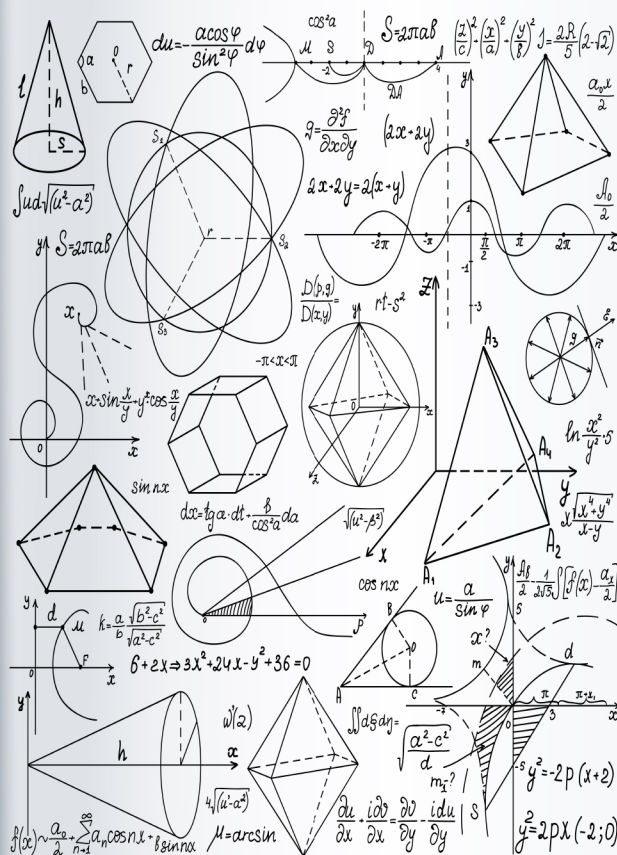
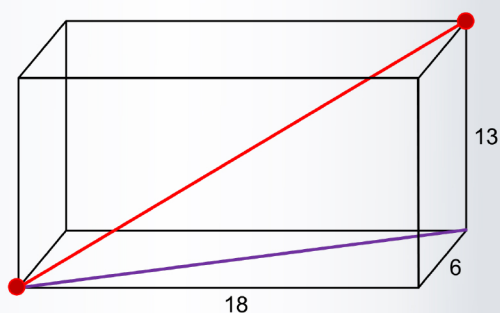


كشف الرياضيات

الأشقة

find the length of the space diagonal lengths are all in cm.





الدرس الأول

مدخل إلى الأشعة

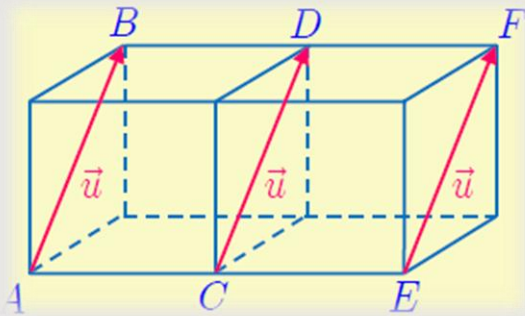


Scan me!

كل يوم
فرصة
جديدة
لتعلم
شيء جديد
واكتساب
مهارات
جديدة.

نفس المنحى و الطويلة ولكن بجهتين متعاكستين

السؤال (1)



أكمل ما يلي:

■ **مفهوم تساوي شعاعين:** هو مفهوم هام حيث لا يشترط الانطباق بين الشعاعين وإنما فقط تساوي المنحنيين والجهتين والطوليتين
فمثلاً لو تأملنا متوازي الأضلاع المرسوم جانباً
 $ABDC$ لوجدنا أن

ملاحظة 1: يمكن تغير ترتيب الأشعة للحصول

على تعاقب

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GE}$$

ملاحظة 2: يمكن استخدام علاقة شال بطريقة

عكسية (زرع نقطة):

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

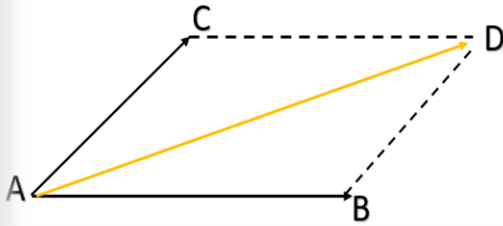
وتعمم:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$$

• قاعدة متوازي الأضلاع (تحتاج للرسم)

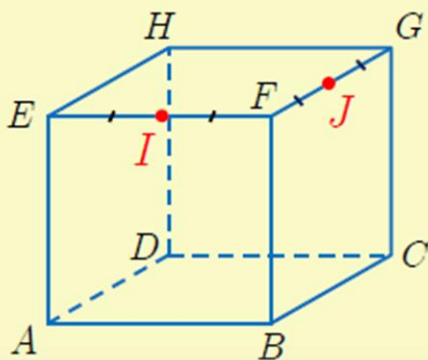
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

حيث D النقطة التي تجعل $ABDC$ متوازي أضلاع
($\overrightarrow{AD}$ هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على
الشعاعين).



التمرين (1)

في الشكل المجاور مكعب



ملاحظة: عند اللزوم يمكن استبدال أي شعاع

بأي شعاع آخر يساويه حسب المثال السابق

■ جمع الأشعة شعاعياً:

• قاعدة شال (لا تحتاج للرسم)

تستخدم قاعدة شال لجمع الأشعة المتعاقبة
(نهاية الشعاع الأول تنطبق على بداية الشعاع
الثاني) مثلاً $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ عندئذ يكون:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ويمكن تعميمها:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

أولاً: في كل من الحالات الآتية بين فيما إذا كانت M تنطبق أم لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{DH} \quad -1$$

$$\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD} \quad -2$$

$$\vec{AM} = \vec{FE} + \vec{DG} \quad -3$$

$$\vec{AM} = \vec{AG} + \vec{BF} \quad -4$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AG} + \vec{HB}) \quad -5$$

ثالثاً: في كل من الحالات الآتية عبر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك بدلالة نقطتين من الشكل حصراً

$$\vec{AJ} + \vec{BA} \quad -1$$

$$\vec{BF} + \vec{EC} \quad -2$$

$$\vec{AE} + \vec{AF} \quad -3$$

$$\frac{1}{2}\vec{EG} + \vec{JF} \quad -4$$

ثانياً: في كل من الحالات الآتية حدد موضع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة:

$$\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FJ} \quad -1$$

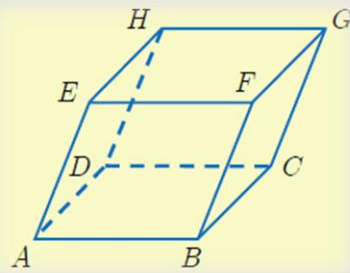
$$\vec{AN} = \vec{AE} + \vec{BC} + \vec{HJ} \quad -2$$

$$\vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CF} + \vec{GH} + \vec{EI} \quad -3$$



[illegible]

في الشكل المجاور متوازي سطوح



وَضْعُ النِّقَاطِ P, Q, R بِحَيْثُ يَكُونُ:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \quad -1$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad -2$$

$$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad -3$$

[illegible]

نقول عن الشعاعين $\vec{v}, \vec{u}$ إنهما مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان أحدهما ينتج عن الآخر بضربه بعدد ثابت غير معدوم k أي:

$$\vec{u} = k \vec{v}$$

- **التفسير الهندسي:**

قولنا إن الشعاعين $\vec{v}$, $\vec{u}$ مرتبطان خطياً. هذا يعني أن لهما نفس المنحى

أى: الارتباط الخطى يعنى توازى.



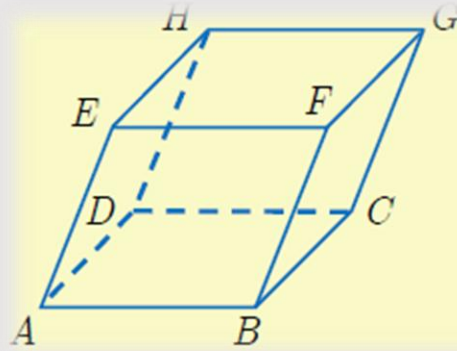
ملاحظة هامة: إذا كانت الأشعة $\vec{AB}, \vec{AC}$

مرتبطة خطياً قلنا أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة.

أي إذا كان الشعاعان المرتبطان مشتركان بنقطة كانت النقاط الثلاثة على استقامة واحدة.

مثال (1)

في الشكل المجاور متوازي سطوح:



1- عين شعاعاً يساوي $\vec{DC} + \vec{BD} + \vec{BF}$

ثم أثبت أن هذا الشعاع مرتبط خطياً بالشعاع $\vec{AH}$

2- أوجد شعاعاً يساوي $\vec{FE} + \vec{FG} + \vec{FB}$ ثم

أثبت أن هذا الشعاع مرتبط خطياً بالشعاع $\vec{DF}$

الحل

السؤال (1)

في الشكل المجاور مكعب و I منتصف $[EB]$ و J

منتصف $[FG]$

والمطلوب إثبات أن الأشعة

$$\vec{EF}, \vec{BG}, \vec{IJ}$$

مرتبطة خطياً.

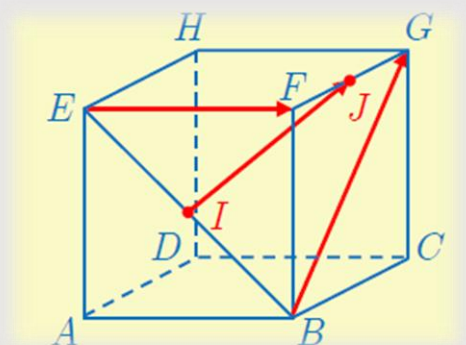
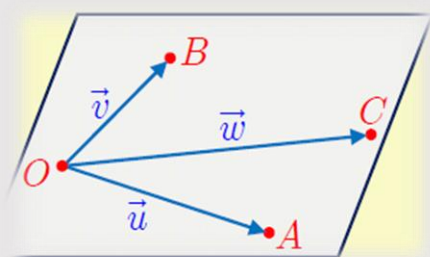
إذا كان $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاث أشعة مرتبطة خطياً بحيث:

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

عندئذٍ يوجد نقطة 0 في الفراغ تجعل النقاط

O, A, B, C فی مستو واحد بحیث:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v} \quad , \quad \overrightarrow{OC} = \vec{w}$$



الحل

- فوائد هامة للارتباط الخطى لثلاثة أشعة:

- 1- إثبات وقوع 4 نقاط في مستوي واحد:
- نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ غير مرتبطين
 - نثبت وجود عددين حقيقيين α, β بحيث :

$$\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$$
- 2- إثبات أن المستقيم (ED) يوازي المستوي (ABC) :
- (i) نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً
- (ii) نثبت وجود عددين حقيقيين α, β يحققان:
- $$\overrightarrow{ED} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

السؤال (2)

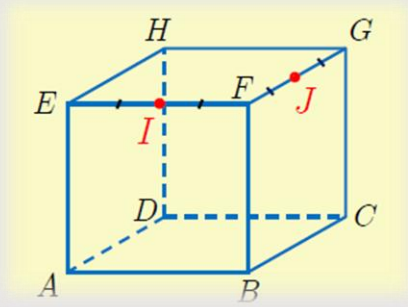
A, B, C ثلاث نقاط متمایزة فی الفراغ، أتكون

الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطياً

السؤال (4)

مكعب $ABCDEFGH$. I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$

- (1) أتنتمي النقطة J إلى المستوي (ABI) ؟
- (2) أتنفع الأشعة $\vec{AI}$, $\vec{AJ}$, $\vec{AB}$ في مستوي واحد



السؤال (3)

A, B, C ثلاث نقاط متمايزة في الفراغ . E نقطة تحقق $\vec{BE} = 4\vec{BC}$ و F نقطة تحقق $\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AE}$. أتنفع النقاط A, B, C, E, F في مستوي واحد .



الدرس الثاني

مركز الأبعاد المتناسبة

الدراسة
ليست عبئاً
بل هي
متعة
اكتشاف
واكتشاف
الذات.



نميز الحالات الآتية في م أ م:

ملاحظة: م أ م = مركز الأبعاد المتناسبة ولا

تكتب بهاد الشكل بالامتدادان ^ _ ^

الحالة الأولى: الانطلاق من علاقة شعاعية:

(1) جد العددين α و β ليكون G م أ م للنقاط

(A, α) و (B, β) انطلاقاً من العلاقة:

$$2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2) عين الاعداد α و β و γ لتكون M م أ م

لنقاط المحققة للعلاقة:

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....



علاقة الوجود "الأم"

نقول إن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين
المثقلتين (A, α) و (B, β) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

حيث $\alpha + \beta \neq 0$

ويعمم الكلام السابق لأكثر من نقطتين أي G
مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A, α) و (B, β) و
 (C, γ) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

وحيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

بل أكثر من ذلك:

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

(D, δ) و (C, γ) و (B, β) و (A, α) إذا كان الشرط
محقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

وتسمى العلاقة السابقة:

علاقة الوجود (العلاقة الأم) لأنه عندما يكون
 $\alpha + \beta = 0$ عندئذ لا يوجد م أ م للنقاط
 (A, α) و (B, β) .

• **نستخدم علاقة الوجود لتحديد أو تعيين α و β و γ ...**

(1) نصلح شكل العلاقة لجعل الطرف الثاني $\vec{0}$
ونجعل البدايات كلها م أ م.

(2) نقارن مع القانون

(3) نختبر الشرط ($\alpha + \beta + \dots \neq 0$)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(3)



.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظات:

1- G م أ م لنقطتين من ثقيلتين مختلفتين
بالإشارة فإن G تقع خارج القطعة
وبالعكس

2- خاصة التجانس (هامة جداً)

G م أ م $\perp (A, \alpha)$ و (B, β) :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

نضرب بـ $k \neq 0$:

$$(k\alpha) \overrightarrow{GA} + (k\beta) \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

G م أ م $\perp (A, k\alpha)$ و $(B, k\beta)$.

.....

.....

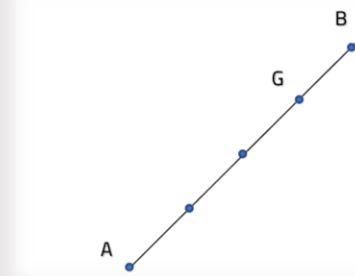
.....

.....

.....

الحالة الثانية: الانطلاق من شكل:

1) عين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A, α) و (B, β) :



.....

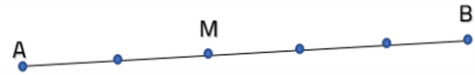
.....

.....

.....

.....

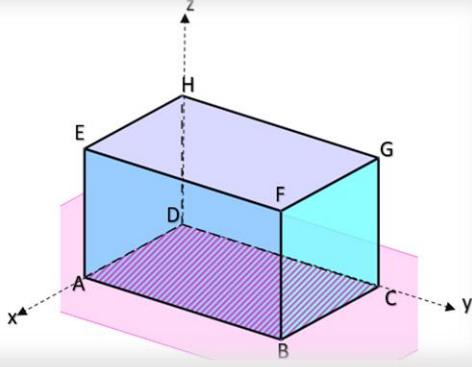
2) عين α و β ليكون M م أ م للنقاط (A, α) و (B, β) :



.....

.....

.....



عين α و β و γ ليكون D م أ م للنقاط
 $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

الحل

.....

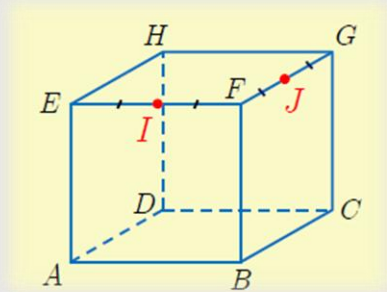
.....

.....

.....

.....

(2) نتأمل في الشكل المجاور مكعباً



عين α و β و γ ليكون I م أ م للنقاط
 $(A, \alpha), (F, \beta), (E, \gamma)$

الحل

.....

.....

