حلول بنوك الشغف في الأشعة

السؤال الأول

1- حسب علاقة المتوسط في المثلث AOB :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$$

و في المثلث OCD :

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$$

و بالتالي :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}&=2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}\\&=2(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ})=2(\vec{0})=\vec{0}\end{aligned}$$

2- لو نظرنا إلى المثلث ABD لوجدنا ان I منتصف [AB] و K منتصف [AD] و حسب خاصة سابقة (القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث توازي الضلع الثالث و تساوي نصفها) يكون :

$$\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\;....(1)$$

كذلك الأمر في المثلث (CBD) :

$$\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\;....(2)$$

و من (1) و (2) نجد أن :

$$\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{LJ}$$

و هذا يعني أن $(IKJL)$ متوازي أضلاع .

السؤال الثاني

من العلاقة $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ نجد أن E مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(C,1),(B,3)$ و انّ $(E,4)$

من العلاقة $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ نجد أن F مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(D,2)$ و أنّ $(F,3)$

و حسب الخاصة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(F,3),(E,4)$ و بالتالي G تقع على استقامة E,F .

و لتحديد موضعها بدقة نستفيد من علاقة الانشاء : $\overrightarrow{EG}=\frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$

السؤال الثالث

بما أن I منتصف [AB] فهي مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,1)$ و أنّ $(I,2)$

و بما أن J منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,2),(C,2)$ و أن $(J,4)$

لكن بما أن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(A;1)\;,\quad(B;3)\;,\quad(C;2)\;,\quad(D;3)$$

أو $(A;1)$, $(B,1)$, $(B;2)$, $(C;2)$, $(D;3)$

فحسب الخاصة التجميعية K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(I,2),(J,4),(D,3)$$

فالنقاط K,I,J,D في مستوٍ واحد .

السؤال الرابع

1- نلاحظ أن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}&=2\overrightarrow{IB}\\\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}&=2\overrightarrow{IB}\\\overrightarrow{BA}&=\overrightarrow{IB}\;...(1)\end{aligned}$$

و أيضاً :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JC}&=2\overrightarrow{JD}\\\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DC}&=2\overrightarrow{JD}\\\overrightarrow{DC}&=\overrightarrow{JD}\;...(2)\end{aligned}$$

نفرض جدلاً ان I = J

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}&=\overrightarrow{IB}\;...(1)\\\overrightarrow{DC}&=\overrightarrow{ID}\;...(2)\end{aligned}$$

بالطرح :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}&=\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}\\\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}&=\overrightarrow{DB}\\\overrightarrow{BA}&=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

و هذا يعني أن A, B, C, D تقع في مستوٍ و احد و هذا مستحيل لأن $ABCD$ رباعي وجوه

إذن من المستحيل أن تنطبق I, J

2- لدينا

$$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$$
$$\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

و هذا يعني ان I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,-2)$ و حسب خاصة الاختزال :

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = (1-2)\overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{MI}$$

الثانية بنفس الأسلوب

3- البحث عن مجموعة النقاط :

$$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\|$$

نفترض G م أ م للنقاط

$(B,1),(C,1),(D,1)$ فحسب الاختزال

يكون :

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$$

من جهة أخرى :

$$3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{GA}$$

نعوض :

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{GA}\right\|$$
$$MG = GA$$

فهي تمثل كرة مركزها G و نصف قطرها GA

السؤال الخامس

من الواضح أن $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{BE}$ غير مرتبطين خطياً :

لنكتب :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EJ}$$

من جهة أخرى :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FJ}$$

بجمع العلاقتين :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{GF}$$

فالأشعة المطلوبة مرتبطة خطياً .

1- باستبدال $\overrightarrow{GF}$ بـ $\overrightarrow{CB}$ نجد :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC}$$

وهذا يفسر كون (IJ) يوازي المستو (EBC)

السؤال السادس

$$\overrightarrow{AB} = (2,-4,1)$$
$$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 4 - 4 + 0 = 0$$
$$\overrightarrow{AB}.\vec{v} = 6 - 8 + 2 = 0$$

وهذا يعني أن $\overrightarrow{AB}$ هو ناظم للمستوي P .

معادلته :

$$2x - 4y + z = 0$$

السؤال السابع

1- بجمع المعادلتين :

$$3x + 3z + 3 = 0$$
$$x = -z - 1$$

نفرض $z = t$ فيكون $x = -t - 1$. نعوض في (2) :

$$-t + 1 + y + 2t + 4 = 0$$
$$y = -t - 5$$

$$d: \begin{cases} x = -t - 1 \\ y = -t - 5 \quad ; t \in R \\ z = t \end{cases}$$

1- نوجد معادلة المستوي Q المار من $A(0,1,0)$ و المعامد للمستقيم d أي

$$\vec{n} = \vec{u}(-1,-1,1)$$
$$-x - y + 1 + z = 0$$
$$-x - y + z + 1 = 0$$

نعوض معادلات المستقيم في معادلة المستوي :

$$t+1+t+5+t+1=0=$$
$$3t=-7$$
$$t=-\frac{7}{3}$$

فالنقطة A' مسقط A على d :

$$A'\left(\frac{4}{3},-\frac{8}{3},-\frac{7}{3}\right)$$

-2 إن بعد A' عن المستقيم d :

$$AA'=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{121}{9}+\frac{49}{9}}=\sqrt{\frac{186}{9}}$$

السؤال الثامن

-1

$$\overrightarrow{n_P}(1,1,-2)\quad,\vec{n}_Q(1,1,1)$$

$$n_p\overrightarrow{n_Q}=1+1-2=0$$

فالمستويان متعامدان :

-2

$$dis(A,P)=\frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$
$$dis(A,Q)=\frac{|5|}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

-3 حسب نظرية فيثاغورث :

$$dis(A,d)$$
$$=\sqrt{dis^2(A,P)+dis^2(A,Q)}$$
$$=\sqrt{\frac{4}{6}+\frac{25}{3}}=\sqrt{\frac{54}{6}}$$

السؤال التاسع

$$P:x+2y+3z-5=0$$
$$r=dis(A,P)=\frac{|-1|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$$

السؤال العاشر

-1

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM})(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM})$$
$$=\overrightarrow{AI}\,\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AI}\,\overrightarrow{IM}$$
$$+\overrightarrow{IM}\,\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\,\overrightarrow{IM}$$
$$=-\overrightarrow{IA}\,\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BI}\,\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}\,\overrightarrow{BI}+MI^2$$
$$=-IA^2+MI^2$$
$$\rightarrow\boxed{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=MI^2-IA^2}$$

-2 $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ أي:

$$MI^2-IA^2=0$$
$$MI^2=IA^2$$

تمثل كرة مركزها I و نصف قطرها (AI)

" أسلوب آخر : تمثل كرة قطرها $[AB]$ "

-3 المركز$I(2,1,2)$

نصف القطر $r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}$

$$S:(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\sqrt{2}$$

السؤال الحادي عشر

ندرس ارتباط أشعة التوجيه :

$$\overrightarrow{u_d}(2,1,-1)\quad,\quad\overrightarrow{u_{d'}}(-2,-1,1)$$
$$\frac{2}{-2}=\frac{1}{-1}=-\frac{1}{1}$$

فالمستقيمان متوازيان .

