أولاً: تغيير المتحول:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

نفرض $t=\frac{1}{x}$ وبالتالي $x=\frac{1}{t}$.

نغير جهة السعي:

$$(x\to+\infty)\Rightarrow(t\to 0)$$

نعوض:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

نفرض $t=\frac{1}{x}$ وبالتالي $x=\frac{1}{t}$.

نغير جهة السعي:

$$(x\to+\infty)\Rightarrow(t\to 0)$$

نعوض:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

نضيف ونطرح 1 في المضمون:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{x-1}{x+1}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{x-1-x-1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)$$

نفرض $t=\frac{-2}{x+1}$ وبالتالي:

$$x=\frac{-2}{t}-1=\frac{-2-t}{t}$$

نغير جهة السعي:

$$(x\to+\infty)\Rightarrow(t\to 0)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(-2-t)\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}(-2-t)\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=-2$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln^2 x$$

$$\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$$

$$=(2.0)^2=0$$

تدرب 1

$$f(x)=x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)\ ;a=+\infty$$

$$=x^2\left(\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=x^2\left(\frac{2+\frac{1}{x}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=x^2\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$=x\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f(x)=\sin x\,.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ ,a=0^+$$

$$=\sin x\sqrt{\frac{1}{x^2}(x^2+1)}$$

$$=\sin x\left(\frac{1}{|x|}\right)\sqrt{x^2+1}$$

عند $x=0^+$ فإن $|x|=x$:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1(1)=1$$

$$f(x)=x(\ln x-1)\ ,a=0^+$$

$$=x\ln x-x$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

تدرب 2

$$f(x)=\frac{6x^2+2-2\cos 2x}{2x^2}\ ;a=0$$

$$f(x)=\frac{6x^2}{2x^2}+\frac{2(1-\cos 2x)}{2x^2}$$

$$=3+\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=3+2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=3+2(1)^2=5$$

$$f(x)=\frac{2\cos x-2}{\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{2}}\ ;a=0$$

$$f(x)=\frac{-2(1-\cos x)\left(\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{-4\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{4x^2+2-2}$$

$$= -\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2\left(\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{4}(2\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}\ ;\ a = +\infty}$$

$$= x\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$= x\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+2)(x+1)}}\right)$$

$$= x\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+3x+2}}\right)$$

$$= x\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= x\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}\right)$$

في جوار $+\infty$ تكون $|x| = +x$:

$$= x\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \frac{x+2-x-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}{x}\ ;\ a = 0}$$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}\right)\left(\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}\right)}{x\left(\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}\right)}$$

$$= \frac{1+sinx-1+sinx}{x\left(\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}\right)}$$

$$= \frac{sinx}{x}.\frac{2}{\left(\sqrt{1+sinx}+\sqrt{1-sinx}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1\left(\frac{2}{2}\right) = 1$$

$$\boldsymbol{f(x) = (2-x)^{\frac{1}{x-1}}\ ;\ a = 1}$$

$$= 1^{\infty}$$

$$f(x) = (1+1-x)^{\frac{1}{x-1}}$$

نفرض $t = 1-x$ وبالتالي $x = 1-t$:

نغير جهة السعي:

$$(x\to 1) \Rightarrow (t\to 0)$$

$$f(t) = (1+t)^{\frac{1}{-t}} = \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = e^{-1}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\ ;\ a = +\infty}$$

$$= \left(1+\frac{x-2}{x+1}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$= \left(1+\frac{x-2-x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$= \left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

نفرض $t = -\frac{3}{x+1}$ فيكون:

$$x+1 = -\frac{3}{t}$$

$$x = -\frac{3}{t}-1 = \frac{-3-t}{t}$$

نغير جهة السعي:

$$(x\to+\infty) \Rightarrow (t\to 0)$$

لدينا الأس:

$$t = -\frac{3}{x+1}$$

$$\frac{1}{t} = -\frac{x+1}{3}$$

$$-\frac{1}{t} = \frac{x+1}{3}$$

$$f(t) = (1+t)^{-\frac{1}{t}}$$

$$= \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = e^{-1}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}\ ;\ a = 0}$$

$$f(x) = \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

$$= \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{1+x-1}$$

$$= \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x}$$

$$= \frac{sinx}{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1(1) = 2$$

$$\boldsymbol{f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x+1}\ ;\ a = +\infty}$$

تدرب 3

ملاحظة: سنوجد مجموعة التعريف فيما يلي ثم نحسب النهايات عند أطرافها:

$$f(x)=\frac{lnx}{x}$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$$

$$f(x)=x-lnx$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)=+\infty$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+lnx$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$f(x)=\frac{1}{x}(1+xlnx)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty(1+0)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-lnx$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

$$f(x)=\frac{x}{lnx}$$

$$D_1:\ lnx=0$$

$$x=1$$

$$D_1=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

$$D_2=]0,+\infty[$$

$$D_f=D_1\cap D_2=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$

$$f(x)=-\frac{\sqrt{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$$

$$f(x)=\frac{x^2+2-2\cos(\sqrt{x})}{x}\ ;\ a=0$$

$$f(x)=x+\frac{2\left(1-\cos(\sqrt{x})\right)}{x}$$

$$=x+2\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}$$

$$=x+4\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{2\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0+4.\frac{1}{4}(1)^2=1$$

$$f(x)=(3+x)^{\frac{1}{x+2}}\ ;\ a=-2$$

$$=(1+2+x)^{\frac{1}{x+2}}$$

نفرض $t=2+x$:

$$x=t-2$$

نغير جهة السعي:

$$(x\to -2)\Rightarrow(t\to 0)$$

نعوض:

$$f(t)=(1+t)^{\frac{1}{t-2+2}}=(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$\lim_{t\to 0} f(t)=e$$

$$f(x)=\frac{7x-7}{\sqrt{3x+1}-2}\ ;a=1$$

$$f(x)=\frac{(7x-7)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{7(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{3(x-1)}$$

$$=\frac{7}{3}\left(\sqrt{3x+1}+2\right)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{28}{3}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x+5}-3}{2-\sqrt{3x+1}}\ ;\ a=1$$

$$=\frac{\left(\sqrt{4x+5}-3\right)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{\left(2-\sqrt{3x+1}\right)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$$

$$=\frac{(4x+5-9)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{(4-3x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$$

$$=\frac{4(x-1)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{-3(x-1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=-\frac{4}{3}\left(\frac{4}{6}\right)=-\frac{8}{9}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{lnx}{x^2}}$$

$$D_1 =]0,+\infty[$$

$$D_2 =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

$$\Rightarrow D_f =]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = x(1 - lnx)}$$

$$D_f =]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x - xlnx) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}(lnx - 1)}$$

$$D_f =]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x - lnx}{x}}$$

$$D_f =]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{lnx}{x} = 1$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x + 1}{lnx}}$$

$$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{lnx} + \frac{1}{lnx} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{xlnx}{x + 1}}$$

$$D_f =]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{xlnx}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{xlnx}{x - 1}}$$

$$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} x\frac{lnx}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{xlnx}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = ln(2x + 1) - ln(x)}$$

$$D_f =]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x + 1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$$

$$\boldsymbol{f(x) = \ln\left(\frac{x - 1}{x - 2}\right)}$$

$$D_f =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{\ln(1 + sinx)}{x} \; ; a = 0$$

$$f(x) = \frac{sinx}{x} \cdot \frac{\ln(1 + sinx)}{sinx}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 1.1 = 1$$

لأن:

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x} + 1) - ln\sqrt{2}}{x - 1} \; ; a = 1}$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$g(x) = \ln(\sqrt{x} + 1) - \ln(\sqrt{2})$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln(x + 1) - ln\sqrt{2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2(x + 1)}$$

$$g(1) = 0$$

$$g'(1) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{ln\sqrt{x}}{x} \; ; \; a = +\infty}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}lnx}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}}$$

$$D_f =]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

تدرب 4

$$\boldsymbol{f(x) = e^x - x^2}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$f(x) = x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 + e^x}}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(2 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)} = 2$$
$$\boldsymbol{f(x) = \ln(x) - e^x}$$
$$D_f =]0, +\infty[$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$
$$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 1$$
$$\boldsymbol{f(x) = (3 - x)e^x}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} 3e^x - xe^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
$$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}}$$
$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = +\infty$$
$$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}}$$
$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{2x} = +\infty$$
$$\boldsymbol{f(x) = \ln(e^x + 2)}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\boldsymbol{f(x) = 2xe^{-x}}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$$
$$\boldsymbol{f(x) = 2x - 1 + e^{-x}}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2xe^x - e^x + 1}{e^x} = +\infty$$
$$\boldsymbol{f(x) = e^{2x} - x - 2}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$
$$\boldsymbol{f(x) = x - \ln(e^x + 1)\ ;\ a = +\infty}$$
$$= x - \ln\left(e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right)$$
$$= x - x - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$
$$= -\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

تدرب 5

$$\boldsymbol{f(x) = 4x + \frac{1 + \sin^2 x}{x^4 + 1}\ ;\ y_\Delta = 4x}$$
$$f(x) - y_\Delta = \frac{1 + \sin^2 x}{x^4 + 1}$$
$$0 \le \sin^2 x \le 1$$

نضيف 1+:

$$1 \le 1 + \sin^2 x \le 2$$

نقسم على $x^4 + 1 > 0$:

$$\frac{1}{x^4 + 1} \le \frac{1 + \sin^2 x}{x^4 + 1} \le \frac{2}{x^4 + 1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^4 + 1} = 0\ ,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

لدراسة الوضع النسبي نلاحظ أن $f(x)-y_\Delta \geq 0$ فإن c فوق Δ.

$$f(x)=2x-1+\frac{1}{x}\ ;\ y_\Delta=2x-1$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

لدراسة الوضع النسبي:

عندما $x>0$ فإن c فوق Δ.

عندما $x<0$ فإن c تحت Δ.

$$f(x)=x+1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\ ;\ y_\Delta=x+1$$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

$f(x)-y_\Delta>0$ فإن c فوق Δ.

$$f(x)=\frac{x^3+2x-2x\cos 2x}{2x^2}\ ;\ y_\Delta=\frac{1}{2}x$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x}{2}+\frac{2x(1-\cos 2x)}{2x^2}-\frac{x}{2}$$

$$=\frac{2\sin^2 x}{x}$$

بالإحاطة نجد:

$$0\leq \sin^2 x\leq 1$$

نضرب بـ 2:

$$0\leq 2\sin^2 x\leq 2$$

نقسم على $x>0$ في جوار $+\infty$:

$$0\leq \frac{2\sin^2 x}{x}\leq \frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim 0=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

عندما $x>0$ فإن c فوق Δ.

عندما $x<0$ فإن c فوق Δ.

تدرب 6

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}$$

$$D_f=]-\infty,+\infty[$$

1- لإيجاد الأعداد:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{x^3+1}{x^2+1}}{x}=\frac{x^3+1}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1=a$$

$$f(x)-x=\frac{x^3+1-x^3-x}{x^2+1}$$

$$=\frac{1-x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0=b$$

2- بفرض أن $y_\Delta=ax+b$ فإن $y_\Delta=x$

3- الوضع النسبي:

$$f(x)-x=\frac{1-x}{x^2+1}$$

$$f(x)-x=0$$

$$\frac{1-x}{x^2+1}=0$$

$$1-x=0\Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\frac{1-x}{x^2+1}$	$+$	0	$-$
الوضع	c فوق Δ	|	c تحت Δ

تدرب 7

$$f(x)=\frac{2x^2+\cos^2 x}{x}$$

1- نعيد صياغة التابع:

$$f(x)=2x+\frac{\cos^2 x}{x}$$

نفرض $y_\Delta=2x$.

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\cos^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\cos^2\infty \Rightarrow \text{إحاطة}$$

$$0\leq\cos^2 x\leq 1$$

نقسم على $x<0$ في جوار $+\infty$:

$$0\leq\frac{\cos^2 x}{x}\leq\frac{1}{x}$$

$$\lim 0=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos^2 x}{x}=0$$

فإن Δ مقارب مائل للتابع.

2- لدينا:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\cos^2 x}{x}$$

البسط موجب دوماً والمقام سالب دوماً على مجموعة التعريف فإن C تحت Δ.

تدرب 9

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x^3-1} ; x\neq 1\\ \dfrac{4}{3} \ ; \ x=1\end{cases}}$$

الشرط:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

$$f(x)=\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{4}{3}=f(1)$$

التابع مستمر على $\mathbb{R}$.

