Delta E_k = \Sigma \overline{W}_{\vec{F}}$	B	$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}$	C	$\Sigma \overline{\Gamma}_\Delta = I_\Delta \alpha$	D	$\overline{\Gamma}_{\vec{\eta}/_\Delta} = -k.\theta$
4- يعطى ثابت فتل السلك k لنواس فتل غير متخامد بالعلاقة:							
A	$k = \acute{k}\frac{(l)^4}{2r}$	B	$k = \acute{k}\frac{(2r)}{l}$	C	$\acute{k} = k\frac{(2r)^4}{l}$	D	$k = \acute{k}\frac{(2r)^4}{l}$
5- يقاس ثابت فتل السلك k لنواس فتل غير متخامد بواحدة:							
A	$kg.m^{-2}$	B	$rad.s^{-2}$	C	$m.N.rad^{-1}$	D	$kg.m^2$
6- يقاس عزم عطالة ساق(أو قرص) I_Δ نواس الفتل غير المتخامد بواحدة:							
A	$kg.m^{-2}$	B	$rad.s^{-2}$	C	$m.N.rad^{-1}$	D	$kg.m^2$
7- علاقة السرعة الزاوية (العظمى طويلة):							
A	$\omega = \omega_0\theta$	B	$\omega_{max}\| = \mp\omega_0^2\theta_{max}\|$	C	$\omega = \omega_0 + \theta_{max}$	D	$\omega_{max} = \|\mp\omega_0\theta_{max}\|$
8- علاقة التسارع الزاوي :							
A	$\alpha = \|-\omega_0^2\theta_{max}\|$	B	$\alpha = -\omega_0^2\theta_{max}$	C	$\alpha = \omega_0\theta_{max}$	D	$\alpha = -\omega_0^2\theta$
9- تعطى علاقة النبض الخاص في نواس الفتل:							
A	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}$	B	$\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$	C	$\omega_0 = \frac{k}{I_\Delta}$	D	$\omega_0 = \sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$
10- علاقة الدور الخاص في نواس الفتل:							
A	$T_0 = 2\pi\frac{k}{I_\Delta}$	B	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$	C	$T_0 = 2\pi\frac{k}{I_\Delta}$	D	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}$
11- نواس فتل نبضه الخاص ω_0 نزيد كتلته العطالية أربعة أمثال ما كانت عليه يصبح النبض الخاص الجديد:							
A	$\omega_0' = \sqrt{3}\omega_0$	B	$\omega_0' = 3\omega_0$	C	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{2}$	D	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$
12- نواس فتل نبضه الخاص ω_0 نستبدل سلك الفتل بسلك آخر ثابت فتله $k' = 3k$							
A	$\omega_0' = \sqrt{3}\omega_0$	B	$\omega_0' = 3\omega_0$	C	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{3}$	D	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$

13- نواس فتل دوره الخاص T_0 نجعل طول سلك الفتل نصف ما كان عليه فيصبح الدور الجديد:

A	$T_0' = \sqrt{2}T_0$	B	$T_0' = 2T_0$	C	$T_0' = \frac{T_0}{2}$	D	$T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$

14- نواس فتل دوره الخاص T_0 نجعل طول سلك الفتل ربع ما كان عليه فيصبح الدور الجديد:

A	$T_0' = 4T_0$	B	$T_0' = 2T_0$	C	$T_0' = \frac{T_0}{2}$	D	$T_0' = \frac{T_0}{4}$

15- نواس فتل دوره الخاص T_0 نجعل طول سلك الفتل ثلث ما كان عليه فيصبح الدور الجديد:

A	$T_0' = \frac{T_0}{3}$	B	$T_0' = \sqrt{3}T_0$	C	$T_0' = 3T_0$	D	$T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{3}}$

16- نواس فتل نبضه الخاص ω_0 نجعل طول سلك الفتل ثلث ما كان عليه فيصبح النبض الجديد:

A	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{3}$	B	$\omega_0' = \sqrt{3}\omega_0$	C	$\omega_0' = 3\omega_0$	D	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$

17- نواس فتل نبضه الخاص ω_0 نجعل طول سلك الفتل ربع ما كان عليه فيصبح النبض الجديد:

A	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{4}$	B	$\omega_0' = 2\omega_0$	C	$\omega_0' = 4\omega_0$	D	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{2}$

18- نواس فتل دوره الخاص T_0 نقسم طول السلك إلى قسمين متساوين ونعلق ساق بالقسمين معاً من الأعلى ومن الأسفل فيكون الدور الخاص الجديد:

