**ملف الحلول هذا يحوي:**

1- **حلول التمارين والمسائل التحليلية**
2- **حلول التمارين في الأشعة الشعاعية (جلسة 3 + 4)**
3- **حلول بنوك الأشعة التحليلية**

**سنقسم بينهم بالعناوين المناسبة لهم:**

## حلول التمارين والمسائل في الأشعة التحليلية

### التمرين الأول

1- لدينا:

$$A(2,3,1), B(3,2,0)$$
$$\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$$
$$P: 1(x-2) - 1(y-3) - 1(z-1) = 0$$
$$x - 2 - y + 3 - z + 1 = 0$$
$$x - y - z + 2 = 0$$

2- لدينا:

$$A(3,2,2), B(0,1,0), C(1,1,1)$$
$$\overrightarrow{AB}(-3,-1,-2)\,,\overrightarrow{AC}(-2,-1,-1)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين بسبب عدم تناسب المركبات.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -3a - b - 2c = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow -2a - b - c = 0$$

نطرح المعادلتين:

$$-a - c = 0$$
$$a = -c$$

نفرض $c = 1$ وبالتالي $a = -1$, نعوض في المعادلة الثانية فنجد:

$$2 - b - 1 = 0$$
$$b = 1$$

وبالتالي:

$$\vec{n}(-1,1,1)$$
$$(ABC): -1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0$$
$$-x + 1 + y - 1 + z - 1 = 0$$
$$-x + y + z - 1 = 0$$

3- لدينا:

$$A(1,1,1)\,,\qquad B(3,2,0)$$
$$\overrightarrow{AB}(2,1,-1)$$
$$I\left(2,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$P: 2(x-2) + 1\left(y-\frac{3}{2}\right) - 1\left(z-\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$2x - 4 + y - \frac{3}{2} - z + \frac{1}{2} = 0$$
$$2x + y - z - 5 = 0$$

4- لدينا:

$$\vec{n'}(1,1,1)\,, A(1,1,1)\,, B(3,-1,1)$$
$$\overrightarrow{AB}(2,-2,0)$$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\vec{n'} = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow 2a - 2b = 0$$

من المعادلة الثانية نجد:

$$2a - 2b = 0$$
$$2a = 2b$$
$$a = b$$

نفرض $b = 1$ وبالتالي $a = 1$ ثم نعوض في المعادلة الأولى:

$$1 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2$$

وبالتالي:

$$\vec{n}(1,1,-2)$$
$$P: 1(x-1) + 1(y-1) - 2(z-1) = 0$$
$$x - 1 + y - 1 - 2z + 2 = 0$$
$$x + y - 2z = 0$$

5- لدينا:

$\overrightarrow{n_1}(2,1,-1)\,,\overrightarrow{n_2}(1,1-3),A(1,1,1)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$\vec{n}.\overrightarrow{n_1}=0\Rightarrow 2a+b-c=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{n_2}=0\Rightarrow a+b-3c=0$

نطرح المعادلتين:

$a+2c=0$

$a=-2c$

نفرض $c=1$ وبالتالي $a=-2$ نعوض في المعادلة الثانية:

$-2+b-3=0$

$b=5$

وبالتالي يكون:

$\vec{n}(-2,5,1)$

$P:-2(x-1)+5(y-1)+1(z-1)=0$

$-2x+2+5y-5+z-1=0$

$-2x+5y+z-4=0$

6- لدينا:

$\vec{n}(2,3,-1)\ \ ,A(1,1,1)$

$P:2(x-1)+3(y-1)-1(z-1)=0$

$2x-2+3y-3-z+1=0$

$2x+3y-z-4=0$

7- لدينا:

$\vec{u}=\vec{n}(1,0,-1)\ \ ,O(0,0,0)$

$P:1(x-0)+0(y-0)-1(z-0)=0$

$x-z=0$

## التمرين الثاني

1- لدينا:

$\vec{u}(2,3,-1)\,,A(-1,1,0)$

$$d:\begin{cases}x=2t-1\\ y=3t+1\,;t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}$$

2- لدينا:

$\overrightarrow{AB}(2,-1,-1)$

$$d:\begin{cases}x=2t+1\\ y=-t+1\,;t\in\mathbb{R}\\ z=-t+2\end{cases}$$

3- لدينا:

$\vec{n}=\vec{u}(1,-1,1)\ ,\qquad O(0,0,0)$

$$d:\begin{cases}x=t\\ y=-t\,;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

4- لدينا:

$2x-y+z-2=0$

$x+y+2z-1=0$

بجمع المعادلتين:

$3x+3z-3=0$

$3x=-3z+3$

$x=-z+1$

بفرض $z=t$:

$x=-t+1$

نعوض في المعادلة الثانية:

$-t+1+y+2t-1=0$

$y=-t$

$$d:\begin{cases}x=-t+1\\ y=-t\quad ;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

## التمرين الثالث

1- لدينا:

$$r = AB = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 3$$

2- لدينا:

$I$ منتصف $[AB]$:

$$I(3,2,2)$$

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{16+4}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

$$S: (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 5$$

3- لدينا:

$$r = dis(A,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = \frac{1}{2}$$

## التمرين الرابع

$$\begin{cases}(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ 3 \le z \le 8\end{cases}$$

## التمرين الخامس

$$\begin{cases}(x-2)^2 + (z-1)^2 = 9 \\ 3 \le y \le 8\end{cases}$$

## التمرين السادس

$$\begin{cases}y^2 + z^2 = \frac{1}{9}x^2 \\ 0 \le x \le 3\end{cases}$$

## التمرين السابع

تمثل المخروط الذي مركز قاعدته المبدأ وارتفاعه 3 ونصف قطر قاعدته 3.

**تمارين صفحة 5:**

## التمرين الأول

$$P: 2x + y - z = 0$$

$$Q: x + y + z = 1$$

$$\overrightarrow{n_P}(2,1,-1)\ ,\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$$

نلاحظ أن الأشعة غير مرتبطة خطياً فالمستويان غير متوازيان.

$$P: 2x - y + z - 3 = 0$$

$$Q: 4x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$\overrightarrow{n_P}(2,-1,1)\ \ ,\overrightarrow{n_Q}(4,-2,2)$$

نلاحظ أن الأشعة مرتبطة خطياً فالمستويات متوازية وبنسبة $\frac{d}{d'}$:

$$\frac{d}{d'} = 3 \neq \frac{1}{2}$$

المستويان غير منطبقان.

## التمرين الثاني

$$\overrightarrow{u_1}(3,4,-1)\ \ ,\overrightarrow{u_2}(-9,-12,3)$$

ننسب المركبات:

$$\frac{3}{-9} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

مرتبطة خطياً فالمستقيمان متوازيان.

## التمرين الثالث

1- لدينا:

$$\overrightarrow{u_1}(2,1,1)\ \ ,\overrightarrow{u_2}(3,1,5)$$

نلاحظ أن الأشعة غير مرتبطة خطياً فالمستقيمان متقاطعان, لدراسة التقاطع:

$$2t - 1 = 3s - 4$$

$$t = s - 1$$

$$t - 1 = 5s - 6$$

نعوض $t$ التي فئ المعادلة الثانية في المعادلة الثالثة:

$$s-1-1=5s-6$$

$$4s=4 \Rightarrow s=1$$

فتكون $t=0$, نعوض في المعادلة الأولى للتحقق:

$$-1=3-4$$

$$-1=-1$$

محققة فالمستقيمان متقاطعان في نقطة $N$

ولتعيين إحداثياتها نعوض $t$ في المستقيم $d$:

$$N(-1,0,-1)$$

2- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً:

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_1}=0 \Rightarrow 2a+b+c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_2}=0 \Rightarrow 3a+b+5c=0$$

نطرح:

$$-a-4c=0$$

$$a=-4c$$

بفرض $c=-1$ فتكون $a=4$, نعوض في المعادلة الأولى:

$$8+b-1=0$$

$$b=-7$$

فيكون الناظم:

$$\vec{n}(4,-7,-1)$$

ونقطة التقاطع $N$ هي نقطة مشتركة للمستقيمان في المستوي:

$$4(x+1)-7(y-0)-1(z+1)=0$$

$$4x+4-7y-z-1=0$$

$$4x-7y-z+3=0$$

## التمرين الرابع

1- نعوض $d$ في $P$:

$$4t-4-0-4t+7=3$$

$$3=3$$

$$0=0$$

المستقيم محتوى في $P$.

2- نعوض $d$ في $P$:

$$2t+2+t-3t-21-1=0$$

$$-20=0$$

المستقيم يوازي المستوي.

**<u>المسائل صفحة 6:</u>**

## المسألة (1)

$A(2,-2,2)$ , $B(1,1,0)$ , $C(1,0,1)$ , $D(0,0,1)$

1- نشكل الأشعة ونثبت أنهم غير مرتبطين خطياً:

$$\overrightarrow{BC}(0,-1,1)\ ,\overrightarrow{BD}(-1,-1,1)$$

ننسب:

$$\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

الاشعة غير مرتبطة خطياً وبالتالي النقاط ليست على استقامة واحدة.

2- لإثبات أنها المعادلة يجب أن تحقق النقاط عند التعويض بها:

نعوض $B$ في $(BCD)$:

$$1+0-1=0$$

$$0=0$$

$$B \in (BCD)$$

نعوض $C$ في $(BCD)$:

$$1-1=0$$

$$0=0$$

$$C \in (BCD)$$

نعوض $D$ في $(BCD)$:

$$1-1=0$$

$$0=0$$

$$D \in (BCD)$$

وبالتالي:

$$(BCD): y+z-1=0$$

**ويوجد طريقة أخرى:**

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\overrightarrow{BC}.\vec{n}=0 \Rightarrow -b+c=0$$

$$\overrightarrow{BD}.\vec{n}=0 \Rightarrow -a-b+c=0$$

من المعادلة الأولى نجد:

$$-b+c=0$$

$$c=b$$

نفرض $b=1$ وبالتالي $c=1$ ثم نعوض:

نعوض في المعادلة الثانية:

$$a=0$$

وبالتالي:

$$\vec{n}(0,1,1)$$

$$(BCD): 0(x-1)+1(y-0)+1(z-1)=0$$

$$y+z-1=0$$

3- بما أنه يعامد المستوى فإن:

$$\vec{u}=\vec{n}=(0,1,1)$$

$$\Delta: \begin{cases} x=2 \\ y=t-2 \; ; t\in\mathbb{R} \\ z=t+2 \end{cases}$$

4- نعوض $\Delta$ في $(BCD)$:

$$t-2+t+2-1=0$$

$$2t=1$$

$$t=\frac{1}{2}$$

نعوض $t$ في $\Delta$:

$$K\left(2,-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

5- بما أن $AD$ قطراً فإن:

$$AD=2r \Rightarrow r=\frac{AD}{2}$$

ومركز الكرة $I$ منتصف $AD$.

$$AD=\sqrt{4+4+1}=3$$

$$\Rightarrow r=\frac{3}{2}$$

$$I\left(1,-1,\frac{3}{2}\right)$$

وبالتالي الكرة:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

## المسألة (2)

$$\boldsymbol{A(1,1,2)}$$

$$\boldsymbol{P: x-y+2z-1=0}$$

$$\boldsymbol{Q: 2x+y+z+1=0}$$

1- ندرس الارتباط الخطي للنواظم فنجد:

$$\overrightarrow{n_P}(1,-1,2)$$

$$\overrightarrow{n_Q}(2,1,1)$$

$$\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً وبالتالي المستويات متقاطعة بفصل مشترك $d$.