تدرب 8

$$\boldsymbol{f(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}}$$

نكتب مضمون التابع بالشكل القانوني:

$$4\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)$$

$$=4\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)$$

$$=4\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)$$

$$=(2x+1)^2+4$$

نشكل التابع:

$$f(x)-\sqrt{(2x+1)^2}$$

$$=\sqrt{(2x+1)^2+4}-\sqrt{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{(2x+1)^2+4}-\sqrt{(2x+1)^2}\right)\left(\sqrt{(2x+1)^2+4}+\sqrt{(2x+1)^2}\right)}{\sqrt{(2x+1)^2+4}+\sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$=\frac{(2x+1)^2+4-(2x+1)^2}{\sqrt{(2x+1)^2+4}+\sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(2x+1)^2+4}+\sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-\sqrt{(2x+1)^2}=0$$

وبالتالي فإن:

$$y_\Delta=|2x+1|$$

في جوار $+\infty$:

$$y_{d_1}=2x+1$$

في جوار $-\infty$:

$$y_{d_2}=-2x-1$$

لدراسة الوضع النسبي نجد:

$$f(x)-y_\Delta$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(2x+1)^2+4}+\sqrt{(2x+1)^2}}>0$$

C فوق d_1 و d_2.

تدرب 10

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\ln x} & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}}$$

لدراسة الاستمرار:

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

حسب شرط الاستمرار:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

محقق فالتابع مستمر عند $a=0$.

تدرب 11

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2x} & : x\neq 0\\ 2A-\dfrac{1}{2} & : x=0\end{cases}}$$

نوجد النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$$

لأن $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

نعوض في شرط الاستمرار:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

$$2A-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$2A=1$$

$$A=\frac{1}{2}$$

التفسير الهندسي للنهايات:

تدرب 12

محلول في الأوراق.

تدرب 13

محلول في الأوراق.

تابع الجزء الصحيح:

تدرب 14

$$f(x) = 2x + E(x)\,;x \in [0,3[$$

-1 لكتابة التابع بصيغة مستقلة:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,;x \in [0,1[\\ 2x+1\,;x \in [1,2[\\ 2x+2\,;x \in [2,3[\end{cases}$$

-2 لدراسة الاستمرار:

$$f(1) = 3$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$$

التابع غير مستمر على $[0,3[$.

-3 رسوم بإيديك أحلا 😉

-4 لدراسة النهاية:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

نضيف $2x$:

$$3x - 1 < 2x + E(x) \leq 3x$$

نقسم على $x^2 + 1 > 0$:

$$\frac{3x-1}{x^2+1} < \frac{f(x)}{x^2+1} \leq \frac{3x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x^2+1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = 0$$

الاشتقاق:

تدرب 15

ملاحظة: سنستخدم هذا القانون في الحل:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f(x) = x\ln(x+1)\,;a = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(x+1) = 0$$

قابل للاشتقاق عند 0.

$$f(x) = \sin(\sqrt{x})\;;a = 0^+$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}} = +\infty$$

غير قابل للاشتقاق عند 0.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x - lnx}\;;x > 0 \\ 0\qquad\;;\;x = 0 \end{cases}\;;a = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x - lnx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(x - lnx)} = 0$$

قابل للاشتقاق عند 0.

تدرب 16

$$f(x) = e^x$$

-1 للحساب:

$$f(ln2) = e^{ln2} = 2$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f'(ln2) = 2$$

-2 لاستنتاج النهاية من قنون تعريف العدد المشتق (قابلية الاشتقاق عند نقطة):

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to ln2} \frac{e^x - 2}{x - ln2} = f'(ln2) = 2$$

تدرب 17

$$f(x) = xlnx - e$$

$$f(e) = 0$$

$$f'(x) = lnx + 1$$

$$f'(e) = 2$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to e} \frac{xlnx - e}{x - e} = f'(e) = 2$$

تدرب 18

$$f(x) = e^{2x} - 2x$$

المماس الأفقي أي ميله معدوم:

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$2e^{2x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^{2x} = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 1 - 0 = 1$$

وبالتالي معادلة المماس الأفقي:

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 1$$

تدرب 19

$$f(x) = \ln(x+1)$$

نقطة التقاطع مع محور التراتيب أي:

$$x = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$
$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1$$
$$\Rightarrow y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$\Rightarrow y = x$$

تدرب 20

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, y - 4x = 0$$
$$y = 4x$$
$$\Rightarrow m = 4$$
$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$f'(x) = 4$$
$$\frac{1}{(x+1)^2} = 4$$
$$(x+1)^2 = \frac{1}{4}$$

إما:

$$x + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right) - 1 = 4x + 1$$

أو:

$$x + 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$
$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 3$$
$$\Rightarrow y = 4\left(x + \frac{3}{2}\right) + 3 = 4x + 9$$

تدرب 21

$$f(x) = \frac{x + |x|}{x+2}$$

1- نعرف التابع $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+|x|}{x+2}}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+|x|}{x(x+2)}$$

نميز حالتين:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \neq \lim_{x\to 0^-} g(x)$$

فالتابع غير قابل للاشتقاق عند $a = 0$.

2- نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y_T = f'(0^+)(x-0) + f(0)$$
$$y_T = 1$$

<u>التقريب التآلفي:</u>

تدرب 22

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

1- شرط الاستمرار:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$
$$f(0) = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

محقق فالتابع مستمر عند $a = 0$.

2- نحسب المشتق:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{e^x(1-x) - 1}{(e^x-1)^2}$$

3- نفرض:

$$a = 0, h = 0.1$$

نعوض في القانون:

$$f(a+h) \approx f'(a).h + f(a)$$
$$f(0+0.1) \approx 0.1(0) + 1$$
$$f(0.1) \approx 1$$

اشتقاق تابع مركب:

تدرب 23

$$f(x)=\frac{lnx}{x+1}$$

1- نشتق:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x+1)-lnx}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{x}-lnx}{(x+1)^2}$$

2- أ- لدينا:

$\sin x\in]0,+\infty[$

و $\sin x$ اشتقاقي على $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

وبالتالي g اشتقاقي على I.

ب- من قاعدة اشتقاق التابع المركب:

$$g'(x)=f'(sinx).(sinx)'$$
$$=\frac{1+\frac{1}{sinx}-\ln(sinx)}{(sinx+1)^2}.cosx$$

تدرب 24

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x}$$

1- لحساب المشتق:

f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

2- نجد أن:

$$g(x)=f(\sqrt{x}),h(x)=f(sinx)$$
$$g'(x)=f'(\sqrt{x}).(\sqrt{x})'$$
$$=\frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}+1}{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}+1}{2x\sqrt{x}}$$
$$h'(x)=f'(sinx).(sinx)'$$
$$=\frac{sinxe^{sinx}-e^{sinx}+1}{\sin^2 x}.cosx$$
$$=\frac{cosx(sinxe^{sinx}-e^{sinx}+1)}{\sin^2 x}$$

المشتقات من مراتب عليا:

تدرب 25

$$f(x)=-\ln(1-x)$$

تصويب صيغة السؤال:

أثبت ان $f^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$.

1- نحسب المشتقات:

$$f'(x)=\frac{1}{1-x}$$
$$f''(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

2- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n):f^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$f'(x)=\frac{1}{1-x}$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n):f^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}\ \text{......الفرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1):f^{(n+1)}(x)=\frac{(n)!}{(1-x)^{n+1}}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

نشتق الطرفين:

$$f^{(n+1)}=\frac{0-n(1-x)^{n-1}(-1)(n-1)!}{(1-x)^{2n}}$$
$$=\frac{n!}{(1-x)^{2n}(1-x)^{-n+1}}$$
$$=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

القضية صحيحة.

دراسة اطراد تابع وحل المتراجحات المختلطة:

تدرب 26

$$g(x)=e^x+2-x$$

1- g اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g'(x)=e^x-1$$
$$g'(x)=0\Rightarrow e^x-1=0$$
$$e^x=1$$
$$x=0$$
$$g(0)=3$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$---$	0	$+++$
$g(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$

نجد من الجدول أن:

$$g(x) \geq 3 > 0$$

$$g(x) > 0$$

$$\Rightarrow S =]-\infty, +\infty[$$

تدرب 27

$$\ln(x+1) \leq \sqrt{x+1}$$

$$0 \leq \sqrt{x+1} - \ln(x+1)$$

نفرض التابع المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \sqrt{x+1} - \ln(x+1)$$

g اشتقاقي على $]-1,+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}-2}{2(x+1)}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+1} = 2$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$

$$g(3) = 2 - 2\ln(2)$$

x	-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$---$	0	$+++$	
$g(x)$		↘	$2-2\ln(2)$	↗	

نلاحظ من الجدول أن:

$$g(x) \geq 2 - 2\ln(2) > 0$$

$$g(x) > 0$$

$$\sqrt{x+1} - \ln(x+1) > 0$$

$$\sqrt{x+1} > \ln(x+1)$$

محققة.

التابع الفردي والتابع الزوجي:

تدرب 28

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

1- لدراسة قابلية الاشتقاق:

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = g(x)$$

$$g(x) = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x-2}$$

$$= \frac{x(4-x^2)}{(x-2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)}$$

$$= \frac{x(2-x)(2+x)}{(x-2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)}$$

$$= \frac{-x(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)} = \frac{-x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = -\infty$$

$x = 2$ مماس شاقولي.

$$\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = h(x)$$

$$= \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x+2} = \frac{x(4-x^2)}{(x+2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)}$$

$$= \frac{x(x+2)(2-x)}{(x+2)\left(\sqrt{4-x^2}\right)} = \frac{x(2-x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\lim_{x\to -2} h(x) = -\infty$$

$x = -2$ مماس شاقولي.

2- الشرط الأول:

$$x \in [-2,2] \Rightarrow -x \in [-2,2]$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -x\sqrt{4-(-x)^2}$$

$$= -x\sqrt{4-x^2} = -f(x)$$

التابع متناظر بالنسبة للمبدأ.

3- المجال $[0,2]$:

$$f(0) = 0\,, f(2) = 0$$

f اشتقاقي على $]0,2[$:

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}.x$$

$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 2x^2 = 0$$

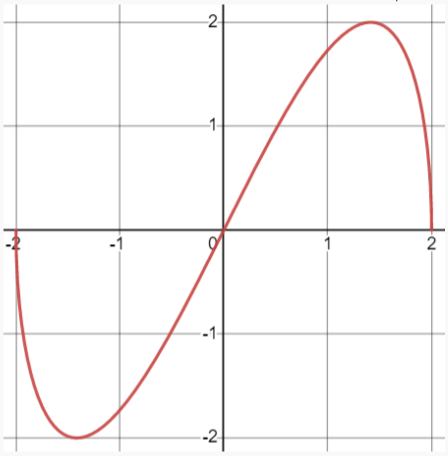
$$4 = 2x^2$$

$x = +\sqrt{2}$ مقبول

مرفوض $x = -\sqrt{2}$

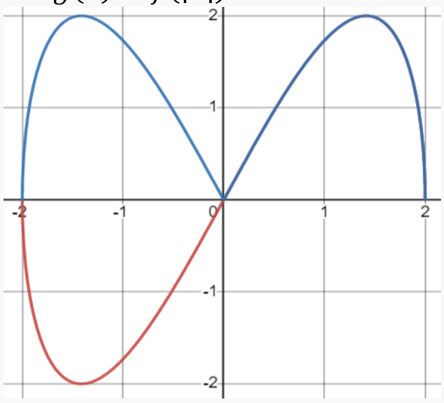
x	0	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	$+++$	0	$---$
$f(x)$	0 ↗	2	↘ 0

4- الرسم:



5- نلاحظ أن:

$$g(x) = f(|x|)$$



تدرب 29

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

1- لدينا:

$$\frac{2+x}{2-x} > 0$$
$$2+x = 0 \Rightarrow x = -2$$
$$2-x = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2+x$		$---$	0	$+++$		$+++$	
$2-x$		$+++$		$+++$	0	$---$	
$\frac{2+x}{2-x}$		$---$	0	$+++$	‖	$---$	
>0		غ م		م		غ م	

$$\Rightarrow D_f =]-2,2[$$

2- الشرط الأول:

$$x \in]-2,2[\Rightarrow -x \in]-2,2[$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$
$$= -f(x)$$

التابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

3- النهايات:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \ln\left(\frac{0}{4}\right) = -\infty$$

$x = -2$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقتع على يمين مقاربه.

$$f(0) = 0$$

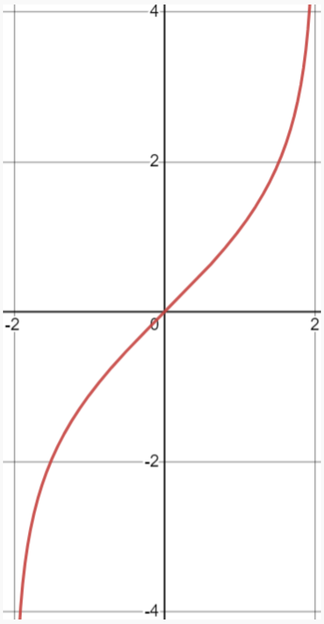
f اشتقاقي على $]-2,0]$:

$$f(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$
$$= \frac{2-x+2+x}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$$
$$f'(x) \neq 0$$

جدول التغيرات:

x	-2		0
$f'(x)$	‖	$++++++++$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0

4- الرسم:



5- نجد أن:

$$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$
$$= -f(x)$$

الخط البياني للتابع g ينتج عن الخط البياني للتابع f بتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

مركز التناظر:

تدرب 30

$$f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

1- الشرط الأول:

$$x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

نضرب بـ -1:

$$-x\in\mathbb{R}\backslash\{+1\}$$

نضيف $+2$:

$$-2-x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

الشرط الثاني:

$$f(x)+f(-2-x)=2b$$

$$f(x)+f(-2-x)$$

$$=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

$$+\frac{2(-2-x)^2+(-2-x)+7}{-2-x+1}$$

$$=\frac{2x^2+x+7}{x+1}-\frac{8+8x+2x^2-2-x+7}{x+1}$$

$$=\frac{2x^2+x+7-2x^2-7x-13}{x+1}$$

$$=\frac{-6x-6}{x+1}=-6\left(\frac{x+1}{x+1}\right)=-6=2b$$

فالنقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر للتابع.