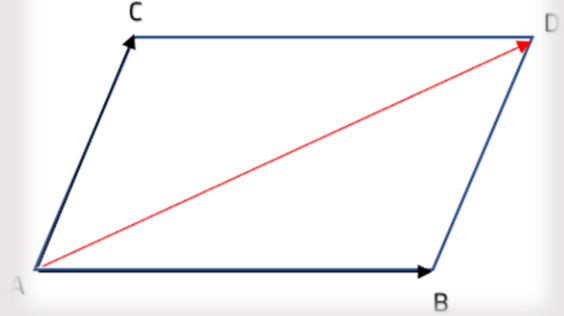
.....

.....

تذكرة:

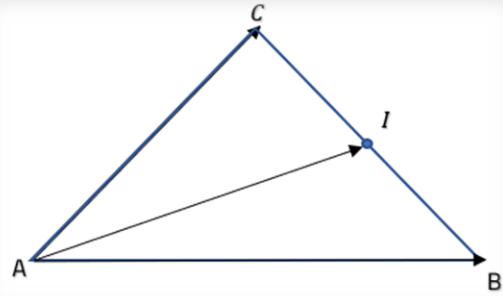
(1) علاقة متوازي الأضلاع:

$$AD = AB + AC$$



(2) علاقة المتوسط في المثلث:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$$



(3) علاقة الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

أمثلة

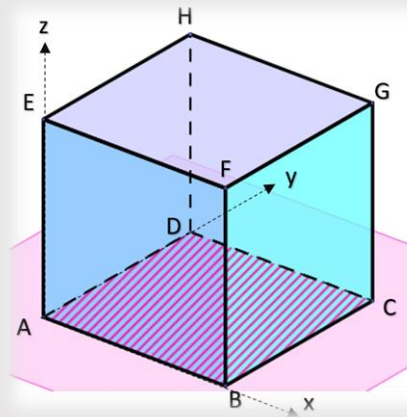
(1) نتأمل في الشكل المجاور متوازي

مستطيلات ABCDEFGH

ملاحظة:

عند اختفاء أحد النقاط المطلوب تثقيها
نكتبها في العلاقة بأمثال صفرية.

3) نتأمل جانباً مكعباً طول حرفه 3



نعرف معلماً متجانساً:

$$\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$$

وفيه النقطة $K(5, 2, -4)$

1- جد إحداثيات الرؤوس.

2- α و β و γ ليكون K م أ م للنقاط

$(E, \alpha), (B, \beta), (D, \gamma)$ علماً أن K تقع في

المستوي (EBD) .

- G م أ م للنقطتين $(A, \alpha), (B, \beta)$ عندها

نستخدم علاقة الانشاء وهي:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

مثال (3)

عين G م A م للنقطتين $(A, 1), (B, 3)$:

This image shows a full page of a notebook or worksheet template. It consists of a series of evenly spaced, horizontal dashed lines running across the width of the page. The background is plain white, and there are no margins, text, or other markings present.

إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة

أي تحديد موضع م أ م.

- G م أ م لنقطتين لهما نفس الثقل عندئذ G في منتصف القطعة المستقيمة.
- G م أ م لثلاثة نقاط لهما نفس الثقل عندئذ G مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات).

مثال (1)

عين G م أ م للنقاط $(A, 2)$ $(B, 2)$ $(C, 2)$.

الحل

[illegible]

مثال (2)

عين G م A م للنقاط $(A, 0)$ $(B, 3)$.

الحل

[illegible]

- حسب الخاصة التجميعية G م أ م ل $\alpha + I$ $(I, \alpha + I)$ β و (C, γ) .

مثال (1)

جد G م أ م للنقاط $(A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 3)$:

ارسم معنا:

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

عين G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.

ارسم معنا :

مثال (4)

عين M م أ م للنقاط $(A, 5), (B, -2)$:

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (5)

عين M م أ م للنقاط $(A, 10), (B, 10)$:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

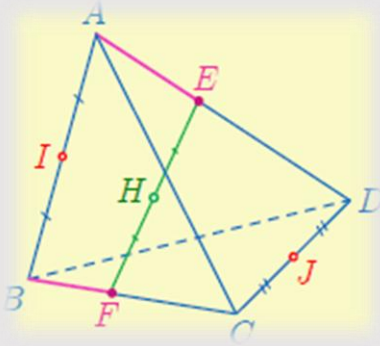
الخاصة التجميعية

إذا كان G م أ م للنقاط $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$:

- نفرض I م أ م ل A و B ويكون:
- 1- موضع I : حسب ما تعلمنا سابقاً
- 2- ثقل I : هو $\alpha + \beta$



التمرين (1)



I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ ولدينا

النقطتان E و F تحققان:

$$\overrightarrow{AE} = a \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BF} = a \cdot \overrightarrow{BC}$$

و H منتصف $[EF]$ والمطلوب إثبات أن H و I و J

على استقامة واحدة.

الحل

الحل

ملاحظة هامة:

وجدنا أنه إذا كان G م أ م للنقطتين

$(A, \alpha), (B, \beta)$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

حيث $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ عدد حقيقي أي يمكننا اعتباره k :

$$\overrightarrow{AG} = k \overrightarrow{AB}$$

وهذا يعني أن A و G و B على استقامة واحدة.

وهذا يعني أنه يمكن إثبات أن ثلاث نقاط على

استقامة واحدة بإثبات أن إحداها م أ م

لنقطتين الباقيتين.

مثال

في معلم متجانس تتأمل النقاط :

$$A(1,1,-2), B(2,3,-2), C(4,0,-1)$$

و ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A, 2), (B, 2), (C, -1)$$

1- جد إحداثيات G

2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها G و

نصف قطرها $\sqrt{2}$

التمرين (2)

$ABCD$ رباعي وجوه ويوجد:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

أثبت أن G م أ م للنقاط

$(A, 1), (B, 3), (C, 1), (D, 2)$ يقع على $[EF]$ ثم

عين G .

الحل

خاصة الاختزال

إذا كان G م أ م للنقاط $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$$

و شرط تطبيق الاختزال: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

• أما إذا كانت $\alpha + \beta + \gamma = 0$ عندئذ يمكن

إخفاء M بإصالح للعلاقة الشعاعية.

إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة

إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$$

فإن إحداثيات مركز الثقل :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

مثال (1)

اختزل العلاقات الآتية:

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \quad (1)$$

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \quad (3)$$

تذكر: خاصية التجانس

مثال (2)

بفرض G مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A, 3)$ و $(B, 2)$ أكمل العبارات الآتية:

(1) G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(A, 6), (B, \dots)$

(2) G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(A, \dots), (B, 1)$

(3) G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(A, 2), (B, \dots)$

مسائل وتمارين

²¹/₄₃ نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ و E و F تحققان:

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

أثبت أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

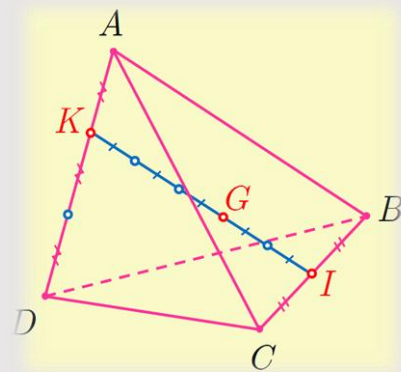
$(A, 1), (B, 3), (C, 1), (D, 2)$

يقع على $[EF]$ ثم عين G .

الحل

تدرب ① ص 31

بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور.



عَيِّن a و b و c و d ما يأتي:

1. مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

(A, a) , (D, d)

2. مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

(C, c) , (B, b)

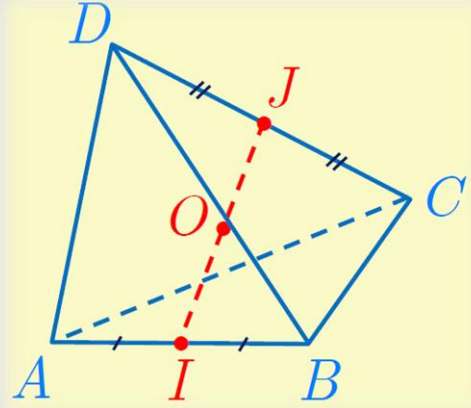
3. مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

المثقلة:

(A, a) , (B, b) , (C, c) , (D, d)

السؤال الأول ص 35

$ABCD$ رباعي وجوه. فيه I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ و O منتصف $[IJ]$.



1. املأ الفراغ:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \dots + \overrightarrow{CD}$$

و استنتج أن:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

2. بسط كلًا من $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$ و $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$

و استنتج أن:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$$

3. لماذا $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$ ؟

استنتج أن:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

4. لتكن K منتصف $[AD]$ و L منتصف $[BC]$.

أثبت أن:

$$\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \text{ و } \overrightarrow{LJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \text{ و استنتج أن:}$$

$IKJL$ متوازي أضلاع.

السؤال الثاني ص 35

$ABCD$ رباعي وجوه. وضَّع على شكل النقاط

الآتية:

1. I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$(A, 1)$, $(B, 2)$

2. J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$(D, 1)$, $(C, 2)$

3. K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(D, 1)$, $(C, 2)$, $(B, 2)$, $(A, 1)$

4. L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$(B, -2)$, $(A, 1)$

5. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(C, -1)$, $(B, -2)$, $(A, 1)$

6. N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(D, 1)$, $(C, -1)$, $(B, -2)$, $(A, 1)$



السؤال 25 ص 44

نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ ، و النقاط I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ بالترتيب، و النقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

 $(A, 1), (B, 1), (G, 1), (E, 1)$

1. أثبت أن M تنتمي إلى $[I]$ و عيّن موضعها على هذه القطعة.

2. أثبت أن M تنتمي إلى $[KL]$ و عيّن موضعها على هذه القطعة.

3. استنتج أن I و J و K و L تقع في مستوي واحد
و عيّن طبيعة الرباعي $ILJK$.

This image shows a full page of primary-ruled notebook paper. It features multiple sets of horizontal dashed lines spaced evenly down the page, providing guides for letter height and placement. At the bottom left corner, there is a small, simple illustration of a house with a red roof and a chimney. The rest of the page is white and contains no other markings or text.[illegible]

السؤال الأول ص 94

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه، و ليكن α عدداً حقيقياً، و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$.
النقطتان E و F معرّفتان بالعلاقين $\vec{AE} = \alpha \vec{AD}$ و $\vec{BF} = \alpha \vec{BC}$.
و أخيراً H هي منتصف $[EF]$. المطلوب:
1. تحقق أنّ E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1 - \alpha)$ و (D, α) ، و كذلك أنّ النقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B, 1 - \alpha)$ و (C, α) .
2. أثبت أنّ النقطة H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:
 $(A, 1 - \alpha)$, $(B, 1 - \alpha)$, (C, α) , (D, α)
b. استنتج وقوع النقاط I و J و H على استقامة واحدة.



السؤال الثاني ص 94

$ABCD$ رباعي وجوه. أثبت في كل من الحالتين الآتيتين أن النقاط M و B و C و D تقع في مستوي واحد، ثم وُضع النقطة M .

$$1. \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{DA}$$

$$2. \vec{MB} + 2\vec{AD} = 2\vec{AM} - \vec{MC}$$

استقامة واحدة.

b . أثبت أن النقاط G و K و L تقع على

استقامة واحدة.

2. استنتج وقوع النقاط I و J و K و L في مستوي واحد.

السؤال السابع ص 96

نتأمل رباعي وجوه $ABCD$. K نقطة من $[AB]$

تحقق $AK = \frac{1}{3} AB$ و L نقطة من القطعة

المستقيمة $[CD]$ تحقق $CL = \frac{2}{3} CD$ و أخيراً I

هي منتصف $[AD]$ ، و J هي منتصف $[BC]$.

نعرف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 2)$

1. a . أثبت أن النقاط G و I و J تقع على



تدرب ص 81 + 80

السؤال الأول

النقطتان A و B نقطتان مختلفتان. في الحالات

الآتية عيّن t التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

1. M مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين:

$$(B, 1), (A, -2)$$

2. M مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين:

$$(A, 2), (B, 3)$$

السؤال الثاني

أعط في الحالات الآتية α و β لتكون M مركز

الأبعاد متناسبة للنقطتين:

$$(A, \alpha), (B, \beta)$$

$$1. \overrightarrow{AM} = \frac{2}{7} \overrightarrow{AB}$$

$$2. 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$



$$3. \quad \overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

السؤال الرابع

نتأمل مثلثاً ABC في كل حالة مما يأتي، جد عددين x و y بحيث: $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

1. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A, -1), (B, 1), (C, 1)$

2. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A, 3), (B, 1), (C, 2)$

السؤال الثالث

في الشكل الآتي التدرجات متساوية. عبّر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الآخرين.



السؤال الخامس

نتأمل مثلثاً ABC في كل حالة مما يأتي، جد الأعداد α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: (A, α) , (B, β) , (C, γ) .

$$1. \quad \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$2. \quad \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$$

$$3. \quad \overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$$

$$4. \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



السؤال السابع

[illegible]

السؤال السادس

Diagram illustrating the construction of the centroid I of a triangle ABC . The triangle has vertices A , B , and C . A line segment $B'G$ is drawn, where B' is the midpoint of AC and G is the midpoint of AB . The line segment $B'G$ is parallel to BC . The line segment CG is drawn, and the intersection of $B'G$ and CG is labeled I , which is the centroid of the triangle.

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines spaced evenly down the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no other markings or text present.

السؤال الثامن

$ABCD$ رباعي وجوه. استعمل الخاصة التجميعية

لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:

1. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 3)$$

2. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A, -1), (B, 2), (C, -1), (D, -2)$$

3. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

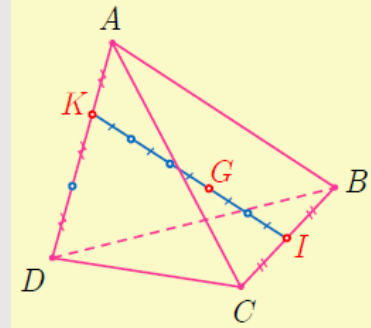
$$(A, 1), (B, 2), (C, 3), (D, 6)$$



مسائل عامة في مركز الأبعاد المتناسقة:

1/ بالاستفادة من المعلومات في الشكل عين

الأعداد a و b و c و d ليتحقق ما يلي:



(1) م أ م للنقطتين (A, a) , (D, d) .

(2) م أ م للنقطتين (B, b) , (C, c) .

(3) م أ م للنقاط:

(A, a) , (B, b) , (C, c) , (D, d)

الحل

4/ ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. و k عدد حقيقي

غير معدوم ولا يساوي 1، ولتكن I و J و K و L

النقاط المعرفة وفق:

$$\vec{AI} = k\vec{AB}, \vec{AJ} = k\vec{AD}$$

$$\vec{CK} = k\vec{CD}, \vec{CL} = k\vec{CB}$$

(1) أثبت أن:

$$\vec{IJ} = k\vec{BD} = \vec{LK}$$

واستنتج أن النقاط I و J و K و L تقع في

مستوي واحد.

(2) ما طبيعة الرباعي $IJKL$ ؟

الحل

(5) م أ م ل $(A, 1), (B, -2), (C, -1)$ فحسب

الخاصة التجميعية:

م أ م ل للنقاط $(A, 1), (B, -2), (C, -1), (D, 1)$

(6) $\frac{10}{41}$ م أ م ل A و B و C ثلاث نقاط ليست على

استقامة واحدة و E و D تحققان:

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}, 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$$

(1) أثبت أن A و B و C تقع في مستو واحد.

(2) بفرض I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$

أثبت أن A و J و I تقع على استقامة واحدة.

$ABCD$ رباعي وجوه: $\frac{2}{35}$

(1) م أ م ل للنقاط $(B, 2), I(A, 1)$.

(2) م أ م ل للنقاط $(D, 1), (C, 2)$.

(3) م أ م ل للنقاط:

$(A, 1), (B, 2), (C, 2), (D, 1)$

(4) م أ م ل $(A, 1)$ و $(B, -2)$:



(3) استنتج أن I و J و K و L تقع في مستو واحد، وماهي طبيعة $ILJK$ ؟

الحل

الحل

25
44
ر: $ABCDEFGH$ مكعب I و J و K و L

منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ و M م أ

م ل $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(G, 1)$ والمطلوب:

(1) أثبت أن M تنتمي إلى $[IJ]$ وعين

موضعها.