2- لكتابة التمثيل الوسيطي للفصل المشترك نستخدم الحل المشترك لمعادلات المستوي:

$$x-y+2z-1=0$$

$$2x+y+z+1=0$$

نجمع:

$$3x+3z=0$$

$$x=-z$$

نفرض $z=t$:

$$x=-t$$

نعوض في أحد المعادلات:

$$-2t+y+t+1=0$$

$$\Rightarrow y=t-1$$

$$d:\begin{cases} x = -t \\ y = t-1\ ;t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

3- بما أن المستوي معامد للمستويين, نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow a - b + 2c = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{n_Q} = 0 \Rightarrow 2a + b + c = 0$$

نجمع:

$$3a + 3c = 0$$

$$\Rightarrow a = -c$$

نفرض $c = 1$ فإن $a = -1$ نعوض:

$$-2 + b + 1 = 0$$

$$b = 1$$

بالتالي:

$$\vec{n}(-1,1,1)$$

$$R: -1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-2) = 0$$

$$-x + 1 + y - 1 + z - 2 = 0$$

$$-x + y + z - 2 = 0$$

4- نعوض $d$ في $R$:

$$-(-t) + t - 1 + t - 2 = 0$$

$$3t - 3 = 0$$

$$3t = 3$$

$$t = 1$$

نعوض $t$ في $d$:

$$x = -1$$

$$y = 0$$

$$z = 1$$

$$\Rightarrow B(-1,0,1)$$

نستنتج أن المستويات الثلاثة متقاطعة في نقطة $B$.

5- لحساب البعد يكفي حساب المسافة $AB$:

$$AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

## المسألة (3)

$$A(1,2,0)$$

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$Q: x + y + z - 1 = 0$$

$$R: x - z - 1 = 0$$

1- نثبت أن النواظم غير مرتبطة خطياً:

$$\overrightarrow{n_P}(2,-1,2)\ ,\overrightarrow{n_Q}(1,1,1)$$

ننسب المركبات:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً فالمستويات متقاطعة بفصل مشترك $\Delta$.

بالحل المشترك لمعادلات المستوي:

$$2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$x + y + z - 1 = 0$$

نجمع:

$$3x + 3z - 3 = 0$$

نفرض $z = t$:

$$3x + 3t - 3 = 0$$

$$3x = -3t + 3$$

$$x = -t + 1$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$-t + 1 + y + t - 1 = 0$$

$$y = 0$$

وبالتالي:

$$\Delta: \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 0 \quad ;t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

2- لإثبات التعامد نثبت أن الناظم مرتبط خطياً مع شعاع توجيه المستقيم:

$$\overrightarrow{u_\Delta}(-1,0,1)\ ,\overrightarrow{n_R}(1,0,-1)$$

ننسب المركبات:

$$\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$$

$$-1=-1$$

الأشعة مرتبطة خطياً فالمستقيم والمستوي متعامدان.

نعوض النقطة $A$ في المستوي لنثبت أنها تنتمي للمستوي $R$:

$$1-0-1=0$$

$$0=0$$

محققة

$$A\in R$$

3- لقد أثبتنا أن $\Delta$ ناتج عن تقاطع المستويين $P$ و $Q$ فيكفي دراسة تقاطع $\Delta$ مع $R$، نعوض $\Delta$ في $R$:

$$-t+1-t-1=0$$

$$-2t=0$$

$$t=0$$

نعوض $t$ في $\Delta$:

$$x=1$$

$$y=0$$

$$z=0$$

$$\Rightarrow I(1,0,0)$$

4- لحساب بعد $A$ عن $\Delta$ يكفي حساب المسافة $AI$:

$$AI=\sqrt{0+4+0}=2$$

**المسألة (4)**

$A(1,1,0)$ , $B(1,2,1)$ , $C(4,0,0)$

1- نشكل الأشعة:

$$\overrightarrow{AB}(0,1,1)\,,\overrightarrow{AC}(3,-1,0)$$

$$\frac{0}{3}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{0}$$

الاشعة غير مرتبطة فالنقاط لا تقع على استقامة واحدة.

2- الطريقة الأولى:

نعوض النقاط في المستوي ويجب أن تتحقق:

نعوض $A$:

$$1+3-0-4=0$$

$$0=0$$

$$A\in(ABC)$$

نعوض $B$:

$$1+6-3-4=0$$

$$0=0$$

$$B\in(ABC)$$

نعوض $C$:

$$4+0+0-4=0$$

$$0=0$$

$$C\in(ABC)$$

الطريقة الثانية:

نوجد معادلة المستوي $(ABC)$:

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow b+c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow 3a-b=0$$

من المعادلة الأولى نجد أن:

$$b=-c$$

نفرض $c=1$ ويكون $b=-1$ نعوض في المعادلة الثانية:

$$3a-(-1)=0$$

$$3a+1=0$$

$$3a=-1$$

$$a=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{n}\left(-\frac{1}{3},-1,1\right)$$

$$(ABC): -\frac{1}{3}(x-1)-1(y-1)+1(z-0)=0$$

$$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}-y+1+z=0$$

نضرب بـ $-3$:

$$x+3y-3z-4=0$$

3- لإثبات ان المستويان يتقاطعان نأخذ النواظم:

$$\overrightarrow{n_P}(1,2,-1)\,,\overrightarrow{n_Q}(2,3,-2)$$

ننسب النواظم:

$$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{-2}{-1}$$

غير مرتبط خطياً وبالتالي المستويات متقاطعة بفصل مشترك $d$.

وللتأكد من التمثيل الوسيطي للفصل المشترك نعوض التمثيل الوسيطي في المستويين:

عند التعويض في $P$:

$$t-2+6-t-4=0$$

$$0=0$$

محققة.

عند التعويض في $Q$:

$$2(t-2)+3(3)-2t-5=0$$

$$2t-4+9-2t-5=0$$

$$0=0$$

محققة.

وبالتالي $d$ فصل مشترك للمستويين $Q$ و $P$.

4- ندرس تقاطع $(ABC)$ مع $d$:

نعوض $d$ في $(ABC)$:

$$t-2+3(3)-3t-4=0$$

$$-2t+3=0$$

$$2t=3$$

$$t=\frac{3}{2}$$

نعوض $t$ في $d$:

$$x=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$$

$$y=3$$

$$z=\frac{3}{2}$$

بفرض $N$ نقطة التقاطع:

$$\Rightarrow N\left(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$$

5- نوجد المسقط القائم للنقطة $A$ على المستقيم $d$ ، معادلة المستوي المعامد المار بـ $A$:

$$1(x-1)+0(y-1)+1(z-0)=0$$

$$x+z-1=0$$

نعوض d في المستوي:

$$t-1+t-1=0$$

$$2t=2$$

$$t=1$$

نعوض في المستقيم:

$$A'(-1,3,1)$$

نوجد المسافة:

$$AA'=\sqrt{4+4+1}=3$$

## المسألة (5)

$\boldsymbol{A(1,3,0)\,,B(0,6,0)\,,N(0,0,3)\,,M(0,6,2)}$

1- نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AM}(-1,3,2)\,,\overrightarrow{AN}(-1,-3,3)$$

نثبت أنهما غير مرتبطان خطياً:

$$\frac{-1}{-1}\neq\frac{3}{-3}\neq\frac{2}{3}$$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \Rightarrow -a + 3b + 2c = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AN} = 0 \Rightarrow -a - 3b + 3c = 0$$

نجمع:

$$-2a + 5c = 0$$

$$-2a = -5c$$

$$a = \frac{5}{2}c$$

نفرض $c = 2$ فتكون $a = 5$ ونعوض:

$$-5 + 3b + 4 = 0$$

$$3b = 1$$

$$b = \frac{1}{3}$$

ويكون:

$$\vec{n}\left(5, \frac{1}{3}, 2\right)$$

$$(AMN): 5(x - 0) + \frac{1}{3}(y - 0) + 2(z - 3) = 0$$

$$5x + \frac{1}{3}y + 2z - 6 = 0$$

نضرب بـ 3:

$$15x + y + 6z - 18 = 0$$

2- بما أنه معامد للمستوي فإن:

$$\vec{u} = \vec{n} = (15, +1, 6)$$

$$d: \begin{cases} x = 15t \\ y = t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 6t \end{cases}$$

3- المستوي المحوري للقطعة $[BM]$:

$$\overrightarrow{BM}(0,0,2)$$

بفرض $J$ منتصف $[BM]$:

$$J(0,6,1)$$

$$\Rightarrow 0(x - 0) + 0(y - 6) + 2(z - 1) = 0$$

$$2z - 2 = 0$$

نقسم على 2:

$$z - 1 = 0$$

## المسألة (6)

1- لدينا:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 3$$

2- نحسب البعد بين مركز الكرة والمستوي:

$$dis(O, P) = \frac{|3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = r$$

المستوي يمس الكرة.

## المسألة (7)

لدينا:

$$dis(A, P) = \frac{|1 - 4 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

فتكون معادلة الكرة:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 0)^2 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

## المسألة (8)

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB.AD.\cos\widehat{DAB}$$

$$= 2 \times 1 \times \cos 45° = \sqrt{2}$$

2- لدينا:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AI}$$

$M$ تنطبق على $I$.

## المسألة (9)

1- لدينا:

$$d: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t + 1 \end{cases}$$

2- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\,,\overrightarrow{u_d}(2,2,1)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d} = -2+2+0=0$$

متعامدان.

## المسألة (10)

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$$

ندرس الارتباط الخطي للناظم مع $\overrightarrow{AB}$:

$$-\frac{3}{3}=\frac{1}{-1}=\frac{3}{-1}$$

$$-1=-1=-1$$

فالمستقيم $(AB)$ يعامد المستوي $P$.

2- لدينا:

$$(AB):\begin{cases} x=-3t+2 \\ y=t+1 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=3t-2 \end{cases}$$

نعوض المستقيم في المستوي:

$$3(-3t+2)-t-1-3(3t-2)-8=0$$

$$-9t+6-t-1-9t+6-8=0$$

$$-19t=-3$$

$$t=\frac{3}{19}$$

نعوض في المستقيم:

$$x=-3\left(\frac{3}{19}\right)+2=\frac{29}{19}$$

$$y=\frac{3}{19}+1=\frac{22}{19}$$

$$z=\frac{9}{19}-2=-\frac{29}{19}$$

$$A'\left(\frac{29}{19},\frac{22}{19},-\frac{29}{19}\right)$$

## المسألة (11)

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AC}(3,0,4)\ ,\qquad \overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات.

2- لدينا:

$$\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$4=-\alpha+3\beta$$

$$2=-2\alpha$$

$$4=4\beta$$

من المعادلة الثانية نجد:

$$\alpha=-1$$

ومن المعادلة الثالثة:

$$\beta=1$$

نعوض في المعادلة الأولى للتحقق:

$$4=1+3$$

$$4=4$$

فالأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً والنقاط $A,B\,,C\,,D$ تقع في مستوٍ واحد.