لدراسة الانطباق . نأخذ نقطة من المستقيم الأول $t=0$: $A(-1,0,3)$ نختبر انتماءها إلى الثاني :

$$-1=-2\lambda+1$$
$$0=1-\lambda$$
$$3=\lambda+4$$

فنلاحظ أنه من الأولى $\lambda = 1$ و من الثانية $\lambda = 1$

إلا أنه من الثالثة $\lambda = -1$ فمستحيلة . فمتوازيان غير منطبقان

السؤال الثاني عشر

-1

$$A(0,0,0), H(0,2,2): \overrightarrow{AH}(0,2,2)$$
$$E(0,0,2), G(4,2,2): \overrightarrow{EG}(4,2,0)$$
$$I(2,0,0), J(4,2,1): \overrightarrow{IJ}(2,2,1)$$
$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EG} = (4,4,2) = 2(2,2,1) = 2\overrightarrow{IJ}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$$

وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً.

-2

$$D(0,2,0), \overrightarrow{ID}(-2,2,0), \overrightarrow{IJ}(2,2,1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IJ} = -4 + 4 + 0 = 0$$

-3

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{CID} \times CG$$
$$V_2 = \frac{1}{3} S_{CID} \times CJ$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{CG}{CJ} = \frac{2CJ}{CJ} = 2 \Rightarrow V_1 = 2V_2$$
$$V = V_1 - V_2 = V_2 = \frac{1}{3} S_{CID} \times CJ$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} CD \times BC \times CJ$$
$$= \frac{1}{6} \times 4 \times 2 \times 1 \Rightarrow V = \frac{4}{3}$$

السؤال الثالث عشر

-1 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

-2 المستوي: $P: z - \lambda = 0$ من الرسم

نلاحظ أن: $r_c = \sqrt{R^2 - \lambda^2} = \sqrt{9 - \lambda^2}$

-3 $A(\lambda) = \pi r_c^2 = \pi(9 - \lambda^2)$

-4 $V = \int_0^3 A(\lambda)\, d\lambda = \pi \left[9\lambda - \frac{\lambda^3}{3}\right]_0^3 =$

18π و منه $V' = 2V = 36\pi$

السؤال الرابع عشر

-1 لندرس التغيرات :

$f(0) = 0 \quad , \quad f(4) = 2$

f اشتقاقي على $]0,4]$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

x	0		4
$f'(x)$		$+ + + + + + +$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

-2 إن طبيعة المقطع دائرة مركزها I و نصف قطرها $f(x_I) = f(x) = \sqrt{x}$

فمساحتها $A(x) = \pi r^2 = \pi x$

-3 بالتعريف : حجم المجسم $v =$

$$\int_0^4 A(x)\, dx = \int_0^4 \pi x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

السؤال الخامس عشر

-1 يمكن كتابة المعلم بالشكل : $\left(D, \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\right)$

$D(0,0,0)$	$H(0,0,2)$
$A(2,0,0)$	$E(2,0,2)$
$C(0,2,0)$	$G(0,2,2)$
$B(2,2,0)$	$F(2,2,2)$

-2 ندرس تعامد أشعة التوجيه :

$$\overrightarrow{HB}(2,2,-2) \quad , \quad \overrightarrow{DF}(2,2,2)$$
$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{DF} = 4 + 4 - 4 = 4 \neq 0$$

فالرباعي $DBFH$ مستطيل و ليس مربع (المربع قطراه متعامدان)

-3 حسب فيثاغورث في المثلث DBC :

$$DB = 2\sqrt{2}$$
$$S = DB \times BF = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$$

-4 يمكن اعتبار $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{BH}$ شعاعي توجيه للمستوي :

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{DF} = 0 \to 2a + 2b + 2c = 0$$
$$\vec{n}\overrightarrow{BH} = 0 \to 2a + 2b - 2c = 0$$

بالجمع :

$$4a+4b=0$$
$$a=-b$$

نفرض $b=1$ و $a=-1$

نعوض في (1) :

$$-2+2+2c=0$$
$$c=0$$
$$\vec{n}(-1,1,0)$$

و نختار النقطة $D(0,0,0)$:

$$\boxed{-x+y=0}$$

5- لدينا $I(2,0,1)$:

$$dis(I,(DBFH))=\frac{|-2+0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{2}$$

6- لحساب الحجم :

$$v=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}(4\sqrt{2})\sqrt{2}=\frac{8}{3}$$

7- حجم المكعب : $v'=S.h=2^3=8$ و

بالتالي حجم الفراغ بين المجسمين : $8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

8- الناظم هنا $\vec{n}=\overrightarrow{AE}(0,0,2)$ و النقطة $I(2,0,1)$:

$$0(x-2)+(y-0)+2(z-1)=0$$
$$\boxed{z-1=0}$$

9- لنوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم :

$$d:\begin{cases}-x+y=0\\ z-1=0\end{cases}$$

نفرض $x=t$ فيكون $y=t$ و $z=1$:

$$d:\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=1\end{cases}\quad ;t\in R$$

10- نلاحظ أن $\vec{u}=(1,1,0)$:

$$\vec{u}=\alpha\overrightarrow{DB}+\beta\overrightarrow{DA}$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha\\2\alpha\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\beta\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$2\alpha+2\beta=1$$
$$2\alpha=1\to\boxed{\alpha=\frac{1}{2}}$$
$$1+2\beta=1$$
$$\boxed{\beta=0}$$

11- إذن : $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

فهو يوازي المستقيم (DB) أي يوازي المستوي $(ABCD)$

12- بما ان المستوي $(ABCD)$ يوازي الفصل المشترك للمستويين $P,(DBFH)$

13- المجسم الناتج هو أسطوانة مركز قاعدتها المبدأ و محورها يوازي (oz) و ارتفاعها $DH=2$ و نصف قطر قاعدتها $DB=2\sqrt{2}$:

$$\begin{cases}x^2+y^2=8\\ 0\le z\le 2\end{cases}$$

السؤال السادس عشر

1- إحداثيات الرؤوس:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,2)$
$B(2,0,0)$	$F(2,0,2)$
$C(2,2,0)$	$G(2,2,2)$
$D(0,2,0)$	$H(0,2,2)$

2- من الواضح أن معادلة المستوي (EBD) :

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$
$$(EBD):\boxed{x+y+z-2=0}$$

3- نلاحظ أن قاعدة هذا الهرم هي المثلث ABD القائم في A و مساحته:

$$S=\frac{1}{2}AB.AD=\frac{1}{2}(2)(2)=2$$

و ارتفاع الهرم هو الضلع AE و طوله $h=2$

$$v=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}(2)(2)=\frac{4}{3}$$

4- المرحلة الأولى : نوجد معادلات المستقيم المار من النقطة A و معامد للمستوي (EBD) أي شعاع توجيهه :

$$\vec{u}=\vec{n}_{(EBD)}=(1,1,1)$$
$$d:\begin{cases}x=t\\ y=t\ ;t\in R\\ z=t\end{cases}$$

المرحلة الثانية : استنتاج المسقط القائم للنقطة A على المستوي و يتم ذلك بإيجاد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EBD) و لأجل ذلك : نعوض معادلات المستقيم في معادلة المستوي :

$$t+t+t-2=0$$
$$t=\frac{2}{3}$$

فتكون إحداثيات A' مسقط A :

$$A'\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

5- إن بعد النقطة A عن المستوي (EBD)هي المسافة AA':

$$AA'=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

- لاستنتاج مساحة المثلث EBD:

ستعتبر قاعدة الهرم EBD و ارتفاعه يكون عندئذٍ AA'

$$v=\frac{1}{3}S_{EBD}AA'$$
$$\frac{4}{3}=\frac{1}{3}S_{EBD}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$4=S_{EBD}\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$S_{EBD}=2\sqrt{3}$$