(2) أثبت أن M تنتمي إلى $[KL]$ وعين

موضعها.



مثال

$ABCD$ رباعي وجوه و K و I منتصفا الحرفين

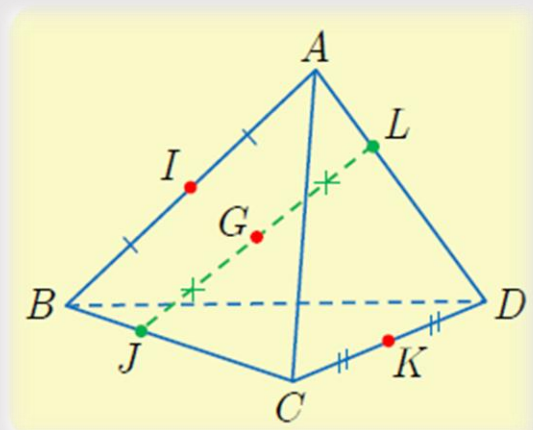
$[AB]$ و $[CD]$ على الترتيب و النقطتان J و L

معرفتان بالعلاقتهين :

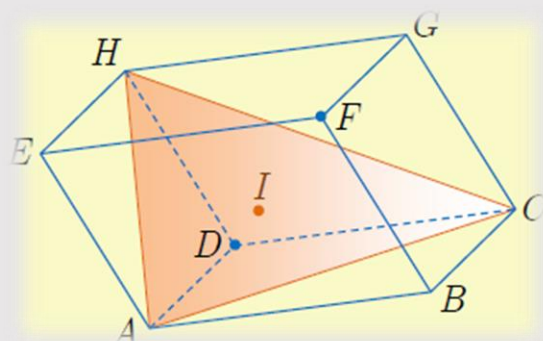
$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$\vec{CJ} = \frac{2}{3}\vec{CB}$ و أخيراً G منتصف $[Jl]$ أثبت أن النقاط

G و I و K على استقامة واحدة



الحل



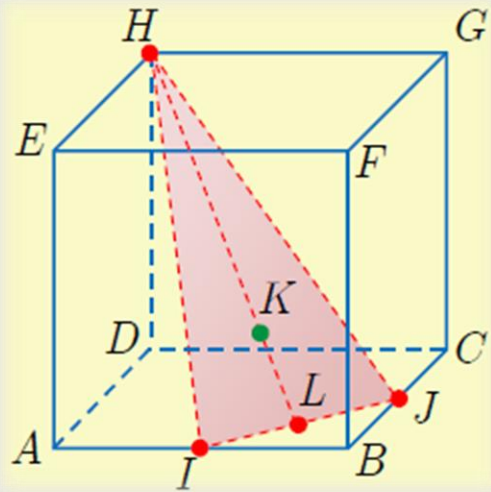
الحل

تنويه :

لإثبات أن أربع نقاط تقع في مستوى واحد يكفي إثبات أن إحداها مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاثة الأخرى

مثال

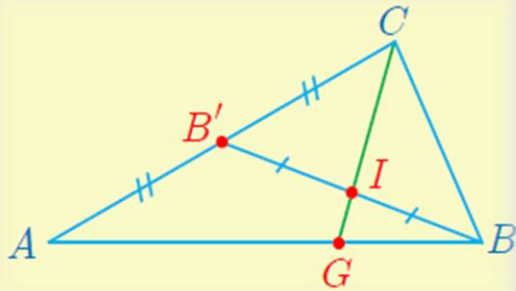
مكعب $ABCDEFGH$ و I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[BC]$ بالترتيب و K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1), (B, 2), (C, 1), (H, 1)$ أثبت وقوع النقاط H, K, J, I في مستوى واحد



الحل

مثال

انطلاقاً من الشكل المجاور . جد الأمثال α, β, γ التي تجعل I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ ثم استنتج العدد λ الذي يحقق أن $\vec{GA} + \lambda \vec{GB} = \vec{0}$



الحل

- 1- أثبت أن P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (C, γ) , (B, β) و أن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (D, δ) , (A, α) حيث $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ثوابت يُطلب تعيينها
- 2- ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$, $(B, 4)$, $(C, 1)$, $(D, 3)$ أثبت أن G تقع على المستقيم (PQ)
- 3- أثبت بأسلوب مماثل أن G تقع على المستقيم (RS)
- 4- استنتج تقاطع المستقيمين (PQ) , (RS)

الحل

مسألة مستقيمتان متقاطعتان :

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما . و لنعرف النقاط P, Q, S, R بالشكل :

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BR} = \frac{1}{5} \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DS} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DC}$$

نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمين (PQ) و (RS)



مسألة دمج

نتأمل ثلاث نقاط A و B و C في الفراغ و k عدد حقيقي من المجال $[-1,1]$. نرمز G_k إلى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A; k^2 + 1), (B; k), (C, -k)$$

1- مثل النقاط A و B و C و I منتصف $[BC]$

و أنشئ النقطتين G_1, G_{-1}

2- أثبت أنه مهما يكن k من المجال $[-1,1]$ فإن :

$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$$

3- ادرس تغيرات التابع f المعرف على

المجال $[-1,1]$ وفق : $f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$

4- استنتج مجموعة النقاط G_k عندما

تتحول k في المجال $[-1,1]$

الحل



بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه وليكن α عدداً حقيقياً و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$.

النقطتان E, F معرفتين بالعلاقين: $\vec{BF} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ وأخيراً H هي منتصف $[EF]$.

1- إن النقطة E هي مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين:

$(D, 1)$ و $(A, 2)$	d	$(D, 1)$ و $(A, 2)$	c	$(C, 1)$ و $(A, 2)$	b	$(C, 1)$ و $(B, 2)$	a
---------------------	---	---------------------	---	---------------------	---	---------------------	---

2- إن النقطة F هي مركز الأبعاد متناسبة للنقطتين:

$(D, 1)$ و $(A, 2)$	d	$(D, 1)$ و $(B, 2)$	c	$(C, 1)$ و $(A, 2)$	b	$(C, 1)$ و $(B, 2)$	a
---------------------	---	---------------------	---	---------------------	---	---------------------	---

3- إن النقطة H مركز أبعاد متناسبة لكل من:

$(A, 2), (B, 2), (C, 1), (D, 1)$	b	$(A, 2), (B, 1), (C, 2), (D, 1)$	a
غير ذلك	d	$(A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 2)$	c

4- هل النقاط I, J, H تقع على استقامة واحدة:

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

لدينا $ABCD$ رباعي وجوه منتظم و P, Q, R, S نقاطاً تحقق: $\vec{BP} = \frac{1}{5}\vec{BC}$ و $\vec{AQ} = \frac{3}{4}\vec{AD}$ و

$$\vec{DS} = \frac{1}{4}\vec{DC} \text{ و } \vec{BR} = \frac{1}{5}\vec{BA}$$

5- إن النقطة P مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(B, 4), (C, 1)$	d	$(A, 1), (D, 3)$	c	$(B, 4), (C, 1)$	b	$(A, 1), (D, 3)$	a
------------------	---	------------------	---	------------------	---	------------------	---

6- إن ثقل النقطة P يساوي:

a	6	b	4	c	5	d	7
---	---	---	---	---	---	---	---

7- إن النقطة Q مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

a	$(A, 2), (D, 3)$	b	$(A, 1), (D, 3)$	c	$(B, 3), (C, 1)$	d	$(B, 4), (C, 1)$
---	------------------	---	------------------	---	------------------	---	------------------

8- إن ثقل النقطة Q يساوي:

a	6	b	4	c	5	d	7
---	---	---	---	---	---	---	---

9- بفرض G مركز الأبعاد متناسبة للنقاط $(A, 1), (C, 1), (D, 3), (B, 4)$ فإن G :

a	G تقع على المستقيم (PQ)	b	G مسقط قائم على (PQ)
c	G لا تنتمي للمستقيم (PQ)	d	غير ذلك

10- هل G تقع على المستقيم (RS) ؟

a	نعم	b	لا
---	-----	---	----

11- المستقيمان (PQ) و (RS) :

a	متخالفان	b	متوازيان	c	متقاطعان ولا يعينان مستويًا.	d	متقاطعان ويعينان مستويًا.
---	----------	---	----------	---	------------------------------	---	---------------------------

1	C
2	A
3	B
4	A
5	B
6	C
7	B
8	B
9	A
10	A
11	D



الدرس الثالث

3

الأشعة تحليلياً

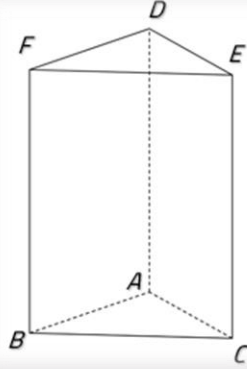
الوقت
ثمين، فلا
تضيعه
في الأمور
التي لا
تفيدك.



ولنعرف عليه المعلم $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$:

A()	E()
B()	F()
C()	G()
D()	H()

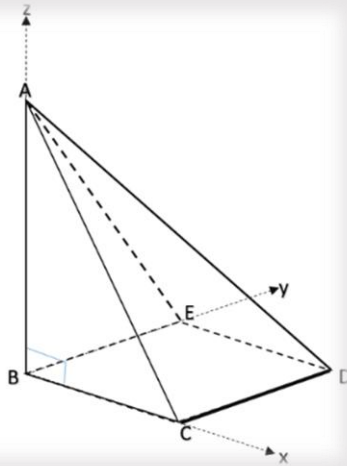
• **الشكل الثاني: الموشور القائم**



نعرف عليه المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

A()	D()
B()	E()
C()	F()

• **الشكل الثالث: الهرم القائم**



نعرف عليه المعلم $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA})$

B()	A()
C()	
D()	
E()	

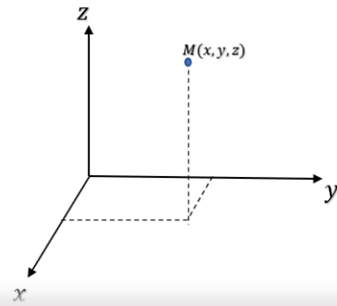
المعلم في الفراغ

في الصفوف السابقة قمنا بدراسة المستوي والمعلم فيه فكنا نتعامل مع بعدين x و y و في عامنا هذا سنعمّم الدراسة لندرس الأشعة في الفراغ و المعلم فيه.

ففي الفراغ تتعين أي نقطة M بثلاث إحداثيات:

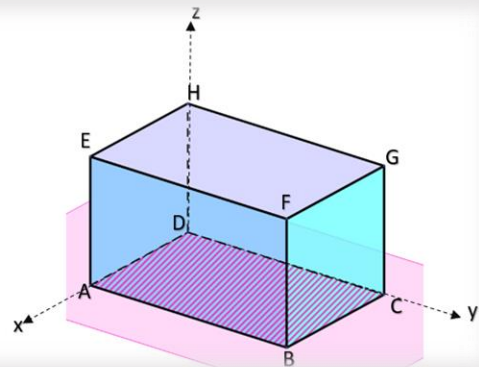
الفواصل x والتراتب y والرواقم z

فنكتب $M(x, y, z)$



و سنتعرف الآن إلى كيفية تزويد أشكال فراغية بمعالم و كيف نعين إحداثيات أي مجسم .

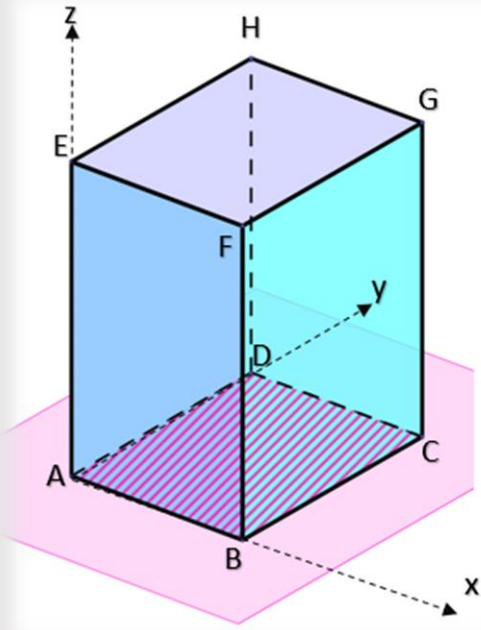
• **الشكل الأول: متوازي المستطيلات**



مثال

في الشكل المجاور متوازي مستطيلات فيه

$$AB = 2, AD = 3, AE = 5$$

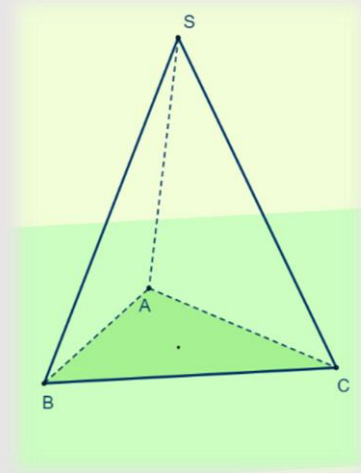


نعرف المعلم:

$$\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{5}\overrightarrow{AE} \right)$$

A()	E()
A()	E()
B()	F()
C()	G()
D()	H()

الشكل الرابع: رباعي الوجوه



نعرف عليه المعلم: $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS})$

$$A(, ,) \quad S(, ,)$$

$$B(, ,)$$

$$C(, ,)$$

حالة خاصة: المعلم من الشكل

$$\left(0, \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{b}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{c}\overrightarrow{OC} \right)$$

نطبق نفس الطريقة السابقة مع مراعاة أن:

كل x تأخذ القيمة a

كل y تأخذ القيمة b

كل z تأخذ القيمة c



COME ON GUYS...

IT'S VERY EASY.

ثالثاً : المعلم الكيفي

هو معلم تكون فيه المحاور الثلاثة ليست متعامدة مثلى مثلى وطويلات أشعتها ليست مساوية للواحد

مثل: المعلم المعرف على شكل رباعي الوجوه في الحالة الرابعة
إذ نلاحظ أن الأشعة : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ليست متعامدة مثلى مثلى و ليست متساوية الطول

■ استخدامات المعلم السابقة

• المعلم الكيفي والمعلم المتعامد

يستخدم في:

- 1- تحديد موضع نقطة
- 2- الارتباط الخطي
- 3- مركز الأبعاد المتناسبة

• المعلم المتجانس: يستخدم في :

- 1- حساب طويلات
- 2- حساب جداء سلمي
- 3- المسافات
- 4- المعادلات

وكل ما ينتج عنها من نتائج وقوانين.

أنواع المعالم

أولاً: المعلم المتجانس

وهو المعلم الذي يكون فيه المحاور الثلاثة متعامدة مثلى مثلى وأطوال أشعتها متساوية وتساوي الواحد

فمثلاً في الحالة الخاصة نلاحظ أن:
الأشعة $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$ متعامدة مثلى مثلى وإن:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right\| &= 1 \\ \left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right\| &= 1 \\ \left\|\frac{1}{5}\overrightarrow{AE}\right\| &= 1\end{aligned}$$

فهو متجانس.