## المسألة (12)

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AC}(-2,0,1)\,,\overrightarrow{AB}(-2,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=4$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=AC.AB.\cos\widehat{BAC}$$

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{AB.AC}=\frac{4}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

2- لدينا:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

بفرض $G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,2)\,,(B,2)\,,(C,2)$$

$$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{6}$$

تمثل كرة التي مركزها $G$ ونصف قطرها $\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{6}$

وبتعويض $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{5}$ فلدينا:

$$r=\frac{5}{6}$$

## المسألة (13)

بفرض $M(x,y,z)$:

$$\sqrt{(-x)^2+(1-y)^2+(1+z)^2}$$

$$=\sqrt{(1-x)^2+(2+y)^2+(1-z)^2}$$

$$x^2+1-2y+y^2+1+2z+z^2=1-2x$$

$$=x^2+4+4y+y^2+1-2z+z^2$$

$$-2x+6y-4z+5=0$$

تمثل معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

## المسألة (14)

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(0,-2,-6)$$

نوجد منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$:

$$I(2,1,1)$$

فتكون المعادلة:

$$0(x-2)-2(y-1)-6(z-1)=0$$

$$-2y+2-6z+6=0$$

$$-2y-6z+8=0$$

2- بفرض $M(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{MA}(2-x,2-y,4-z)$$

$$\overrightarrow{MB}(2-x,-y,-2-z)$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(2-x)^2-2y+y^2+(4-z)(-2-z)$$

$$=(x-2)^2-2y+y^2-8-4z+2z+z^2$$

نضعها تساوي الصفر ونتمم لمربع كامل فنجد:

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$$

معادلة كرة مركزها $\Omega(2,1,1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{10}$.

## المسألة (15)

لدينا في البداية:

$$\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ,\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,,\vec{k}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

$$\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- نوجد احداثيات الرؤوس:

$A(0,0,0)\,,\quad E(0,0,2)$

$B(2,0,0)\,,\quad F(2,0,2)$

$C(2,2,0)\,,\quad G(2,2,2)$

$D(0,2,0)\,,\quad H(0,2,2)$

نشكل الشعاعان:

$$\overrightarrow{GB}(0,-2,-2)\,,\overrightarrow{GD}(-2,0,-2)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً , نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً:

$$\vec{n}.\overrightarrow{GB}=0\Rightarrow -2b-2c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{GD}=0\Rightarrow -2a-2c=0$$

من المعادلة الأولى:

$$-2b=2c$$

$$c=-b$$

نفرض $b=1$ فتكون $c=-1$ نعوض في المعادلة الثانية:

$$-2a+2=0$$

$$a=1$$

فيكون الناظم:

$$\vec{n}(1,1,-1)$$

المعادلة:

$$1(x-2)+1(y-0)-1(z-0)=0$$

$$x+y-z-2=0$$

2- لدينا:

$$\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$$

$$(EC):\begin{cases}x=2t+2\\ y=2t+2\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=-2t\end{cases}$$

3- نعوض المستقيم في المستوي:

$$2t+2+2t+2+2t-2=0$$

$$6t=-2$$

$$t=-\frac{1}{3}$$

نعوض في المستقيم لإيجاد احداثيات نقطة التقاطع $I$:

$$x=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$$

$$y=\frac{4}{3}$$

$$z=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$$

4- بفرض $M(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$$

$$x=\frac{2}{3}\ ,y=\frac{2}{3}\ ,z=\frac{4}{3}$$

$$M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

نشكل الشعاع $\overrightarrow{HM}$:

$$\overrightarrow{HM}\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{EC}(2,2,-2)$$

$$\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{EC}=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=0$$

المستقيمان متعامدان.

## المسألة (16)

نفسا الرابعة هههههههه

## المسألة (17)

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$

$$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$$

$$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$$

2- ندرس الارتباط الخطي للشعاعان $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CD}$:

$$-\frac{3}{-4}\neq-\frac{1}{4}$$

الاشعة غير مرتبطة فالنقاط ليس على استقامة واحدة.

3- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}=3+1-4=0$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=4-4=0$$

فالمستقيم $(AB)$ يعامد المستوي $(CDE)$.

4- لدينا $\overrightarrow{AB}$ ناظماً , ونأخذ نقطة $C(4,0,0)$:

$$-1(x-4)-1(y-0)-4(z-0)=0$$

$$-x-y-4z+4=0$$

5- لدينا:

$$dis(B,(CDE))=\frac{|-1-0+4+4|}{\sqrt{18}}$$

$$=\frac{7}{\sqrt{18}}$$

6- لدينا:

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z+1)^2=\frac{49}{18}$$

## المسألة (18)

1- لدينا:

$$A(0,0,0)\ ,\qquad E(0,0,1)$$

$B(1,0,0)$ , $F(1,0,1)$

$C(1,1,0)$ , $G(1,1,1)$

$D(0,1,0)$ , $H(0,1,1)$

2- نشكل الأشعة:

$\overrightarrow{AC}(1,1,0)$ , $\overrightarrow{AH}(0,1,1)$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً , نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً:

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow a + b = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AH} = 0 \Rightarrow b + c = 0$

من المعادلة الأولى نجد أن:

$b = -a$

بفرض $a = 1$ فتكون $b = -1$ نعوض في الثانية:

$c = 1$

فيكون الناظم:

$\vec{n}(1,-1,1)$

فتكون معادلة المستوي:

$1(x-0) - 1(y-0) + 1(z-0) = 0$

$x - y + z = 0$

3- لدينا ناظم المستوي $P$:

$\overrightarrow{n_P}(-2,2,-2)$

ندرس ارتباطه الخطي مع ناظم المستوي $(ACH)$:

$$-\frac{2}{1} = \frac{2}{-1} = -\frac{2}{1}$$

$$-2 = -2 = -2$$

مرتبطة خطياً فالمستويات متوازية.

4- نوجد احداثيات مركز الثقل $I$:

$$I\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

نشكل الشعاعان:

$$\overrightarrow{IF}\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\overrightarrow{ID}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

نلاحظ أنهم مرتبطين خطياً فالنقاط تقع على استقامة واحدة.

5- لدينا:

$S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3$

**المسألة (19)**

دور عليها فوق 😉

**المسألة (20)**

$$\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- نوجد احداثيات الرؤوس:

$A(0,0,0)$ , $E(0,0,2)$

$B(2,0,0)$ , $F(2,0,2)$

$C(2,2,0)$ , $G(2,2,2)$

$D(0,2,0)$ , $H(0,2,2)$

$O$ منتصف $[AG]$:

$O(1,1,1)$

2- لدينا:

$\overrightarrow{GO}(1,1,1)$ , $\overrightarrow{GB}(0,-2,-2)$

نلاحظ انهم غير مرتبطين خطياً , نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً:

$\vec{n}.\overrightarrow{GO} = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{GB} = 0 \Rightarrow -2b - 2c = 0$

من المعادلة الثانية:

$2c = -2b$

$c = -b$

بفرض $b = 1$ فتكون $c = -1$ نعوض:

$a = 0$

فيكون الناظم:

$\vec{n}(0,1,-1)$

$0(x-1) + 1(y-1) - 1(z-1) = 0$

$y - 1 - z + 1 = 0$

$$y - z = 0$$

3- نشكل الأشعة:

$$\overrightarrow{OB}(1,-1,-1)\,,\overrightarrow{OG}(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG} = 1 - 1 - 1 = -1$$

لدينا:

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG} = OB.OG.\cos\widehat{GOB}$$

$$\cos\widehat{GOB} = \frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}}{OB.OG} = \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

4- لدينا:

$$\overrightarrow{DC}(2,0,0)$$

$$(DC):\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$

5- لدينا:

$$\vec{n}(0,1,-1)\ ,\qquad \overrightarrow{DC}(2,0,0)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{DC} = 0$$

المستقيم يوازي المستوي.

6- لدينا:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\alpha = \gamma = 1\,,\beta = -1$$

## المسألة (21)

1- لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(3,-1,-2)\,,\overrightarrow{AC}(-2,2,-4)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6 - 2 + 8 = 0$$

المستقيمان متعامدان.

2- لدينا:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = -4 + 8 - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

فتكون معادلة المستوي:

$$2(x-2) + 4(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$2x - 4 + 4y - 4 + z - 1 = 0$$

$$2x + 4y + z - 9 = 0$$

3- التمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 4t + 1\,;t \in \mathbb{R} \\ z = t + 1 \end{cases}$$

4- لدينا:

$$dis\big(D,(ABC)\big) = \frac{|6 + 4 + 1 - 9|}{\sqrt{4 + 16 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$V = \frac{1}{3}S.h$$

$$h = dis\big(D,(ABC)\big)$$

$$AB = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

$$AC = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24}$$

$$BC = \sqrt{25 + 9 + 4} = \sqrt{38}$$

حسب مبرهنة عكس فيثاغورث:

$$38 = 14 + 24$$

$$38 = 38$$

قائم في $A$ , مساحته:

$$S = \frac{AC.AB}{2} = \frac{\sqrt{14}\times\sqrt{24}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}\times\sqrt{12}}{2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}2\sqrt{21}\frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{4}{3}$$

5- لدينا:

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB}$$

$$-2\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$$

بما أنهم مرتبطين خطياً فالمستقيمان متوازيان.

## المسألة (22)

ولله كمان شكلها فوق (المسألة الثانية)

## المسألة (23)

1- لدينا:

$$G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\ ,\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$$

نتحقق من التعامد:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OG}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$$

بالتالي الشعاع $\overrightarrow{OG}$ يعامد المستوي $(ABC)$.

2- لدينا:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$$

$$x+y+z-1=0$$

3- لدينا:

$$\overrightarrow{A'B'}(-2,2,0)\ ,\qquad \overrightarrow{A'C'}(-2,0,4)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً , نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{A'B'}=0\Rightarrow -2a+2b=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{A'C'}=0\Rightarrow -2a+4c=0$$

من المعادلة الأولى نجد أن:

$$a=b$$

بفرض $b=1$ تكون $a=1$ ثم نعوض في المعادلة الثانية:

$$-2+4c=0$$

$$c=\frac{1}{2}$$

$$\vec{n}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$$

نضرب بـ 2:

$$\vec{n}(2,2,1)$$

فتكون معادلة المستوي:

$$2(x-2)+2(y-0)+1(z-0)=0$$

$$2x+2x+z-4=0$$

4- لدينا:

$$2x+2y+z=4$$

$$x+y+z=1$$

نطرح:

$$x+y=3$$

$$y=3-x$$

بفرض $x=t$:

$$y=3-t$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$t+3-t+z=1$$

$$z=-2$$

فالفصل المشترك $\Delta$ يعطى بالعلاقة:

$$\begin{cases} x=t \\ y=3-t\ ;t\in\mathbb{R} \\ z=-2 \end{cases}$$

5- نوجد معادلة المستوي $P$ المار من $D$ ويقبل $\vec{u}_\Delta$ ناظماً:

$$1(x-1)-1(y-1)+0(z-1)=0$$

$$x-y=0$$

نعوض $\Delta$ في $P$:

$$t-3+t=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

نعوض $t$ في $\Delta$:

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2}, z = -2$$

فتكون $D'$ المسقط القائم:

$$D'\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -2\right)$$

نحسب الطويلة:

$$DD' = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 9} = \sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

## حل تمارين واسئلة في الجلسة 3 + 4

### التمرين (2)

1- نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0), \overrightarrow{AC}(3,0,4)$$

بنسبة المركبات نجد أنهم غير مرتبطين خطياً.

2- لدينا:

$$\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$4 = -\alpha + 3\beta$$

$$2 = -2\alpha$$

$$4 = 4\beta$$

نلاحظ من المعادلة الثانية والثالثة:

$$\beta = 1, \alpha = -1$$

نعوض في المعادلة الأولى للتحقق:

$$4 = 1 + 3$$

$$4 = 4$$

محققة.

الاشعة الثلاثة مرتبطة خطياً بالتالي النقاط تقع في مستو واحد.