6- إن المجسم المطلوب هو المخروط هو مخروط رأسه المبدأ و ارتفاعه $AE=2$ و محوره $(O;\vec{k})$ و نصف قطر قاعدته : $r=AB=2$

فتكون معادلته :

$$x^2+y^2=\frac{r^2}{h^2}z^2$$
$$0\le z\le 0+h$$

نعوض :

$$x^2+y^2=\frac{4}{4}z^2$$
$$0\le z\le 2$$

أي :

$$\boxed{x^2+y^2=z^2\quad,\quad 0\le z\le 2}$$

7- لدينا :

$$\overrightarrow{EA'}=a\overrightarrow{EB}+b\overrightarrow{ED}$$
$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\0\\-2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2b\\-2b\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\2b\\-2a-2b\end{pmatrix}$$

فمن الأولى نلاحظ أن

$$a=\frac{1}{3}$$

و من الثانية :

$$b=\frac{1}{3}$$

نعوض في الثالثة :

$$-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$$
$$-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$$

محققة

$$\overrightarrow{EA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$$

8- انطلاقاً من نتيجة الطلب السابق : نضرب بـ 3

$$3\overrightarrow{EA'}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}$$
$$3\overrightarrow{EA'}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'D}$$
$$\overrightarrow{A'E}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'D}=\vec{0}$$

فنلاحظ أن A' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(E,1),(B,1),(D,1)$$

بل يمكن القول أنها مركز ثقل EBD

9- بما أن L مسقط A' على مستوي (الأرض)

يعني رواقمها معدومة أي :

$$L\left(\frac{2}{3}.\frac{2}{3},0\right)$$

و بما أن Y مسقط L على محور التراتيب فلها

فقط (وايات) إذن: $Y\left(0,\frac{2}{3},0\right)$

الآن : نحسب المسافة LY :

$$LY=\sqrt{\frac{4}{9}+0+0}=\frac{2}{3}$$

10- نفرض $\overrightarrow{n_p}(a,b,c)$ فيكون :

$$\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{DB}=0$$
$$\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{n_{EBD}}=0$$

أي :

$$-2a+2b=0$$
$$a+b+c=0$$

فمن الأولى نجد أن

$$a=b$$

نفرض $b=1$ فيكون $a=1$

و عليه يكون $c=-2$

و سنختار النقطة $B(2,0,0)$ فتكون

معادلة المستوي المطلوبة :

$$P:1(x-2)+1(y-0)-2(z-0)=0$$
$$x-2+y-2z=0$$
$$\boxed{x+y-2z-2=0}$$

11- بما أن P,EBD متعامدين فيكون h بعد G

عن فصلهما المشترك يساوي :

$$h=\sqrt{dis^2(G,P)+dis^2(G,EBD)}$$
$$h=\sqrt{\frac{4}{6}+\frac{16}{3}}=3$$

12- لدينا :

$$(EBD):x+y+z-2=0$$
$$P\quad :x+y-2z-2=0$$

بالطرح :

$$3z=0$$
$$z=0$$

نعوض في الأولى :

$$x+y=2$$
$$x=2-y$$

نفرض $y=s$ فيكون :

$$x=2-s$$

فالتمثيل المطلوب :

$$\Delta:\begin{cases}x=2-s\\ y=s\\ z=0\end{cases}\quad :s\in R$$

13- لدينا:

$$2-s=t$$
$$s=t$$
$$0=t$$

نجد أن $t=s=0$:

$$2-0=0$$
$$2\neq 0$$

متخالفان.

14- لدينا:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=3$$

15- لدينا:

$$dis(A,(EBD))=\frac{|2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}<r$$

المستوي يقطع الكرة.

لتعيين مركز دائرة المقطع: (هون بدو ياني جيب

المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي

(EBD) ونحنا منعرف كيف من قبل)

$$x+y+z=2$$

نوجد التمثيل الوسيطي المعامد للمستوي

(EBD) والمار بـ A مو...؟؟

طيب صلي عالنبي, رجاع زيد النبي صلاة , وقراء

الطلب الرابع ورجاع.

رجعت؟! منكتشف أنو دائرة المقطع مركزها هو المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBD) وهو $A'\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

فيكون نصف قطر دائرة المقطع:

$$r_c = \sqrt{r^2 - dis^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

16- لدينا:

$$\ell_1 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

حسب خاصة الاختزال (لأن مجموع التثقيلات مو صفر)

والطرف الثاني مجموع تثقيلاتو صفر فمنلجئ للفرط والحذف:

$$\ell_2 = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$
$$= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$$
$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$$

حسب خاصة متوازي الأضلاع من الرسم.

نعوض:

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{BD}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}{3}$$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{\left\|\overrightarrow{(BD)}\right\|}{3}$.

معادلتها الديكارتية:

المركز $G(2,2,2)$ ونصف القطر:

$$\frac{BD}{3} = \frac{\sqrt{4+4}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

المعادلة:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{8}{9}$$

17- النقطة $K(-2,0,0)$:

أ- لدينا:

$$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{BM} = 0$$
$$\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) = 0$$
$$\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM} = 0$$

لدينا K نظيرة B بالنسبة A:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{KA}$$

فلدينا:

$$-\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{AM} + AM^2 = 0$$
$$\Rightarrow MA^2 = AK^2$$

ب- من العلاقة:

$$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{BM} = 0$$

تمثل كرة قطرها $[KB]$ ومركزها A وهي ذاتها S.

18- بفرض $N(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x = 2\,, y = 2\,, z = 0$$
$$N(2,2,0) = C(2,2,0)$$

19- لدينا:

$$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{ED} = EB.ED.\cos\widehat{BED}$$
$$\cos\widehat{BED} = \frac{\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{ED}}{EB.ED} = \frac{(2,0,-2)(0,2,-2)}{\sqrt{8}\sqrt{8}} = \frac{4}{8}$$
$$= \frac{1}{2}$$

20- لدينا:

J منتصف $[AC]$:

$$J(1,1,0)$$

والناظم:

$$\overrightarrow{AC}(2,2,0)$$

فتكون المعادلة:

$$Q: 2(x-1)+2(y-1)+0(z-0)=0$$

$$Q: 2x+2y-4=0$$

$$Q: x+y-2=0$$

السؤال السابع عشر

1- لدينا

نعرف معلماً:

$$\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$$

إحداثيات الرؤوس:

$E(0,0,1)$	$A(0,0,0)$
$F(2,0,1)$	$B(2,0,0)$
$G(2,1,1)$	$C(2,1,0)$
$H(0,1,1)$	$D(0,1,0)$
$I(1,0,0)$	

2- لدينا:

$$\overrightarrow{IF}(1,0,-1) \;,\qquad \overrightarrow{IH}(-1,1,1)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً, بفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{IH}=0 \Rightarrow -a+b+c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{IF}=0 \Rightarrow a-c=0$$

من الثانية نجد:

$$a=c$$

بفرض $c=1$ فتكون $a=1$ نعوض في الأولى:

$$-1+b+1=0 \Rightarrow b=0$$

$$\vec{n}(1,0,1)$$

فتكون معادلة المستوي:

$$(IFH): 1(x-1)+0(y-0)+1(z-0)=0$$

$$x+z-1=0$$

3- لدينا:

$$dis(G,(IFH))=\frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

4- نوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (IH):

$$(IH): \begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

نوجد معادلة المستوي المعامد

للمستقيم (IH) والمار بـ G:

$$\overrightarrow{IH}(-1,1,1)\; G(2,1,1)$$

$$-1(x-2)+1(y-1)+1(z-1)=0$$

$$2-x+y-1+z-1=0$$

$$-x+y+z=0$$

نعوض المستقيم في المستوي:

$$t-1+t+t=0$$

$$3t=1$$

$$t=\frac{1}{3}$$

نعوض t في المستقيم:

$$x=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

بعد G عن المستقيم (IH):

$$MG=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{24}}{3}$$

5- نحسب بعد النقطة G عن المستوي (IFH):

$$dis(G,(IFH)) = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \neq \frac{\sqrt{24}}{3}$$

إذن مسقط النقطة G على المستوي (IFH) لا ينتمي للمستقيم (IH).