A	$T_0' = \frac{T_0}{2}$	B	$T_0' = 2T_0$	C	$T_0' = 4T_0$	D	$T_0' = 4T_0$

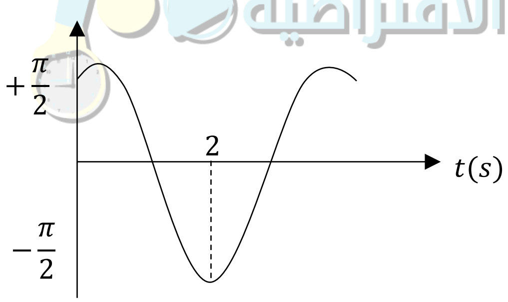
19- نواس فتل دوره الخاص T_0 نضاعف سعة الاهتزاز يصبح الدور الجديد:

A	$T_0' = 2T_0$	B	$T_0' = T_0$	C	$T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$	D	$T_0' = \frac{T_0}{2}$

20- نواس فتل نبضه الخاص ω_0 نضاعف سعة الاهتزاز يصبح النبض الجديد:

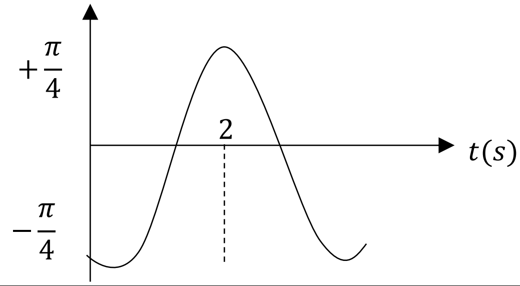
A	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{2}$	B	$\omega_0' = 2\omega_0$	C	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$	D	$\omega_0' = \omega_0$

21- يمثل الرسم البياني المجاور تغيرات المطال الزاوي لنواس فتل بتغير الزمن فإن التابع الذي يمثله هذا المنحني هو:



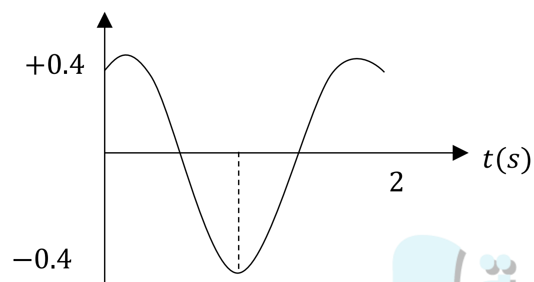
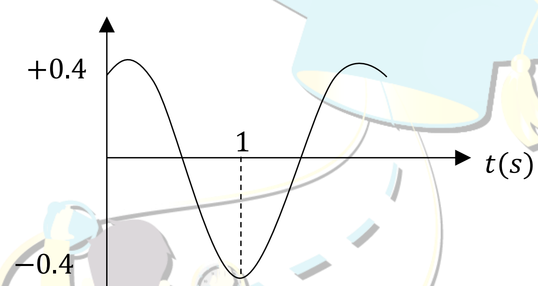
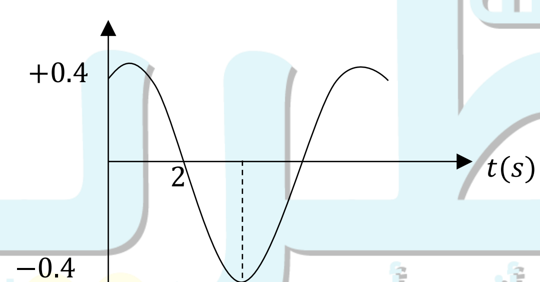
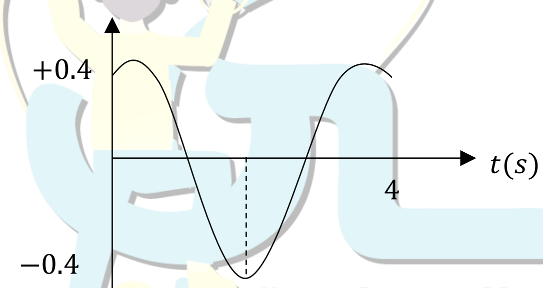
A	$\theta = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$	B	$\theta = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t + \pi)$
C	$\theta = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2})$	D	$\theta = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$

22- يمثل الرسم البياني المجاور تغيرات المطال الزاوي لنواس فتل بتغير الزمن فإن تابع التسارع الزاوي الذي يمثله هذا المنحني هو:

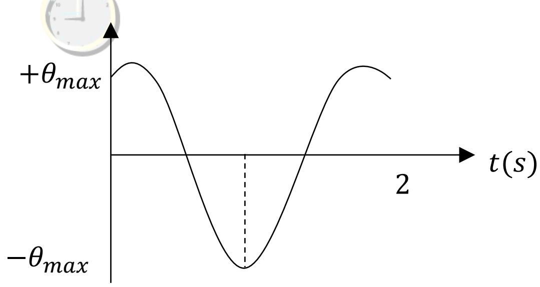


A	$\alpha = -\frac{\pi^3}{8}\cos(\frac{\pi}{2}t+\pi)$	B	$\theta = \frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{2}t+\pi)$
C	$\alpha = \frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2})$	D	$\theta = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$