ثانياً : المعلم المتعامد

هو معلم تكون فيه المحاور الثلاثة متعامدة مثلى مثلى لكن طويلات أشعتها ليست مساوية للواحد

مثل : المعلم المعرف على متوازي المستطيلات في الحالة الأولى ففيه :
 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}$ متعامدة مثلى مثلى لكن طويلاتها ليست واحد
و المعلم المعرف على الموشور في الحالة الثانية ففيه :
 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ متعامدة مثلى مثلى لكن أطوالها ليست واحد
و المعلم المعرف على الهرم في الحالة الثالثة فالأشعة : $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}$ متعامدة مثلى مثلى لكن أطوالها ليست واحد.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

الشكل الثالث :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

(أي نهاية ناقص بداية)

مثال

لتكن لدينا النقاط:

$$A(1,3,0), B(2,-2,2), C\left(3,-\frac{1}{2},2\right)$$

اوجد بالأشكال الثلاثة مركبات الاشعة

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$$

الحل

إيجاد مركبات $\overrightarrow{AB}$

الشكل الأول:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1, -2 - 3, 2 - 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, -5, 2)$$

الشكل الثاني:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

الشكل الثالث:

$$\overrightarrow{AB} = 1\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

إيجاد مركبات $\overrightarrow{BC}$:

الشكل الأول:

$$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B)$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(3 - 2, -\frac{1}{2} - (-2), 2 - 2\right)$$

القسم التحليلي

و في فضاء منسوب إلى معلم ما يتعين الشعاع
بثلاث مساقط
(مركبات) تأخذ أحد الأشكال الثلاثة الآتية :

الشكل الأول: $\vec{u}(x, y, z)$

الشكل الثاني: $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

الشكل الثالث:

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

مثال

الشعاع $\vec{u}(3, 2, -4)$ يمكن أن نكتبه بشكلين
آخرين:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

أو:

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

■ تعاريف في الاشعة:

إذا كان لدينا النقطتان

$$B(x_B, y_B, z_B), A(x_A, y_A, z_A)$$

فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يأخذ أحد الاشكال التالية:

الشكل الأول:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

الشكل الثاني:

فإن I منتصف القطعة $[AB]$

$$I\left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right) \Rightarrow I(2,1,1)$$

• قانون مركز ثقل المثلث:

إن مركز ثقل مثلث ABC هي نقطة تلاقي متوسطات ولتكن G عندئذ:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

مثال

فرض $A(1,1,1), B(3,2,1), C(2,3,0)$

فإن G مركز ثقل المثلث ABC :

$$G\left(\frac{1+3+2}{3}, \frac{1+2+3}{3}, \frac{1+1+0}{3}\right) \Rightarrow G\left(2, 2, \frac{2}{3}\right)$$

• العمليات على الاشعة:

1- جمع شعاعين:

$$\vec{u}(x, y, z), \vec{v}(x', y', z') \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$$

2- طرح شعاعين:

$$\vec{u} - \vec{v} = (x - x', y - y', z - z')$$

3- ضرب شعاع بعدد حقيقي k :

نضرب المركبات بهذا العدد

$$k \cdot \vec{u} = (kx, ky, kz)$$

4- تساوي شعاعين:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\vec{BC} = \left(1, \frac{3}{2}, 0\right)$$

الشكل الثاني:

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

الشكل الثالث:

$$\begin{aligned} \vec{BC} &= 1\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + 0\vec{k} \\ &= \vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} \end{aligned}$$

إيجاد مركبات $\vec{CB}$:

الشكل الأول

$$\begin{aligned} \vec{CB} &= (x_B - x_C, y_B - y_C, z_B - z_C) \\ &= \left(2 - 3, -2 - \left(-\frac{1}{2}\right), 2 - 2\right) \\ &= \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

الشكل الثاني:

$$\vec{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

الشكل الثالث:

$$\vec{CB} = -\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$$

• قانون منتصف قطعة مستقيمة:

إن إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$ هي:

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

مثال

إذا كان $A(3,2,1)$ و $B(1,0,1)$

ملاحظة:

يفيد التساوي أحياناً بتعيين إحداثيات نقطة مجهولة تحقق علامة شعاعية أو صفة هندسية كما يلي:

- نفرض النقطة $M(x, y, z)$
- نشكل الاشعة المطلوبة بناءً على الخاصة المطلوبة.
- نستفيد من التساوي.

$$\text{➤ } \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AF}$$

التمرين (1)

في كل مما يلي عين إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المذكورة علماً أن:

$$A(1,1,0), B(2,3,-2),$$

$$C(1,1,1), F(5,0,-1)$$

$$\text{➤ } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC}$$



$$\triangleright \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{AB}$$

$\triangleright$ نظيرة B بالنسبة إلى C :

$\triangleright$ M منتصف $[BC]$

$\triangleright$ B منتصف $[MC]$:



$$\boxed{2} \quad \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$$

$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$

➤ $ABFM$ متوازي أضلاع:

تذكرة: لبعض الرموز الشهيرة:

$\overrightarrow{AB}$	الشعاع
AB	البعد
$ \overrightarrow{AB} $	الطويلة (النظيم)
(AB)	المستقيم
$[AB]$	القطعة المستقيمة
ABC	المثلث
(ABC)	المستوي

التمرين (2)

في كل من الحالات الآتية أوجد إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة الشعاعية المعرفة بدلالة النقط المعطاة جانباً

$$\boxed{1} \quad \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}$$

$A(1,0,1), B(3,3,-1), C(-2,0,1)$



الارتباط الخطي لشعاعين تحليلياً

نقول عن شعاعين $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ إنهما مرتبطان خطياً إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي k أي $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

نستخدم التعريف عند وجود ثوابت في إحداثيات النقاط.

• **معنى الارتباط الخطي:** أن الشعاعان $\vec{u}$, $\vec{v}$ مرتبطان خطياً بأسلوب آخر:

إذا تناسبت المركبات المتقابلة كان $\vec{u}$, $\vec{v}$ مرتبطان

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

• **فائدة الارتباط الخطي لشعاعين:**

- 1- إثبات توازي مستقيمين.
- 2- إثبات توازي مستويين.
- 3- إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة.
- 4- إثبات عدم وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة وبالتالي تكون هذه النقاط تعين مستوياً.

التمرين (1)

ادرس الارتباط الخطي للشعاعين $\vec{u}$, $\vec{v}$ في الحالات التالية:

$$1- \vec{u} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \vec{v} = (-6, -6, -2)$$

$$2- \vec{u}(1, 1, 0) \quad , \quad \vec{v}(2, 3, -1)$$

$$3- \vec{u}(0, 0, 3) \quad , \quad \vec{v}(0, 0, 6)$$

$$4- \vec{u}(1, 1, 0) \quad , \quad \vec{v}(2, 0, -1)$$

5- $\vec{u}(3, 0, 1)$, $\vec{v}(6, 0, 2)$

(3) أثبت أن النقاط A, B, C تعين مستويًا حيث:

$A(1,1,0)$, $B(0,1,0)$, $C(1,1,1)$

(4) أيمكن تعيين العددين a, b لتكون النقاط

الثلاث الآتية على استقامة واحدة

$A(1,2,3)$, $B(-1,0,1)$, $C(a, b, 0)$

التمرين (2)

أجب عن الأسئلة الآتية:

(1) هل المستقيمان (AB) , (CD) متوازيان؟
برر؟

$A(1,3,1)$

$B(2,1,0)$

$C(4,2,0)$

$D(2,6,2)$

(2) هل النقاط A, B, C تقع على استقامة

واحدة حيث: $A(1,2,-1)$

$B\left(\frac{3}{2}, 3, -\frac{3}{2}\right)$ $C(5,10,-5)$



منهما حلاً مشتركاً، ثم نعوض في الثالثة للتحقق ونميز حالتين:

1) إذا كانت المعادلة الثالثة محققة ←
للجملة حل مشترك هو الحل الذي
أوجدناه من اول معادلتين.

2) إذا كانت المعادلة الثالثة غير محققة فتكون الجملة مستحيلة الحل.

التمرين (1)

نتأمل في معلم: $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط الالية:

$$A(0,1,-1) \ , \ B(1,0,0) \ , \ C(-1,2,1) \ , \\ D(0,1,2)$$

أثبت انتماء النقاط A, B, C, D الى مستوى واحد P

(This area contains horizontal dotted lines for writing.)



نقول عن الاشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ إنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان α, β بحيث:

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

و $\vec{u}, \vec{v}$ غير مرتبطین خطياً

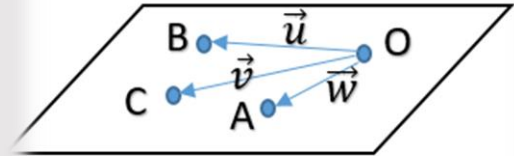
معنى الارتباط الخطي لثلاث أشعة: (مطالعة):

أنه يمكن استبدال هذه الاشعة بثلاث أشعة أخرى تشترك في نفس البداية وتقع في مستوي واحد. ((ليعني توازي بالضرورة))

أي يوجد نقطة o تجعل الاشعة $\overrightarrow{oc}, \overrightarrow{ob}, \overrightarrow{oa}$

تقع في مستو واحد حيث

$$\vec{w} = \overrightarrow{OA}, \vec{u} = \overrightarrow{OB}, \vec{v} = \overrightarrow{OC}$$



فوائد الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

- 1- إثبات وقوع أربع نقاط في مستوي واحد.
- 2- إيجاد معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط.
- 3- إثبات انتماء M الى مستوي مار بثلاث نقاط.

انتبه: أي جملة معادلات مكونة من ثلاث معادلات ومجهولين فقط، فإننا نحل معادلتين

التمرين (3)

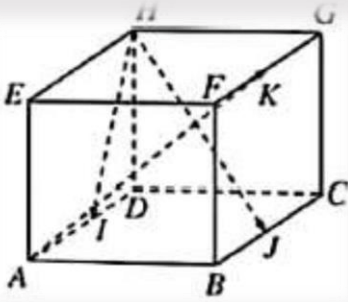
في الشكل المجاور تتأمل مكعباً $ABCDEFGH$

و طول حرفه 2 . و لتكن النقاط

I و J و K منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$

بالترتيب . نختار معلماً متجانساً

$(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. و المطلوب:



1- جد إحداثيات الرؤوس I, J, K

2- جد مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{AK}$

3- أثبت أن المستوي (HIJ) * يوازي المستقيم (AK)

الحل

دورة 2021 الأولى

التمرين (2)

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ النقاط التالية:

$D(6,2,5), C(5,0,5), B(1,-2,1), A(2,0,1)$

المطلوب:

1) أثبت أن $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2) عين العددين الحقيقيين α, β بحيث:

$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, واستنتج أن النقاط

A, B, C, D تقع في مستوى واحد .

الحل

التمرين (4)

نتأمل في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,5,0), D(-3,-5,6), E(3,1,2)$

أثبت انتماء النقاط A, B, C, D إلى مستوي واحد P و

تبين إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P

الحل



التمرين (5)

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط :

$$A(3,2,1), B(1,2,0), C(3,1,-2)$$

1- أثبت أن النقاط A, B, C ليست على

استقامة واحدة

2- عند أي قيمة للوسيط λ تنتمي النقطة

$$M(\lambda, 1, 3) \text{ إلى المستوى } (ABC)$$

3- ما العلاقة بين x, y لتقع النقاط

$$A, B, D(x, y, 3) \text{ في مستوى واحد .}$$

الحل

التمرين (6)

لتكن ε مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق

إحداثياتها العلاقة

$$x - 2y + 3z - 5 = 0 :$$

1- أثبت أن النقاط

$$A(7,1,0), B(5,0,0), C(2,0,1)$$

تنتمي إلى المجموعة ε

2- أثبت أن النقاط A, B, C تعين مستويًا P

3- أثبت أن مركبات الشعاع $\vec{BM}$ هي

$$(2y - 3z, y, z)$$

4- استنتج أن $\vec{BM} = y\vec{BA} + z\vec{BC}$. ماذا

يمكنك أن تستنتج من ذلك .

5- بالعكس أثبت أن أي نقطة $M(x, y, z)$

من المستوي P تحقق المعادلة :



$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

ما هي ϵ ؟

الحل

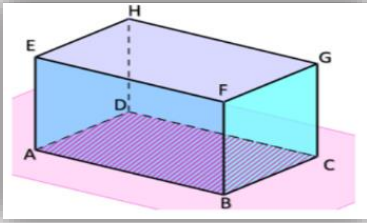


بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية

f عند a الموافقة له هي:

تأمل الشكل المجاور ثم اجب عما يلي:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FH} = -1$$

$\overrightarrow{AF}$	d	$\overrightarrow{DA}$	c	$\overrightarrow{AH}$	b	$\overrightarrow{AD}$	a
-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HD} = -2$$

$\overrightarrow{AF}$	d	$\overrightarrow{DA}$	c	$\overrightarrow{AC}$	b	$\overrightarrow{AD}$	a
-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---

$$\overrightarrow{FD} - \overrightarrow{HD} = -3$$

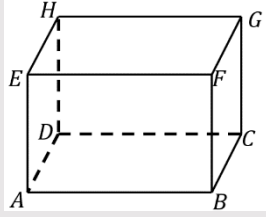
$\overrightarrow{BD}$	d	$\overrightarrow{DA}$	c	$\overrightarrow{AC}$	b	$\overrightarrow{AD}$	a
-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AE} = -4$$

$\overrightarrow{BD}$	d	$\overrightarrow{BC}$	c	$\overrightarrow{AC}$	b	$\overrightarrow{AD}$	a
-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GF} = -5$$

$\overrightarrow{BD}$	d	$\overrightarrow{BC}$	c	$\overrightarrow{AC}$	b	$\vec{0}$	a
-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------	---



مكعب طول حرفه 3 وباختيار معلم متجانس مبدؤه A :

-6 اسم المعلم المتجانس هو:

$\left(A; \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}, \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}\right)$	d	$(A; 3 \overrightarrow{AB}, 3 \overrightarrow{AD}, 3 \overrightarrow{AE})$	c	$\left(A; \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}, \frac{1}{3} \overrightarrow{DA}, \frac{1}{3} \overrightarrow{EA}\right)$	b	$\left(A; \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}, \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}, \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}\right)$	a
---	---	--	---	---	---	---	---

-7 إن احداثيات النقطة B هي:

B(3,0,0)	d	B(3,3,0)	c	B(3,0,3)	b	B(0,3,3)	a
----------	---	----------	---	----------	---	----------	---

-8 إن احداثيات النقطة D هي:

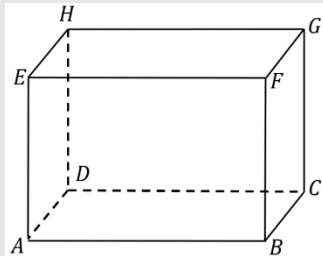
D(3,0,0)	d	D(0,3,0)	c	D(3,0,3)	b	D(0,3,3)	a
----------	---	----------	---	----------	---	----------	---

-9 إن احداثيات النقطة G هي:

G(3,0,0)	d	G(3,3,0)	c	G(3,3,3)	b	G(0,3,3)	a
----------	---	----------	---	----------	---	----------	---

-10 إن احداثيات النقطة E هي:

E(3,0,0)	d	E(0,0,3)	c	E(3,3,3)	b	E(0,0,0)	a
----------	---	----------	---	----------	---	----------	---



ABCD EFGH متوازي المستطيلات فيه $AB = 4$ و $BF = 3$

و $FG = 2$ باختيار معلم مبدؤه D :

-11 اسم المعلم المتجانس هو :

$\left(D; \frac{1}{3} \overrightarrow{DA}, \frac{1}{4} \overrightarrow{DC}, \frac{1}{2} \overrightarrow{DH}\right)$	d	$\left(D; \frac{1}{2} \overrightarrow{DA}, \frac{1}{4} \overrightarrow{DC}, \frac{1}{3} \overrightarrow{DH}\right)$	c	$\left(D; \frac{1}{4} \overrightarrow{DC}, \frac{1}{2} \overrightarrow{DA}, \frac{1}{3} \overrightarrow{DH}\right)$	b	$\left(D; \frac{1}{2} \overrightarrow{DA}, \frac{1}{3} \overrightarrow{DH}, \frac{1}{4} \overrightarrow{DC}\right)$	a
---	---	---	---	---	---	---	---

-12 ان احداثيات النقطة D هي :

D(2,0,0)	d	D(0,4,0)	c	D(0,0,0)	b	D(2,4,3)	a
----------	---	----------	---	----------	---	----------	---

-13 ان احداثيات النقطة C هي :

C(4,0,0)	d	C(0,4,0)	c	C(2,4,0)	b	C(0,2,0)	a
----------	---	----------	---	----------	---	----------	---

14- ان احداثيات النقطة H هي :

$H(0,0,2)$	d	$H(0,0,3)$	c	$H(3,0,0)$	b	$H(0,4,3)$	a
------------	---	------------	---	------------	---	------------	---

15- ان احداثيات النقطة B هي :

$B(3,4,0)$	d	$B(3,4,2)$	c	$B(2,4,3)$	b	$B(2,4,0)$	a
------------	---	------------	---	------------	---	------------	---

في كل حالة من الحالات الآتية هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً :

16- $\vec{u}(2,0,-4)$, $\vec{v}(4,0,-8)$

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

17- $\vec{u}(-1,2,1)$, $\vec{v}(-2,4,2)$

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

18- $\vec{u}(0,-1,3)$, $\vec{v}(2,0,3)$

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

19- $\vec{u}(1,0,0)$, $\vec{v}(3,0,0)$

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

20- ليكن لدينا النقاط $A(-1,2,-1)$ و $B(-2,5,1)$ و $D(1,-2,2)$ و $C(3,-4,6)$ هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان؟

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

21- لتكن لدينا النقاط $A(1,2,3)$ و $B(0,1,4)$ و $C(-1,-3,2)$ هل النقاط A و B و C تقع على استقامة

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

22- لتكن لدينا النقاط $A(3,-1,-5)$ و $B(0,2,4)$ و $C(2,0,-2)$ هل النقاط A و B و C تعيين مستو؟

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

23- لتكن لدينا النقاط $A(2,3,0)$ و $B(2,3,6)$ و $M(4,-1,2)$ هل النقطة M تقع على المستقيم (AB)

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

24- لتكن لدينا النقاط $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $C(a,b,2)$ ان قيمة a و b لتكون النقاط A و B و C على

استقامة واحدة هي ؟

$a = 4$ $b = 1$	b	$a = -4$ $b = -1$	a
غير ذلك	d	$a = 1$ $b = 4$	c

A	17	A	1
B	18	B	2
A	19	D	3
B	20	C	4
B	21	A	5
B	22	D	6
B	23	D	7
B	24	C	8
		B	9
		C	10
		C	11
		B	12
		C	13
		D	14
		D	15
		A	16





الدرس الرابع

المسافة في الفراغ

لا تدع
الخوف من
الخطأ
يمنعك
من
المحاولة.