حلول المتابعة المنزلية للأشعة

السؤال الأول

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{DI}$$

M تنطبق على I.

السؤال الثاني

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB.AD.\cos\widehat{BAD}$$

$$= 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

2- لدينا:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FI}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}$$

M تنطبق على I.

السؤال الثالث

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AC}(3,0,4)\ , \quad \overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات.

2- لدينا:

$$\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$4 = -\alpha + 3\beta$$

$$2 = -2\alpha$$

$$4 = 4\beta$$

من المعادلة الثانية نجد:

$$\alpha = -1$$

ومن المعادلة الثالثة:

$$\beta = 1$$

نعوض في المعادلة الأولى للتحقق:

$$4 = 1 + 3$$

$$4 = 4$$

فالأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً والنقاط $A, B\ , C\ , D$ تقع في مستوٍ واحد.

السؤال الرابع

1- لدينا:

$$dis(A,P) = \frac{|4+1-4-4|}{\sqrt{4+1+4}} = 1$$

2- لدينا:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$$

السؤال الخامس

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AC}(-2,0,1)\ , \overrightarrow{AB}(-2,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 4$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC.AB.\cos\widehat{BAC}$$

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{AB.AC} = \frac{4}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

2- لدينا:

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,2)\ , (B,2)\ , (C,2)$$

$$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{6}$$

تمثل كرة التي مركزها G ونصف قطرها $\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{6}$

وبتعويض $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{5}$ فلدينا:

$$r=\frac{5}{6}$$

السؤال السادس

بفرض $M(x,y,z)$:

$$\sqrt{(-x)^2+(1-y)^2+(1+z)^2}$$

$$=\sqrt{(1-x)^2+(2+y)^2+(1-z)^2}$$

$$x^2+1-2y+y^2+1+2z+z^2=1-2x$$

$$=x^2+4+4y+y^2+1-2z+z^2$$

$$-2x+6y-4z+3=0$$

تمثل معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

السؤال السابع

1- لدينا:

$$\overrightarrow{u_d}(1,2,-1)\,,\overrightarrow{u_{d'}}(2,1,3)$$

نلاحظ انهم غير مرتبطين خطياً فالمستقيمان متقاطعان:

$$t+2=2s-1$$

$$2t+1=s-2$$

$$-t=3s-2$$

من الثالثة:

$$t=2-3s$$

نعوض في الأولى:

$$2-3s+2=2s-1$$

$$-3s-2s=-5$$

$$s=1$$

فتكون t:

$$t=2-3s=2-3=-1$$

نعوض في الثانية للتحقق:

$$-2+1=1-2$$

$$-1=-1$$

محققة المستقيمان متقاطعان في نقطة I,

نعوض s في مستقيمها فنجد:

$$I(1,-1,1)$$

2- بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً:

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow a+2b-c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_{d'}}=0\Rightarrow 2a+b+3c=0$$

نضرب المعادلة الأولى بـ 2 ثم نطرح:

$$3b-5c=0$$

$$3b=5c$$

$$b=\frac{5}{3}c$$

بفرض $c=3$ تكون $b=5$ نعوض:

$$a+10-3=0$$

$$a=-7$$

المستوي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين فتكون معادلته:

$$-7(x-1)+5(y+1)+3(z-1)=0$$

$$-7x+5y+3z+9=0$$

السؤال الثامن

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(0,-2,-6)$$

نوجد منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$:

$$I(2,1,1)$$

فتكون المعادلة:

$$0(x-2)-2(y-1)-6(z-1)=0$$

$$-2y+2-6z+6=0$$

$$-2y-6z+8=0$$

2- بفرض $M(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{MA}(2-x,2-y,4-z)$$

$$\overrightarrow{MB}(2-x,-y,-2-z)$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(2-x)^2-2y+y^2+(4-z)(-2-z)$$

$$=(x-2)^2-2y+y^2-8-4z+2z+z^2$$

نضعها تساوي الصفر ونتمم لمربع كامل فنجد:

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$$

معادلة كرة مركزها $\Omega(2,1,1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{10}$.

السؤال التاسع

نحسب بعد المستوي عن المركز:

$$dis(P,A)=\frac{|1-1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<3$$

المستوي يقطع الكرة , لتعيين مركزها نوجد المسقط القائم للنقطة A على المستوي P,

نوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار بـ A والعمودي على P:

$$d:\begin{cases}x=t+1\\y=1\\z=-t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

نعوض d في P:

$$t+1+t-1=1\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

نعوض t في d:

$$A'\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

A' هو مركز الدائرة C , نصف قطرها:

$$r_c=\sqrt{r^2-dis^2(A,P)}=\sqrt{9-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{17}{2}}$$

السؤال العاشر

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$$

ندرس الارتباط الخطي للناظم مع $\overrightarrow{AB}$:

$$-\frac{3}{3}=\frac{1}{-1}=\frac{3}{-1}$$

$$-1=-1=-1$$

فالمستقيم (AB) يعامد المستوي P.

2- لدينا:

$$(AB):\begin{cases}x=-3t+2\\y=t+1\\z=3t-2\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

نعوض المستقيم في المستوي:

$$3(-3t+2)-t-1-3(3t-2)-8=0$$

$$-9t+6-t-1-9t+6-8=0$$

$$-19t=-3$$

$$t=\frac{3}{19}$$

نعوض في المستقيم:

$$x=-3\left(\frac{3}{19}\right)+2=\frac{29}{19}$$

$$y=\frac{3}{19}+1=\frac{22}{19}$$

$$z=\frac{9}{19}-2=-\frac{29}{19}$$

$$A'\left(\frac{29}{19},\frac{22}{19},-\frac{29}{19}\right)$$

مسألة أولى

$$\boldsymbol{A(2,-2,2)\,,B(1,1,0)\,,C(1,0,1)\,,D(0,0,1)}$$

1- نشكل الأشعة ونثبت أنهم غير مرتبطين خطياً:

$$\overrightarrow{BC}(0,-1,1)\,,\overrightarrow{BD}(-1,-1,1)$$

ننسب:

$$\frac{0}{-1}\neq\frac{-1}{-1}\neq\frac{1}{1}$$

الاشعة غير مرتبطة خطياً وبالتالي النقاط ليست على استقامة واحدة.