23- الخط البياني الذي يمثل تغيرات المطال الزاوي لنواس فتل بتغير الزمن وفق التابع الآتي $\theta = 0.4\cos\frac{\pi}{2}t$ هو :

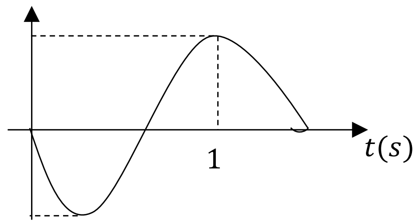
A		B	
C		D	

24- يمثل الخط البياني المجاور تغيرات المطال الزاوي بدلالة الزمن في النواس الفتل غير المتخامد فيكون التسارع الزاوي هو:



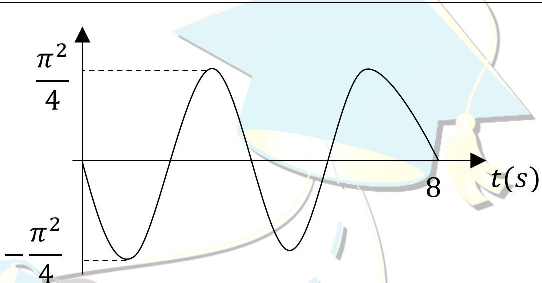
A	$\alpha = -\pi.\theta$	B	$\alpha = -\pi.\theta_{max}$
C	$\alpha = -\pi^2.\theta^2$	D	$\alpha = -\pi^2.\theta$

25- يمثل الخط البياني المجاور تغيرات السرعة الزاوية بدلالة الزمن في النواس الفتل غير المتخامد علماً أن قيمة السرعة الزاوية العظمى طويلة
$-0.6\pi \text{rad}.s^{-1}$
فيكون التابع الزمني للمطال الزاوي هو:



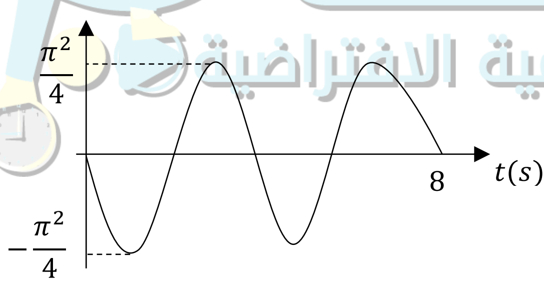
A	$\theta = 0.4\ \cos(\frac{3\pi}{2}t)$	B	$\theta = -0.6\ \sin(2\pi t + \frac{3\pi}{2})$
C	$\theta = 0.4\ \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})$	D	$\theta = 0.6\pi\ \cos(\frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})$

26- يمثل الخط البياني المجاور تغيرات السرعة الزاوية بدلالة الزمن في النواس الفتل غير المتخامد فتكون السعة الزاوية هو:



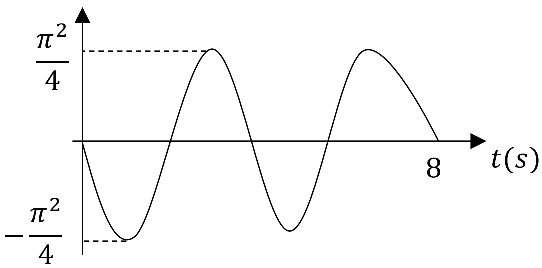
A	$\theta_{max} = +\frac{\pi^2}{4}\ rad$	B	$\theta_{max} = +\frac{\pi}{4}\ rad$
C	$\theta_{max} = +\frac{\pi}{2}\ rad$	D	$\theta_{max} = +\frac{3\pi}{2}\ rad$

27- يمثل الخط البياني المجاور تغيرات السرعة الزاوية بدلالة الزمن في النواس الفتل غير المتخامد فيكون التسارع الزاوي هو:



A	$\alpha = -\pi.\theta$	B	$\alpha = -\pi.\theta_{max}$
C	$\alpha = -\frac{\pi^2}{4}.\theta^2$	D	$\alpha = -\frac{\pi^2}{4}.\theta$

28- نواس فتل غير متخامد تابع السرعة الزاوية الذي يمثله هذا المنحني هو:



A	$\omega = +\frac{\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{2}t)$	B	$\omega = -\frac{\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{2}t+\pi)$
C	$\omega = -\frac{\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{2}t)$	D	$\omega = +\frac{\pi^2}{4}\sin(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2})$

29- قيمة الطاقة الحركية لنواس فتل غير متخامد في نقطة مطالها $\bar{\theta} = \frac{\theta_{max}}{\sqrt{3}}$ هي:

A	$E_k = \frac{1}{3}\,E_t$	B	$E_k = \frac{1}{6}\,E_t$	c	$E_k = \frac{8}{9}\,E_t$	D	$E_k = \frac{2}{3}\,E_t$

30- ميقاتيّة تعتمد في عملها على نوّاس فتل ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها:

A	زيادة طول سلك الفتل بمقدار ضئيل	B	زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره	C	إنقاصُ طول سلك الفتل بمقدار ضئيل	D	زيادة قطر القرص مع المحافظة على كتلته

اقرأ النص الآتي وأجب عن الأسئلة من 31 إلى 37 :

يتألف نواس فتل من قرص متجانس كتلته $m = 2kg$ نصف قطره $r = 4\ cm$ معلق من مركزه بسلك فتل شاقولي ثابت فتله يساوي $k = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ ندير القرص في مستو أفقي زاوية $\theta = +\frac{\pi}{4}$ عن وضع توازنه ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$.)

(عزم عطالة القرص حول محور عمودي على مستويه ومار من مركزه $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2}mr^2$)

31- الدور الخاص يساوي:

A	$T_0 = 2\pi\ s$	B	$T_0 = 2\ s$	C	$T_0 = \sqrt{2}s$	D	$T_0 = 1\ s$

32- التابع الزمني للمطال الزاوي:

A	$\theta = \frac{\pi}{4}\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$	B	$\theta = \pi\cos(\pi t + \pi)$
C	$\theta = \pi\cos(2\pi t + \pi)$	D	$\theta = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t)$

33- السرعة الزاوية العظمى (طويلة) تساوي:

A	$\omega_{max} = \frac{\pi}{4} rad.s^{-1}$	B	$\omega_{max} = \frac{10}{3} rad.s^{-1}$	C	$\omega_{max} = \frac{10\pi}{4} rad.s^{-1}$	D	$\omega_{max} = 2.5 rad.s^{-1}$

34- التسارع الزاوي عندما $\theta = -\theta_{max}$

A	$\alpha = 5\pi rad.s^{-2}$	B	$\alpha = 5\frac{\pi}{2} rad.s^{-2}$	C	$\alpha = \frac{\pi}{8} rad.s^{-2}$	D	$\alpha = -5\frac{\pi}{8} rad.s^{-2}$

35- الطاقة الميكانيكية تساوي:

A	$E = \frac{1}{\pi} \times 10^{-3} J$	B	$E = 5\pi \times 10^{-3} J$	C	$E = 5 \times 10^{-3} J$	D	$E = 2 \times 10^{-2} J$

36- وقيمة الطاقة الكامنة عندما $\theta = \frac{\pi}{8}$:							
A	$E_p = 1 \times 10^{-3} J$	B	$E_p = 12.5 \times 10^{-3} J$	C	$E_p = 2 \times 10^{-3} J$	D	$E_p = 1.25 \times 10^{-3} J$
37- في السؤال 36 قيمة الطاقة الحركية:							
A	$E_k = 2 \times 10^{-3} J$	B	$E_k = 12.5 \times 10^{-3} J$	C	$E_k = 3.75 \times 10^{-2} J$	D	$E_k = 3.75 \times 10^{-3} J$

اقرأ النص الآتي وأجب عن الأسئلة من 38 إلى 40 :

ساق متجانسة مهملة الكتلة طولها l نثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية حيث $m_1 = m_2 = 125\ g$ ونعلق الجملة من منتصفها إلى سلك فتل ثابت فتله $k = 16 \times 10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$ لتؤلف الجملة نواس فتل، نزيح الساق عن وضع توازنها في مستو أفقي بزاوية $\theta = +\frac{\pi}{4}\ rad$ ونترك بدون سرعة ابتدائية لحظة بدء الزمن فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 2.5\ s$.

38- التابع الزمني للمطال الزاوي:			
A	$\theta = \frac{\pi}{3}\cos(4\pi t)$	B	$\theta = \frac{\pi}{3}\cos(2.5t)$
C	$\theta = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{4\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}\right)$	D	$\theta = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right)$

39- السرعة الزاوية العظمى للساق لحظة مرورها الأول بوضع التوازن:							
A	$\omega = 8\ rad.s^{-1}$	B	$\omega = \frac{10\pi}{3}\ rad.s^{-1}$	C	$\omega = 5\ rad.s^{-1}$	D	$\omega = -2\ rad.s^{-1}$
40- التسارع الزاوي عندما $\theta = -\theta_{max}$							
A	$\alpha = \frac{\pi}{8} rad.s^{-2}$	B	$\alpha = \frac{8\pi}{5} rad.s^{-2}$	C	$\alpha = \frac{16\pi}{8} rad.s^{-2}$	D	$\alpha = \frac{16\pi}{5} rad.s^{-2}$

انتهى النموذج