استخدامات المسافة في الفراغ

أولاً: معرفة نوع مثلث:

لمعرفة نوع المثلث ABC يمكن الاستفادة من مفهوم النظيم إذ تتبع الخطوات التالية:

- 1- نشكل الأشعة $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$
- 2- نحسب طويلات الأشعة السابقة
- 3- نميز الحالات التالية:
 - a. إذا كان $AB = AC = BC$ فالمثلث متساوي الأضلاع
 - b. إذا كان $AB = AC$ فهو متساوي الساقين رأسه A
 - c. إذا كان $AB \neq AC \neq BC$ فهو مختلف الأضلاع
 - d. إذا كان $AB^2 = AC^2 + BC^2$ فالمثلث قائم في C حسب عكس فيثاغورث (نختبر فيثاغورث سواء كان مختلف الأضلاع أو متساوي الساقين)

ملاحظة: ممكن ان يكون المثلث قائم ومتساوي الساقين في آن معاً.

التمرين (1)

بين في كل من الحالات الآتية طبيعة المثلث ABC

1- **نظيم شعاع:** نتأمل في معلم متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ الشعاع $\vec{u}$ المعروف بالشكل:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ عندئذ نعرف تنظيم الشعاع } \vec{u} \text{ او طويلته بالشكل:}$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

2- المسافة بين نقطتين:

بفرض نقطتان $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$ معلم متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ عندها تكون المسافة AB هي:

$$AB = ||\vec{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

او نشكل الشعاع $\vec{AB}$ ثم نحسب طويلته

مثال

لتكن لدينا النقطتان $A(1,2,0), B(-1,3,3)$

عندها لحساب المسافة AB

1- نشكل الشعاع $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2- نحسب الطويلة:

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

[illegible][illegible][illegible]

التمرين (2)

ليكن α عدداً حقيقياً و لتأمل النقاط
 $A(3,1,-3), B(-1,5,-3), C(-1,1,\alpha)$

- 1- أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين
أياً كان α
- 2- أيمن أن يكون متساوي الأضلاع ؟
- 3- أيمن أن يكون قائماً ؟

ثانياً: انتماء نقطة لمستوي محوري لقطعة مستقيمة:

تعريف: المستوي المحوري للقطعة المستقيمة
 $[AB]$ هي مجموعة النقاط التي تبعد عن A بعداً
يساوي بعدها عن B

بمعنى أنه أي نقطة M من المستوي المحوري
للقطعة $[AB]$ تحقق أن :

$$AM = BM$$

و بالتالي لاختبار انتماء النقطة M إلى المستوي
المحوري للقطعة $[AB]$



1- نحسب المسافة AM

2- نحسب المسافة BM

3- إذا كان $AM = BM$ فالنقطة M من

المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

مثال

هل النقطة $D(2, 1, 3)$ تنتمي للمستوي

المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

حيث $A(4,1,0), B(0,1,6)$

الحل

المسألة (1)

ABCDE هرم رأسه E وقاعدته مربع.

$[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و

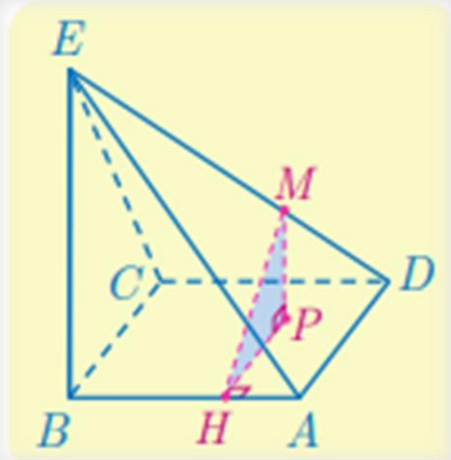
$EB = 4\sqrt{2}$ و $AB = 4$. M نقطة من القطعة

$[ED]$ تحقق أن $\vec{DE} = 3\vec{DM}$ ولتكن P المسقط

القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$ و H

المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB)

. احسب طول القطعة المستقيمة $[MH]$



فائدة: انتماء نقطة لأحد المحاور الإحداثية:

$M \in OX ; M(x, 0, 0)$

$M \in OY ; M(0, y, 0)$

$M \in OZ ; M(0, 0, z)$

التمرين (3)

عين نقطة على محور الفواصل متساوية البعد

عن النقطتين $A(2, -1, 3), B(0, 5, -1)$

(صيغة أخرى): عين نقطة من المستوي

المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ تنتمي

لمحور الفواصل.

التمرين (4)

نتأمل النقاط $M(4, -1, 2)$ و $B(2, 3, 6)$ و $A(2, 3, 0)$
. نهدف إلى حساب بعد M عن المستقيم (AB) .

- 1- أثبت أن M لا تقع على المستقيم (AB)
- 2- أثبت أن لكل نقطة K من المستقيم (AB)
إحداثيات من النمط $(2, 3, z)$
- 3- احسب MK^2 بدلالة z
- 4- عند أي قيمة للعدد z يكون MK أصغر ما
يمكن؟ حدد إذن بعد M عن (AB)

الحل

الحل



السؤال (1)

- نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط :
- $A(2,3,2), B(-2, -1, 2), C(-2, 3, -2), D\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
- 1- احسب المسافات
 AB, AC, AD, BC, BD, CD
- 2- بين طبيعة وجوه رباعي الوجوه $ABCD$

الحل

بنوك الأتستة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

ليكن لديك الاشعة: $\vec{u}(3, -1, \sqrt{6})$, $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{6}\vec{j} - \vec{k}$

والنقاط: $A(1,0,-1), B(2,2,3), C(3,1,-2), D(1,1,2), E(3,1,-4), F(2,0,-1), G(2,1,-1)$

1- ان نظم الشعاع $\vec{u}$ هو :

$ \vec{u} = 4$	d	$ \vec{u} = 2\sqrt{2}$	c	$ \vec{u} = 2$	b	$ \vec{u} = 5$	a
-------------------	---	---------------------------	---	-------------------	---	-------------------	---

2- ان نظم الشعاع $\vec{v}$ هو :

$ \vec{v} = 7$	d	$ \vec{v} = 3\sqrt{2}$	c	$ \vec{v} = \sqrt{21}$	b	$ \vec{v} = 3$	a
-------------------	---	---------------------------	---	---------------------------	---	-------------------	---

3- ان المسافة AB تساوي :

$AB = \sqrt{2}$	d	$AB = \sqrt{21}$	c	$AB = 21$	b	$AB = 2$	a
-----------------	---	------------------	---	-----------	---	----------	---

4- ان المسافة GE تساوي:

$GE = 10$	d	$GE = 8$	c	$GE = \sqrt{10}$	b	$GE = 2\sqrt{2}$	a
-----------	---	----------	---	------------------	---	------------------	---

5- ان المثلث (ABC) هو مثلث :

متساوي الساقين	d	متساوي الاضلاع	c	غير قائم	b	قائم	a
----------------	---	----------------	---	----------	---	------	---

6- ان المثلث (DEF) هو مثلث:

متساوي الساقين	d	متساوي الاضلاع	c	غير قائم	b	قائم	a
----------------	---	----------------	---	----------	---	------	---

7- هل النقطة G تنتمي للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[DE]$ ؟

a	نعم	b	لا
---	-----	---	----

8- هل النقطة B تنتمي للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[DE]$ ؟

a	نعم	b	لا
---	-----	---	----

9- هل النقطة A تنتمي للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[DE]$ ؟

a	نعم	b	لا
---	-----	---	----

10- هل النقطة D تنتمي للكرة التي مركزها C ونصف قطرها $r = \sqrt{3}$ ؟

a	نعم	b	لا
---	-----	---	----

D	1
A	2
C	3
B	4
A	5
D	6
A	7
B	8
A	9
B	10



الدرس الخامس

الجداد السلمي

استمتع
بعملية
التعلم،
وستجدها
أسهل.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \underbrace{\cos \pm \frac{\pi}{2}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

أي لإثبات أن الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ متعامدين نثبت أن
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

مثال (1)

إذا علمت أن $\vec{u}$ ينظم 5 و $\vec{v}$ ينظم 3 وان $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$ احسب ناتج المقادير الآتية:

1) $\vec{u}(\vec{u} + \vec{v})$

.....

.....

.....

2) $\vec{v}(\vec{u} - \vec{v})$

.....

.....

.....

3) $2\vec{u}(2\vec{v} - 3\vec{u})$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

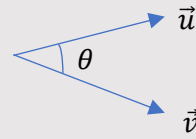
ليكن لدينا الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ نرمز لجداثهما السلمي بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ويحسب من أحد القوانين الثلاثة الآتية:

1. القانون الأول: (إذا علمنا طويلاً فقط)

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2]}$$

2. القانون الثاني:

(إذا علمنا الزاوية بين شعاعين أو طلبت الزاوية)



$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta}$$

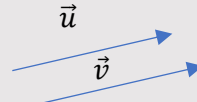
حيث $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ الزاوية بين $\vec{u}, \vec{v}$

3. القانون الثالث: (إذا علمنا مركبات الشعاعين)

إذا كان $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ عندئذ:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

حالات خاصة:



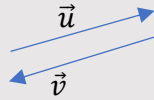
• إذا كانت $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \underbrace{0}_{=1}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

وبالتالي إذا كان $\vec{u} = \vec{v}$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2}$$



• إذا كانت $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \underbrace{\cos \pi}_{=-1}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

• إذا كانت $(\vec{u}, \vec{v}) = \pm \frac{\pi}{2}$

مثال (2)

هل $\vec{u}, \vec{v}$ شعاعين متعامدين في كل من الحالتين
الآتية:

1) $\vec{u}(\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1, 1 - \sqrt{2}), \vec{v}(-\sqrt{2}, 1, 1)$

2) $\vec{u}\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \vec{v}\left(-\frac{2}{5}, 2, 3\right)$

التمرين (1)

نعطى في معلم متجانس الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ في
كل من الحالات التالية، عين قيمة الوسيط α
حتى يكون الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ متعامدين:

1) $\vec{u}\left(2, -\frac{1}{2}, 5\right), \vec{v}\left(-\frac{2}{5}, 3, \alpha\right)$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2) $\vec{u}\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2\right), \vec{v}\left(\alpha, 2\alpha, \frac{1}{2}\right)$

التمرين (2)

نتأمل النقطتين $A(2, -5, 1), B(0, 2, 6)$ و
المستقيم d المار بالنقطة $C(-2, 3, 1)$ و شعاع
توجيهه $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

أثبت أن d عمودي على المستقيم (AB)

التمرين (3)

أطوال الأشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$ هي بالترتيب
6, 8, 10. أكون الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ متعامدين

التمرين (4)

نتأمل الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و نفترض أن

$\vec{u} + \vec{v}$ و $\vec{u} - \vec{v}$ متعامدين.

أثبت أن للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ الطول نفسه.

نختار معلماً متجانساً $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بحيث يكون $\overrightarrow{AB}$

و $\vec{t}$ مرتبطين خطياً، و $\overrightarrow{AD}$ و $\vec{j}$ مرتبطين خطياً،

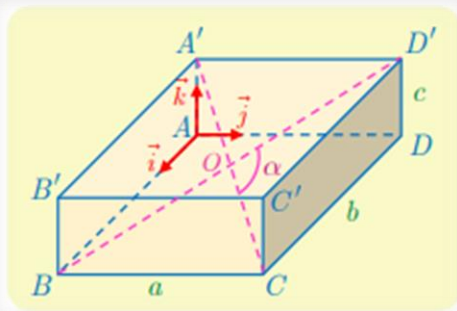
وكذلك $\overrightarrow{AA'}$ و $\vec{k}$ مرتبطين خطياً.

1) أعط إحدائيات جميع رؤوس متوازي

المستطيلات وإحداثيات مركزه O

(2) أثبت أن $\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ ، ادرس على

وجه الخصوص حالة المكعب.



المسألة (1)

$ABCD A'B'C'D'$ متوازي مستطيلات، يتقاطع

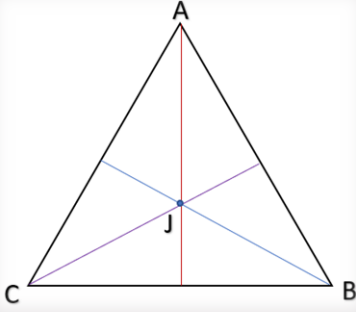
قطراه $[CA'], [BD']$ فی O , نضع $\alpha = \widehat{COD'}$,

ونفترض أن: $DD' = c$, $CD = b$, $BC = a$

نهدف في هذه المسألة إلى حساب $\cos \alpha$.

الارتفاعات في المثلث

نسمي ارتفاعاً في المثلث كل مستقيم نازل من رأس المثلث عمودياً على الضلع المقابلة



■ لأي مثلث ABC ثلاث ارتفاعات تتلاقى في نقطة واحدة J

■ إذا كان (AJ) و (BJ) ارتفاعين في المثلث ABC فإن المستقيم (CJ) هو الارتفاع الثالث وبالتالي لإثبات أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC يكفي إثبات أن:

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

فيكون مرور الارتفاع الثالث من J

تحصيل حاصل حسب الملاحظات

السابقة

● **فائدة:** في المثلث متساوي الأضلاع تكون نقطة تلاقي الارتفاعات هي نفسها نقطة تلاقي المتوسطات (مركز ثقل المثلث) و تعد هذه الفائدة أسلوب لإثبات أن مثلثاً ما مثلث متساوي الأضلاع إذ يكفي إثبات أن مركز ثقل المثلث هو نقطة تلاقي الارتفاعات

■ تعطى مساحة مثلث متساوي الأضلاع طول

$$s = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

ضلعه a بالقانون:

التمرين (5)

في معلم متجانس تتأمل النقاط

$$A(3,0,0), B(0,3,0), C(0,0,3)$$

1- جد J مركز ثقل المثلث ABC

2- أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات

المثلث ABC

3- احسب مساحة المثلث ABC

التمرين (6)

تتأمل في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب
طول حرفه 2 . نزوده بالمعلم المتجانس:

$$\left(A, \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}, \frac{1}{2} \overrightarrow{AE} \right)$$

1- جد إحداثيات الرؤوس

2- أثبت أن J مركز ثقل المثلث (AHC) هي

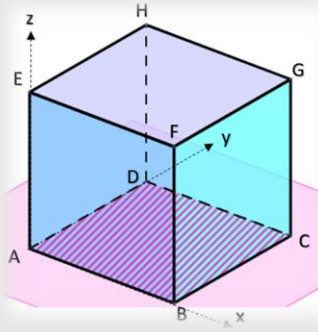
نقطة تلاقي ارتفاعاته

3- استنتج طبيعة المثلث AHC ثم احسب

مساحته

4- هل تنتمي النقطة J إلى المستوي

المحوري للقطعة $[AC]$



مبرهنة المسقط القائم



إذا كان $\overrightarrow{C'D'}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CD}$ على المستقيم: (AB) كان:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

أي يمكن في الجداء السلمي استبدال أحد الأشعة بمسقطه القائم على حامل الآخر



السؤال (1)

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع طول حرفه a .