2- لإثبات أنها المعادلة يجب أن تحقق النقاط عند التعويض بها:

نعوض B في (BCD):

$$1+0-1=0$$
$$0=0$$
$$B\in(BCD)$$

نعوض C في (BCD):

$$1-1=0$$
$$0=0$$
$$C\in(BCD)$$

نعوض D في (BCD):

$$1-1=0$$
$$0=0$$
$$D\in(BCD)$$

وبالتالي:

$$(BCD): y+z-1=0$$

ويوجد طريقة أخرى:

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\overrightarrow{BC}.\vec{n}=0\Rightarrow -b+c=0$$
$$\overrightarrow{BD}.\vec{n}=0\Rightarrow -a-b+c=0$$

من المعادلة الأولى نجد:

$$-b+c=0$$
$$c=b$$

نفرض $b=1$ وبالتالي $c=1$ ثم نعوض:

نعوض في المعادلة الثانية:

$$a=0$$

وبالتالي:

$$\vec{n}(0,1,1)$$
$$(BCD): 0(x-1)+1(y-0)+1(z-1)=0$$
$$y+z-1=0$$

3- بما أنه يعامد المستوي فإن:

$$\vec{u}=\vec{n}=(0,1,1)$$
$$\Delta:\begin{cases}x=2\\ y=t-2\,;t\in\mathbb{R}\\ z=t+2\end{cases}$$

4- نعوض Δ في (BCD):

$$t-2+t+2-1=0$$
$$2t=1$$
$$t=\frac{1}{2}$$

نعوض t في Δ:

$$K\left(2,-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

5- بما أن AD قطراً فإن:

$$AD=2r\Rightarrow r=\frac{AD}{2}$$

ومركز الكرة I منتصف AD.

$$AD = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

$$I\left(1,-1,\frac{3}{2}\right)$$

وبالتالي الكرة:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

المسألة الثانية

1- دينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$

$$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$$

$$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$$

2- ندرس الارتباط الخطي للشعاعان $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CD}$:

$$-\frac{3}{-4} \neq -\frac{1}{4}$$

الاشعة غير مرتبطة فالنقاط ليس على استقامة واحدة.

3- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = 3+1-4 = 0$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 4-4 = 0$$

فالمستقيم (AB) يعامد المستوي (CDE).

4- لدينا $\overrightarrow{AB}$ ناظماً , ونأخذ نقطة $C(4,0,0)$:

$$-1(x-4) - 1(y-0) - 4(z-0) = 0$$

$$-x - y - 4z + 4 = 0$$

5- لدينا:

$$dis(B,(CDE)) = \frac{|-1-0+4+4|}{\sqrt{18}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{18}}$$

6- لدينا:

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{18}$$

المسألة الثالثة

1- لدينا:

$$A(0,0,0)\ , \quad E(0,0,1)$$

$$B(1,0,0)\ , \quad F(1,0,1)$$

$$C(1,1,0)\ , \quad G(1,1,1)$$

$$D(0,1,0)\ , \quad H(0,1,1)$$

2- نشكل الأشعة:

$$\overrightarrow{AC}(1,1,0)\ , \quad \overrightarrow{AH}(0,1,1)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً , نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AH} = 0 \Rightarrow b + c = 0$$

من المعادلة الأولى نجد أن:

$$b = -a$$

بفرض $a = 1$ فتكون $b = -1$ نعوض في الثانية:

$$c = 1$$

فيكون الناظم:

$$\vec{n}(1,-1,1)$$

فتكون معادلة المستوي:

$$1(x-0) - 1(y-0) + 1(z-0) = 0$$

$$x - y + z = 0$$

3- لدينا ناظم المستوي P:

$$\overrightarrow{n_P}(-2,2,-2)$$

ندرس ارتباطه الخطي مع ناظم المستوي (ACH):

$$-\frac{2}{1}=\frac{2}{-1}=-\frac{2}{1}$$
$$-2=-2=-2$$

مرتبطة خطياً فالمستويات متوازية.

4- نوجد احداثيات مركز الثقل I:

$$I\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

نشكل الشعاعان:

$$\overrightarrow{IF}\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\overrightarrow{ID}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

نلاحظ أنهم مرتبطين خطياً فالنقاط تقع على استقامة واحدة.

5- لدينا:

$$S:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$$

المسألة الرابعة

1- لدينا:

$$G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0),\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$$

نتحقق من التعامد:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$$
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$$

بالتالي الشعاع $\overrightarrow{OG}$ يعامد المستوي (ABC).

2- لدينا:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$$
$$x+y+z-1=0$$

3- لدينا:

$$\overrightarrow{A'B'}(-2,2,0)\ ,\qquad \overrightarrow{A'C'}(-2,0,4)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً , نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{A'B'}=0\Rightarrow -2a+2b=0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{A'C'}=0\Rightarrow -2a+4c=0$$

من المعادلة الأولى نجد أن:

$$a=b$$

بفرض $b=1$ تكون $a=1$ ثم نعوض في المعادلة الثانية:

$$-2+4c=0$$
$$c=\frac{1}{2}$$
$$\vec{n}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$$

نضرب بـ 2:

$$\vec{n}(2,2,1)$$

فتكون معادلة المستوي:

$$2(x-2)+2(y-0)+1(z-0)=0$$
$$2x+2x+z-4=0$$

4- لدينا:

$$2x+2y+z=4$$
$$x+y+z=1$$

نطرح:

$$x+y=3$$
$$y=3-x$$

بفرض $x=t$:

$$y=3-t$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$t+3-t+z=1$$

$$z=-2$$

فالفصل المشترك Δ يعطى بالعلاقة:

$$\begin{cases} x=t \\ y=3-t\,;t\in\mathbb{R} \\ z=-2 \end{cases}$$

5- نوجد معادلة المستوي P المار من D ويقبل $\vec{u}_\Delta$ ناظماً:

$$1(x-1)-1(y-1)+0(z-1)=0$$

$$x-y=0$$

نعوض Δ في P:

$$t-3+t=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

نعوض t في Δ:

$$x=\frac{3}{2}\,,y=\frac{3}{2}\,,z=-2$$

فتكون D' المسقط القائم:

$$D'\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\right)$$

نحسب الطويلة:

$$DD'=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+9}=\sqrt{\frac{19}{4}}=\frac{\sqrt{19}}{2}$$

المسألة الخامسة

$$\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- نوجد احداثيات الرؤوس:

$A(0,0,0)$, $E(0,0,2)$

$B(2,0,0)$, $F(2,0,2)$

$C(2,2,0)$, $G(2,2,2)$

$D(0,2,0)$, $H(0,2,2)$

O منتصف $[AG]$:

$$O(1,1,1)$$

2- لدينا:

$$\overrightarrow{GO}(1,1,1)\,,\overrightarrow{GB}(0,-2,-2)$$

نلاحظ انهم غير مرتبطين خطياً , نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً:

$$\vec{n}.\overrightarrow{GO}=0\Rightarrow a+b+c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{GB}=0\Rightarrow -2b-2c=0$$

من المعادلة الثانية:

$$2c=-2b$$

$$c=-b$$

بفرض $b=1$ فتكون $c=-1$ نعوض:

$$a=0$$

فيكون الناظم:

$$\vec{n}(0,1,-1)$$

$$0(x-1)+1(y-1)-1(z-1)=0$$

$$y-1-z+1=0$$

$$y-z=0$$

3- نشكل الأشعة:

$$\overrightarrow{OB}(1,-1,-1)\,,\overrightarrow{OG}(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}=1-1-1=-1$$

لدينا:

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}=OB.OG.\cos\widehat{GOB}$$

$$\cos\widehat{GOB}=\frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}}{OB.OG}=\frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$$

4- لدينا:

$$\overrightarrow{DC}(2,0,0)$$

$$(DC):\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

5- لدينا:

$$\vec{n}(0,1,-1) \; , \quad \overrightarrow{DC}(2,0,0)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{DC} = 0$$

المستقيم يوازي المستوي.