2- بالقسمة الإقليدية نجد:

$$f(x)=2x-1+\frac{8}{x+1}$$

بالمقارنة نجد:

$$a=2\,,b=-1\,,c=8$$

3- نفرض $y=2x-1$:

$$f(x)-y=\frac{8}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-y=0$$

إذاً y مقارب مائل في جوار $\pm\infty$.

عندما $x>-1$ فإن C فوق المقارب.

عندما $x<-1$ فإن C تحت المقارب.

4- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\frac{8}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$:

$$f'(x)$$

$$=\frac{(4x+1)(x+1)-1(2x^2+x+7)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{4x^2+4x+x+1-2x^2-x-7}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2x^2+4x-6=0$$

$$2(x^2+2x-3)=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

إما:

$$x=-3$$

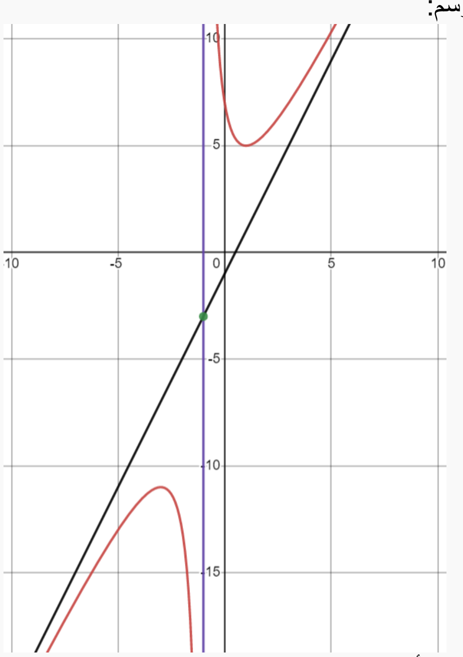
أو:

$$x=1$$

$$f(1)=5\,,f(-3)=-11$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+++$	0	$---$	‖	$---$	0	$+++$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

5- الرسم:



6- نلاحظ أن:

$$f(-x)=g(x)$$

الخط البياني للتابع g ينتج عن الخط البياني للتابع f بتناظر بالنسبة لمحور الفواصل.

تدرب 31

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to1}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على $]1,3[$:

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x} = \frac{3-x+x-1}{(x-1)(3-x)}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(3-x)}$$

$$f'(x) \neq 0$$

x	1		3
$f'(x)$	‖	+ + + + + + + + + +	‖
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖

2- الشرط الأول:

$$x \in]1,3[$$

$$-x \in]-3,-1[$$

$$4 - x \in]1,3[$$

الشرط الثاني:

$$f(x) + f(4-x) = 2b$$

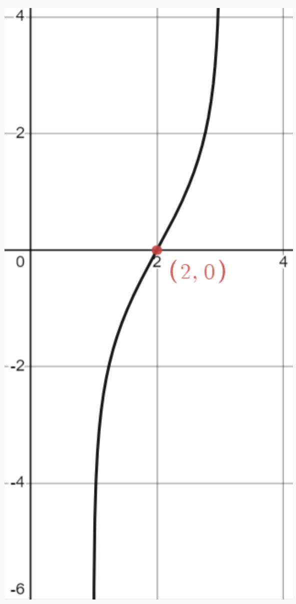
$$f(x) + f(4-x)$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) + \ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{3-x} \times \frac{3-x}{x-1}\right) = \ln(1) = 0$$

إذاً $I(2,0)$ مركز تناظر للتابع.

3- الرسم:



تدرب 32

محلول.

تدرب 33

محلول.

تدرب 34

محلول.

تدرب 35

محلول.

تدرب 36

محلول.

تدرب 37

محلول.

دراسة تغيرات تابع:

تدرب 38

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

1- مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على D_f:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - (2x+2)(x+2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 4x - 2x - 4}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$-(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0$$

$x = -1$ مرفوض , $x = -3$

$$f(-3) = -\frac{1}{4}$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$---$	0	$+++$	‖	$---$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

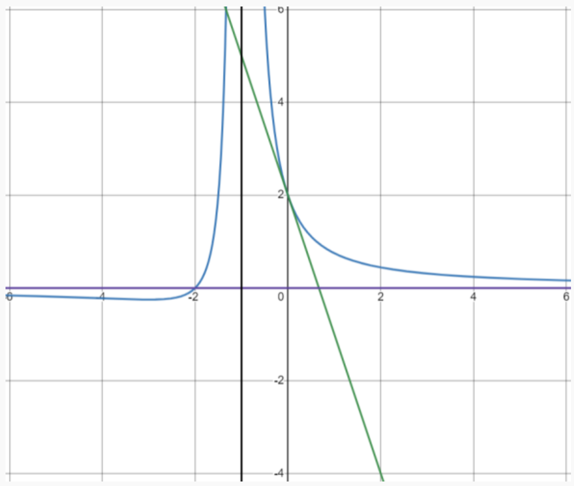
2- في التقاطع مع محور التراتيب $x = 0$:

$$f(0) = 2$$

$$f'(0) = -3$$

$$\Rightarrow y_T = -3(x-0) + 2 = -3x + 2$$

3- الرسم:



تدرب 39

$$f(x) = x\sqrt{3-x}$$

1- لإثبات انه يقبل مماساً شاقولياً يكفي أن نثبت أنه غير اشتقاقي عند $a = 3$:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(3)}{x-3}$$

$$g(x) = \frac{x\sqrt{3-x}}{x-3} = \frac{x(3-x)}{-(3-x)\sqrt{3-x}}$$

$$= \frac{x}{-\sqrt{3-x}}$$

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

وبالتالي $x = 3$ مماساً شاقولياً للتابع.

2- النهايات:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

الصورة عند الأطراف المغلقة:

$$f(3) = 0$$

f اشتقاقي على $]-\infty, 3]$:

$$f'(x) = \sqrt{3-x} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}.x$$

$$= \frac{2(3-x) - x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6 - 3x = 0$$

$$3x = 6$$

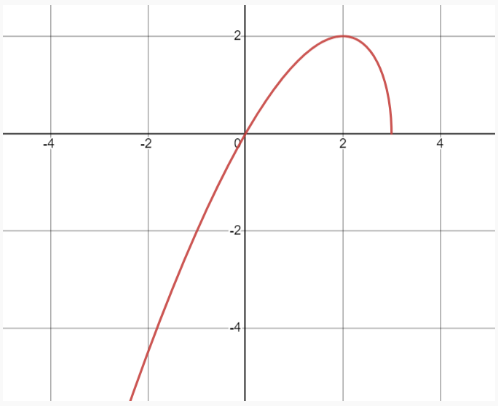
$$x = 2$$

$$f(2) = 2$$

الجدول:

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		$++++++$	0	$------$	‖
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0

3- الرسم:



تدرب 40

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ D_f =]-\infty, +\infty[$$

1- الشرط الأول:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -x - \frac{x}{\sqrt{(-x)^2+1}}$$

$$= -x - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= -\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -f(x)$$

فالتابع f فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

2- نشكل الفرق:

$$f(x)-y_1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1$$

$$=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

في جوار $-\infty$ إن $|x|=-x$:

$$=\frac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y_1=\frac{1-1}{+\infty}=0$$

إذن y_1 مقارب مائل في جوار $-\infty$.

3- نشكل الفرق:

$$f(x)-y_2=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}-1$$

$$=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1$$

في جوار $+\infty$ فإن $|x|=+x$:

$$=\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_2=1-1=0$$

إذن y_2 مقارب مائل في جوار $+\infty$.

4- النهايات:

$$f(x)=x+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\infty$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=1+\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=1+\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

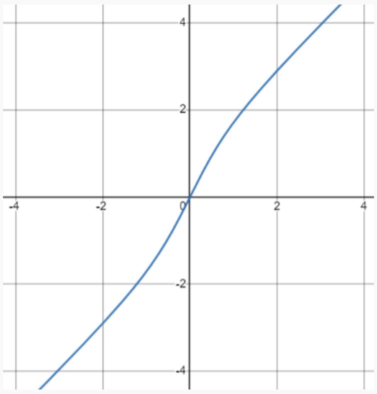
$$=\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

نجد أن المشتق موجب لا ينعدم.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

5- لا يقبل لأن المشتق لا ينعدم.

6- الرسم:



تدرب 41

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$$

1- مجموعة التعريف:

$$D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

نعدم:

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f(-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

الجدول:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$++$	0	$--$	‖	$--$	0	$++$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

2- نفرض $y_d = \frac{x}{2}$:

$$f(x) - y_d = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - y_d = 0$$

لدراسة الوضع النسبي نجد أن:

عندما $x > 0$ فإن C فوق d.

عندما $x < 0$ فإن C تحت d.

3- الشرط الأول:

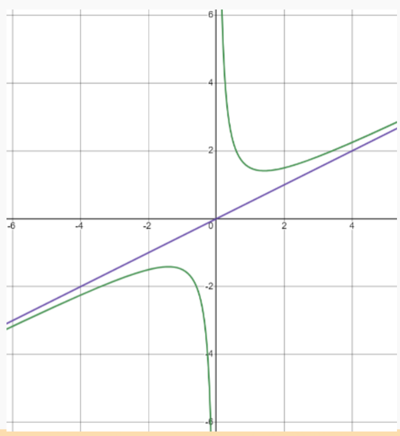
$$x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^*$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

التابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

4- الرسم:



5- لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}\ ; u_0 = 2$$

أ- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2} \le \frac{3}{2} \le 2$$

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$ ... ... الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$ ... ... الطلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

لدينا التابع f متزايد على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$, نصور الأطراف فيه:

$$f(\sqrt{2}) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n)$$

$$\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

محققة فالقضية صحيحة.

ب- بما أن المتتالية محدودة من الأدنى ولقد أثبتنا في الطلب السابق أن:

$$u_{n+1} \le u_n$$

فالمتتالية متناقصة وبالتالي هي متقاربة, لتعيين نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x$$

$$\frac{x^2 + 2}{2x} = x$$

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$2 = x^2$$

$x = +\sqrt{2}$ مقبول

$x = -\sqrt{2}$ مرفوض

بالتالي:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$

تدرب 42

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$$

-1 مجموعة التعريف:

$$D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C على يسار مقاربه.

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C على يمين مقاربه.

-2 بالقسمة الإقليدية:

$$\frac{x^2+3}{x+1}=x-1+\frac{6}{x+1}$$

نفرض $y_d=x-1$:

$$f(x)-y_d=\frac{6}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_d=0$$

-3 لدراسة الوضع النسبي نجد أن:

عندما $x>-1$ فإن C فوق d.

عندما $x<-1$ فإن C فوق d.

-4 f اشتقاقي على $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$x=-3\,,x=1$$

$$f(1)=\frac{4}{2}=2$$

$$f(-3)=\frac{12}{-2}=-6$$

-5 التقاطع مع محور التراتيب:

$$x=0$$

$$y_T=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$=-3(x-0)+3=-3x+3$$

-6 النقطة $A(-1,-2)$:

$$x\in\mathbb{R}\Rightarrow -2-x\in\mathbb{R}$$

$$f(x)+f(2a-x)=2b$$

$$f(x)+f(-2-x)$$

$$=\frac{x^2+3}{x+1}+\frac{(-2-x)^2+3}{-2-x+1}$$

$$=\frac{x^2+3}{x+1}+\frac{4+4x+x^2+3}{-x-1}$$

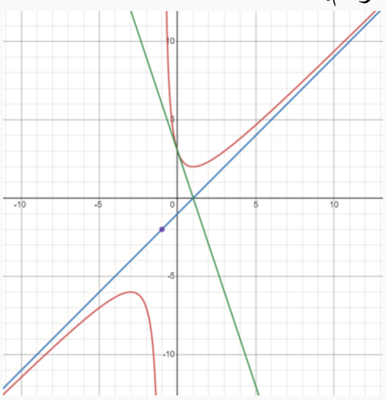
$$=\frac{x^2+3-(7+4x+x^2)}{x+1}$$

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
$f(x)$		0		‖		0	
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	-6	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↗	2	↘ $+\infty$

$$=\frac{x^2+3-7-4x-x^2}{x+1}$$

$$=\frac{-4(x+1)}{(x+1)}=-4$$

-7 الرسم:



-8 تصويب صيغة $g(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$, لدينا:

$$f(-x)=\frac{x^2+3}{1-x}=-\frac{x^2+3}{x-1}=-g(x)$$

$$f(-x)=-g(x)$$

نضرب بـ -1:

$$g(x)=-f(-x)$$

الخط البياني للتابع g ينتج عن الخط البياني للتابع f بتناظر بالنسبة للمبدأ.