1- ارسم رسماً توضيحياً

2- احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

الحل

السؤال (3)

نتأمل هرم $ABCD - S$ قاعدته مربع ورأسه S .
طول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي a

1- ارسم رسماً توضيحياً

2- احسب $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$

الحل

السؤال (2)

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a .

1- ارسم رسماً توضيحياً

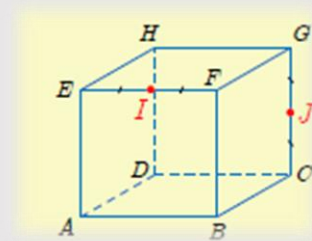
2- احسب $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC}$

الحل

السؤال (4)

مكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه a و فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$.

احسب $\vec{EI} \cdot \vec{EA}$ و $\vec{EI} \cdot \vec{FC}$ و $\vec{EI} \cdot \vec{GJ}$ و $\vec{EI} \cdot \vec{IA}$ و $\vec{JH} \cdot \vec{JD}$



❖ الشكل العام لمعادلة المستوي:

إذا كان P مستوياً يمر من النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$

و يقبل الشعاع $\vec{n}(a, b, c)$ ناظماً له , نفرض

$M(x, y, z)$ نقطة دارجة في المستوي عندئذ

الشعاع $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ يعامد

الشعاع $\vec{n}(a, b, c)$ أي أن :

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

وهي معادلة المستوي التي سنستخدمها في

المسائل. وبعد النشر والإصلاح نصل إلى الشكل

العام:

$$ax + by + cz + d = 0$$

ملاحظة:

إذا كان المستوي يمر من المبدأ فيكون

$$d = 0$$

الاثبات: لكون المبدأ ينتمي إلى المستوي

فإحداثياته تحقق معادلة المستوي أي:

$$a(0) + b(0) + c(0) + d = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 0}$$

❖ كيفية إيجاد معادلة مستوي في الفراغ:

■ الحالة الأولى: مستوي غُلم منه نقطة وناظم:

نعوض مباشرة في القانون:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

مثال (1)

أوجد معادلة المستوي P المار من النقطة

$A(3,1,2)$ ويقبل الشعاع $\vec{n}(4,3,2)$

معادلات المستوي

مقدمة:

متى يتعامد شعاع مع مستوي؟؟

← إذا كان يعامد شعاعين غير مرتبطين في هذا المستوي.

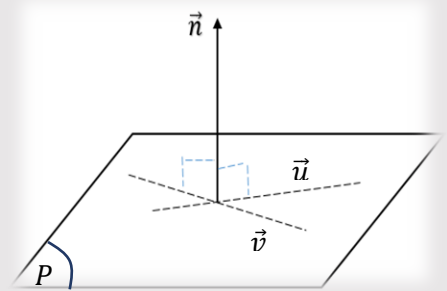
تعريف:

نقول عن الشعاع $\vec{n}$ انه يعامد للمستوي P

إذا عامد شعاعين متقاطعين فيه

(شعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي)

وندعوه بـ (ناظم المستوي)



حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

❖ ناظم المستوي

ان أي شعاع يعامد المستوي P ندعوه ناظم

للمستوي ونرمز له بالرمز $\vec{n}$.

وبالتالي لكل مستوي في الفراغ

عدد غير منته من النواظم جميعها

مرتبطة خطياً (لأنها جميعها متوازية).

الحل

■ الحالة الثانية: المستوي المحوري للقطعة

المستقيمة $[AB]$

1- نعتبر الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظماً

2- النقطة هي منتصف القطعة $[AB]$

3- نعوض في القانون

التمرين (1)

في معلم متجانس تتأمل النقاط :

$A(4,0,-3), B(2,2,2), C(3,-3,-1), D(0,0,-3)$

أعط معادلة المستوي المطلوب في كل من الحالات الآتية:

A. المستوي المحوري P_1 للقطعة $[AB]$

B. المستوي المحوري P_2 للقطعة المستقيمة $[BC]$

مثال (2)

عين معادلة المستوي P المار من المبدأ ويقبل الشعاع $\vec{n}(1,0,-3)$ ناظماً له

الحل

مثال (3)

أوجد معادلة المستوي المار من النقطة A و ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(1,1,1), B(3,2,0)$

الحل



مثال (1)

أوجد معادلة المستوي P المار من النقطة $A(2,1,3)$ والموازي للمستوي:

$$Q: x - y + 3z = 0$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $D(3,2,0)$ والموازي للمستوي $x - z = 1$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (1)

تأمل النقطتين $A(1,1,1)$, $B(3,2,0)$ في فراغ منسوب الى معلم متجانس وليكن P المستوي المار من B ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له.

1. أثبت ان معادلة المستوي P هي:
- $$2x + y - z - 8 = 0$$

C. المستوي المحوري P_3 للقطعة المستقيمة $[CD]$

.....

.....

.....

.....

.....

شغل مخك ^ _ ^

بفرض المستويات السابقة تتقاطع في نقطة Ω أثبت أن A و C و B و D تنتمي إلى كرة مركزها Ω .

.....

.....

.....

.....

.....

تميز:

إذا طلب إيجاد معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإننا نتبع الطريقة السابقة أما إذا طلب إثبات انتماء نقطة M إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإننا باستخدام مفهوم النظيم نثبت أن: $AM = BM$

- الحالة الثالثة: مستوي مواز لمستوي معلوم:
- 1- بما أن المستويين متوازيين فلهما نفس الناظم
 - 2- تكون النقطة معطاة، فنعوض في القانون



التمرين (3)

[illegible]

■ الحالة الخامسة: مستوي يمر من ثلاث نقاط

- تذكيرة:** تعلمنا سابقاً انه من ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة ولتكن النقاط A, B, C
- ⇓
- يتشكل المستوي (ABC)



$A(2,1,0) B(3,1,1) , C(0,1,0)$

اوجد معادلة المستوى (ABC)

[illegible]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظة:

ممکن أن ينتج لدى كل طالب ناظم مختلف عن الآخر ولكن معادلة المستوي تبقى محققة.

فائدة هامة:

لإثبات أن نقطة ما تنتمي إلى مستوي معادلته معلومة:

1- نعوض إحداثيات النقطة في معادلة المستوي

2- نصل إلى مساواة محققة

وبالتالي: إذا طلب منها إيجاد معادلة مستوي محدد بأربع نقاط:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

ليكن لدينا معلماً متجانساً $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ولتكن

النقاط $A(1,2,0)$, $B(0,1,0)$, $C(-1,2,1)$

1- اثبت ان النقاط A, B, C تعين مستويًا

2- اوجد معادلة المستوي (ABC)

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



1- نوجد معادلة المستوي المحدد بثلاث

نقاط منها

2- تثبت إنتماء النقطة الرابعة

مثال (3)

اكتب معادلة المستوي ($ABCD$) إذا علمت أن :

$A(1,1,1)$, $B(3,1,-1)$, $C(4,-1,0)$, $D(0,2,1)$

الحل



مثال (1)

اكتب معادلة المستوي R المار من النقطة

$A(3,1,0)$ و المعامد للمستويين :

$$\begin{aligned} P: 2x - y + z &= 3 \\ Q: x + y - z - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$Q: x + y - z - 4 = 0$$

الحل

[illegible]

حالة خاصة:

معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط من الشكل:

$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$

التالي مباشرة

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

مثال (1)

اكتب معادلة المستوي (ABC)

حيث $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,3)$

الحل

[illegible]

■ الحالة السادسة: مستوي معامد لمستويين

مقاطعين:

1- نحدد ناظمي هذين المستويين $\vec{n}_1, \vec{n}_2$

2- ثبت عدم ارتباطهما الخفي واعتبرهما

نفرض ، $\vec{r}(a, b, c)$ ناظم المستوى المطلوب

- نعود للحالة السابقة

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظات هامة:

كيف نثبت أن شعاعاً ما هو ناظم لمستوي:

هنا نميز حالتين:

• الحالة الأولى: معادلة المستوي معلومة:

- 1- نأخذ ناظم المستوي
- 2- نثبت أنه مرتبط خطياً مع الشعاع المطلوب

مثال (1)

أثبت أن الشعاع $\vec{w}(3,1,1)$ ناظم على المستوي P الذي معادلته:

$$6x + 2y + 2z - 5 = 0$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ الحالة السابعة: مستوي يمر من نقطتين و

يعامد مستويًا معلومًا

- 1- نشكل شعاع من النقطتين
- 2- نحدد ناظم المستوي المعلوم
- 3- نعامل هذين الشعاعين على أنهما شعاعي توجيه للمستوي المطلوب
- 4- نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظماً للمستوي المطلوب
- 5- نكمل كما سبق

مثال (1)

اوجد معادلة المستوي P المار من النقطتين

$$A(1,2,-1), B(3,0,-2)$$

و المعامد للمستوي Q الذي معادلته

$$Q: x - y + z + 2020 = 0$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



مثال (1)

في كل من الحالات الآتية ، ادرس تقاطع المستويين P, Q و في حال التوازي يّين فيما إذا كانا منطبقين أم لا .

1) $P: 2x + y - z = 0, Q: x + y + z = 1$

.....

.....

.....

2) $P: 2x - y + z - 3 = 0$

$Q: 4x - 2y + 2z - 1 = 0$

.....

.....

.....

.....

3) $P: x - y - 3z + 1 = 0$

$Q: 2x - 2y - 6z + 2 = 0$

.....

.....

.....

.....

أفكار يجب أن تمثّلها:

1- المسائل التي تشتمل على جداء سلمي أو نظيم وأي من تطبيقاتهما تحتاج لمعلم متجانس

2- يكفي لإيجاد معادلة مستوي معرفة نقطة منه وناظم

نبحث عن شعاعي توجيه في المستوي

1- نثبت أن الشعاع المطلوب يعامد هذين الشعاعين

مثال (1)

أثبت أن الشعاع $\vec{n}(1,1,1)$ ناظم على المستوي (ABC) حيث:

$A(2,0,0), B(0,2,0), C(0,0,2)$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

دراسة وضع نسبي لمستويين

حالات الوضع النسبي لمستويين

ارتباط النواظم	شرط التوازي
عدم ارتباط النواظم ويتقاطعان عندئذ بمستقيم نسميه الفصل المشترك	شرط التقاطع
تعامد النواظم	شرط التعامد
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$	شرط الانطباق

3- يوجد أسلوبين لإثبات أن شعاعاً ما هو ناظم لمستوي معلوم

الأسلوب الأول: إثبات أنه معامد لشعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي

الأسلوب الثاني: إثبات أنه مرتبط خطياً مع ناظم آخر معلوم.

4- لدراسة وضع مستويين، فحّر بدراسة ارتباط النواظم



بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

اكتب معادلة المستوي P في كل حالة من الحالات الآتية :

-1 P مار من $A(1,0,5)$ ويقبل $\vec{n}(1,-1,0)$ ناظما له

$P: x - 2y - 1 = 0$	b	$P: x - y - 1 = 0$	a
$P: x - y - z + 2 = 0$	d	$P: 2x - y - 1 = 0$	c

-2 P مار من $A(1,0,5)$ ويوازي المستوي Q الذي معادلته: $Q: 2x - y + 3z = 4$

$P: 2x - y - 3z - 17 = 0$	b	$P: x - y + 3z - 17 = 0$	a
$P: 2x + y - 3z - 7 = 0$	d	$P: 2x - y + 3z - 17 = 0$	c

-3 P مار من $A(1,2,-1)$ ويعامد المستقيم (BC) حيث: $B(1,0,1)$ و $C(-3,1,4)$

$P: -4x - y - 3z + 5 = 0$	b	$P: 4x + y + 3z + 5 = 0$	a
$P: -4x + y - 3z - 15 = 0$	d	$P: -4x + y + 3z + 5 = 0$	c

-4 P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث: $A(5,2,-1)$ و $B(3,0,1)$

$P: 2x + 2y - 2z + 10 = 0$	b	$P: 2x - 2y + 2z + 10 = 0$	a
$P: -2x - 2y + 2z + 10 = 0$	d	$P: -2x + 2y + 2z + 10 = 0$	c

-5 P مار من $A(2,3,1)$ ويقبل كلا من $\vec{u}(1,1,3)$ و $\vec{v}(2,-1,4)$

$P: -7x + 2y + 3z - 17 = 0$	b	$P: 7x - 2y + 3z + 1 = 0$	a
$P: 7x + 2y - 3z - 7 = 0$	d	$P: -7x - 2y + 3z + 17 = 0$	c

-6 P مار من $A(1, -1, 2)$ و $B(2, 0, 4)$ وعمودي على المستوي Q الذي معادلته $Q: x - y + 3z - 4 = 0$

$P: 5x + y - 2z + 2 = 0$	b	$P: -5x + y + 2z + 2 = 0$	a
$P: 5x - y - 2z = 0$	d	$P: -5x - y + 2z - 1 = 0$	c

-7 P مار من $A(0, 1, 0)$ و $B(-1, 1, 0)$ و $C(-1, 2, 3)$

$P: -3y + z + 3 = 0$	b	$P: x - 3y + z + 3 = 0$	a
$P: x - 3y + 2z + 1 = 0$	d	$P: x - 3y + 3 = 0$	c

-8 P مار من $A(2, 5, -2)$ وعمودي على كل من Q و R وحيث:

$$\begin{cases} Q: x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ R: x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$P: -10x - y - z - 2 = 0$	b	$P: -10x + 4y + 6z + 12 = 0$	a
$P: x + y + z + 1 = 0$	d	$P: 10x + 4y - 6z + 12 = 0$	c

-9 ان المستويان اللتيان:

$$P: 2x + y - z = 0, Q: x + y + z = 1$$

متقاطعان	b	متوازيان	c	منطبقان	d	غير ذلك
----------	---	----------	---	---------	---	---------

-10 ان المستويان اللتيان:

$$P: 2x - y + z - 3 = 0, Q: 4x - 2y + 2z - 1 = 0$$

متقاطعان	b	متوازيان	c	متقاطعان في نقطة	d	غير ذلك
----------	---	----------	---	------------------	---	---------

-11 ان المستويان اللتيان:

$$P: x - y - 3z + 1 = 0, Q: 2x - 2y - 6z + 2 = 0$$

متقاطعان في فصل مشترك	b	متوازيان	c	متقاطعان في نقطة	d	غير ذلك
-----------------------	---	----------	---	------------------	---	---------

A	6	A	1
B	7	C	2
A	8	C	3
A	9	D	4
B	10	C	5
B			11



الدرس السادس

المستقيم والكرة



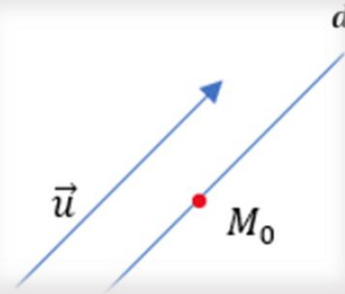
انت قادر
على
تحقيق اي
شيء تريده
إذا أمنت
بنفسك.



المستقيم في الفراغ

تعريف: إن أي مستقيم d في الفراغ يتعين بنقطة منه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ وشعاع توجيه $\vec{u}(a, b, c)$

حيث يُعرّف المستقيم d بالمعادلات الوسيطة:



$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

وندعو المعادلات السابقة تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d .

مثال (1)

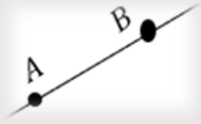
أوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة $A(1, 2, 3)$ ويقبل الشعاع $\vec{u}(2, -2, 1)$ موجهاً له.

الحل

حالات خاصة في المستقيم:

(1) إيجاد معادلة مستقيم مار من نقطتين A, B :

■ نشكل الشعاع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ونعتبره شعاع التوجيه.