### التمرين (3)

1- لدينا:

$$A(0,0,0), \quad E(0,0,2)$$

$$B(2,0,0), \quad F(2,0,2)$$

$$C(2,2,0), \quad G(2,2,2)$$

$$D(0,2,0), \quad H(0,2,2)$$

$$I(0,1,0), J(2,1,0), K(2,1,2)$$

2- لدينا:

$$\overrightarrow{AK}(2,1,2), \overrightarrow{HI}(0,-1,-2)$$

$$\overrightarrow{HJ}(2,-1,-2)$$

3- لدينا:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$2 = 2\beta$$

$$1 = -\alpha - \beta$$

$$2 = -2\alpha - 2\beta$$

من المعادلة الأولى:

$$\beta = 1$$

من الثانية:

$$\alpha = -2$$

نعوض في الثالثة فنجد:

$$2 = 4 - 2$$

$$2 = 2$$

محققة

بما أن الاشعة الثلاثة مرتبطة خطياً فإن المستقيم $(AK)$ يوازي المستوى $(HIJ)$.

### التمرين (4)

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$$

$$\overrightarrow{AC}(3,5,-1)$$

$$\overrightarrow{AD}(-5,-5,5)$$

بوضع:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$$-5 = -\alpha + 3\beta$$

$$-5 = -2\alpha + 5\beta$$

$$5 = -\beta$$

من المعادلة الثالثة:

$$\beta = -5$$

نعوض في الأولى:

$$-5 = -\alpha - 15$$

$$-\alpha = 10$$

$$\alpha = -10$$

نعوض في المعادلة الثانية للتحقق:

$$-5 = 20 - 25$$

$$-5 = -5$$

محققة فالنقاط $A, B, C, D$ تقع في مستوي واحد,

لنختبر انتماء $E$ للمستوي $P$:

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$$1 = -\alpha + 3\beta$$

$$1 = -2\alpha + 5\beta$$

$$1 = -\beta$$

نلاحظ من المعادلة الثالثة:

$$\beta = -1$$

نعوض في الأولى:

$$1 = -\alpha - 3$$

$$\alpha = -4$$

نعوض في المعادلة الثانية للتحقق:

$$1 = 8 - 5$$

$$1 \neq 3$$

النقطة $E$ لا تنتمي للمستوي $P$.

## التمرين (5)

1- نشكل الأشعة:

$$\overrightarrow{AB}(-2,0,-1) \ , \qquad \overrightarrow{AC}(0,-1,-3)$$

نلاحظ أنهم غير مرتبطين خطياً فالنقاط لا تقع على استقامة واحدة.

2- لدينا:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda-3\\-1\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$\lambda - 3 = -2\alpha$$

$$-1 = -\beta$$

$$2 = -\alpha - 3\beta$$

من المعادلة الثانية:

$$\beta = 1$$

نعوض في الثالثة:

$$2 = -\alpha - 3$$

$$\alpha = -5$$

نعوض في الأولى لإيجاد $\lambda$:

$$\lambda - 3 = 10$$

$$\lambda = 7$$

3- لتكون النقاط $A, B, C, D$ في مستو واحد:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$x - 3 = -2\alpha$$

$$y - 2 = -\beta$$

$$2 = -\alpha - 3\beta$$

من المعادلة الأولى:

$$\alpha = -\frac{x-3}{2}$$

من المعادلة الثانية:

$$\beta = 2 - y$$

نعوض في المعادلة الثالثة:

$$2 = \frac{x-3}{2} - 3(2-y)$$

$$4 = x - 3 - 12 + 6y$$

$$x + 6y - 19 = 0$$

تمثل معادلة مستو فالنقاط تقع في مستوٍ واحد.

## التمرين (6)

1- لدينا:

$$\ell_1 = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$$

$$= \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA}$$

$$\ell_2 = 2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE})$$

$$= 2\overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{IE}$$

$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FE}$$

$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$$

$$\ell_1 = \ell_2$$

2- من الطلب السابق لدينا:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CJ}$$

$$= (\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CJ}) - \overrightarrow{CE}$$

لدينا من الطلب السابق:

$$\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG} = 2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG})$$

نعوض:

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CE}$$

$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$

بالتالي الاشعة مرتبطة خطياً والمستقيم $(IJ)$ يوازي المستوي $(CEG)$.

## المثال

بما أن $\overrightarrow{(AL)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ نستنج أن $L$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(D,1),(A,2)$ و أن $(\mathrm{I},3)$

و بما ان $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ فإن $J$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,2),(C,1)$ و أن $(\mathrm{J},3)$

و أخيراً بما أن $G$ منتصف $[IJ]$ فإن $G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(\mathrm{I},3),(\mathrm{J},3)$

و بالتالي و حسب الخاصة التجميعية نستنج أن $G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,2),(C,1),(D,1)$

من جهة أخرى $K$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(C,1),(D,1)$ و أن $(\mathrm{K},2)$

و $I$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(\mathrm{A},2),(\mathrm{B},2)$ و أن $(\mathrm{I},4)$

فحسب الخاصة التجميعية $G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(\mathrm{I},4),(\mathrm{K},2)$

$$\overrightarrow{IG} = \frac{2}{6}\overrightarrow{IK}$$

و بالتالي $I,G,K$ على استقامة واحدة

## مسألة المستقيمات المتقاطعة

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$$

1- لدينا:

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$\frac{1}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{5}(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC}) + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

$$-\frac{1}{5}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$$

$$\frac{4}{5}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

حسب خاصة التجانس نضرب بـ 5:

$$4\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

وبالتالي $P$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(B,4),(C,1)$$

2- لدينا:

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{QA}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QD})=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{QA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{QA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{QA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$

حسب خاصة التجانس نضرب بـ 4:

$$\overrightarrow{QA}+3\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$

وبالتالي $Q$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(A,1),(D,3)$$

وبما أن $G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,1),(D,3),(B,4),(C,1)$$

فحسب الخاصة التجميعية $G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $Q$ و $P$ وهذا يجعل النقاط $G$ و $Q$ و $P$ على استقامة واحدة وبالتالي $G$ تقع على المستقيم $(PQ)$.

3- لدينا:

$$\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$$

$$\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BR}=\vec{0}$$

$$\frac{1}{5}(\overrightarrow{BR}+\overrightarrow{RA})+\overrightarrow{RB}=\vec{0}$$

$$-\frac{1}{5}\overrightarrow{RB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB}=\vec{0}$$

$$\frac{4}{5}\overrightarrow{RB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{RA}=\vec{0}$$

حسب خاصة التجانس نضرب بـ 5:

$$4\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{RA}=\vec{0}$$

وبالتالي $R$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(B,1),(A,4)$$

لدينا:

$$\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DS}=\vec{0}$$

$$\frac{1}{4}(\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SC})+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$$

$$-\frac{1}{4}\overrightarrow{SD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$$

$$\frac{3}{4}\overrightarrow{SD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SC}=\vec{0}$$

حسب خاصة التجانس نضرب بـ 4:

$$3\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$$

وبالتالي $S$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(C,1),(D,3)$$

وبما أن $G$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ فحسب الخاصة التجميعية $G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $R$ و $S$ وبالتالي النقاط $S$ و $R$ و $G$ تقع على استقامة واحدة وهذا يؤدي إلى انتماء النقطة $G$ للمستقيم $(RS)$.

بما أن $G$ تنتمي للمستقيمان $(PQ)$ و $(RS)$ فإن المستقيمان يتقاطعان في $G$ وبالتالي يعينان مستوياً.

## حل بنوك التحليلية

**1) الجواب:**

$$\vec{v}=\sqrt{2}\,\vec{i}+\sqrt{6}\,\vec{j}-\vec{k}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2+(-1)^2}$$

$$= \sqrt{2+6+1} = \sqrt{9} = 3$$

**2) الجواب:**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BG}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} \end{aligned}$$

حيث $N$ هي منتصف $BG$ أي مركز الوجه $BCGF$

**3) الجواب:**

$$(F\,; \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FD})$$

وبالتالي:

$$A(1\,,0\,,0) \quad , \quad B(0\,,1\,,0)$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$$

بفرض $N(x\,,y\,,z)$ يكون:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x-1 = -x \Rightarrow 2x-1=0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$y = 1-y \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$
$$z = -z \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

وبالتالي:

$$N\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,0\right)$$

**4) الجواب:**

$$A(1\,,2\,,-1)\,,\ B(2\,,1\,,0)$$

$C$ نظيرة $A$ بالنسبة للمبدأ أي أنّ:

$$C(-1\,,-2\,,+1)$$

نشكّل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,1) \ ,\ \overrightarrow{AC}(-2,-4,2)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأنّ:

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{-4} \neq \frac{1}{2}$$

لنفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\begin{aligned} a &= +(-2+4) = 2 \\ b &= -(2+2) = -4 \\ c &= +(-4-2) = -6 \\ &\Rightarrow \vec{n}(2,-4,-6) \ ,\ A(1,2,-1) \end{aligned}$$

نعوّض في معادلة المستوى:

$$a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-1) - 4(y-2) - 6(z+1) = 0$$
$$\Rightarrow 2x - 4y - 6z + 0 = 0$$

نقسم على $2$ :

$$\Rightarrow x - 2y - 3z = 0$$

**5) الجواب:**

$$A(1,3,-1)\ ,\ B(2,5,2)\ ,\ C(3,4,\alpha)$$

ليكون المثلث $ABC$ متساوي الساقين رأسه $B$ يجب أن يكون:

$$AB = BC$$

ومنه:

$$\begin{aligned} BA &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \\ BC &= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (\alpha-2)^2} \\ &= \sqrt{2 + (\alpha-2)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{14} = \sqrt{2+(\alpha-2)^2}$$

نربّع الطرفين:

$$\begin{aligned} &2 + (\alpha-2)^2 = 14 \\ &\Rightarrow (\alpha-2)^2 = 12 \\ &\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 12 \\ &\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 8 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(-8) = 48 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+4-4\sqrt{3}}{2} = 2-2\sqrt{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+4+4\sqrt{3}}{2} = 2+2\sqrt{3} \end{cases}$$

**6) الجواب:**

$$A(3,-2,2)\ ,\ \vec{u}(1,1,0)\ ,\ \vec{v}(-1,1,1)$$

نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$$

نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\begin{aligned} a &= +(0-1) = -1 \\ b &= -(0-1) = +1 \\ c &= +(-1-1) = -2 \\ &\Rightarrow \vec{n}(-1,1,-2) \end{aligned}$$

نعوّض في معادلة المستوى:

$$\begin{aligned} &-1(x-3) + 1(y+2) - 2(z-2) = 0 \\ &\Rightarrow -x + 3 + y + 2 - 2z + 4 = 0 \\ &\Rightarrow -x + y - 2z + 9 = 0 \end{aligned}$$

نضرب الطرفين بـ $(-1)$ :

$$\Rightarrow x - y + 2z - 9 = 0$$

**7) الجواب:**

$(2,0,0)\ ,\ (0,3,0)\ ,\ (0,0,5)$

المستوي له شكل المعادلة:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$$

نوحّد المقامات:

$$\Rightarrow \frac{15x+10y+6z}{30}=1$$
$$\Rightarrow 15x+10y+6z=30$$

**8) الجواب:**

$$\overrightarrow{w_1}=2\,\vec{u}-\vec{v}$$
$$\overrightarrow{w_2}=2\,\vec{u}+\vec{v}$$