اللوغارتمي والأسي:

تدرب 47

$$\begin{cases}(\boldsymbol{lnx})(\boldsymbol{lny}) = -\mathbf{12}\\ \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{xy}) = \mathbf{1}\end{cases}$$

$$= \begin{cases}(\boldsymbol{lnx})(\boldsymbol{lny}) = -\mathbf{12}\\ \boldsymbol{lnx} + \boldsymbol{lny} = \mathbf{1}\end{cases}$$

نضع $lnx = X$ و $lny = Y$:

$$= \begin{cases}\boldsymbol{X.Y} = -\mathbf{12}\\ \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \mathbf{1}\end{cases}$$

نبحث عن عددين ضربهم -12 وجمعهم $+1$ وهما:

$$X = +4\,, Y = -3$$

$$X = lnx = 4 \Rightarrow x = e^4$$

$$Y = lny = -3 \Rightarrow y = e^{-3}$$

ملاحظة: يمكن العكس بين القيمتين فتكون $\boldsymbol{y = e^4}$ و $\boldsymbol{x = e^{-3}}$.

تدرب 48

$$\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{a+b}}{\mathbf{3}}\right) = \frac{\boldsymbol{lna + lnb}}{\mathbf{2}}$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln(ab)}{2}$$

$$2\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln(ab)$$

$$\ln\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{9}\right) = \ln(ab)$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{9} = ab$$

$$a^2+2ab+b^2 = 9ab$$

$$a^2-7ab+b^2 = 0$$

نقسم على b^2:

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{7a}{b} + 1 = 0$$

نفرض $x = \frac{a}{b}$:

$$x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(1)(1) = 45$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

يوجد قيمتين للمقدار $\frac{a}{b}$.

تدرب 49

$$\boldsymbol{e^{x^2-2} \le e^{4-x}}$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$x^2 - 2 \le 4 - x$$

$$x^2 + x - 6 \le 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(-6) = 25$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1-6}{2} = -\frac{7}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		2		$+\infty$
x^2+x-6		$++++$	0	$----$	0	$++++$	
≥ 0		مقبول		غير مقبول		مقبول	

$$S =]-\infty, -\frac{7}{2}] \cup [2, +\infty[$$

$$\boldsymbol{e^{2x^2-1} \ge 3}$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$2x^2 - 1 \ge \ln(3)$$

$$2x^2 - 1 = \ln(3)$$

$$2x^2 = \ln(3) + 1$$

$$x^2 = \frac{\ln(3)+1}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}$		$\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}$		$+\infty$
$2x^2-1-ln3$		$++++$	0	$----$	0	$++++$	
≥ 0		مقبول		غير مقبول		مقبول	

$$S =]-\infty, -\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}, +\infty[$$

$4e^{2x} - e^x + 2 = 0$

$$E = \mathbb{R}$$

نفرض $e^x = t$

$$4t^2 - t + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(4)(2) = 1 - 32 = -31 < 0$$

مستحيلة.

$e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

$$E = \mathbb{R}$$

نفرض $e^{-x} = t$

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$(t-6)(t-1) = 0$$

إما:

$$t = 6$$

$$e^{-x} = 6$$

$$\Rightarrow -x = \ln(6) \Rightarrow x = -\ln(6)$$

أو:

$$t = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

والحلان مقبولان في شرط الحل.

$e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$

$$E = \mathbb{R}$$

نفرض $e^x = t$:

$$t^3 - 3t - 2 < 0$$

بالقسمة على $t+1$ نجد:

$$t^3 - 3t - 2 = (t+1)(t^2 - t - 2)$$

وبالتالي:

$$(t+1)(t^2 - t - 2) < 0$$

$$(t+1)(t+1)(t-2) < 0$$

$$(t+1)^2(t-2) < 0$$

بما أن $(t+1)^2$ موجب فالإشارة من إشارة $(t-2)$:

$$t - 2 < 0$$

$$t < 2$$

$$e^x < 2$$

$$x < ln2$$

$$S =]-\infty, ln2[$$

$e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$

$$E = \mathbb{R}$$

$$e(e^{3x} + 4e^{2x} - 5e^x) = 0$$

نفرض $t = e^x$:

$$t^3 + 4t^2 - 5t = 0$$

$$t(t^2 + 4t - 5) = 0$$

إما:

$$t = 0$$

أو:

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$(t+5)(t-1) = 0$$

إما:

$$t = -5$$

أو:

$$t = 1$$

والحلول مقبولة في شرط الحل.

$$\boldsymbol{\frac{e^{-x} - 1}{e^x - 1} = -2}$$

شرط الحل:

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$E = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

$$e^{-x} - 1 = -2e^x + 2$$

نضرب بـ e^x:

$$1 - e^x = -2e^{2x} + 2e^x$$

$$2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$$

نفرض $e^x = t$:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(2)(1) = 1$$

$$t_1 = \frac{3+1}{2(2)} = 1$$

$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ مرفوض

$$t_2 = \frac{3-1}{2(2)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln(2)$$ مقبول

تدرب 50

$$\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$$

$$3 \times 2^x < 2^x + 1$$

$$-2 \times 2^x + 1 > 0$$

$$-2 \times 2^x > -1$$

$$2^x < \frac{1}{2}$$

$$x\ln(2) < -\ln(2)$$

$$x < -1$$

$$S =]-\infty, -1[$$

$$\mathbf{4^x + 2^{x+1} - 3 \le 0}$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$2^{2x} + 2^x.2 - 3 \le 0$$

نفرض $t = 2^x$:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0$$

إما:

$t = -3$ مرفوض

أو:

$$t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x\ln 2 = 0$$

$$x = 0$$

$$S = [0, +\infty[$$

$$\mathbf{4e^{2x} - e^x + 2 = 0}$$

نفرض $e^x = t$:

$$4t^2 - t + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(4)(2) = -31 < 0$$

مستحيلة.

$$\mathbf{2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \ge 0}$$

نفرض $t = 2^x$:

$$2t - 10t + 12 \ge 0$$

$$-8t \ge -12$$

$$t \le \frac{3}{2}$$

$$S = [\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$\mathbf{3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \ge 7}$$

نضرب المتراجحة بـ 3^x:

$$3.3^{2x} + 2 \ge 7 \times 3^x$$

نفرض $t = 3^x$:

$$3t^2 - 7t + 2 \ge 0$$

$$3t^2 - 7t + 2 = 0$$

$$\Delta = 49 - (4)(3)(2) = 25$$

$$t_1 = \frac{7+5}{6} = 2$$

$$t_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		2	$+\infty$
$3t^2 - 7t + 2$	$+ + + +$	0	$- - - -$	0	$+ + + +$
≤ 0	مقبول		مرفوض		مقبول

تدرب 51

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x.3^y = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

من 1 نجد:

$$3^x = \frac{9}{3^y}$$

نعوض في 2:

$$\frac{9}{3^y} + 3^y = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{9 + 3^{2y}}{3^y} = 4\sqrt{3}$$

$$3^{2y} - 4\sqrt{3} \times 3^y + 9 = 0$$

نفرض $3^y = t$:

$$t^2 - 4\sqrt{3}t + 9 = 0$$

$$\Delta = 48 - 4(1)(9) = 12$$

$$t_1 = \frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3^y = \ln(3\sqrt{3}) \Rightarrow y\ln(3) = \ln(3\sqrt{3})$$

$$y = \frac{\ln(3\sqrt{3})}{\ln(3)}$$

وبالتالي تكون x:

$$3^x = \frac{9}{3^y} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x\ln(3) = 2\ln(3) \Rightarrow x = 2$$

وممكن أن يكون العكس أيضاً.

$$\begin{cases} \boldsymbol{e^x - \frac{1}{2}e^y = 1} \\ \boldsymbol{2e^x + e^y = 4 + e} \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى بـ -2:

$$\begin{cases} -2e^x + e^y = -2 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

نجمع:

$$2e^y = 2 + e$$

$$e^y = \frac{2+e}{2}$$

$$y = \ln\left(\frac{2+e}{2}\right)$$

نعوض في 2:

$$2e^x + \frac{2+e}{2} = 4 + e$$

$$2e^x = 4 + e - \frac{2+e}{2}$$

$$2e^x = \frac{8+2e-2-e}{2}$$

$$2e^x = \frac{6+e}{2}$$

$$e^x = \frac{6+e}{4}$$

$$x = \ln\left(\frac{6+e}{4}\right)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{e^{4x}e^y = \frac{1}{e^2}} \\ \boldsymbol{xy = -2} \end{cases}$$

بالمعادلة الأولى نجد:

$$e^{4x+y} = e^{-2}$$

$$4x + y = -2$$

ومن المعادلة الثانية نجد:

$$y = -\frac{2}{x}$$

نعوض في المعادلة الأولى:

$$4x - \frac{2}{x} = -2$$

$$\frac{4x^2-2}{x} = -2$$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(4)(-2) = 36$$

$$x_1 = \frac{-2+6}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = -4$$

$$x_2 = \frac{-2-6}{8} = -1 \Rightarrow y_2 = 2$$

تدرب 52

محلول.

تدرب 53

$$\boldsymbol{y' + 5y = 0}$$

$$\boldsymbol{A(-2, 1)}$$

$$y' = -5y$$

$$y = k.e^{-5x}$$

ولدينا:

$$f(-2) = 1$$

$$\Rightarrow k.e^{10} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{e^{10}} = e^{-10}$$

تدرب 53

$$\boldsymbol{y' + 2y = 0}$$

$$\boldsymbol{f'(-2) = \frac{1}{2}}$$

$$y' = -2y$$

$$\Rightarrow y = k.e^{-2x}$$

$$y' = -2y = -2k.e^{-2x}$$

نعوض -2 في المشتق:

$$f'(-2) = -2ke^4$$

$$\frac{1}{2} = -2ke^4$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{4e^4}$$

المسألة الأولى

$$\boldsymbol{f(x) = 2e^x - x - 2}$$

1- النهايات:

$$f(x) = x\left(\frac{2e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2- f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2e^x - 1$$

نعدم:

$$2e^x - 1 = 0$$

$$e^x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\ln(2)$$

$$f(-\ln(2)) = 1 + \ln(2) - 2 = \ln(2) - 1$$

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - - -$	0	$+ + + + +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2) - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

3- الاستنتاج:

على المجال $]-\infty, -\ln(2)[$ نلاحظ أن التابع متناقص ومستمر و:

$$0 \in f(]-\infty, -\ln(2)]) =]\ln(2) - 1, +\infty[$$

يوجد حل وحيد للمعادلة.

على المجال $]-\ln(2), +\infty[$ نلاحظ أن التابع متزايد ومستمر و:

$$0 \in f([-\ln(2), +\infty[) =]\ln(2) - 1, +\infty[$$

يوجد حل وحيد للمعادلة وبالتالي للمعادلة جذران وللتأكد من أن 0 حلاً لها:

$$f(0) = 0$$

4- نلاحظ أن:

f مستمر ومتناقص على المجال $]-2, -1[$ و:

$$\alpha \in f(]-2, -1[) =]2e^{-1} - 1, 2e^{-2}[$$

وبالتالي:

$$-2 < \alpha < -1$$

المسألة الثانية

$$\boldsymbol{f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = \frac{4}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_d = 0$$

d مقارب للتابع.

3- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_{d'} = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x - 3$$

$$= -4 + \frac{4}{e^x + 1} = \frac{-4e^x - 4 + 4}{e^x + 1} = \frac{-4e^x}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y_{d'} = 0$$

d' مقارب للتابع.

4- f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

نعدم:

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$f(0) = -1 + 2 = 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5- في نقطة التقاطع مع محور التراتيب نضع:

$$x = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$y_T = 1$$

المسألة الثالثة

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

1- لدينا:

a- الشرط الأول:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$= -f(x)$$

فالتابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

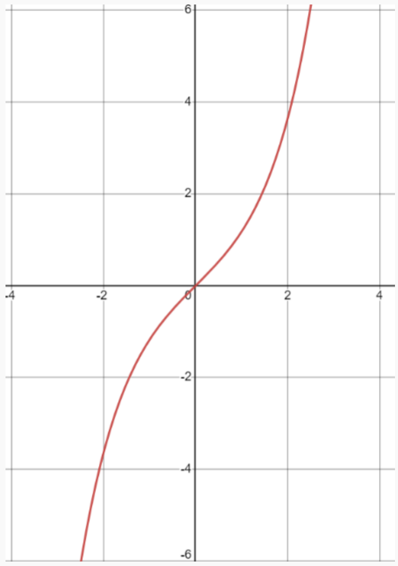
f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

والتابع لا ينعدم.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$++++++++++++$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الرسم:



b- لدينا:

$$f(0) = 0$$

المبدأ.

$$f'(0) = 1$$

فتكون معادلة المماس:

$$y_d = x$$

لدراسة الوضع النسبي نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

نعرف:

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

g اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1$$

نعدم:

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - 1 = 0$$

نضرب بـ e^x:

$$\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \frac{1}{2} = 0$$

نضرب المعادلة بـ 2:

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-----$	0	$+++++$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

نلاحظ أن:

على $[0,+\infty[$ فوق C d.