■ نختار أحد النقطتين A

أو B للتعويض في

المعادلات الوسيطة

■ نعوض في القانون

مثال (1)

أوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) حيث $A(-1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$

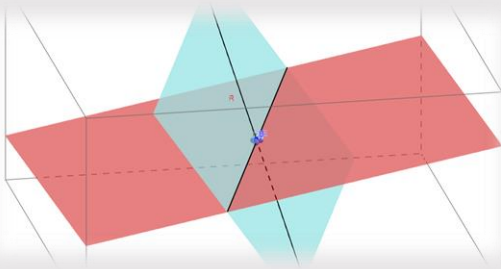
الحل

مثال (2)

أوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB)

حيث $A(-2,3,1)$, $B(2,1,4)$

(3) إيجاد معادلة المستقيم المحدد بتقاطع مستويين (الفصل المشترك لهما)



لإيجاد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d فصلهما المشترك) تتبع الخطوات التالية:

- 1- تثبت ان المستويين متقاطعين
- 2- نحل معادلتى المستويين حلاً مشتركاً
- 3- نفرض

$$x = t \quad \text{أو} \quad y = t \quad \text{أو} \quad z = t$$

(لك حرية الاختيار)

4- نصل إلى:

$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} : t \in R$$

وهو التمثيل الوسيطى المنشود.

مثال (1)

أوجد تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك d للمستويين P_1, P_2 المعرفان كما يلي:

$$P_1: 2x - 3y + z + 1 = 0$$

(2) إيجاد معادلة المستقيم المعامد لمستوي:

بفرض لدينا المستوي $ax + by + cz + d = 0$ و

النقطة $C(x_0, y_0, z_0)$

لإيجاد معادلات المستقيم المار من C و المعامد للمستوي السابق:

- 1- نأخذ ناظم المستوي $\vec{n}(a, b, c)$ فيكون ذاته شعاع توجيه للمستقيم.
- 2- و لدينا نقطة فيكمين مباشرة التعويض في قانون التمثيل الوسيطى .

مثال (1)

أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من

النقطة $A(0,3,-2)$ و المعامد للمستوي P

الذي معادلته : $P: 2x - y - 3z = 1$

الحل

التمرين (1)

في كل من الحالتين أوجد تمثيلاً وسيطياً للفصل

المشترك للمستويين P_1, P_2

(صيغة ثانية للسؤال: أوجد معادلات المستقيم

المحدد بتقاطع المستويين P_1 و P_2)

1) $P_1: x+y=2$
 $P_2: x+z=1$

الحل

2) $P_1: -x+y+z=3$
 $P_2: 2x-y+2z=1$

الحل

$$P_2: x - y + z + 5 = 0$$

الحل

يتم طرح الأسئلة بثلاث صيغ.. سنراها معاً في
التمارين الآتية.





وإذا كان نصف المستقيم يمر من النقطتين A, B
و بدايته A فيكون رمزه $[AB]$

أي يجب أن تكون بداية الشعاع هي نفسها بداية نصف المستقيم

2- نختار النقطة A (حصراً نقطة البداية)

$$t \in [0, +\infty[\text{ e } -3$$

أما إذا كان له نهاية و ليس له بداية (AB)

1- أوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ في كلٍ من الحالات التالية:

$$\spadesuit \quad \Delta: \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\spadesuit \quad \Delta: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases}$$

مثال (1)

ليكن لدينا المستويين:

$$\mathcal{P}: 2x + y - z - 8 = 0$$

$$\mathcal{Q}: x - y + 2z + 4 = 0$$

أثبت أن المستقيم d الذي معادلته الوسيطة:

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$

الخلاصة:

يكفي لكي يكون d هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ هو أن تنتمي كل نقطة من نقاط المستقيم إلى كلا المستويين ((أي يجب أن تحقق المعادلات الوسيطة لـ d معادلتين المستويين وذلك من أجل كل $t \in \mathbb{R}$))

• نعوض معادلات المستقيم في $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} 2(t) + (2 - 5t) - (4 - 3t) - 8 &= 0 \\ \Rightarrow 2t + 2 - 5t - 4 + 3t - 8 &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

وبالتالي المستقيم d محتوي في المستوي $\mathcal{P}$

جميع نقاطه تنتمي للمستوي $\mathcal{P}$

• نعوض معادلات المستقيم في $\mathcal{Q}$:

$$\begin{aligned} (t) - (2 - 5t) + 2(4 - 3t) + 4 &= 0 \\ \Rightarrow t - 2 + 5t + 8 - 6t + 4 &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

أيضاً المستقيم d محتوي في المستوي $\mathcal{Q}$

مما سبق نخلص إلى أن d هو الفصل المشترك

للمستويين $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$

الكرة في الفراغ

تعريف الكرة: مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد

عن المركز Ω بعداً ثابتاً R ندعوه نصف القطر

2) كيف نوجد معادلة كرة:

معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها r :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

مثال 1:

اكتب معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(1,2,3)$ ونصف قطرها $r = 3$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

اكتب معادلة الكرة التي مركزها $A(1,2,-1)$ وتمر من $B(0,1,1)$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

كيفية صياغة أسئلة الكرة:

1) كيف نثبت أن نقطة ما A تنتمي إلى الكرة؟

نحسب بعد النقطة A عن المركز Ω أي نحسب المسافة $|\overrightarrow{\Omega A}| = \Omega A$

ونميز حالتين:

- a. إذا كان $\Omega A = r$ فالنقطة A تنتمي إلى الكرة.
- b. إذا كان $\Omega A \neq r$ فالنقطة A لا تنتمي إلى الكرة.

مثال (1)

أي من النقاط التالية:

$$A(3,2,-1), B(2,0,1), C(1,-1,2)$$

تنتمي إلى الكرة التي مركزها $\Omega(2,0,2)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{2}$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



$$x^2 + ax + y^2 + by + z^2 + cz + d = 0$$

2- نتمم الی مربع کامل

تذكر: كيف نتمم إلى مربع كامل؟؟

أ- نضيف ونطرح مربع نصف أمثال الدرجة الأولى

ب- نضع المطابقة

$$^2(\text{جذر الثاني، إشارة الاوسط، جذر الاول})$$

3- نحصل على الشكل:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = K$$

ونميز الحالات التالية:

➤ إذا كان $k < 0$ فإن مجموعة النقاط خالية $\emptyset$

➤ إذا كان $k = 0$ فهي تمثل النقطة

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

➤ إذا كان $k > 0$ فالمعادلة تمثل كرة مركزها

$$R = \sqrt{k} \, \text{Im} \, \mu \, \Omega(x_0, y_0, z_0)$$

التمرين (1)

يُبين أي من المعادلات التالية تمثل كرة في كل من الحالات التالية:

$$1. \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 2 = 0$$

مثال (3)

اوجد معادلة الكرة S التي تقبل القطعة $[AB]$

قطراً لها حيث $A(2,1,1)$, $B(-1,1,0)$

الحل

3) كيف نحدد أن معادلة ما تمثل كرة:

نعطى معادلة من الشكل:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

ويجب معرفة فيما إذا كانت المعادلة السابقة هي معادلة كرة أم نقطة أم هي لا تمثل شيء (خالية) لذلك تتبع الخطوات التالية:

1- نرتب المعادلة بحيث نضع الحدود التي تحوي x معاً والحدود التي تحوي y معاً والحدود التي تحوي z معاً

4. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 10 = 0$

المسألة (1)

في معلم متجانس تأمل النقطتين :

$A(2, -1, 2) \text{ , } B(-2, 1, -2)$

نقرن بكل نقطة من الفراغ $M(x, y, z)$ المقدار:

$$f(M) = MA^2 + MB^2$$

1- اكتب $f(M)$ بدلالة x, y, z

2- بين طبيعة مجموعة النقاط المحققة للشرط

$$f(M) = 18$$

3- بين طبيعة مجموعة النقاط Γ المحققة للشرط :

$$f(M) = 30$$

4- نفرض عدداً حقيقياً k ، ما الشرط الذي يجب ان يحققه العدد k لتمثل مجموعة النقاط M المحققة للشرط المحققة للشرط $f(M) = k$ كرة مركزها المبدأ

الحل

2. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 10 = 0$

3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = -1$

المسألة (2)

نتأمل في معلم متجانس النقطتين :

$$A(1,1,1) , B(0,-1,-1)$$

أعط معادلة لمجموعة النقاط $M(x,y,z)$
المحققة للشرط :

$$MA = 2MB$$

و ماذا طبيعة هذه النقاط؟

الحل



بعد نقطة عن مستوي

في معلم متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تتأمل نقطة

$A(x_0, y_0, z_0)$ و مستوي P معادلته :

$$p: ax + by + cz + d = 0$$

(يجب أن يكون الطرف الثاني صفراً أو ننقل جميع الحدود إلى جهة واحدة).

عندئذ يُعطى بعد النقطة A عن المستوي P

الذي نرسم له بالرمز $dis(A, P)$ بالقانون:

$$dis(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مثال (1)

احسب بعد النقطة $A(2,3,5)$ عن المستوي :

$$P: 2x - 3y + z + 1 = 0$$

المسألة (3)

في معلم المتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تتأمل النقطتين

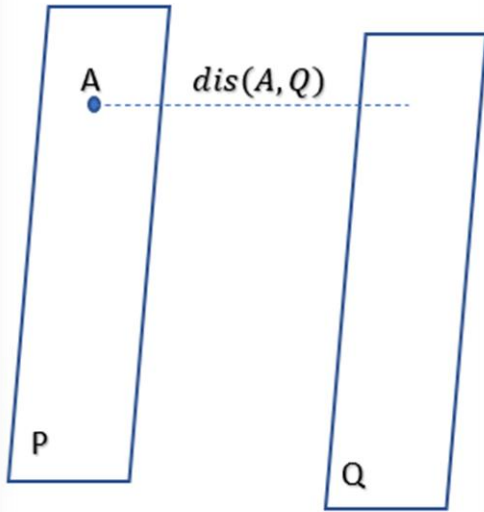
$$A(2,1,2), B(-2,0,2)$$

1- اعط معادلة للمجموعة ε المكونة من

النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

2- ما طبيعة المجموعة ε

الحل



مثال (1)

نتأمل المستويين:

$$P: 2x + y - z - 3 = 0$$

$$Q: 4x + 2y - 2z + 1 = 0$$

1- أثبت أن P, Q متوازيين

2- جد المسافة بين المستويين P, Q

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الحل

$$dis(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$dis(A, P) = \frac{|2(2) - 3(3) + 1(5) + 1|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

مثال (2)

ليكن P المستوي الذي معادلته $x + z = 1$ و النقطة $A(1, 1, -4)$ و المطلوب :

احسب بعد A عن المستوي P

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

■ فوائد واستخدامات dis :

الفائدة الأولى: حساب المسافة بين مستويين متوازيين.

1- نثبت أن المستويين متوازيين (من خلال إثبات أن النواظم مرتبطة خطياً)

2- نأخذ نقطة كيفية A من المستوي الأول و ذلك بوضع $x = 0, y = 0$ في معادلة المستوي الأول و حساب z

3- نحسب بعد النقطة A عن المستوي الثاني فنحصل على المسافة بين المستويين

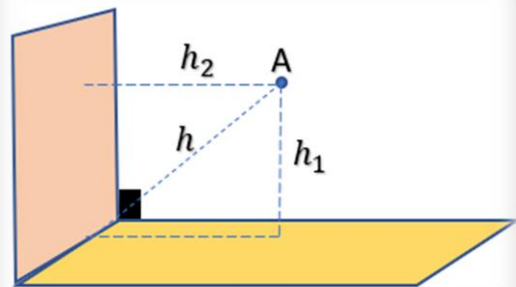
- 1- أثبت أن المستويين P, Q متعامدين
- 2- احسب بعد النقطة $A(2,1,2)$ عن الفصل المشترك للمستويين P, Q

الفائدة الثانية: بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويين متعامدين

لإثبات أن مستويين P, Q متعامدين: نثبت أن $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$

إذا كان لدينا مستويين متعامدين وطلب منا حساب بعد نقطة ما عن الفصل المشترك لهما فإننا نتبع الخطوات التالية:

- 1- نحسب h_1 بعد النقطة عن المستوي الأول
- 2- نحسب h_2 بعد النقطة عن المستوي الثاني
- 3- فحسب مبرهنة فيثاغورث يكون بعد النقطة
عن الفصل المشترك هي $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$



ليكن لدينا المستويان

$$P: x + y - 2z = 1$$

الفائدة الثالثة: الوضع النسبي لكرة مع مستوى.

ليكن لدينا المستوى P الذي معادلته

$$ax + by + cz + d = 0$$

ولتكن S الكرة الذي معادلتها

$$S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

- نأخذ مركز الكرة $\Omega(x_0, y_0, z_0)$
- نحسب بعد Ω عن المستوى P , أي $dis(\Omega, P)$

ادرس وضع P بالنسبة للكرة S

الحل

[illegible]

المسألة (1)

في معلم متجانس تأمل النقاط

$A(1,1,1) , B(3,2,0)$

والمستوي P الذي يمر من النقطة B و يقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له

و المستوى Q الذي معادلته :

$$Q: x - y + 2z + 4 = 0$$

و أخيراً الكرة S التي مركزها A و نصف قطرها AB

- تمييز الحالات:

$dis(\Omega, P) > R^{-1}$ المستوي لا يقطع الكرة.

$$dis(\Omega, P) = R^{-2}$$
المستوي يمس الكرة.

$$dis(\Omega, P) < R^{-3}$$

ويكون المقطع على شكل دائرة.

مثال (1)

ادرس تقاطع الكرة معادلتها:

$$S: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 4$$

مع المستوي

$$P: x + y + z + 4 = 0$$

الحل

[illegible]

مثال (2)

ليكن لدينا المستوى الذي معادلته

$$Q: 2x - y + z + 5 = 0$$

والكرة:

$$S: x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$$



1- أثبت أن المستوى P له المعادلة $2x + y -$

$$z - 8 = 0$$

2- جد معادلة الكرة S

3- أثبت أن المستوى Q مماس للكرة S

4- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d

المر من مركز الكرة S و يعامد

المستوي Q

5- أثبت أن المستويين P, Q متقاطعان في

فصلٍ مشترك Δ

6- أثبت أن Δ يقبل التمثيل الوسيطى :

$$\Delta: \begin{cases} x = s \\ y = 12 - 5s \\ z = 4 - 3s \end{cases} : s \in R$$

الحل



3) المربع

.....

.....

.....

.....

4) المعين

.....

.....

.....

.....

5) المثلث متساوي الأضلاع

.....

.....

.....

.....

6) المثلث القائم

.....

.....

.....

.....

7) المثلث

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الفائدة الرابعة: الهجوم

قبل البدء بالهجوم سنسرد مراجعة لأهم قواعد
مساحات الأشكال المستوية

1) متوازي الأضلاع

.....

.....

.....

.....

2) المستطيل

.....

.....

.....

.....



8) المثلث متساوي الساقين

.....

.....

.....

.....

.....

• القاعدة موجودة في المستوي Oxz

.....

.....

.....

.....

.....

• القاعدة موجودة في المستوي Oyz

.....

.....

.....

.....

.....

• القاعدة موجودة في مستويٍ كيفي.

.....

.....

.....

9) شبه المنحرف

.....

.....

.....

10) شبه المنحرف القائم

.....

.....

.....

حجوم المجسمات الفراغية	
لها قاعدتين	لها قاعدة ورأس
$V = S \times h$: S مساحة القاعدة : h ارتفاع المجسم	$V = \frac{1}{3} S \times h$: S مساحة القاعدة : h ارتفاع (بعد القاعدة عن الرأس)

كنا قد تعلمنا حساب S مساحة القاعدة

وبقي علينا أن ندرس كيف نحسب الارتفاع h
وهنا سنميز 4 حالات:

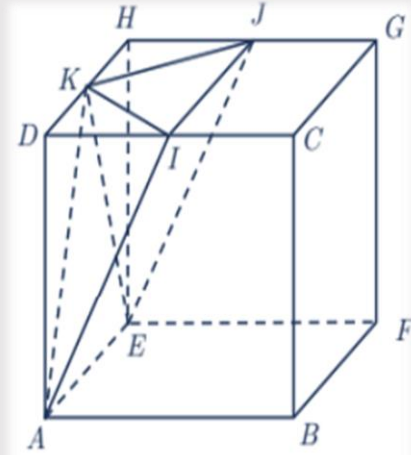
• القاعدة موجودة في المستوي Oxy

.....