بما أنّ $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان فإنّ:

$$\overrightarrow{w_1}.\overrightarrow{w_2}=0 \Rightarrow 4\,\vec{u}^2-\vec{v}^2=0 \Rightarrow 4\,\vec{u}^2=\vec{v}^2$$

$$||\vec{u}||=\frac{1}{4}||\vec{v}||^2$$

$$\Rightarrow ||\vec{u}||=\frac{1}{2}||\vec{v}||$$

**9) الجواب:**

$A(1,2,-3)\ ,\ B(-1,3,3)\ ,\ C(4,-1,2)$

بفرض $D(x,y,z)$

ليكون $ABCD$ متوازي أضلاع يجب أن يتحقق:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$
$$\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-x\\-1-y\\2-z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2=4-x \Rightarrow x=6\\ 1=-1-y \Rightarrow y=-2\\ 6=2-z \Rightarrow z=-4\end{cases}$$
$$\Rightarrow D(6\,,-2\,,-4)$$

**10) الجواب:**

$$AM^2=3+(x+1)^2$$

أصغر قيمة لـ $AM^2$ هي التي تحقق:

$$(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$
$$\Rightarrow AM^2=3 \Rightarrow AM=\sqrt{3}$$

**11) الجواب:**

$\vec{u}(1,0,2)\ ,\ \vec{v}(-1,2,0)\ ,\ \vec{w}(-4,m,-2)$

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$
$$\begin{pmatrix}-4\\m\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta\\2\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$-4=\alpha-\beta \quad ...(1)$$
$$m=2\beta \quad ...(2)$$
$$-2=2\alpha \Rightarrow \alpha=-1 \quad ...(3)$$

نعوّض في $(1)$ :

$$-4=-1-\beta \Rightarrow \beta=3$$

نعوّض في $(2)$ :

$$\Rightarrow m=6$$

**12) الجواب:**

$A(0,1,0)\ ,\ \vec{u}(0,1,2)\ ,\ \vec{v}(0,3,-1)$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{3}\neq\frac{2}{-1}$$

بفرض $\vec{n}(a\,,b\,,c)$ :

$$a=+(-1-6)=-7$$
$$b=-(0-0)=0$$
$$c=+(0-0)=0$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$\Rightarrow 7(x-0)+0+0=0 \Rightarrow 7x=0 \Rightarrow x=0$$

**13) الجواب:**

$\overrightarrow{n_1}(1\,,2\,,-\lambda\,)\ ,\ \overrightarrow{n_2}(3\lambda-7\,,4\,,-6)$

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$$
$$\Rightarrow 3\lambda-7+8+6\lambda=0$$
$$\Rightarrow 9\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{9}$$

**14) الجواب:**

$$2x+3y-4z+1=0$$
$$\lambda\,x+2y+\frac{\lambda}{2}z-3=0$$

$$\overrightarrow{n_1}(2,3,-4)\ \ ,\ \ \overrightarrow{n_2}\left(\lambda\,,2,\frac{\lambda}{2}\right)$$

ليكون المستويين متعامدين يجب أن يتحقق الشرط:

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$$
$$\Rightarrow 2\lambda+6-2\lambda=0$$
$$\Rightarrow 6\neq 0 \ \text{غير موجودة}$$

**15) الجواب:**

$$||\vec{u}||=5\ \ ,\ \ ||\vec{v}||=3$$
$$\vec{u}.\vec{v}=-4$$

$$2\,\vec{u}(2\,\vec{v}+3\,\vec{u})$$
$$=4\,\vec{u}.\vec{v}+6\,\vec{u}.\vec{u}$$
$$=4\,\vec{u}.\vec{v}+6\,||\vec{u}||^2$$
$$=4(-4)+6(25)=-16+150=134$$

**16) الجواب:**

$$\overrightarrow{n_Q}(1,-2,3) \quad , \quad \overrightarrow{n_R}(1,1,1) \, , \quad A(2,5,-2)$$

كون المستوي $P$ عمودي على المستويين $Q$ و $R$

فإنّ $\overrightarrow{n_R}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ شعاعي توجيه له.

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_R}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{3}{1}$$

نفرض ناظم $P$ هو $\vec{n}(a,b,c)$ :

$$\begin{aligned} a &= +(-2-3) = -5 \\ b &= -(1-3) = +2 \\ c &= +(1+2) = +3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \vec{n}(-5,2,3)$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$\begin{aligned} & a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \\ & \Rightarrow \ -5(x-2) + 2(y-5) + 3(z+2) = 0 \\ & \Rightarrow -5x + 2y + 3z + 6 = 0 \end{aligned}$$

نضرب بـ 2 :

$$\Rightarrow -10x + 4y + 6z + 12 = 0$$

**17) الجواب:**

$$AB = 4 \quad , \quad BC = CG = 2$$

نعرّف المعلم المتجانس:

$$\left(A\,;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

ونوجد الإحداثيّات:

$$\begin{aligned} & A(0,0,0) \ , \ E(0,0,2)\, , \ B(4,0,0) \ , \ F(4,0,2) \\ & C(4,2,0) \ , \ G(4,2,2) \ , \ D(0,2,0) \ , \ H(0,2,2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & J\left(\frac{4+4}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow J(4,2,1) \\ & \Rightarrow \overrightarrow{JD}(-4,0,-1) \ , \ \overrightarrow{JH}(-4,0,1) \\ & \Rightarrow \overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JH} = 16 + 0 - 1 = 15 \end{aligned}$$

**18) الجواب:**

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$$

**19) الجواب:**

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 1$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = 1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}^2 = 1$$

حيثُ $I$ منتصف $[AB]$ ، وبالتالي:

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{BI}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow -\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}^2 = 1 \\ & \Rightarrow -\overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{IM}^2 = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IM}^2 = 1 + \overrightarrow{AI}^2 \end{aligned}$$

**20) الجواب هو الخيار $c$ .**

**21) الجواب:**

$$A(3,4,1)$$

$B$ هي مسقط $A$ على المستوي $(xoz)$ وبالتالي:

$$B(3,0,1)$$

$C$ هي مسقط $B$ على محور الرواقم $oz$ وبالتالي:

$$C(0,0,1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AC &= \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2 + (1-1)^2} \\ &= \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

**22) الجواب:**

$$\begin{aligned} & P : x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ & Q : x + y + z + 1 = 0 \qquad \times(-1) \end{aligned}$$

بحل المعادلتين حل مشترك نجد:

$$\begin{aligned} & x - 2y + 3z - 5 = 0 \quad ...(1) \\ & -x - y - z - 1 = 0 \quad ..(2) \end{aligned}$$

بجمع المعادلتين (2) و (1) نجد:

$$-3y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}z - 2$$

نعوّض في $Q$ :

$$\begin{aligned} & \Rightarrow x + \frac{2}{3}z - 2 + z + 1 = 0 \\ & \Rightarrow x = -\frac{5}{3}z + 1 \\ & \Rightarrow M\left(-\frac{5}{3}z + 1\,, \frac{2}{3}z - 2\,, z\right) \end{aligned}$$

**23) الجواب:**

$$\begin{aligned} & 2x + 2y + 2z = 0 \quad ...(1) \\ & x + y - 4z = 0 \quad ...(2) \end{aligned}$$

ندرس الوضع النسبي للنواظم:

$$\overrightarrow{n_1}(2,2,2)\, , \ \overrightarrow{n_2}(1,1,-4)$$

$\frac{2}{1} = \frac{2}{1} \neq \frac{2}{-4}$ غير مرتبطين خطيّاً

وبالتالي المستويين غير متوازيان.

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} =^? 0$$

$$2 + 2 - 8 = -4 \neq 0$$

ومنه فإنّ المستويان متقاطعان دون تعامد.

**24) الجواب:**

$$A(1,2,-1) \ , \ B(3,0,1)$$

النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$:

الناظم $\overrightarrow{AB}(2,-2,2)$

$M$ منتصف $[AB]$ وبالتالي:

$M(2,1,0)$

معادلة المستوي المحوري:

$$2(x-2)-2(y-1)+2(z-0)=0$$
$$\Rightarrow 2x-4-2y+2+2z=0$$
$$\Rightarrow 2x-2y+2z-2=0$$

نقسم على 2 :

$$\Rightarrow x-y+z-1=0$$

بالمقارنة مع

$$x+my+nz-1=0$$

نجد أنّ:

$$m=-1 \quad , \quad n=1$$

**25) بتطبيق فيثاغورث نجد:**

$$r^2=dist^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow 9=dist^2+2$$
$$\Rightarrow dist^2=9-2=7$$
$$\Rightarrow dist=\sqrt{7}$$

**26) الجواب:**

نوجد النقطة $M$ هي : $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

ونشكل الشعاعان $\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE}$ :

$$\overrightarrow{CM}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$$

$$\overrightarrow{OE}(1,1,1)$$

نوجد $||CM||$ و $||OE||$ :

$$||CM||=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$||OE||=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

من قانون الجداء السلمي نجد :

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{OE}=||CM||.||OE||.\cos(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2}.\sqrt{3}\cos(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})=0$$

$$\cos(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})=0$$

**27) الجواب:**

**28) الجواب:**

$$A(-1,2,3) \quad , \quad B(1,4,-5)$$

نوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ :

الناظم $\overrightarrow{AB}(2,2,-8)$

النقطة $M$ منتصف $[AB]$ وبالتالي:

$M(0,3,-1)$

$$\Rightarrow 2(x-0)+2(y-3)-8(z+1)=0$$

$$\Rightarrow P: 2x+2y-8z-14=0$$

إيجاد معادلة الكرة:

نصف القطر:

$$dist(A,P)=\frac{|-2+4-24-14|}{\sqrt{4+4+64}}=\frac{|-36|}{\sqrt{72}}=\frac{36}{\sqrt{72}}$$

$$\Rightarrow x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\left(\frac{36}{\sqrt{72}}\right)^2$$

**29) الجواب:**

$$d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=t-2 \\ z=3t \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{u_d}(1,1,3)$$

$$P: 2x+ay-z+b=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}(2,a,-1)$$

كون $d\in P$ فإنّ: $\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_P}$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=0\Rightarrow 2+a-3=0\Rightarrow a=1$$

وكون $d\in P$ فإنّ $d$ يحقق معادلته:

$$\Rightarrow 2(t+1)+(t-2)-3t+b=0$$
$$\Rightarrow 2t+2+t-2-3t+b=0\Rightarrow b=0$$

**30) الجواب:**

$$A(3,2,1) \;,\; B(1,2,0) \;,\; C(3,1,-2) \;,\; D(x,y,3)$$

**31) الجواب:**

حسب خاصة الاختزال:

$$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

نعوض :

$$6\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right|=6\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

$$\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right|=\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

تمثل كرة مركزها $G$ ونصف قطرها $\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$ .