على $]-\infty,0]$ تحت C d.

2- لدينا:

a- f مستمر ومتزايد ولدينا:

$$m \in f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$.

b- للإثبات:

$$f(x) = m$$

$$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = m$$

$$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - m = 0$$

نضرب بـ $2e^x$:

$$e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$$

نفرض $e^x = t$:

$$t^2 - 2mt - 1 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 - (4)1(-1) = 4m^2 + 4$$

$$= 4(m^2 + 1)$$

$$t_1 = \frac{2m + \sqrt{4(m^2+1)}}{2} = m + \sqrt{m^2+1}$$

$$e^x = m + \sqrt{m^2+1}$$

$$x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right) = \alpha$$

3- نعوض:

$$\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x} - e^{2x} - 2 - e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{4}(-4) = -1$$

4- تصويب صيغة $g(x) = \frac{-e^{2x}+1}{2e^x}$

للاستنتاج نأخذ:

$$g(x) = -\frac{e^{2x}}{2e^x} + \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2}(-e^x + e^{-x})$$

$$= -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$$

المسألة الرابعة

$$\boldsymbol{f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}$$

1- لدينا:

a- لنوجد مجموعة التعريف:

$$e^{2x} - e^x + 1 > 0$$

$$e^{2x} - e^x + 1 = 0$$

نفرض $t = e^x$:

$$t^2 - t + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3$$

مستحيلة.

وبالتالي مجموعة التعريف:

$$D_f = \mathbb{R}$$

b- لدينا:

$$f(x) = \ln\left(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})\right)$$

$$= \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$= 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

وبالتالي المقولة صحيحة.

c- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_d = \ln(1) = 0$$

d مقارب في جوار $+\infty$.

d- المماس الموازي لمحور الفواصل هو مماس أفقي وبالتالي يجب أن ينعدم المشتق:

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

نعدم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x} - e^x = 0$$

$$\Rightarrow e^x(2e^x - 1) = 0$$

إما:

$e^x = 0$ مستحيلة

أو:

$$2e^x - 1 = 0$$

$$2e^x = 1$$

$$e^x = \frac{1}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

ومعادلته:

$$y = f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

وبالتالي المقولة صحيحة فيوجد مماساً افقياً موازياً لمحور الفواصل عند $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

2- لدينا كل ما نريد من أجل جدول التغيرات ماعدا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$y = 0$ مقارب أفقي.

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(e^{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

3- لكتابة معادلة المماس:

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f'(0) = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$\Rightarrow y_T = 1(x-0) + 0 = x$$

4- الرسم:

المسألة الخامسة

$$f(x) = (1-x)2^x = (1-x)e^{x\ln(2)}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(e^{x\ln(2)} - \frac{x\ln(2)e^{x\ln(2)}}{\ln(2)}\right)$$

$$= 0$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -e^{x\ln(2)} + \ln(2)\, e^{x\ln(2)}(1-x)$$

$$= -e^{x\ln(2)} + \ln(2)\, e^{x\ln(2)} - x\ln(2)e^{x\ln(2)}$$

$$= e^{x\ln(2)}(-1 + \ln(2) - x)$$

نعدم:

$$e^{x\ln(2)} = 0$$

مستحيلة.

$$-1 + \ln(2) - x = 0$$

$$x = \ln(2) - 1$$

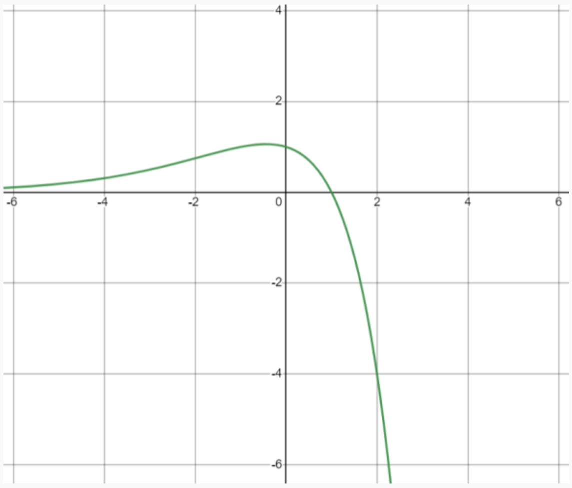
$$f(\ln(2)-1) = -\ln(2)\left(e^{\ln(2)(\ln(2)-1)}\right)$$

$$= -\ln(2)\, e^{\ln^2 2 - \ln 2}$$

الجدول:

x	$-\infty$		$\ln(2)-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\ln 2 \,.\, e^{\ln^2 2 - \ln(2)}$	$\nearrow$	$+\infty$

الرسم:



المسألة السادسة

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

f معرف بشرط

$$2 + \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{2x+1}{x} > 0$$

البسط:

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

المقام:

$$x = 0$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+1}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
متراجحة		م		غ م		م	

$$D_f =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \ln(2) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \ln(2) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$$

$x = -\frac{1}{2}$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

C يقع على يسار المقارب

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$x = -\frac{1}{2}$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

C يقع على يمين المقارب

f اشتقاقي على D_f :

ولكن سنغير شكل f للسهولة

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$f(x) = x - [\ln(2x+1) - \ln(x)]$$

$$f(x) = x - \ln(2x+1) + \ln(x)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x}$$

نوحد المقامات

$$f'(x) = \frac{x(2x+1) - 2x + 2x + 1}{x(2x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x+1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2)(1)$$

$$1 - 8 = -7 < 0$$

مستحيلة الحل

$$f'(x) > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$			$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow +\infty$	

$$f(x) - y_d =$$
$$x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - (x - \ln(2))$$

$$f(x) - y_d = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - x + \ln(2)$$

$$f(x)-y_d=-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+\ln(2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=-\ln(2)+\ln(2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=0$$

d مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_d=-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+\ln(2)$$

$$-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+\ln(2)=0$$

$$\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\ln(2)$$

$$2+\frac{1}{x}=2$$

$$\frac{1}{x}=0$$

مستحيلة

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f(x)-y_d$	$+$			$-$
	C فوق d			C تحت d

f مستمر ومتزايد على $]1,2[$

$$0\in f(]1,2[)=]1-\ln(3)\ ,2-\ln\left(\frac{5}{2}\right)[$$

للمعادلة حل وحيد α على المجال $]1,2[$

$$f'(x)=\frac{2x^2+x+1}{x(2x+1)}$$

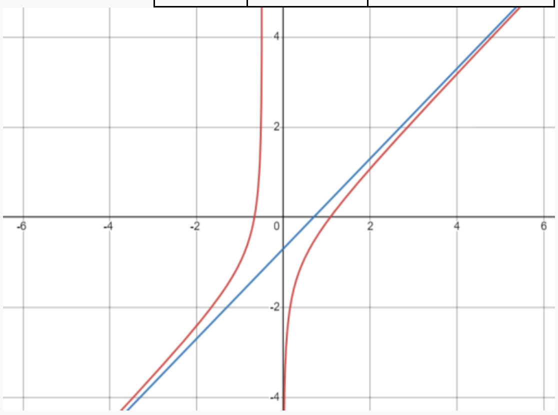
$$y=\underbrace{f'(a)}_{\frac{4}{3}}(x-\underbrace{a}_{1})+\underbrace{f(a)}_{1-\ln(3)}$$

$$T:y=\frac{4}{3}(x-1)+1-\ln(3)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

$$y=x-\ln(2)$$

x	y	(x,y)
0	$-\ln 2$	$(0,-\ln 2)$
$\ln 2$	0	$(\ln 2\,,0)$



المسألة السابعة

$$f(x)=\frac{2}{e^{2x}+1}+x$$

1- نشكل الفرق:

$$f(x)-y_{d_1}=\frac{2}{e^{2x}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y_{d_1}=0$$

إذن d_1 مقارب مائل في جوار $+\infty$.

2- نشكل الفرق:

$$f(x)-y_{d_2}=\frac{2}{e^{2x}+1}-2$$

$$=\frac{2-2e^{2x}-2}{e^{2x}+1}=\frac{-2e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-y_{d_2}=0$$

إذن d_2 مقارب مائل في جوار $-\infty$.

3- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}+1$$

$$=\frac{-2e^{2x}+(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{-2e^{2x} + e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{e^{4x}+1}{(e^{2x}+1)^2}$$

نعدم:

$$e^{4x} + 1 = 0$$

$$e^{4x} \neq -1$$

مستحيلة.

الجدول:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+ + + + + + + + + + + +$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4- لدينا:

$$A(0,1)$$

الشرط الأول:

$$x \in \mathbb{R}$$

$$-x \in \mathbb{R}$$

الشرط الثاني:

$$f(x) + f(-x) = 2b$$

$$\frac{2}{e^{2x}+1} + x + \frac{2}{e^{-2x}+1} - x$$

$$= \frac{2}{e^{2x}+1} + \frac{2}{\frac{1}{e^{2x}}+1}$$

$$= \frac{2}{e^{2x}+1} + \frac{2}{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{2+2e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$= 2\left(\frac{1+e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) = 2 = 2b$$

إذن $A(0,1)$ مركز تناظر للتابع.

5- لدينا:

$$x = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

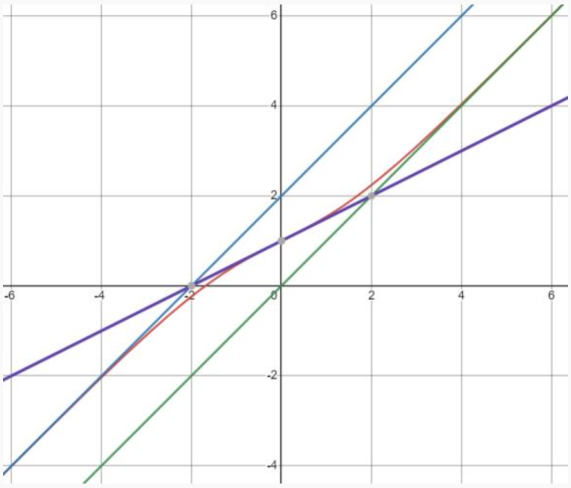
$$\Rightarrow y_T = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$= \frac{1}{2}x + 1$$

لدراسة الوضع النسبي:

محذوف

الرسم:



المسألة الثامنة

أولاً:

$$g(x) = x^2 + \ln x - 1$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

نعدم:

$$2x^2 + 1 = 0$$

$$2x^2 = -1$$

مستحيلة.

الجدول:

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$ $+ + + + + + + + + + + +$
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty \nearrow +\infty$

2- نجد أن التابع مستمر ومتزايد على مجموعة تعريفه وأيضاً:

$$0 \in f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

وللتأكد أن $\alpha = 1$ حلاً:

$$g(1) = 0$$

وبالتالي إشارة $g(x)$:

$g(x) \geq 0$ على المجال $[1, +\infty[$

$g(x) < 0$ على المجال $]0,1[$

ثانياً:

$$f(x) = x + 1 - \frac{lnx}{x} \; ; x \in]0, +\infty[$$

1- النهايات:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2- f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}x - lnx}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + lnx}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + lnx - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

3- $f(1) = 2$ قيمة حدية صغرى ومعادلة المماس الافقي:

$$y = 2$$

4- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{lnx}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

لدراسة الوضع النسبي، نعدم الفرق:

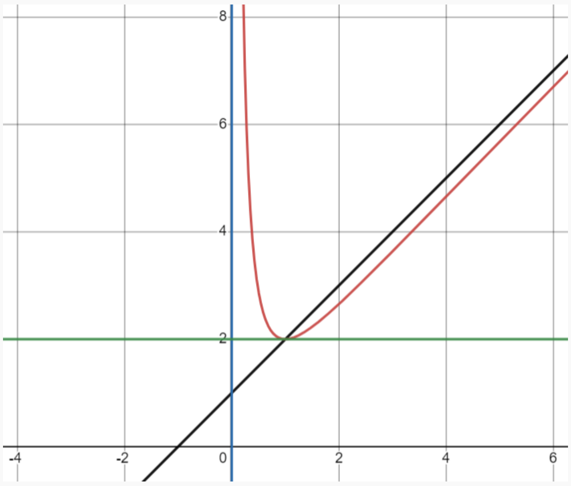
$$-\frac{lnx}{x} = 0$$

$$lnx = 0$$

$$x = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$-\frac{lnx}{x}$	‖	$+++++$	0	$------$	
الوضع	‖	C فوق Δ		C تحت Δ	

5- الرسم:



المسألة التاسعة

$$f(x) = x - 1 + \frac{lnx}{x^2} \; ; x \in]0, +\infty[$$

$$g(x) = x^3 - 1 + 2lnx \; ; \; x \in]0, +\infty[$$

1- النهايات:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} = \frac{3x^3 + 2}{x} > 0$$

لا ينعدم.