6- لدينا:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\alpha = \gamma = 1 \, , \beta = -1$$

المسألة السادسة

لدينا في البداية:

$$\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \; , \vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \, , \vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

$$\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- نوجد احداثيات الرؤوس:

$$A(0,0,0) \, , \quad E(0,0,2)$$

$$B(2,0,0) \; , \quad F(2,0,2)$$

$$C(2,2,0) \, , \quad G(2,2,2)$$

$$D(0,2,0) \; , \quad H(0,2,2)$$

نشكل الشعاعان:

$$\overrightarrow{GB}(0,-2,-2) \, , \overrightarrow{GD}(-2,0,-2)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً , نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً:

$$\vec{n}.\overrightarrow{GB} = 0 \Rightarrow -2b - 2c = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{GD} = 0 \Rightarrow -2a - 2c = 0$$

من المعادلة الأولى:

$$-2b = 2c$$

$$c = -b$$

نفرض $b = 1$ فتكون $c = -1$ نعوض في المعادلة الثانية:

$$-2a + 2 = 0$$

$$a = 1$$

فيكون الناظم:

$$\vec{n}(1,1,-1)$$

المعادلة:

$$1(x-2) + 1(y-0) - 1(z-0) = 0$$

$$x + y - z - 2 = 0$$

2- لدينا:

$$\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$$

$$(EC):\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 2t+2 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t \end{cases}$$

3- نعوض المستقيم في المستوي:

$$2t + 2 + 2t + 2 + 2t - 2 = 0$$

$$6t = -2$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

نعوض في المستقيم لإيجاد احداثيات نقطة التقاطع I:

$$x = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

$$z = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

4- بفرض $M(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{3}$$

$$M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

نشكل الشعاع $\overrightarrow{HM}$:

$$\overrightarrow{HM}\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$$

$$\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{EC} = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 0$$

المستقيمان متعامدان.

المسألة السابعة

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(3,-1,-2), \overrightarrow{AC}(-2,2,-4)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6 - 2 + 8 = 0$$

المستقيمان متعامدان.

2- لدينا:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = -4 + 8 - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

فتكون معادلة المستوي:

$$2(x-2) + 4(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$2x - 4 + 4y - 4 + z - 1 = 0$$

$$2x + 4y + z - 9 = 0$$

3- التمثيل الوسيطي:

$$d: \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 4t + 1 ; t \in \mathbb{R} \\ z = t + 1 \end{cases}$$

4- لدينا:

$$dis(D,(ABC)) = \frac{|6+4+1-9|}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$V = \frac{1}{3}S.h$$

$$h = dis(D,(ABC))$$

$$AB = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$AC = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24}$$

$$BC = \sqrt{25+9+4} = \sqrt{38}$$

حسب مبرهنة عكس فيثاغورث:

$$38 = 14 + 24$$

$$38 = 38$$

قائم في A , مساحته:

$$S = \frac{AC.AB}{2} = \frac{\sqrt{14} \times \sqrt{24}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{2} \times \sqrt{12}}{2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} 2\sqrt{21} \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{4}{3}$$

5- لدينا:

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB}$$

$$-2\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$$

بما أنهم مرتبطين خطياً فالمستقيمان متوازيان.

المسألة الثامنة

$$\boldsymbol{A(1,1,2)}$$

$$\boldsymbol{P: x - y + 2z - 1 = 0}$$

$$\boldsymbol{Q: 2x + y + z + 1 = 0}$$

1- ندرس الارتباط الخطي للنواظم فنجد:

$$\overrightarrow{n_P}(1,-1,2)$$
$$\overrightarrow{n_Q}(2,1,1)$$
$$\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً وبالتالي المستويات متقاطعة بفصل مشترك d.

2- لكتابة التمثيل الوسيطي للفصل المشترك نستخدم الحل المشترك لمعادلات المستوي:

$$x - y + 2z - 1 = 0$$
$$2x + y + z + 1 = 0$$

نجمع:

$$3x + 3z = 0$$
$$x = -z$$

نفرض $z = t$:

$$x = -t$$

نعوض في أحد المعادلات:

$$-2t + y + t + 1 = 0$$
$$\Rightarrow y = t - 1$$
$$d: \begin{cases} x = -t \\ y = t - 1\,; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

3- بما أن المستوي معامد للمستويين, نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow a - b + 2c = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \Rightarrow 2a + b + c = 0$$

نجمع:

$$3a + 3c = 0$$
$$\Rightarrow a = -c$$

نفرض $c = 1$ فإن $a = -1$ نعوض:

$$-2 + b + 1 = 0$$
$$b = 1$$

بالتالي:

$$\vec{n}(-1,1,1)$$
$$R: -1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-2) = 0$$
$$-x + 1 + y - 1 + z - 2 = 0$$
$$-x + y + z - 2 = 0$$

4- نعوض d في R:

$$-(-t) + t - 1 + t - 2 = 0$$
$$3t - 3 = 0$$
$$3t = 3$$
$$t = 1$$

نعوض t في d:

$$x = -1$$
$$y = 0$$
$$z = 1$$
$$\Rightarrow B(-1,0,1)$$

نستنتج أن المستويات الثلاثة متقاطعة في نقطة B.

5- لحساب البعد يكفي حساب المسافة AB:

$$AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

6- معادلة الكرة:

$$dis(A,Q) = \frac{|2+1+2+1|}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{6} = r$$
$$S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$$

المسألة التاسعة

$$\boldsymbol{A(1,2,0)}$$
$$\boldsymbol{P: 2x - y + 2z - 2 = 0}$$
$$\boldsymbol{Q: x + y + z - 1 = 0}$$
$$\boldsymbol{R: x - z - 1 = 0}$$

1- نثبت أن النواظم غير مرتبطة خطياً:

$\overrightarrow{n_P}(2,-1,2)\,,\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$

ننسب المركبات:

$$\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً فالمستويات متقاطعة بفصل مشترك Δ.

بالحل المشترك لمعادلات المستوي:

$$2x-y+2z-2=0$$
$$x+y+z-1=0$$

نجمع:

$$3x+3z-3=0$$

نفرض $z=t$:

$$3x+3t-3=0$$
$$3x=-3t+3$$
$$x=-t+1$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$-t+1+y+t-1=0$$
$$y=0$$

وبالتالي:

$$\Delta:\begin{cases}x=-t+1\\ y=0\\ z=t\end{cases}\quad ;t\in\mathbb{R}$$

2- لإثبات التعامد نثبت أن الناظم مرتبط خطياً مع شعاع توجيه المستقيم:

$\overrightarrow{u_\Delta}(-1,0,1)\,,\overrightarrow{n_R}(1,0,-1)$

ننسب المركبات:

$$\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$$
$$-1=-1$$

الأشعة مرتبطة خطياً فالمستقيم والمستوي متعامدان.