**32) الجواب:**

$$l_1=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

$$l_2 = 3\overrightarrow{MD} - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$$
$$= 3\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{MG}$$
$$= 3\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MD}\right)$$
$$= 3\overrightarrow{GD}$$

نعوض:

$$3\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{GD}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{GD}\right\|$$

تمثل كرة مركزها $G$ ونصف قطرها $[DG]$

**33) الجواب:**

$$x^2 + z^2 = \frac{9}{4}y^2$$
$$r^2 = 9 \Longrightarrow r = 3$$

مخروط دوراني محوره محور التراتيب ونصف قطر قاعدته 3

**34) الجواب:**

$$\left(O\,;\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OC}\right)$$
$$\Longrightarrow A(1,0,0)\ ,\ B(0,1,0)\ ,\ C(0,0,1)$$
$$\Longrightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Longrightarrow x + y + z - 1 = 0$$

**35) الجواب:**

$$P_1:\ 2x + y - z + 2 = 0 \quad \dots(1)$$
$$P_2:\ x + 2y - z + 1 = 0 \quad \dots(2)$$

بطرح $(2)$ و $(1)$ نجد:

$$x - y + 1 = 0 \Longrightarrow x = y - 1$$

نعوّض في $(2)$ :

$$y - 1 + 2y - z + 1 = 0 \Longrightarrow z = 3y$$

وبالتالي:

$$(y-1\,,y\,,3y)\ ;\quad y \in \mathbb{R}$$

**36) الجواب:**

$$\left.\begin{matrix} A(-1,2,3) \\ B(1,2,-1) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AB}(2,0,-4)$$
$$P: x + y + z - 1 = 0$$

المعادلات الوسيطية للمستقيم $d$ هي:

$$d:\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = -4t + 3 \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

نعوّض $d$ في $P$ :

$$2t - 1 + 2 - 4t + 3 - 1 = 0$$
$$\Longrightarrow -2t + 3 = 0 \Longrightarrow t = \frac{3}{2}$$

نعوّض في $d$ :

$$x = 2\ ,\ y = 2\ ,\ z = -3$$
$$\Longrightarrow I(2,2,-3)$$

**37) الجواب:**

$$A(2,0,0)\ ,\ B(0,1,0)\ ,\ C(0,0,1)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}(-2,1,0) \Longrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \\ \overrightarrow{AC}(-2,0,1) \Longrightarrow \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos(B\hat{A}C)$$
$$\Longrightarrow 4 + 0 + 0 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \cos(B\hat{A}C)$$
$$\Longrightarrow \cos(B\hat{A}C) = \frac{4}{5}$$

**38) الجواب:**

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 8 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 - 8 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 9 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$$

وبالتالي $M$ تمثّل كرة مركزها:

$$(0,1,0)$$

ونصف قطرها:

$$r = \sqrt{9} = 3$$

**39) الجواب:**

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|.\left\|\overrightarrow{BC}\right\|.\cos(\hat{B})$$

حسب فيثاغورث:

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

**40) الجواب:**

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HJ}$$
$$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$$

**41) الجواب:**

$$d:\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = -t + 1 \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \vec{n} = \overrightarrow{u_d} = (0\,,-1\,,-1)$$

**42) الجواب:**

$A \in d \Longleftarrow$ تحقق معادلته

$$\begin{cases} -2 = at - 1 \quad \dots(1) \\ 5 = 3t + 2 \\ 2 = 2t \Longrightarrow t = 1 \end{cases}$$

نعوّض في $(1)$ :

$$-2 = a(1) - 1 \Rightarrow a = -2 + 1 = -1$$

**43) الجواب:**

$$d : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 1 \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{u_d}(3\,,2\,,-1)$$

$$\Delta: \begin{cases} x = s + 2 \\ y = 1 \\ z = 3s + 1 \end{cases} ;s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{u_\Delta}(1\,,0\,,3)$$

$$\frac{1}{3} \neq \frac{0}{2} \neq \frac{3}{-1}$$

وبالتالي شعاعي توجيه $\Delta$ و $d$ غير مرتبطين خطيّاً، ومنه فإنّ $\Delta$ و $d$ غير متوازيان أي أنهما ((إمّا متقاطعين أو متخالفين))

$$\left.\begin{matrix} x = x \\ y = y \\ z = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3t + 1 = s + 2 \ \ldots(1) \\ 2t = 1 \ \ldots(2) \\ -t + 1 = 3s + 1 \ \ldots(3) \end{cases}$$

من $(2)$ نجد:

$$t = \frac{1}{2}$$

نعوّض في $(1)$ :

$$\Rightarrow s = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 - 2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

نعوّض في $(3)$ :

$$-\frac{1}{2} + 1 \stackrel{?}{=} 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{5}{2}$$

وبالتالي $\Delta$ و $d$ متخالفين.

$$\vec{u_d}.\vec{u_\Delta} = (1)(3) + (0)(2) + (3)(-1) = 0$$

ومنه فإن المستقيمان $\Delta$ و $d$ متخالفين ومتعامدين .

**44) الجواب:**

$$A(1\,,2\,,0) \ ,\ B(0\,,0\,,1) \ ,\ C(1\,,5\,,5)$$

$$\overrightarrow{BA}(1\,,2\,,-1) \ ,\ \overrightarrow{BC}(1\,,5\,,4)$$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{5}$$

الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطان خطيّاً.

نفرض:

$$\vec{n}(a\,,b\,,c)$$

$$a = +(8 + 5) = 13$$
$$b = -(4 + 1) = -5$$
$$c = +(5 - 2) = 3$$
$$\Rightarrow \vec{n}(13\,,-5\,,3)$$
$$B(0\,,0\,,1)$$

$$(ABC) : 13(x - 0) - 5(y - 0) + 3(z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (ABC) :\ 13x - 5y + 3z - 3 = 0$$

نكتب معادلة المستقيم $d$ المار بالنقطة $D(-11\,,9\,,-4)$

وشعاع توجيهه هو:

$$\vec{u_d} = \vec{n} = (13\,,-5\,,3)$$

$$\Rightarrow d : \begin{cases} x = 13t - 11 \\ y = -5t + 9 \\ z = +3t - 4 \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$

نوجد نقطة تقاطع المستقيم $d$ مع المستوي $(ABC)$ بالحل المشترك:

$$13(13t - 11) - 5(-5t + 9) + 3(3t - 4) - 3 = 0$$
$$\Rightarrow 203t - 203 = 0 \Rightarrow t = 1$$

وبالتالي:

$$\begin{cases} x = 13(1) - 11 \\ y = -5(1) + 9 \\ z = 3(1) - 4 \end{cases} \Rightarrow D'(2\,,4\,,-1)$$

**45) الجواب:**

$$E \in yy' \Rightarrow E(0\,,y\,,0)$$
$$B(2\,,1\,,0) \ ,\ A(2\,,0\,,2)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AE}(-2\,,y\,,-2)$$
$$\overrightarrow{BE}(-2\,,y - 1\,,0)$$
$$\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = \left\|\overrightarrow{BE}\right\|$$
$$\Rightarrow \sqrt{4 + y^2 + 4} = \sqrt{4 + (y - 1)^2 + 0}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$8 + y^2 = 4 + (y - 1)^2$$
$$\Rightarrow 8 + y^2 = 4 + y^2 - 2y + 1$$
$$\Rightarrow 3 = -2y \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow E\left(0\,,-\frac{3}{2}\,,0\right)$$

**46) الجواب:**

$$A(2\,,0\,,0) \ ,\ B(0\,,3\,,0) \ ,\ C(0\,,0\,,1)$$

$$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$$

نضرب الطرفين بـ $6$ :

$$\Rightarrow (ABC) :\ 3x + 2y + 6z = 6$$

$$dist(O\,,P)=\frac{|3(0)+2(0)+6(0)-6|}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{|-6|}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}$$

**47) الجواب:**

المستقيم يوازي المستوى أي أنّ:

$$\vec{u}\perp\vec{n}$$

وبالتالي:

$$\vec{n}.\vec{u}=0$$
$$\Rightarrow(2\,,-2\,,a)(1\,,-1\,,2)=0$$
$$\Rightarrow 2(1)+(-2)(-1)+a(2)=0$$
$$\Rightarrow 2+2+2a=0\Rightarrow 2a=-4\Rightarrow a=-2$$

**48) الجواب:**

$$dist(M\,,P)=\frac{|2(3)+3+2(3)-6|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

$$dist(M\,,Q)=\frac{|2(3)-2(3)-3+6|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{3}{\sqrt{9}}=1$$

$$dist(M\,,d)=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

**49) الجواب:**

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DB})$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(2\,\overrightarrow{BI})$$

حيثُ $I$ منتصف $[AC]$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BI}$$

ومنه $M$ تنطبق على منتصف $[AC]$

**50) الجواب:**

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{6}\ ,\ y=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

**51) الجواب:**

$I$ مركز ثقل $BCD$ وبالتالي $I$ هو م.أ.م للنقاط:

$$(D\,,2)\ ,\ (C\,,2)\ ,\ (B\,,2)\ \Rightarrow(I\,,6)$$

$K$ هي نظيرة $A$ بالنسبة لِـ $I$ أي أنّ:

$$\overrightarrow{IK}=\frac{-1}{1}\overrightarrow{IA}$$

وبالتالي $K$ م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-1)\ ,\ (I\,,2)$$

ومنه $K$ م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-3)\ ,\ (I\,,6)$$

ومنه $K$ م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-3)\ ,\ (B\,,2)\ ,\ (C\,,2)\ ,\ (D\,,2)$$

**52) الجواب:**

بما أنّ $I$ مركز ثقل المثلث $ABC$ فإنّ $I$ م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,1)\ ,\ (B\,,1)\ ,\ (C\,,1)\Rightarrow(I\,,3)$$

$H$ م.أ.م للنقاط:

$$(I\,,3)\ ,\ (D\,,3)$$

وبالتالي $H$ منتصف $DI$ .

**53) الجواب:**

$$P:x+2y=4\quad ...(1)$$
$$Q:x-y=1\quad ...(2)$$

من $(1)$ نجد:

$$x=-2y+4$$

ومن $(2)$ نجد:

$$x=y+1$$

وبالتالي:

$$-2y+4=y+1\Rightarrow -3y=-3\Rightarrow y=1$$
$$\Rightarrow x=1+1=2\Rightarrow x=2$$

نفرض أن $z=t$ :

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\quad ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

**54) الجواب:**

$$P_1:\ x+2y+z-5=0\ ...(1)$$
$$P_2:\ 2x-y-1=0\quad ...(2)$$
$$P_3:\ 3x+y-4=0\quad ...(3)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_{P_1}}(1,2,1)\\ \overrightarrow{n_{P_2}}(2,-1,0)\\ \overrightarrow{n_{P_3}}(2,1,0)\end{cases}$$

نوجد الفصل المشترك لِـ $P_1$ و $P_3$ :

من $(2)$ نجد:

$$y=2x-1$$

ومن $(3)$ نجد:

$$y=-3x+4$$

وبالتالي:

$$2x-1=-3x+4\Rightarrow 5x=5\Rightarrow x=1$$
$$\Rightarrow y=2(1)-1=1\Rightarrow y=1$$

نفرض $z=t$ ومنه:

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

نعوّض في معادلة المستوي $P_1$ فنجد:

$$1 + 2(1) + t - 5 = 0 \Rightarrow t = 2$$

وبالتالي المستويات $P_1$ و $P_2$ و $P_3$ متقاطعة بنقطة واحدة وهي:

$$(1\,,1\,,2)$$

**55) الجواب:** كرة

**56) الجواب:**

$$I(2{,}0{,}1)\ ,\ J(0,-2{,}3) \Rightarrow \overrightarrow{IJ}(-2\,,-2\,,2)$$
$$P\ :\ x + y - z + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}(1\,,1\,,-1)$$

بما أن $P$ هي معادلة المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$ فإنّ $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{n_P}$ مرتبطان خطيّاً:

$$\frac{-2}{1} = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\Rightarrow J(0\,,-2\,,3) \text{ محققة}$$

**57) الجواب:**

$G_\alpha$ م.أ.م للنقاط:

$$(A,\alpha)\,,\ (B, 1+\alpha^2)\,,\ (C,-\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{G_\alpha A} + (1+\alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B} - \alpha\overrightarrow{G_\alpha C} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow -\alpha\left(\overrightarrow{AG_\alpha} + \overrightarrow{G_\alpha C}\right) + (1+\alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow -\alpha\overrightarrow{AC} = -(1+\alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{G_\alpha B} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$$