الجدول:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+++++++++++$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2- نعوض في التابع:

$$g(1) = 0$$

نلاحظ أن $g(x) \geq 0$ على المجال $[1, +\infty[$

نلاحظ أن $g(x) < 0$ على المجال $]0,1[$

3- النهايات:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x.lnx}{x^4}$$

$$= \frac{x^4 - x + 2xlnx}{x^4} = \frac{x(x^3 - 1 + 2lnx)}{x^4}$$

$$= \frac{x^3 - 1 + 2lnx}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

الجدول:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = -\frac{lnx}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_d = 0$$

لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_d = 0$$

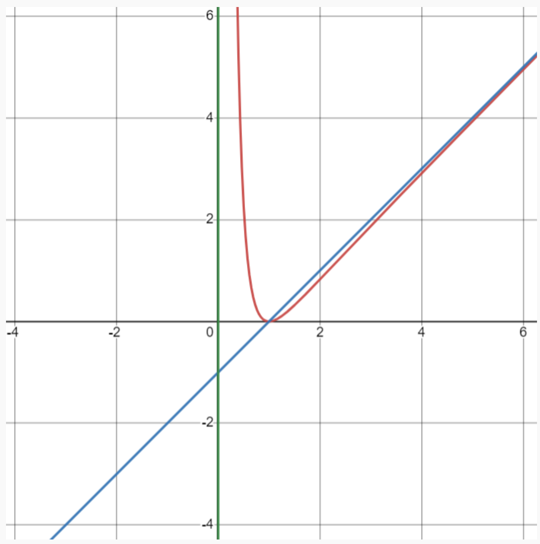
$$-lnx = 0$$

$$lnx = 0$$

$$x = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$-\frac{lnx}{x^2}$	‖	$+++++$	0	$------$	
الوضع	‖	C فوق Δ		C تحت Δ	

5- الرسم:



6- الرسم:

7- لدينا:

لا يوجد حلول $m \in]-\infty, 0[$

حل وحيد $m = 0$

حلان $m \in]0, +\infty[$

المسألة العاشرة

$$\boldsymbol{f(x) = x + x(lnx)^2}$$

$$\boldsymbol{g(x) = (lnx + 1)^2}$$

$$\boldsymbol{D =]0, +\infty[}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x + \left(\sqrt{x}lnx\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x + \left(2\sqrt{x}ln\sqrt{x}\right)^2 = 0$$

2- f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 + \ln^2 x + 2lnx\left(\frac{1}{x}\right)x$$

$$= \ln^2 x + 2lnx + 1 = (lnx + 1)^2 = g(x)$$

3- المعادلة:

$$g(x) = 0$$

$$(lnx + 1)^2 = 0$$

$$lnx + 1 = 0$$

$$lnx = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

4- لدينا:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$$

$$= \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(-lne)^2 = \frac{2}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+++++$	0	$+++++$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

5- في النقطة التي فاصلتها $\frac{1}{e}$:

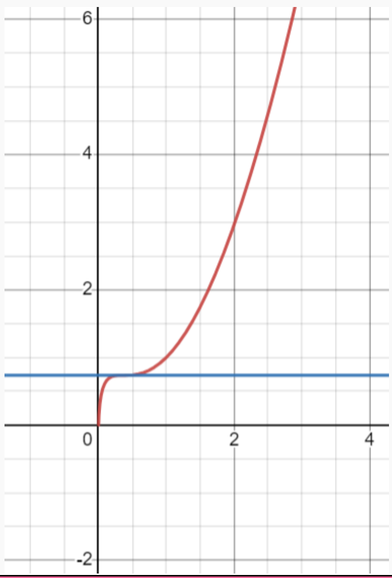
$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

$$\Rightarrow y_\Delta = \frac{2}{e}$$

مماس أفقي.

الرسم:



المسألة الحادية عشر

$$f(x) = \frac{2x}{e^x}\ ;\ D_f = \mathbb{R}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

2- f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}}$$

نعدم:

$$2e^x - 2xe^x = 0$$

$$2e^x(1 - x) = 0$$

إما:

$$2e^x = 0$$

مستحيلة.

أو:

$$1 - x = 0$$

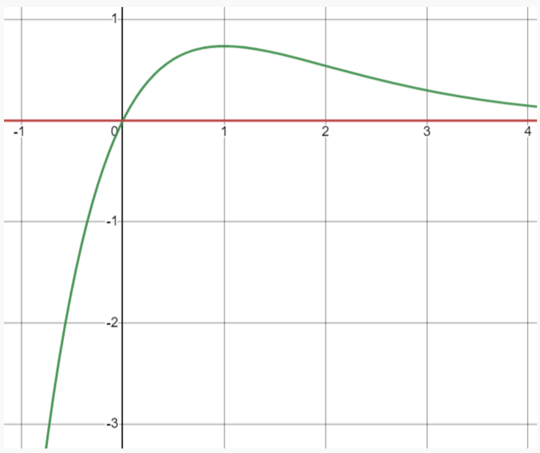
$$x = 1$$

$$f(1) = \frac{2}{e}$$

الجدول:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+++++$	0	$-----$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

3- الرسم:



4- لحساب المساحة:

$$f(x) = 2xe^{-x}$$

$$\int_0^1 f(x)dx$$

نفرض:

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2$$

$$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow [2xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x}$$

$$= [2xe^{-x}]_0^1 - 2[e^{-x}]_0^1$$

$$= (2e^{-1}) - 2[(e^{-1} - 1]$$

$$= 2e^{-1} - 2e^{-1} + 2 = 2$$

5- نجد أن:

$$f(-x) = -\frac{2x}{e^{-x}} = -2xe^{x}$$

$$f(-x) = -g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = -f(-x)$$

C_1 ينتج عن C بتناظر بالنسبة للمبدأ.

6- نعوض التابع ومشتقه:

$$\frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}} + \frac{2x}{e^x} = \frac{2e^x - 2xe^x + 2xe^x}{e^{2x}}$$

$$= \frac{2e^x}{e^{2x}} = 2e^{-x}$$

التابع f هو حلاً للمعادلة.

المسألة الثانية عشر

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}\ ; D_f = \mathbb{R}}$$

1- لحساب النهايات:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x} = \frac{x^2}{e^x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

2- f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - e^x(x+1)^2}{e^{2x}}$$

$$= e^x(x+1)\left(\frac{2 - x - 1}{e^{2x}}\right)$$

$$= e^x(x+1)\left(\frac{1-x}{e^{2x}}\right) = \frac{e^x(1-x^2)}{e^{2x}}$$

$$= (1 - x^2)e^{-x}$$

3- نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$(1 - x^2)e^{-x} = 0$$

الأسي لا ينعدم. وبالتالي:

$$1 - x^2 = 0$$

$$1 = x^2$$

$$x = \pm 1$$

$$f(1) = \frac{4}{e}\ , f(-1) = 0$$

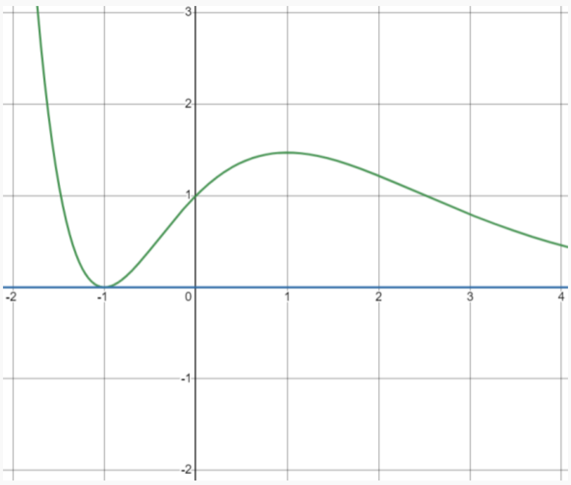
الجدول:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$----$	0	$++++$	0	$----$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

$f(-1) = 0$ قيمة حدية صغرى

$f(1) = \frac{4}{e}$ قيمة حدية كبرى

4- الرسم:



5- لدينا:

$$f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{e^{-x}}$$

$$= \left(-(x-1)\right)^2 e^x = (x-1)^2 e^x = g(x)$$

C_1 ينتج عن C بتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

6- لدينا:

$$h(x) = \ln\left(f(x)\right)$$

$$f(x) > 0$$

ومن الجدول نلاحظ أن:

$$D_h =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

المسألة الثالثة عشر

$$f(x) = e^{-x}(1 + \ln x)$$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x$$

معرفان على:

$$I =]0, +\infty[$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = +\infty$$

g اشتقاقي على I:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2}$$

نعدم:

$$-1 - x = 0$$

$$x = -1$$

مرفوض.

الجدول:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-----------$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2- التابع مستمر ومتناقص على I و:

$$0 \in f(I) =]-\infty, +\infty[$$

بالتالي يوجد حل وحيد α للمعادلة $g(x) = 0$ وللتحقق أن $\alpha = 1$:

$$g(1) = 0$$

3- النهايات:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}\left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}\right) = 0$$

4- f اشتقاقي على I:

$$f(x) = e^{-x} + e^{-x}lnx$$

$$f'(x) = -e^{-x} - e^{-x}\ln x + \frac{e^{-x}}{x}$$

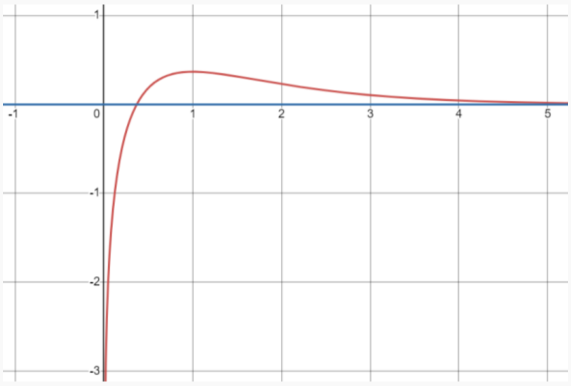
$$= e^{-x}\left(-1 - lnx + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

5- الجدول:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+++++$	0	$-----$
$f(x)$	‖ $-\infty$ $\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$ 0

6- الرسم:



المسألة الرابعة عشر

$$f(x) = e^{-2x} + 2x - 2\ ;\ D_f = \mathbb{R}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}} + 2x - 2 = \frac{1 + 2xe^{2x}}{e^{2x}} - 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = e^{-2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

نلاحظ أن C فوق Δ لأن $f(x) - y_d > 0$.

3- f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2e^{-2x} + 2$$

نعدم:

$$-2e^{-2x} + 2 = 0$$

$$-2e^{-2x} = -2$$

$$e^{-2x} = 1$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

$$f(0) = -1$$

الجدول:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

التابع مستمر ومتناقص على المجال

$]-\infty,0]$ و:

$$0\in f(]-\infty,0[)=]-1,+\infty[$$

بالتالي يوجد حل وحيد على المجال $]-\infty,0[$

التابع مستمر ومتزايد على المجال

$]0,+\infty[$ و:

$$0\in f(]0,+\infty[)=]-1,+\infty[$$

بالتالي يوجد حل وحيد على المجال

$]-1,+\infty[$.

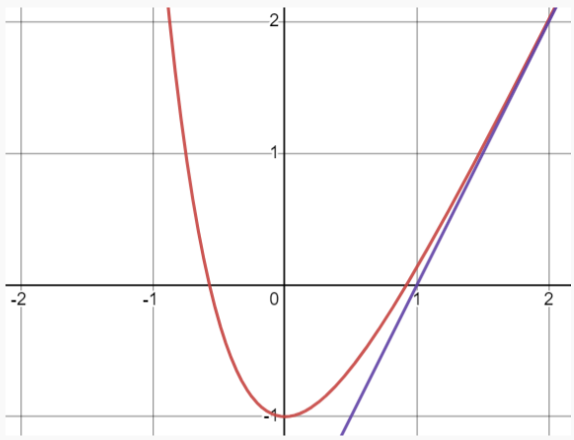
وبالتالي يوجد جذرين للمعادلة $f(x)=0$ وللتأكد ان أحدهما ينتمي للمجال $[-1{,}0]$:

f مستمر ومتناقص على المجال و:

$$0\in f([-1{,}0])=[-1,e^2-4]$$

وبالتالي أحد الحلول ينتمي للمجال.

4- الرسم:



لحساب المساحة:

$$\int_0^1 -f(x)dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}+x^2-2x\right]_0^1$$

$$=-\left(-\frac{e^{-2}}{2}-1\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2e^2}+\frac{3}{2}$$

5- نجد أن:

$$f(-x)=e^{2x}-2x-2$$

$$=-(-e^{2x}+2x+2)=-g(x)$$

نضرب الطرفين بـ -1:

$$\Rightarrow g(x)=-f(-x)$$

C' ينتج عن C بتناظر بالنسبة للمبدأ.