نعوض النقطة A في المستوي لنثبت أنها تنتمي للمستوي R:

$$1-0-1=0$$
$$0=0$$

محققة

$$A\in R$$

3- لقد أثبتنا أن Δ ناتج عن تقاطع المستويين P و Q فيكفي دراسة تقاطع Δ مع R، نعوض Δ في R:

$$-t+1-t-1=0$$
$$-2t=0$$
$$t=0$$

نعوض t في Δ:

$$x=1$$
$$y=0$$
$$z=0$$
$$\Rightarrow I(1,0,0)$$

4- لحساب بعد A عن Δ يكفي حساب المسافة AI:

$$AI=\sqrt{0+4+0}=2$$

المسألة العاشرة

$\boldsymbol{A(1,1,0)\,,B(1,2,1)\,,C(4,0,0)}$

1- نشكل الأشعة:

$\overrightarrow{AB}(0,1,1)\,,\overrightarrow{AC}(3,-1,0)$

$$\frac{0}{3}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{0}$$

الاشعة غير مرتبطة فالنقاط لا تقع على استقامة واحدة.

2- الطريقة الأولى:

نعوض النقاط في المستوي ويجب أن تتحقق:

نعوض A:

$$1+3-0-4=0$$
$$0=0$$
$$A\in(ABC)$$

نعوض B:

$$1+6-3-4=0$$
$$0=0$$
$$B\in(ABC)$$

نعوض C:

$$4+0+0-4=0$$
$$0=0$$
$$C\in(ABC)$$

الطريقة الثانية:

نوجد معادلة المستوي (ABC):

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow b+c=0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow 3a-b=0$$

من المعادلة الأولى نجد أن:

$$b=-c$$

نفرض $c=1$ ويكون $b=-1$ نعوض في المعادلة الثانية:

$$3a-(-1)=0$$
$$3a+1=0$$
$$3a=-1$$
$$a=-\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \vec{n}\left(-\frac{1}{3},-1,1\right)$$
$$(ABC):-\frac{1}{3}(x-1)-1(y-1)+1(z-0)=0$$
$$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}-y+1+z=0$$

نضرب بـ -3:

$$x+3y-3z-4=0$$

3- لإثبات ان المستويان يتقاطعان نأخذ النواظم:

$$\overrightarrow{n_P}(1,2,-1)\,,\overrightarrow{n_Q}(2,3,-2)$$

ننسب النواظم:

$$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{-2}{-1}$$

غير مرتبط خطياً وبالتالي المستويات متقاطعة بفصل مشترك d.

وللتأكد من التمثيل الوسيطي للفصل المشترك نعوض التمثيل الوسيطي في المستويين:

عند التعويض في P:

$$t-2+6-t-4=0$$
$$0=0$$

محققة.

عند التعويض في Q:

$$2(t-2)+3(3)-2t-5=0$$
$$2t-4+9-2t-5=0$$
$$0=0$$

محققة.

وبالتالي d فصل مشترك للمستويين P و Q.

4- ندرس تقاطع (ABC) مع d:

نعوض d في (ABC):

$$t-2+3(3)-3t-4=0$$
$$-2t+3=0$$
$$2t=3$$
$$t=\frac{3}{2}$$

نعوض t في d:

$$x=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$$
$$y=3$$
$$z=\frac{3}{2}$$

بفرض N نقطة التقاطع:

$$\Rightarrow N\left(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$$

5- نوجد المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d , معادلة المستوي المعامد المار بـ A:

$$1(x-1)+0(y-1)+1(z-0)=0$$
$$x+z-1=0$$

نعوض d في المستوي:

$$t-1+t-1=0$$
$$2t=2$$
$$t=1$$

نعوض في المستقيم:

$$A'(-1,3,1)$$

نوجد المسافة:

$$AA'=\sqrt{4+4+1}=3$$

المسألة الحادية عشر

$\boldsymbol{A(1,3,0)}$, $\boldsymbol{B(0,6,0)}$, $\boldsymbol{N(0,0,3)}$, $\boldsymbol{M(0,6,2)}$

1- نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AM}(-1,3,2)\ ,\overrightarrow{AN}(-1,-3,3)$$

نثبت أنهما غير مرتبطان خطياً:

$$\frac{-1}{-1}\neq\frac{3}{-3}\neq\frac{2}{3}$$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0\Rightarrow -a+3b+2c=0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AN}=0\Rightarrow -a-3b+3c=0$$

نجمع:

$$-2a+5c=0$$
$$-2a=-5c$$
$$a=\frac{5}{2}c$$

نفرض $c=2$ فتكون $a=5$ ونعوض:

$$-5+3b+4=0$$
$$3b=1$$
$$b=\frac{1}{3}$$

ويكون:

$$\vec{n}\left(5,\frac{1}{3},2\right)$$

$$(AMN): 5(x-0)+\frac{1}{3}(y-0)+2(z-3)=0$$

$$5x+\frac{1}{3}y+2z-6=0$$

نضرب بـ 3:

$$15x+y+6z-18=0$$

2- بما أنه معامد للمستوي فإن:

$$\vec{u} = \vec{n} = (15, +1, 6)$$

$$d: \begin{cases} x = 15t \\ y = t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 6t \end{cases}$$

3- المستوي المحوري للقطعة $[BM]$:

$$\overrightarrow{BM}(0,0,2)$$

بفرض J منتصف $[BM]$:

$$J(0,6,1)$$

$$\Rightarrow 0(x-0) + 0(y-6) + 2(z-1) = 0$$

$$2z - 2 = 0$$

نقسم على 2:

$$z - 1 = 0$$

المسألة الثانية عشر

1- لدينا:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 3$$

2- نحسب البعد بين مركز الكرة والمستوي:

$$dis(O, P) = \frac{|3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = r$$

المستوي يمس الكرة.

المسألة الثالثة عشر

لدينا:

$$dis(A, P) = \frac{|1 - 4 + 0 - 1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

فتكون معادلة الكرة:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-0)^2 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

المسألة الرابعة عشر

3- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$$

ندرس الارتباط الخطي للناظم مع $\overrightarrow{AB}$:

$$-\frac{3}{3} = \frac{1}{-1} = \frac{3}{-1}$$

$$-1 = -1 = -1$$

فالمستقيم (AB) يعامد المستوي P.

4- لدينا:

$$(AB): \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t - 2 \end{cases}$$

نعوض المستقيم في المستوي:

$$3(-3t+2) - t - 1 - 3(3t-2) - 8 = 0$$

$$-9t + 6 - t - 1 - 9t + 6 - 8 = 0$$

$$-19t = -3$$

$$t = \frac{3}{19}$$

نعوض في المستقيم:

$$x = -3\left(\frac{3}{19}\right) + 2 = \frac{29}{19}$$

$$y = \frac{3}{19} + 1 = \frac{22}{19}$$

$$z = \frac{9}{19} - 2 = -\frac{29}{19}$$

$$A'\left(\frac{29}{19}, \frac{22}{19}, -\frac{29}{19}\right)$$

المسألة الخامسة عشر

1- لدينا:

$A(0,0,0)$, $E(0,0,4)$

$B(4,0,0)$, $F(4,0,4)$

$C(4,4,0)$, $G(4,4,4)$

$D(0,4,0)$, $H(0,4,4)$

$$I(0,2,2)\ ,\qquad J(2,2,0)$$
$$K(1,2,1)\ ,\qquad L(2,4,2)$$

نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AK}(1,2,1)\ ,\overrightarrow{AG}(4,4,4)$$
$$\frac{1}{4}\neq\frac{2}{4}$$

النقاط لا تقع على استقامة واحدة.

2- لدينا:

$$\overrightarrow{AK}(1,2,1)\ ,\qquad \overrightarrow{IJ}(2,0,-2)$$
$$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{IJ}=2+0-2=0$$

بما أن الأقطار متعامدة فهو معين.