**58) الجواب:**

$$dist(O,P) = \frac{|2(1) + (0) - 2(1) - 12|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{12}{\sqrt{9}} = 4$$

$$R = \sqrt{r^2 + dist^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5$$
$$\Rightarrow R = 5$$

**59) الجواب:**

$$\left.\begin{matrix} x = x \\ y = y \\ z = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = t + 1 \\ 1 = \lambda - 1 \Rightarrow \lambda = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

نعوّض في المعادلة الأولى:

$$2 = 1 + 1 \text{ محققة}$$

نعوّض $\lambda$ في $L$:

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 2 - 1 = 1 \\ z = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2{,}1{,}1)$$

**60) الجواب:**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 0$$

وبالتالي $M$ م.أ.م للنقاط:

$$(B,-1)\,,\ (A,1)\,,\ (C,1)$$

**61) الجواب:**

مستوٍ مار من $(1{,}2{,}1)$ وعمودي على:

$$d: \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = -t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{u_d} = (0\,,-1\,,-1)\quad,\quad A(1{,}2{,}1)$$
$$\Rightarrow 0(x-1) - 1(y-2) - 1(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow -y - z + 3 = 0$$
$$\Rightarrow z + y - 3 = 0$$

**62) الجواب:**

$$\begin{matrix} x + y + z = 1 & \ldots L_1 \\ -2y + z = 1 & \ldots L_2 \\ -4y + 14z = -2 & \ldots L_3 \end{matrix}$$

نجري التحويل السطري:

$$-2L_2 + L_3 \longrightarrow L_3'$$

فنحصل على:

$$\begin{matrix} x + y + z = 1 & \ldots L_1 \\ -2y + z = 1 & \ldots L_2 \\ 12z = -4 & \ldots L_3' \end{matrix}$$

من $L_3'$ نجد:

$$z = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow -2y - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 1 = 2 \Rightarrow x = 2$$

وبالتالي المستويات الثلاث تشترك بنقطة واحدة هي:

$$\left(2\,,-\frac{2}{3}\,,-\frac{1}{3}\right)$$

**63) الجواب:**

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \Rightarrow x = y - 1 \\ x + y - 1 = 0 \Rightarrow x = -y + 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y - 1 = -y + 1 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$$
$$\Rightarrow x = 1 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

نفرض $z = t$ ومنه:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$

**64) الجواب:**

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - 3\vec{v}) =$$

$$\|\vec{u}\|^2 - 3\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v} - 3\|\vec{v}\|^2 =$$
$$(5)^2 - 3(-5) - 5 - 3(3)^2 =$$
$$25 + 15 - 5 - 27 =$$
$$40 - 32 = 8$$

**65) الجواب:**

دوران الضلع $[BF]$ من المستطيل $BFHD$ حول $(DH)$ ينتج مخروط محوره:

$$(DH) \longrightarrow (OZ)$$

ومركزه:

$$D(0\,,0\,,0)$$

ونصف قطره $[DB]$ :

$$B(2\,,2\,,0)$$

$$DB = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \quad ; \quad 0 \leq z \leq 2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 8 \quad ; \quad 0 \leq z \leq 2$$

**66) الجواب:**

الاختيار $C$ خاطئ.

**67) الجواب:**

$$A(1,0)\,,\ B(4,0)\,,\ C(5,3)\,,\ D(3,2)\,,\ E(0,1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}(3,0)\,,\ \overrightarrow{AC}(4,3)$$
$$\overrightarrow{AD}(2,2)\,,\ \overrightarrow{AE}(-1,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12 + 0 = 12 \\ b = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 6 + 0 = 6 \\ c = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = -3 + 0 = -3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a + b + c = 12 + 6 - 3 = 15$$

---

## بنوك الشعاعية

$$\mathbf{1-}\quad \mathbf{1)}\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$$

$M$ تنطبق على $F$ .

$$\mathbf{2)}\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$$

$M$ تنطبق على $G$ .

$$\mathbf{3)}\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$$
$$= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$$

$M$ تنطبق على $E$ .

$$\mathbf{4)}\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$$
$$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AZ}$$

$M$ خارج متوازي الأضلاع تقع في $EAGZ$ .

$$\mathbf{5)}\ \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$$
$$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$$

$$2-\quad 1)\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$$
$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AJ}$$

$N$ تقع على $J$.

$$2)\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$$
$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HJ}$$
$$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$$

$N$ تقع على $J$.

$$3)\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$$

$N$ تقع على $I$ .

---

$$2-\quad 1)\ \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AP}$$

حيث $P$ مركز الرباعي $BFGC$ .

$$\mathbf{2)}\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AQ}$$

حيث $Q$ مركز الرباعي $EFGH$ .

$$\mathbf{3)}\ \overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA}\right) + \overrightarrow{BA}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CR}$$

حيث $R$ مركز الرباعي $DHEA$ .

---

$$\mathbf{3-}\quad \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$$
$$= \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$$

توازي.

---

$$2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$$

$$2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB})-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2\,\overrightarrow{AG}+2\,\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$-2\,\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\ \beta=1\ ,\ \alpha=-1$$

---

$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$4\overrightarrow{AM}=8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

$$8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$8(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})+3(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})-4\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$8\overrightarrow{AM}+8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+7\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$-7\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\ \beta=8\ ,\ \alpha=-7\ ,\ \gamma=3$$

---

تأمّل الشكل:

1) $\dfrac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AB}}=\dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow\ 4\overrightarrow{AG}-3(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB})=\vec{0}$$
$$\Rightarrow 4\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\ -\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\ \beta=3\ ,\ \alpha=1$$

2) $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}}=\dfrac{2}{5}$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})-5\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\ -3\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\ \beta=2\ ,\ \alpha=3$$

3) نلاحظ: $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\ \beta=-1\ ,\ \alpha=1\ ,\ \gamma=1$$

4) نلاحظ: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AI}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IF}=2\overrightarrow{AI}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}+0\overrightarrow{IA}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\ \beta=1\ ,\ \alpha=0\ ,\ \gamma=1$$

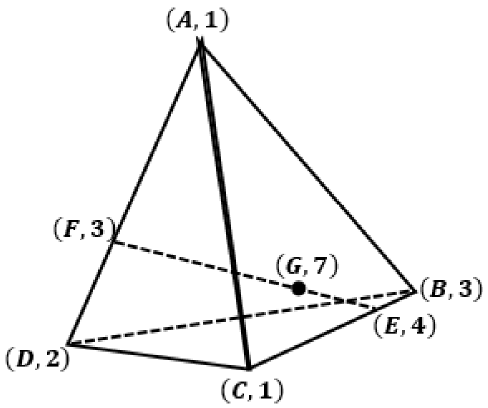
ثقل مركز الأبعاد $(A,1),(B,3)$ يساوي 4 .

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,0),(B,3)$ يقع على $B$ .

مركز الأبعاد $(B,10),(A,10)$ يقع في منتصف $[AB]$ .

---

$\boxed{\begin{matrix}21\\43\end{matrix}}$ :




$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\ ,\quad \overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

من العلاقات:

$(E,4)$ مركز لـ $(C,1)$ , $(B,3)$ .

$(F,3)$ مركز لـ $(D,2)$ , $(A,1)$ .

$(G,7)$ مركز لـ $(F,3)$ , $(E,4)$ .

$$\overrightarrow{EG}=\frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$

وبالتالي:

$(G,7)$ مركز لـ $(D,2),(C,1),(B,3),(A,1)$

---

**تدرّب (1) صفحة 31:**

من الشكل:

$(K,3)$ م.أ.م لـ $(D,1),(A,2)$ .

$(I,2)$ م.أ.م لـ $(C,1),(B,1)$ .

$(G,5)$ م.أ.م لـ $(I,3),(K,2)$ .

لكن نلاحظ تناقض لذلك يجب تعديل أثقال النقاط $I$ و $K$ حيثُ:

نضرب $I$ بـ $\frac{2}{3}$ ونضرب $K$ بـ $\frac{2}{3}$ لنصل إلى:

$(I,3)$ و $(K,2)$

وهذا ما يتفّق مع $G$ .

م.أ.م لـلنقاط $(I,3)$:

$$\left(C,\frac{3}{2}\right),\ \left(B,\frac{3}{2}\right)$$

م.أ.م للنقاط $(K,2)$:

$$\left(D,\frac{3}{2}\right),\left(A,\frac{4}{3}\right)$$

ومنه:

$$a=\frac{4}{3}\ ,\quad b=\frac{3}{2}\ ,\ c=\frac{3}{2}\ ,\ d=\frac{3}{2}$$

---

## تمرينات ومسائل

**المسألة الأولى صفحة 35 :**

1) $$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

2) $$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{BD}$$
$$+$$
$$2\,\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$$

3) $$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\,\overrightarrow{OI}\quad\dots(1)$$
$$l_1=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}=2\,\overrightarrow{OI}=l_2$$
$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\,\overrightarrow{OJ}\ \dots(2)$$
$$l_1=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JD}=2\,\overrightarrow{OJ}=l_2$$

بجمع $(2)$ و$(1)$ نجد:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

4) $$\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\qquad\dots(1)$$
$$l_1=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$
$$\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\qquad\dots.(2)$$
$$l_1=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

من $(1)$ و$(2)$ نجد:

$$\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{LJ}$$

وبالتالي: $IKJL$ متوازي أضلاع.

---

**المسألة الثانية صفحة 35 :**

1) $$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

2) $$\overrightarrow{DJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$

3) $$\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$$

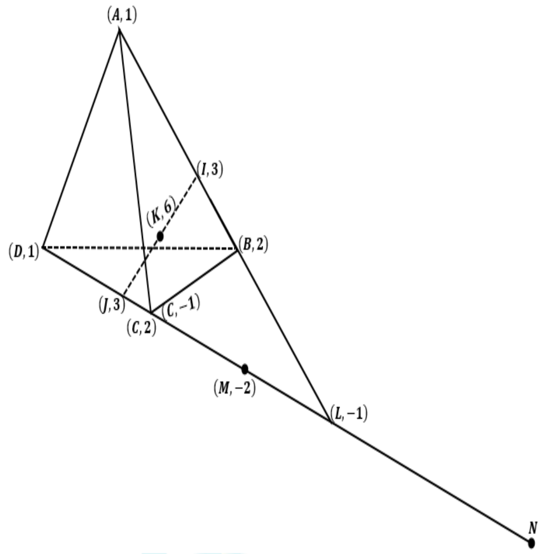
$K$ مركز لـ $(I,3)\ ,\ (J,3)$ .

4) $$\overrightarrow{AL}=\frac{-2}{-1}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$$

5) $$\overrightarrow{LM}=\frac{-1}{-2}\overrightarrow{LC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{LC}$$

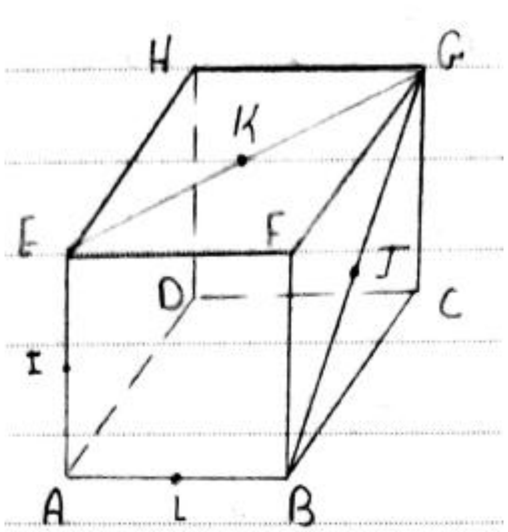
6) $$\overrightarrow{DN}=\frac{-2}{-1}\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DM}$$

$N$ مركز لـ $(D,1)\ ,\ (M,-2)$ .