المسألة الخامسة عشر

$$\boldsymbol{f(x)=e^x+\ln(1-x)\ ;D_f=]-\infty,1[}$$

$$\boldsymbol{g(x)=(1-x)e^x-1\ ;D_g=\mathbb{R}}$$

1- g اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g'(x)=-e^x+e^x(1-x)$$

$$=e^x(-1+1-x)=-xe^x$$

نعدم المشتق:

$$-xe^x=0$$

$$x=0$$

$$g(0)=0$$

الجدول:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+++++$	0	$-----$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

نلاحظ أن:

$$g(x)\le 0$$

2- f اشتقاقي على $]-\infty,1[$:

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{e^x(1-x)-1}{1-x}=\frac{g(x)}{1-x}$$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.

لدينا:

$$f(0)=1$$

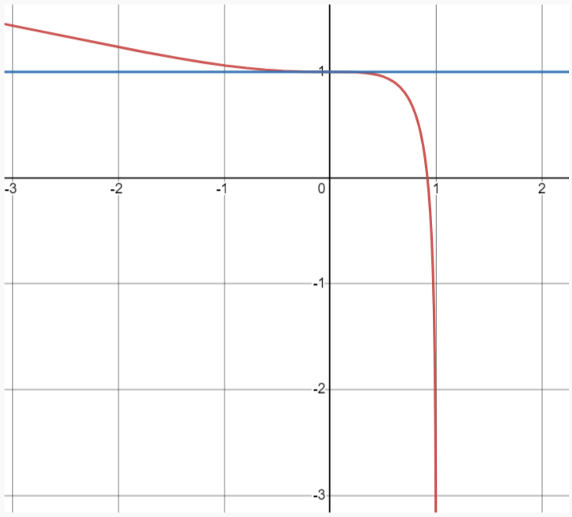
الجدول:

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$-----$	0	$-----$	$\|\|$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$

3- لدينا $x = 0$ قيمة تعدم المشتق بالتالي المماس عندها يكون مماس أفقي:

$$y_T = 1$$

4- الرسم:



المسألة السادسة عشر

$$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

1- نحسب:

$$f(x) + f(-x)$$

$$= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$$

$$= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{\frac{3}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{\frac{3 - e^x}{e^x}}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = \frac{3e^x - 1 + 3 - e^x}{e^x + 1}$$

$$= \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = 2\frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 2$$

2- لدينا:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$-x \in \mathbb{R}$$

محقق، ولقد برهنا بالطلب السابق أن:

$$f(x) + f(-x) = 2b$$

وبالتالي $I(0,1)$ مركز تناظر للتابع f.

3- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(3 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

$y = -1$ مقارب افقي في جوار $-\infty$.

$y = 3$ مقارب افقي في جوار $+\infty$.

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - e^x(3e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(3e^x + 3 - 3e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

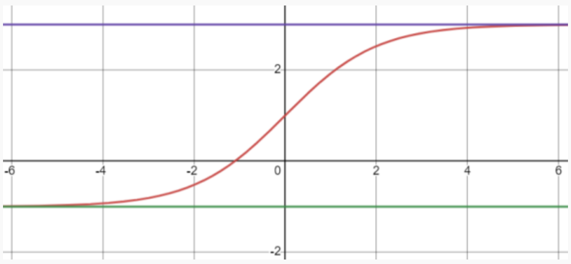
نعدم:

$$4e^x \neq 0$$

الجدول:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+++++++++++++$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3

4- الرسم:



$$(3 - m)e^x - 1 - m = 0$$

$$3e^x - e^x m - m - 1 = 0$$

$$-e^x m - m = -3e^x + 1$$

$$m(-e^x - 1) = -3e^x + 1$$

$$m = \frac{-(3e^x + 1)}{-(e^x + 1)} = f(x)$$

$m \in]-\infty, -1]$ لا يوجد حلول

$m \in]-1, 3[$ حل وحيد

$m \in [3, +\infty[$ لا يوجد حلول

5- للإثبات:

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=\frac{1}{1+e^x}$$

محققة.

لحساب المساحة:

$$f(x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$$

بالقسمة الإقليدية:

$$f(x)=3-\frac{4}{1+e^x}=3+4\left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)$$

$$\int_0^{ln2} f(x)dx=[3x+4\ln|-e^{-x}|]_0^{ln2}$$

$$=(3ln2-4ln2)=-\ln(2)$$

المتتاليات ونهاية متتالية:

تدرب 55

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3\ ,\qquad u_0=2$$

$$v_n=u_n+6$$

1- نوجد v_{n+1}:

$$v_{n+1}=u_{n+1}+6=\frac{1}{2}u_n-3+6$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}+3$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{2}u_n+3}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}u_n+3}{2\left(\frac{1}{2}u_n+3\right)}$$

$$=\frac{1}{2}=q$$

هندسية وأساسها $\frac{1}{2}$.

لحساب v_0:

$$v_0=u_0+6=8$$

$$v_n=v_0.q^n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=0$$

2- نعزل u_n من v_n:

$$v_n=u_n+6\Rightarrow u_n=v_n-6$$

$$=8\left(\frac{1}{2}\right)^n-6$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-6$$

3- لدينا:

$$w_n=\ln(v_n)$$

$$w_{n+1}=\ln(v_{n+1})$$

$$w_{n+1}-w_n=\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)$$

$$=\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)=r$$

حسابية وأساسها $r=-\ln(2)$.

$$w_0+w_1+w_2+\cdots+w_5$$

$$S=\frac{w_0+w_5}{2}(6)$$

$$=\frac{\ln(8)+\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}(6)$$

$$=\frac{\ln\left(8\times\frac{1}{4}\right)}{2}\times 6$$

$$=3\ln(2)$$

تدرب 56

$$u_n=\frac{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

تدرب 57

$$u_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{5^n}$$

نلاحظ أنها متتالية هندسية وأساسها $q=\frac{1}{5}$:

$$S_q=a\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}}\right)$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{4}$$

تدرب 58

$$u_{n+1}=(u_n-2)^2+2\ ,u_0=\frac{5}{2}$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n):2\le u_n\le 3$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$2 \le \frac{5}{2} \le 3$$

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ... ... $2 \le u_n \le 3$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... ... $2 \le u_{n+1} \le 3$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$2 \le u_n \le 3$$

نطرح 2:

$$0 \le u_n - 2 \le 1$$

نربع:

$$0 \le (u_n - 2)^2 \le 1$$

نضيف 2+:

$$2 \le (u_n - 2)^2 + 2 \le 3$$

$$2 \le u_{n+1} \le 3$$

محققة.

-2 نعرف القضية $E(n)$:

$$u_{n+1} \le u_n$$

نثبت صحة القضية من أجل $E(0)$:

$$u_1 \le u_0$$

$$\frac{9}{4} \le \frac{5}{2}$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ... ... $u_{n+1} \le u_n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... ... $u_{n+2} \le u_{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$u_{n+1} \le u_n$$

نطرح 2:

$$u_{n+1} - 2 \le u_n - 2$$

نربع:

$$(u_{n+1} - 2)^2 \le (u_n - 2)^2$$

نضيف 2+:

$$(u_{n+1} - 2)^2 + 2 \le (u_n - 2)^2 + 2$$

$$u_{n+2} \le u_{n+1}$$

فالمتتالية متناقصة.

-3 بما أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فإنها متقاربة ولتعيين نهايتها:

نعرف f بحيث يكون $f(u_n) = u_{n+1}$ ثم نحل المعادلة $f(x) = x$:

$$f(x) = x$$

$$(x - 2)^2 + 2 = x$$

$$x^2 - 4x + 4 + 2 = x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

إما:

مرفوض $x = 3$

أو:

مقبول $x = 2$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 2$$

تدرب 59

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \; ; u_0 = 3$$

-1 النهايات:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على $]2, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

لا ينعدم على المجال $]2, +\infty[$.

الجدول:

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + + + + + + + + + +	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

-2 نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = \frac{2}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

نلاحظ أن $f(x) - y_d > 0$ على المجال $]2, +\infty[$ وبالتالي C فوق d.

-3 نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): 2 \le u_{n+1} \le u_n$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$2 \le u_1 \le u_0$$

$$2 \le \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \le 3$$

$$2 \le \frac{13}{6} \le 3$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$2 \le u_{n+1} \le u_n$ ...... فرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$ ...... طلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$2 \le u_{n+1} \le u_n$$

نصور الأطراف:

$$f(2) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n)$$

$$2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة.

4- لدينا من الطلب السابق:

$$u_{n+1} \le u_n$$

فالمتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فإنها متقاربة ولإيجاد نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x$$

$$\frac{x^2 + 2x}{2x} = x$$

$$x^2 + 2x = 2x^2$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x + 2) = 0$$

إما:

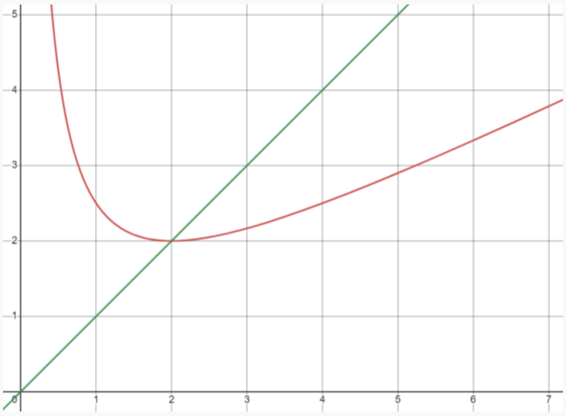
$x = 0$ مرفوض

أو:

$x = 2$ مقبول

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

5- الرسم:



تدرب 60

$$u_{n+1} = e\sqrt{u_n}\,, u_0 = e^3$$

$$v_n = \ln(u_n) - 2$$

1- نوجد v_{n+1}:

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2$$

$$= \ln\left(e\sqrt{u_n}\right) - 2$$

$$= \ln(e) + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)}{\ln(u_n) - 2} = \frac{1}{2} = q$$

$$v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(e^3) - 2 = 1$$

2- لدينا:

$$v_n = v_0 . q^n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

$$v_n = \ln(u_n) - 2$$

$$\ln(u_n) = v_n + 2$$

$$u_n = e^{v_n + 2} = e^{\frac{1}{2^n} + 2}$$

3- لحساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2$$

تدرب 61

$$u_n = \frac{2n - 1}{n + 1}$$

1- نعرف f على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

f اشتقاقي على $[0,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2x+2-x-1}{(x+1)^2}=\frac{x+1}{(x+1)^2}>0$$

على مجموعة التعريف وبالتالي المتتالية متزايدة.

-2 نشكل الفرق:

$$u_n-2=\frac{2n-1}{n+1}-2$$

$$=\frac{2n-1-2n-2}{n+1}=\frac{-3}{n+1}<0$$

$$u_n-2<0$$

$$u_n<2$$

-3 بما انها متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة ولحساب نهايتها:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=2$$

تدرب 62

$$u_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

-1 نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$$

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$\frac{1}{1!}\le\frac{1}{2}$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ...... $\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ...... $\frac{1}{(n+2)!}\le\frac{1}{2^{n+1}}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$$

نضرب بـ $\frac{1}{n+2}$:

$$\frac{1}{(n+2)!}\le\frac{1}{2^n(n+2)}$$

$$\frac{1}{(n+2)!}\le\frac{1}{2^{n+1}+2n}\le\frac{1}{2^{n+1}}$$

محققة فالقضية صحيحة.

-2 لدينا من الطلب السابق:

$$\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$$

$n=1$:

$$\frac{1}{2!}\le\frac{1}{2^1}$$

$n=2$:

$$\frac{1}{3!}\le\frac{1}{2^2}$$

.

.

.

$n=n-1$:

$$\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$$

نجمع المتراجحات:

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^{n-1}}$$

نلاحظ أن في الطرف الأيمن متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 1-\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{تهمل}}\le 1$$

نضيف $+1$ والتي هي تكافئ $\frac{1}{1!}$:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2$$

$$u_n\le 2$$

-3 نوجد u_{n+1}:

$$u_{n+1}=\underbrace{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}}_{u_n}+\frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$$

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

تدرب 63

لدينا مجموع لحدود عددها n و

أصغر هذه الحدود هو $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ (لأن الكسور التي لها نفس البسوط يكون صاحب أكبر مقام هو الكسر الأصغر)

أكبر هذه الحدود $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (لأن الكسور التي لها نفس البسوط يكون صاحب أصغر مقام هو الكسر الأكبر)

إذن:

$$\underbrace{n}_{\text{عدد الحدود}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\text{أصغرهم}} \le u_n \le \underbrace{n}_{\text{عدد الحدود}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{أكبرهم}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

الآن نحسب نهاية طرفي المتراجحة:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

وبشكل مماثل:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

فحسب الإحاطة يكون $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

تدرب 64

$$u_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\frac{1}{5^n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

1- دراسة اطراد u_n:

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}}_{u_n}+\frac{1}{5^{n+1}}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{5^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

متزايدة.