3- لدينا:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{(AK)}$$
$$\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

فنحصل على ثلاث معادلات:

$$0=4\alpha+\beta$$
$$4=4\alpha+2\beta$$
$$0=4\alpha+\beta$$

نأخذ أول معادلتين , بطرح المعادلة الثانية من الأولى:

$$2\beta=4\Rightarrow\beta=2$$

نعوض في الأولى:

$$0=4\alpha+2\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$$

بما أن الأشعة مرتبطة خطياً فالنقاط تقع في مستو واحد

4- لدينا من الطلب السابق:

$$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{(AK)}$$
$$\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AK}=\vec{0}$$

إذن A مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(D,1)\ (K,-2)\ \left(G,\frac{1}{2}\right)$$

5- نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AH}(0,4,4)\ ,\overrightarrow{AC}(4,4,0)$$

غير مرتبطة خطياً , بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AH}=0\Rightarrow 4b+4c=0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{(AC)}=0\Rightarrow 4a+4b=0$$

من الأولى نجد أن:

$$4b=-4c$$
$$b=-c$$

بفرض $c=1$ فتكون $b=-1$ نعوض في الثانية:

$$4a-4=0$$
$$a=1$$
$$\vec{n}(1,-1,1)$$
$$(AHC):1(x-0)-1(y-0)+1(z-0)=0$$
$$x-y+z=0$$

6- لدينا:

$$dis\big(F,(AHC)\big)=\frac{|4-0+4|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$$
$$V_{F-AHC}=\frac{1}{3}S_{AHC}.h$$
$$h=dis\big(F,(AHC)\big)$$
$$S_{AHC}=??$$
$$AH=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$
$$AC=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$
$$HC=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$

المثلث متساوي الأضلاع:

$$S_{AHC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(32)=8\sqrt{3}$$

فيكون الحجم:

$$V=\frac{1}{3}\,8\sqrt{3}\,\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{64}{3}$$

7- نوجد نوع المثلث IJL:

$$IJ=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

$$IL=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

$$JL=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

مثلث متساوي الأضلاع:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}.8=2\sqrt{3}$$

ونلاحظ أن البعد بين الرأس والقاعدة هو نفسه $\text{dis}(F,(AHC))$ لأن (IJL) محتوى في (AHC)

فيكون الحجم:

$$V=\frac{1}{3}2\sqrt{3}\frac{.8}{\sqrt{3}}=\frac{16}{3}$$

8- أولاً: نحسب مساحة المجسم كاملاً:

$$V=S.h=a^2.a=a^3=4^3=64$$

ثانياً: نطرح من مساحة المجسم مساحة الهرمين:

$$64-\frac{16}{3}-\frac{64}{3}=\frac{192-16-64}{3}=\frac{112}{3}$$

المسألة السادسة عشر

1- إحداثيات الرؤوس:

$A(0,0,0)\,,E(0,0,3)$

$B(3,0,0)$

$C(3,3,0)$

$D(0,3,0)$

2- لإيجاد معادلة المستوي:

$$\overrightarrow{EB}(3,0,-3)\,,\overrightarrow{EC}(3,3,-3)$$

$$\frac{3}{3}\neq\frac{0}{3}\neq\frac{-3}{-3}$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً وبالتالي نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EB}=0\Rightarrow 3a-3c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{EC}=0\Rightarrow 3a+3b-3c=0$$

من المعادلة الأولى:

$$3a-3c=0$$

$$3a=3c$$

$$a=c$$

نفرض $c=1$ وبالتالي $a=1$ فتكون:

$$3+3b-3=0$$

$$\Rightarrow b=0$$

$$\vec{n}(1,0,1)$$

$$(EBC):1(x-0)+0(y-0)+1(z-3)=0$$

$$x+z-3=0$$

3- لكتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم d:

$$\vec{n}=\vec{u}=(1,0,1)$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases}x=t\\ y=0\,;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

4- نوجد H:

$$H\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$$

يجب أن تكون H نقطة تقاطع المستوي (EBC) مع المستقيم d، نعوض d في المستوي فنجد:

$$t+t-3=0$$

$$2t=3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

نعوض t في d:

$$x = \frac{3}{2}\ , y = 0\ \ , z = \frac{3}{2}$$

وبالتالي H هي فعلاً المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC).

5- لحساب الحجم:

$$V = \frac{1}{3}\,S_{\text{القاعدة}}.\,h$$

$$S_{\text{القاعدة}} = \left(\text{طول الضلع}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$h = EA = 3$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 = 9$$

المسألة (VIE 1)

1- لدينا:

$$G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\ ,\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$$

نتحقق من التعامد:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

بالتالي الشعاع $\overrightarrow{OG}$ يعامد المستوي (ABC).

2- لدينا:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1$$

$$x + y + z - 1 = 0$$

3- لدينا:

$$\overrightarrow{A'B'}(-2,2,0)\ \ , \qquad \overrightarrow{A'C'}(-2,0,4)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً , نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{A'B'} = 0 \Rightarrow -2a + 2b = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{A'C'} = 0 \Rightarrow -2a + 4c = 0$$

من المعادلة الأولى نجد أن:

$$a = b$$

بفرض $b = 1$ تكون $a = 1$ ثم نعوض في المعادلة الثانية:

$$-2 + 4c = 0$$

$$c = \frac{1}{2}$$

$$\vec{n}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$$

نضرب بـ 2:

$$\vec{n}(2,2,1)$$

فتكون معادلة المستوي:

$$2(x-2) + 2(y-0) + 1(z-0) = 0$$

$$2x + 2x + z - 4 = 0$$

4- لدينا:

$$2x + 2y + z = 4$$

$$x + y + z = 1$$

نطرح:

$$x + y = 3$$

$$y = 3 - x$$

بفرض $x = t$:

$$y = 3 - t$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$t + 3 - t + z = 1$$

$$z = -2$$

فالفصل المشترك Δ يعطى بالعلاقة:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \,;\, t \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}$$

5- نوجد معادلة المستوي P المار من D ويقبل $\vec{u}_\Delta$ ناظماً:

$$1(x-1) - 1(y-1) + 0(z-1) = 0$$

$$x - y = 0$$

نعوض Δ في P:

$$t - 3 + t = 0$$

$$t = \frac{3}{2}$$

نعوض t في Δ:

$$x = \frac{3}{2}\,, y = \frac{3}{2}\,, z = -2$$

فتكون D' المسقط القائم:

$$D'\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -2\right)$$

نحسب الطويلة:

$$DD' = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 9} = \sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

6- لدينا:

$$V = \frac{1}{3} S_{OB'C'}.h$$

لحساب مساحة المثلث $OB'C'$:

$$OB' = 2\,, OC' = 4$$

$$B'C' = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

نختبر عكس فيثاغورث:

$$20 = 4 + 16$$

$$20 = 20$$

المثلث قائم في O فتكون مساحته:

$$S = \frac{OB' \times OC'}{2} = 4$$

والارتفاع:

$$OA' = 2$$

فيكون حجم المجسم:

$$V = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} 2 \times 4 = \frac{8}{3}$$

7- لدينا:

$$dis\big(O, (A'B'C')\big) = \frac{|0 + 0 + 0 - 4|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{4}{3}$$

نلاحظ أن حجم المجسم $A' - OB'C'$ هو ذاته حجم المجسم $O - A'B'C'$:

$$V = \frac{1}{3} S_{A'B'C'}.h$$

$$\frac{8}{3} = \frac{1}{3} S \times \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} S = 8$$

$$S = 6$$