---

$\boxed{\frac{25}{44}}$



$M$ مركز لـ $(E,1)\,,(G,1)\,,(B,1)\,,(A,1)$

**1)** $(J,2)$ مركز لـ $(B,1)\,,(G,1)$

$(I,2)$ مركز لـ $(A,1)\,,(E,1)$

$(M,4)$ مركز لـ $(J,2)\,,(I,2)$

وبالتالي النقاط $M\,,I\,,J$ تقع على استقامة واحدة.

**2)** $(L,2)$ مركز لـ $(B,1)\,,(A,1)$

$(K,2)$ مركز لـ $(G,1)\,,(E,1)$

$(M,4)$ مركز لـ $(L,2)\,,(K,2)$

وبالتالي النقاط $M\,,K\,,L$ تقع على استقامة واحدة.

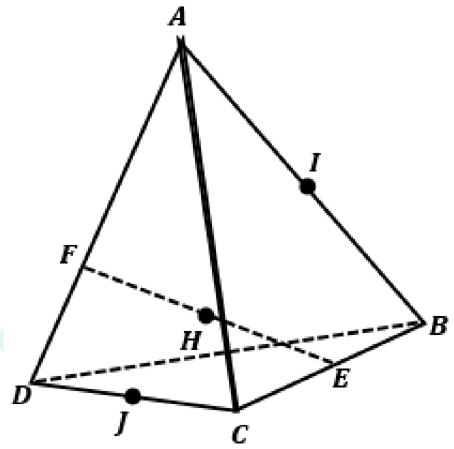
**3)** $[IJ]$ و $[KL]$ متناصفان في $M$

ومنه $M\,,K\,,L\,,I\,,J$ تقع في مستوٍ واحد.

وبالتالي $ILJK$ متوازي أضلاع.

---

$\boxed{\frac{1}{94}}$




**1)** $\overrightarrow{AE} = \alpha\,\overrightarrow{AD}$

وبالتالي: $(E,1)$ مركز لـ $(D,\alpha)\,,(A,1-\alpha)$

$\overrightarrow{BF} = \alpha\,\overrightarrow{BC}$

وبالتالي: $(F,1)$ مركز لـ $(C,\alpha)\,,(B,1-\alpha)$.

**2)** مما سبق نستنتج أنّ: $(H,2)$ مركز لـ:

$(C,1),(D,1),(A,1-\alpha)\,,(B,1-\alpha)$

**3)** $(I,2-2\alpha)$ مركز لـ:

$(A,1-\alpha)\,,(B,1-\alpha)$

$(J,2\alpha)$ مركز لـ:

$(C,\alpha)\,,(D,\alpha)$

وبالتالي $(H,2)$ مركز لـ:

$(J,2\alpha)\,,\ (I,2-2\alpha)$

ومنه فإنّ $I\,,J\,,H$ تقع على استقامة واحدة.

---

$\boxed{\frac{2}{94}}$

**1)** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$(M,3)$ مركز لـ $(B,1)\,,(C,1)\,,(D,1)$

ومنه $M\,,C\,,D\,,B$ تقع في مستوي واحد.

**2)** $\overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$

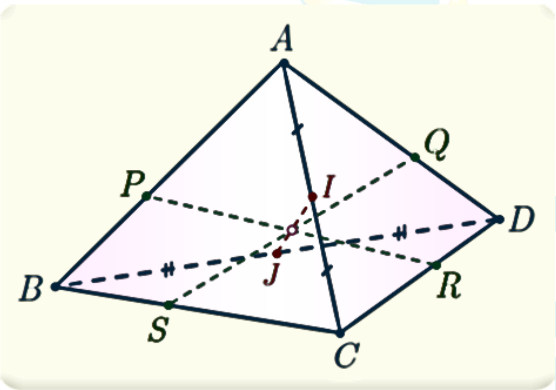
$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

ومنه $(M,4)$ مركز لـ:

$(B,1),(D,2)\,,(C,1)$

---

$\boxed{\frac{6}{95}}$




بحث أول:

$\overrightarrow{AQ} = \alpha\,\overrightarrow{AD}$

وبالتالي $(Q,1)$ مركز لـ:

$(A,1-\alpha)\,,\ (D,\alpha)$

$\overrightarrow{AP} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$

وبالتالي $(P,1)$ مركز لـ:

$(A,1-\alpha)\,,\ (B,\alpha)$

$\overrightarrow{CS} = \alpha\,\overrightarrow{CB}$

وبالتالي $(S,1)$ مركز لـ:

$(C,1-\alpha)\,,\ (B,\alpha)$

$\overrightarrow{CR} = \alpha\,\overrightarrow{CD}$

وبالتالي $(R,1)$ مركز لـ:

$(C,1-\alpha)\,,\ (D,\alpha)$

$(I,2-2\alpha)$ مركز لـ:

" منتصف " $(C,1-\alpha),(A,1-\alpha)$

$(J,2\alpha)$ مركز لـ:

" منتصف " $(D,\alpha),(B,\alpha)$

$(G,2)$ مركز لـ:

$(D,\alpha),(C,1-\alpha),(B,\alpha),(A,1-\alpha)$

لأنّ:

$(G,2)$ مركز لـ $(P,1),\ (R,1)$

$(G,2)$ مركز لـ $(Q,1),\ (S,1)$

$(G,2)$ مركز لـ $(J,2\alpha),\ (I,2-2\alpha)$

مما سبق نستنتج أنّ:

$(QS),\ (PR),\ (IJ)$

تلتقي في نقطة واحدة.

---

**1/80**

**1)** $M$ مركز لـ $(B,1),\ (A,-2)$

$$\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{-1}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow t=-1$$

**2)** $M$ مركز لـ $(B,3),\ (A,2)$

$$\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow t=\frac{3}{5}$$

---

**2/80**

**1)** $M$ مركز لـ $(A,5),\ (B,2)$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$$

**2)** $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$M$ مركز أبعاد لـ $(A,3),\ (B,-1)$

**3)** $\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}$

**طريقة 1:**

$M$ مركز أبعاد لـ $(A,4),\ (B,-3)$

**طريقة ثانية:**

$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

$M$ مركز أبعاد لـ $(A,4),\ (B,-3)$

---

**3/81**


$C$ مركز لـ $(A,2),\ (B,-5)$

$$\overrightarrow{AC}=\frac{-5}{-3}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$$

$A$ مركز لـ $(C,-3),\ (B,5)$

$$\overrightarrow{BA}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$$

$B$ مركز لـ $(C,3),\ (A,2)$

$$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$


$C$ مركز لـ $(A,6),\ (B,-4)$

$$\overrightarrow{AC}=\frac{-4}{2}\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AB}$$

$A$ مركز لـ $(C,2),\ (B,4)$

$$\overrightarrow{BA}=\frac{2}{6}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$B$ مركز لـ $(A,-6),\ (C,2)$

$$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{-4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

---

**4/81**

**1)** $M$ مركز لـ $(C,1),(B,1),(A,-1)$

$$\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1}\overrightarrow{AC}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

**2)** $M$ مركز لـ $(C,2),(B,1),(A,3)$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$$

---

**4/81**

**1)** $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$M$ مركز أبعاد لـ:

$(A,0),(B,2),(C,-1)$

2) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

$M$ مركز أبعاد لـ:

$(A,1)\,,(B,1)\,,(C,-1)$

3) $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

$M$ مركز أبعاد لـ:

$(A,3)\,,(B,2)\,,(C,-4)$

4) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ط1

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$M$ مركز أبعاد لـ:

$(A,1)\,,(B,2)\,,(C,1)$

**ط2:**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

---

$\boxed{\frac{6}{81}}$ $(B',2)$ مركز لـ $(A,1)$ , $(C,1)$

$(I,4)$ مركز لـ $(B',2)$ , $(B,2)$

وبالتالي:

$(I,4)$ مركز لـ $(B,2)\,,(A,1)\,,(C,1)$

$\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$1\,\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Longrightarrow\ \lambda = 2$

---

$\boxed{\frac{7}{81}}$ $(I,2)$ مركز لـ $(B,1)$ , $(C,1)$

$(J,4)$ مركز لـ $(I,2)$ , $(D,2)$

$(K,8)$ مركز لـ $(J,4)$ , $(A,4)$

وبالتالي:

$(K,8)$ مركز لـ: $(B,1)\,,(A,4)\,,(C,1),(D,2)$

---

$\boxed{\frac{8}{81}}$ $G$ مركز لـ: **1)**

$(D,3)$ , $(C,1)$ , $(B,1),(A,1)$

$(K,3)$ مركز أبعاد لـ:

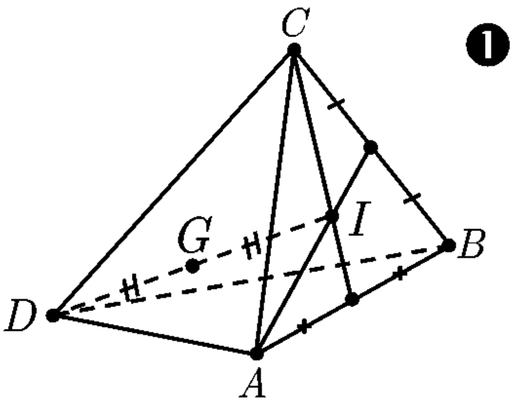
$(C,1)\ ,(B,1)\,,(A,1)$

وبالتالي:

$(G,6)$ مركز لـ:

$(D,3)\,,(K,3)$

$G$ منتصف $[DK]$




$G$ مركز لـ: **2)**

$(D,-2)\,,(C,-1)\,,(B,2)\,,(A,-1)$

$(I,-2)$ مركز لـ:

$(C,-1)\,,(A,-1)$

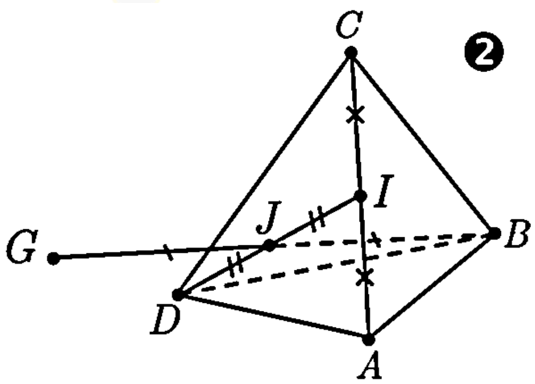
$(J,-4)$ مركز لـ:

$(D,-2)\,,(I,-2)$

$(G,-2)$ مركز لـ:

$(B,2)\,,(J,-4)$

$\overrightarrow{JG} = -1\,\overrightarrow{JB}$




$G$ مركز لـ: **3)**

$(D,6)\,,(C,3)\,,(B,2)\,,(A,1)$

$(I,3)$ مركز لـ:

$(A,1)\,,(B,2)$

وبالتالي:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$(J,6)$ مركز لـ: $(C,3)$ , $(I,3)$ "منتصف"

$(G,12)$ مركز لـ:

$(J,6)$ , $(D,6)$

وبالتالي $G$ مركز أبعاد لـ:

$(A,1)$ , $(B,2)$ , $(C,3)$ , $(D,6)$

❸