لدراسة اطراد v_n:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$v_{n+1} = u_n + \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_n + \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - u_n - \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{2^{n+1}+5^{n+1}}{5^{n+1}\times 2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{2^{n+2}+2^n.5^{n+1}-5^{n+1}\times 2^{n+1}}{5^{n+1}\times 2^{n+2}}$$

$$= \frac{2^{n+1}\left(2+\frac{1}{2}5^{n+1}-2.5^{n+1}\right)}{5^{n+1}\times 2^{n+2}}$$

$$= \frac{2+\frac{1}{2}5^{n+1}-2.5^{n+1}}{2.5^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{4} - 1$$

$$= \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{3}{4} < 0$$

فالمتتالية v_n متناقصة.

2- لتبسيط عبارة u_n:

نستنتج أنها متتالية هندسية وأساسها $q = \frac{1}{5}$:

$$S_q = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{5}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}$$

$$u_n = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

3- لدينا:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow v_n - u_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$$

فالمتتاليتان متجاورتان.

تدرب 65

$$S_0 = 12 \ , t_0 = 1$$

$$S_{n+1}=\frac{t_n+3S_n}{4}\ ,\ t_{n+1}=\frac{t_n+2S_n}{3}$$

1- لدينا:

$$v_{n+1}=S_{n+1}-t_{n+1}$$
$$=\frac{t_n+3S_n}{4}-\frac{t_n+2S_n}{3}$$
$$=\frac{3t_n+9S_n-4t_n-S_n}{12}$$
$$=\frac{1}{12}(S_n-t_n)=\frac{1}{12}v_n$$

متتالية هندسية وأساسها $q=\frac{1}{12}$.

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=0$$

لأن $-1<q=\frac{1}{12}<1$.

2- الشرط الأول:

لندرس اطراد المتتالية S_n:

$$S_{n+1}-S_n=\frac{t_n+3S_n}{4}-S_n$$
$$=\frac{t_n+3S_n-4S_n}{4}=\frac{t_n-S_n}{4}=-\frac{1}{4}(v_n)$$
$$v_0=S_0-t_0=1>0\,;q>0$$
$$v_n>0$$
$$\Rightarrow S_{n+1}-S_n=-\frac{1}{4}(v_n)<0$$

فالمتتالية S_n متناقصة.

لندرس اطراد t_n:

$$t_{n+1}-t_n=\frac{t_n+2S_n}{3}-t_n$$
$$=\frac{2S_n-2t_n}{3}=\frac{2}{3}(S_n-t_n)=\frac{2}{3}(v_n)\geq 0$$

فالمتتالية t_n متزايدة.

الشرط الثاني:

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n-t_n)=\lim_{n\to+\infty}v_n=0$$

فالمتتاليتان S_n و t_n متجاورتان.

3- لدينا:

$$u_{n+1}=3t_{n+1}+8S_{n+1}$$
$$=t_n+2S_n+2t_n+6S_n$$
$$=3t_n+8S_n=u_n$$
$$u_{n+1}=u_n\,;\forall n$$

ثابتة وقيمتها:

$$u_0=3t_0+8S_0=3+96=99$$
$$\Rightarrow u_n=99\,;\forall n$$

4- بما أنهما متجاورتان:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}t_n=\ell$$

لدينا:

$$u_n=3t_n+8S_n$$

بأخذ نهاية الطرفين:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}3t_n+8S_n$$

ولكن $u_n=99$ وبالتالي:

$$99=3\ell+8\ell$$
$$99=11\ell$$
$$\Rightarrow \ell=9$$

وهي النهاية المشتركة:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}t_n=9$$

تدرب 66

$$f(x)=xe^{-x}\,;D_f=]-\infty,+\infty[$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$$

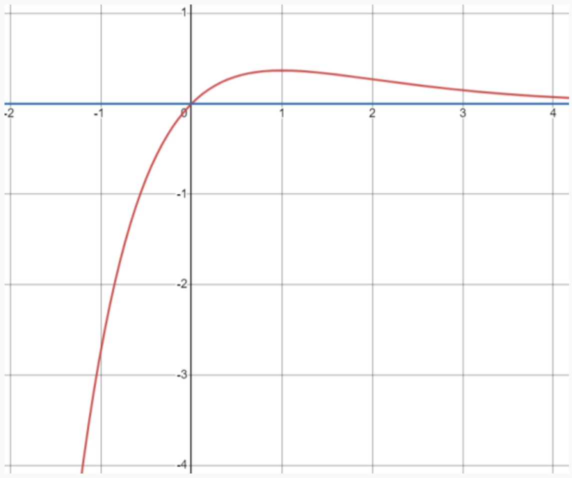
نعدم:

$$1-x=0$$
$$x=1$$
$$f(1)=\frac{1}{e}$$

الجدول:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+++++$	0	$-----$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(1)=\frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى.



2- لدينا:

$$\int_0^1 f(x)d(x)$$

نفرض:

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\int_0^1 f(x)d(x) = -[xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}$$

$$= -[xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$$

$$= -[e^{-1} - 0] - [e^{-1} - 1]$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = -\frac{2}{e} + 1$$

3- لدينا من الرسم أن للمعادلة $f(x) = m$ جذران مختلفان على المجال $]0, e^{-1}[$.

4- لدينا:

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}\ ; u_0 = 1$$

a) نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n):$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$0 \le 1 \le 1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$0 \le u_n \le 1$ …… الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$0 \le u_{n+1} \le 1$ …… الطلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$0 \le u_n \le 1$$

نصور الأطراف في التابع f:

$$f(0) \le f(u_n) \le f(1)$$

$$0 \le u_{n+1} \le \frac{1}{e} < 1$$

$$0 \le u_{n+1} \le 1$$

فالقضية صحيحة.

b) نعرف القضية:

$$E(n): u_{n+1} \le u_n$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\frac{1}{e} \le 1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$u_{n+1} \le u_n$ …… الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$u_{n+2} \le u_{n+1}$ …… الطلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$u_{n+1} \le u_n$$

نصور الأطراف في f:

$$u_{n+2} \le u_{n+1}$$

القضية صحيحة والمتتالية متناقصة.

وبما أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 0 فإنها متقاربة ولتعيين نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$xe^{-x} = x$$

$$xe^{-x} - x = 0$$

$$x(e^{-x} - 1) = 0$$

إما:

$$e^{-x} - 1 = 0$$

$$e^{-x} = 1$$

$$x = 0$$

أو:

$$x = 0$$

مقبولان.

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

المسألة الأولى

$$x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+2 \quad , \quad x_0=4$$

1- لحساب الحدود:

$$x_1=\frac{3}{4}(4)+2=5$$

$$x_2=\frac{3}{4}(5)+2=\frac{15+8}{4}=\frac{23}{4}$$

2- لدينا:

$$y_n=x_n-8$$

أ) نوجد y_{n+1}:

$$y_{n+1}=x_{n+1}-8$$

$$=\frac{3}{4}x_n+2-8=\frac{3}{4}x_n-6$$

نشكل النسبة:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{\frac{3}{4}x_n-6}{x_n-8}=\frac{\frac{3}{4}(x_n-8)}{x_n-8}$$

$$=\frac{3}{4}=q$$

هندسية وأساسها $\frac{3}{4}$.

ب) **لإيجاد حدها العام:**

$$y_n=y_0.q^n$$

$$y_0=x_0-8=4-8=-4$$

$$\Rightarrow y_n=-4\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ت) لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n=0$$

لأن $-1<q<1$.

ولدينا:

$$y_n=x_n-8 \Rightarrow x_n=y_n+8$$

$$=-4\left(\frac{3}{4}\right)^n+8$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=8$$

المسألة الثانية

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n} \; ; u_0=\frac{1}{2}$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$0<\frac{1}{2}<1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ... ... $0<u_n<1$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... ... $0<u_{n+1}<1$

البرهان: نعرف التابع f على المجال $[2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{x}{2-x}$$

f اشتقاقي على $[2,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2-x+x}{(2-x)^2}=\frac{2}{(2-x)^2}>0$$

التابع متزايد, لدينا من الفرض:

$$0<u_n<1$$

نصور الأطراف في التابع f:

$$f(0)<f(u_n)<f(1)$$

$$0<u_{n+1}<1$$

القضية صحيحة.

2- المتتالية $v_n=\frac{1}{u_n}-1$:

أ) لدينا:

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}-1$$

$$=\frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}}-1=\frac{2-u_n}{u_n}-1$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{2-u_n}{u_n}-1}{\frac{1}{u_n}-1}=\frac{\frac{2-u_n-u_n}{u_n}}{\frac{1-u_n}{u_n}}$$

$$=\frac{2(1-u_n)}{1-u_n}=2=q$$

هندسية وأساسها $q=2$.

الحد العام:

$$v_n=v_0.q^n=1.2^n=2^n$$

ب) لكتابة الحد العام لـ u_n:

$$v_n=\frac{1}{u_n}-1$$

$$\frac{1}{u_n}=v_n+1$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{1}{v_n+1}=\frac{1}{2^n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

3- نهاية المتتالية v_n:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

لأن $q > 1$.

المسألة الثالثة

$$x_n = \frac{4n+5}{n+1} \quad , \quad y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

ندرس اطراد كل من المتتاليتين:

دراسة اطراد x_n:

نعرف التابع:

$$f(x) = \frac{4x+5}{x+1}$$

f اشتقاقي على $[0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4x+4-4x-5}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

المتتالية متناقصة.

دراسة إطراد y_n:

نعرف التابع:

$$f(x) = \frac{4x+1}{x+2}$$

f اشتقاقي على $[0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4x+8-4x-1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$$

المتتالية متزايدة.

نشكل الفرق:

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{(4n+5)(n+2)-(4n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{4n^2+8n+5n+10-4n^2-4n-n-1}{n^2+3n+2}$$

$$= \frac{8n+9}{n^2+3n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n - y_n = 0$$

المتتاليتان متجاورتان.

المسألة الرابعة

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 15$$

نضرب بالعدد 3:

$$3S = 1+2+3+4+\cdots+45$$

نلاحظ أنه مجموع متتالية حسابية أساسها $r = 1$ و $a = 1$ و $l = 45$ و $n = 45$:

$$3S = \frac{1+45}{2}(45)$$

$$3S = 23(45)$$

$$\Rightarrow S = 23(15) = 345$$

المسألة الخامسة

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots \frac{n}{e^n}$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$1 < 2$$

محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ... ... $n \le 2^n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... ... $n+1 \le 2^{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$n \le 2^n$$

نضرب بالعدد 2:

$$n \le 2n \le 2^{n+1}$$

$$n \le 2^n$$

فالقضية صحيحة.

2- لدينا من الطلب السابق:

$$n \le 2^n$$

نقسم على e^n:

$$\frac{n}{e^n} \le \frac{2^n}{e^n}$$

نبدأ بالتعويض في المتراجحة من $n = 1$ إلى n ثم نجمع المتراجحات:

$$u_n \le \frac{2}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \cdots + \frac{2^n}{e^n}$$

نلاحظ أنها متتالية هندسية وأساسها $q=\frac{2}{e}$ وحدها الأول $\frac{2}{e}$:

$$S_q = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{2}{e}\,\frac{\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{e}}$$

$$=\frac{2}{e}\,\frac{\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}{\frac{e-2}{e}} = \frac{2}{e-2}\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)$$

نعوض:

$$u_n \le \frac{2}{e-2}\underbrace{\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}_{\text{يهمل}} < \frac{2}{e-2}$$

وبالتالي $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية.

3- لدينا:

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\cdots\frac{n}{e^n}}_{u_n}+\frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$$

متزايدة.

بما أنها محدودة من الأعلى ومتزايدة فهي متقاربة.

المسألة السادسة

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2x}\ ;x\in]0,+\infty[$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x(2x)-2x^2-4}{4x^2}$$

$$=\frac{4x^2-2x^2-4}{4x^2} = \frac{2x^2-4}{4x^2}$$

نعدم:

$$2x^2-4=0$$

$$2x^2=4$$

$$x^2=2$$

$x=+\sqrt{2}$ مقبول

$x=-\sqrt{2}$ مرفوض

$$f(\sqrt{2}) = \frac{2+2}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

الجدول:

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2- لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2+2}{2u_n}\ ;u_0=2$$

أ) نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2}\le\frac{3}{2}\le 2$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ...... $\sqrt{2}\le u_{n+1}\le u_n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ...... $\sqrt{2}\le u_{n+2}\le u_{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2}\le u_{n+1}\le u_n$$

نصور الأطراف في f:

$$\sqrt{2}\le u_{n+2}\le u_{n+1}$$

القضية صحيحة.

ب) من الطلب السابق أثبتنا أن:

$$u_{n+1}\le u_n$$

فهي متناقصة وبما أنها محدودة من الأدنى فهي متقاربة.

ت) لحساب نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x)=x$$

$$\frac{x^2+2}{2x}=x$$

$$x^2+2=2x^2$$

$$x^2=2$$

$x=\sqrt{2}$ مقبول

$x=-\sqrt{2}$ مرفوض

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$