.....



التمرين (1)



نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ و لتكن I, J, K منتصفات الأضلاع $[DC], [HG], [DH]$ بالترتيب،

لنأخذ $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ .

1- أوجد احداثيات النقط

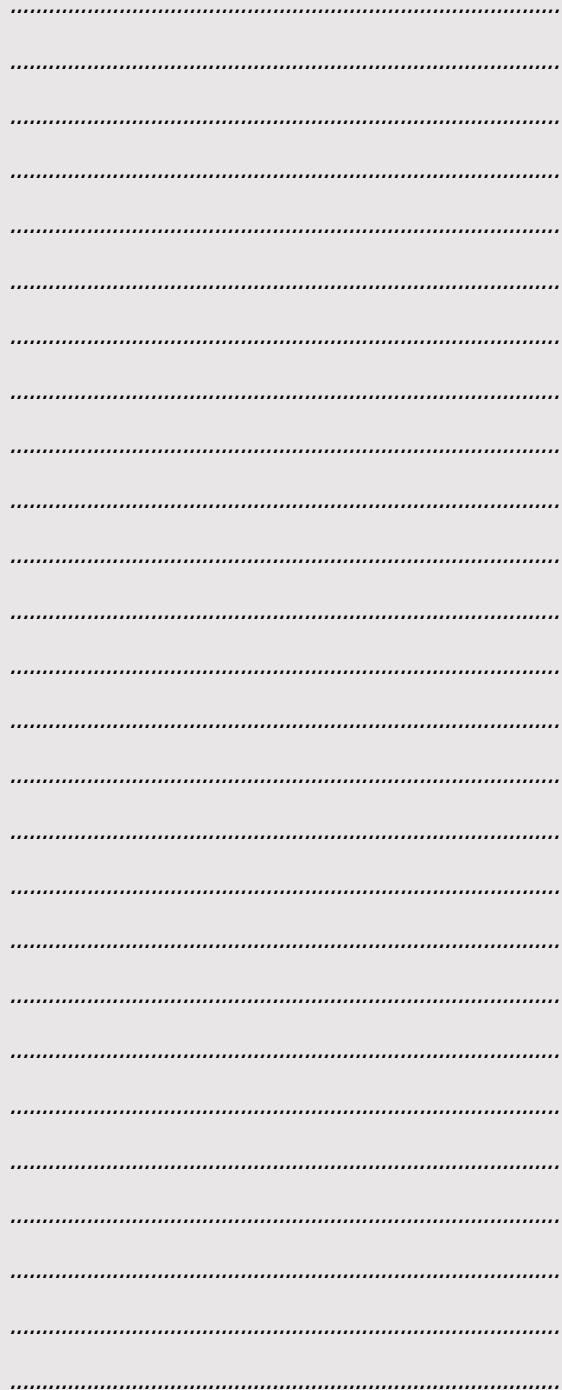
2- اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$

3- احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ و حجم الهرم $KAIJE$

التمرين (2)

n, m عدنان حقيقيان $n, m > 0$ و نتأمل النقط $A(\sqrt{3}, 3, 0)$ و $B(0, 6, 0)$ و $M(0, 6, m)$ و $N(0, 0, n)$ في معلم متجانس . عين و n, m ليكون المثلث MAN قائماً في A و يساوي حجم المجسم $AOBMN$

$5\sqrt{3}$

[illegible]

- [illegible]

بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

1- هل النقطة $A(3,2,-1)$ تنتمي للكرة التي مركزها $(2,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$ ؟

a	نعم	b	لا
---	-----	---	----

2- هل النقطة $C(1,-1,2)$ تنتمي للكرة التي مركزها $(2,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$ ؟

a	نعم	b	لا
---	-----	---	----

3- ان معادلة الكرة التي مركزها $A(1,2,-1)$ وتمر من النقطة $B(0,1,1)$:

a	$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$	b	$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$
c	$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$	d	$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$

4- ان معادلة الكرة التي تقبل القطعة $[AB]$ قطرا لها حيث $A(2,1,1)$ و $B(-1,1,0)$:

a	$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$	b	$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$
c	$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{2}$	d	$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

5- ماذا تمثل المعادلة الآتية:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 2 = 0$$

a	كرة	b	خالية	c	نقطة
---	-----	---	-------	---	------

6- ماذا تمثل المعادلة الآتية:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 10 = 0$$

a	كرة	b	خالية	c	نقطة
---	-----	---	-------	---	------



-7 ماذا تمثل المعادلة الآتية:

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 10 = 0$$

a	كرة	b	خالية	c	نقطة
---	-----	---	-------	---	------

-8 ماذا تمثل المعادلة الآتية:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = -1$$

a	كرة	b	خالية	c	نقطة
---	-----	---	-------	---	------

-9 ان المستويين الآتيان:

$$P: 2x + y - z - 3 = 0, Q: 4x + 2y - 2z + 1 = 0$$

a	متقاطعان	b	متخالفان	c	متوازيان
---	----------	---	----------	---	----------

-10 ان المسافة بين P و Q هي:

a	$\frac{49}{24}$	b	$\frac{7}{\sqrt{24}}$	c	$\frac{\sqrt{24}}{7}$	d	7
---	-----------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	---

-11 ان المستويين الآتيان:

$$P: x + y - 2z = 1, Q: x + y + z = 0$$

a	متقاطعان	b	متخالفان	c	متعامدان
---	----------	---	----------	---	----------

-12 ان بعد النقطة $A(2,1,2)$ عن الفصل المشترك للمستويين P و Q هو:

a	$\sqrt{3}$	b	3	c	9	d	$\sqrt{12}$
---	------------	---	---	---	---	---	-------------

ليكن لدينا المستقيم d تمثيله الوسيطي:

$$d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t - 1; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

والمستقيم d' الفصل المشترك للمستويين:

$$P: x - y - z = 0, Q: x + y + 2z - 4 = 0$$

-13 ان التمثيل الوسيطي للمستقيم d' يعطى بالشكل:

a	$d': \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 4; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 4 \end{cases}$	b	$d': \begin{cases} x = -t \\ y = 3t + 4; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 4 \end{cases}$
c	$d': \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t - 4; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 4 \end{cases}$		$d': \begin{cases} x = -t \\ y = -3t + 4; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 4 \end{cases}$

-14 ان شعاع توجيه المستقيم d :

a	$\vec{u}_{d'}(3,3,-2)$	b	$\vec{u}_{d'}(-1,3,-2)$	c	$\vec{u}_{d'}(1,3,-2)$
---	------------------------	---	-------------------------	---	------------------------

-15 هل المستقيمان d و d' يقعان في مستو واحد؟

a	نعم	b	لا
---	-----	---	----

B	1
A	2
B	3
A	4
A	5
B	6
B	7
C	8
C	9
B	10
C	11
B	12
A	13
C	14
A	15



الأوضاع النسبية والمساقط القائمة



Scan me!

لا تدع
التشتيت
يسيطر
عليك،
وحافظ
على
تركيزك.

وللتمييز بين هاتين الحالتين نضع:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 t + x_1 = a_2 s + x_2 \\ b_1 t + y_1 = b_2 s + y_2 \\ c_1 t + z_1 = c_2 s + z_2 \end{cases}$$

ونحل هذه المعادلات حلاً مشتركاً

✓ محققة $d_1, d_2 \Leftarrow$ متقاطعين في نقطة

$\Leftarrow$ ولتعيين نقطة التقاطع نعوض s الناتجة في معادلاتها أو t في معادلاتها ونحصل على نفس النقطة.

✓ غير محققة $d_1, d_2 \Leftarrow$ متخالفين ولا يشتركان بأي نقطة

(في حال لم ينتج معنا قيمة للمتحول t وحصلنا على عبارة مثل $0 = 0$ فهذا يعني أن المستقيمين منطبقين)

مثال (1)

نتأمل تمثيلين وسيطين لمستقيمين d, d'

$$d: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = -t + 1 \end{cases} ; t \in R$$

$$d': \begin{cases} x = -9s + 4 \\ y = -12s + 4 \\ z = 3s \end{cases} ; s \in R$$

ادرس الوضع النسبي لهما.

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

الوضع النسبي لمستقيمين

ليكن لدينا المستقيمان d_1, d_2 المعرفان وسيطياً بالشكل:

$$d_1: \begin{cases} x = a_1 t + x_1 \\ y = b_1 t + y_1 \\ z = c_1 t + z_1 \end{cases} ; t \in R$$

$$d_2: \begin{cases} x = a_2 s + x_2 \\ y = b_2 s + y_2 \\ z = c_2 s + z_2 \end{cases} ; s \in R$$

ولدراسة الوضع النسبي لهما نتبع الخطوات التالية:

- 1- نوجد أشعة التوجيه $\vec{u}_1(a_1, b_1, c_1), \vec{u}_2(a_2, b_2, c_2)$
- 2- ندرس الارتباط الخطي لهما:

$$\frac{a_1}{a_2} = ? \frac{b_1}{b_2} = ? \frac{c_1}{c_2}$$

ونميز حالتين:

A. إذا كان $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ مرتبطين خطياً فإن المستقيمان d_1, d_2 متوازيين. (أو منطبقين)

B. إذا كان $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ غير مرتبطين خطياً عندئذ ندرس التقاطع فيكون:

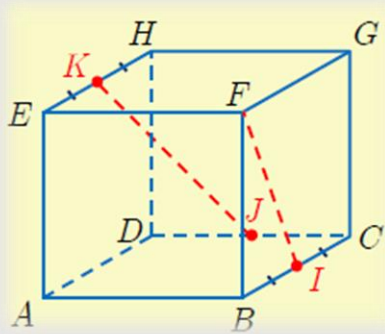
- إما متقاطعين
- أو متخالفين

مثال (1)

مكعب طول ضلعه 1 و نعرف عليه المعلم

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ فيه I منتصف $[BC]$ و J

منتصف $[DC]$ و K منتصف $[EH]$.



1- أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من المستقيمين

$$(IK) \leq (FJ)$$

2- أيتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ) . و هل

تقع النقاط I, K, J, F في مستو واحد.

[illegible]

مثال (1)

اثبت ان المستقيمين d_1, d_2 متعامدين

$$d_1: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3 \end{cases} ; t \in R$$

$$d_2: \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = t + 1 \\ z = 5t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

[illegible]

- **کیف ندرس وقوع مستقیمین فی مستو**

واحد

يقع المستقيمَان في مستوٍ واحد في حال كانا متوازيان أو متقاطعان بنقطة أو منطبقان

أما إذا كانا متخالفان فهما لا يقعان في مستوى واحد حتماً. وبالتالي إذا طُلب منا دراسة وقوع مستقيمين في مستوى واحد، ندرس التقاطع

ولإيجاد المستوى المحدد بهما

نعتبر نقطة التقاطع هي النقطة التي يمر منها
المستوى

توجيه المستقيمين هما شعاعي
توجيه المستوى

التمرين (2)

d و d' مستقيمان معرفان وفق:

$$d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$
$$d': \begin{cases} x = 3s - 4 \\ y = s - 1 \\ z = 5s - 6 \end{cases} : s \in \mathbb{R}$$

1- أثبت أن d, d' متقاطعان في نقطة N

يطلب تعيين إحداثياتها

2- جد معادلة المستوي P المحدد بهذين

المستقيمين

الحل



$$P: 2x + y - 3z - 1 = 0 \quad (2)$$

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t + 7 \end{cases} : t \in R$$

$$P: x + z - 1 = 0 \quad (3)$$

$$d: \begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases} : t \in R$$

• فوائد دراسة وضع مستقيم مع مستوي:

الفائدة الأولى: المساقط القائمة:

أولاً: مسقط نقطة على مستوي.

ليكن P مستوياً معادلته

$$P: ax + by + cz + d = 0$$

الوضع النسبي لمستقيم مع مستوي

لدراسة وضع مستقيم مع مستوي:

1- نعوض معادلات المستقيم في معادلة المستوي

2- نميز الحالات الآتية:

أ- الوصول إلى تناقض $0 = 1$

عندها المستقيم يوازي المستوي

ب- الوصول على مطابقة $0 = 0$

عندها المستقيم محتوي في المستوي

ت- الوصول إلى قيمة معينة لـ t

عندها المستقيم يقطع المستوي في

نقطة، لإيجاد إحداثياتها نعوض قيمة t

في معادلات المستقيم.

مثال (1)

في كل من الحالات الآتية : ادرس وضع

المستوي P مع المستقيم d

$$p: 2x - y - z = 3 \quad (1)$$

$$d: \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 0 \\ z = 4t - 7 \end{cases} : t \in R$$

$$t + 2 + t - (-t + 2) - 4 = 0$$

$$t + 2 + t + t - 2 - 4 = 0$$

$$3t - 4 = 0 \rightarrow t = \frac{4}{3}$$

نعوض في التمثيل الوسيطي:

$$x = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

$$z = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow D' \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

وهي المسقط القائم للنقطة D على المستوي P

فكر!! ماذا تمثل المسافة DD'

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

في معلم متجانس تتأمل النقاط :

$$A(2,1,3), B(0,1,0), C(2,2,0), D(1,0,1)$$

1- جد معادلة المستوي (ABC)

2- جد D' مسقط D القائم على النقطة (ABC)

الحل

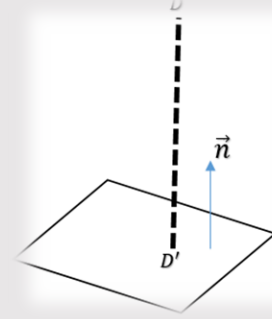
.....

.....

.....

و $D(x_0, y_0, z_0)$ نقطة ما نهدف لإيجاد إحداثيات D'

المسقط القائم للنقطة D على المستوي P



1- نوجد المعادلات الوسيطة للمستقيم d المار من D وشعاع توجيهه هو $\vec{n}$ ناظم المستوي P

2- نوجد تقاطع هذا المستقيم مع المستوي فنحصل على D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي P

مثال (1)

ليكن المستوي $P: x + y - z - 4 = 0$ والنقطة $D(2,0,2)$ أوجد D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي P

الحل

1. نوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة $D(2,0,2)$ وشعاع توجيهه هو ناظم المستوي P حيث ناظمه $\vec{n}(1,1,-1)$

$$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

2. نوجد نقطة تقاطع d مع المستوي P بتعويض إحداثيات المستقيم في معادلة المستوي P



أ- احسب احداثيات H

ب- نضع $h = OH$ احسب h وماذا تستنتج؟؟

الحل

التمرين (1)

ليكن P مستويًا معادلته

$$P: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$$

ولتكن النقاط: $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$

(1) اثبت أن $P: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ هي معادلة المستوى (ABC)

(2) استنتج تمثيلًا وسيطياً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوى (ABC)

(3) لتكن H نقطة تقاطع Δ مع المستوى P



مثال (1)

ليكن لدينا المستقيم d , معادلته الوسيطة:

$$d: \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

والنقطة $D(1,1,1)$ جد D' مسقط النقطة D على
المستقيم d

[illegible]

مثال (2)

ليكن d الفصل المشترك للمستويين

$$\begin{cases} P_1: x - y + 2z - 4 = 0 \\ P_2: 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

$A(0,3,1)$ g

ثانياً: مسقط نقطة على مستقيم:

1- نوجد معادلة المستقيم المار من النقطة
المراد إسقاطها ومعامد للمستقيم (الناظم
نفسه شعاع التوجيه)

2- نوجد إحداثيات نقطة التقاطع بين المستقيم والمستوي فتكون هي المسقط المطلوب.

(1) عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d

(2) عين A' المسقط القائم للنقطة A على
المستقيم d

الحل

بعد نقطة عن مستقيم



لحساب بعد النقطة D عن المستقيم d

i. نوجد D' المسقط القائم للنقطة D على
المستقيم d

ii. نحسب $||\overrightarrow{DD'}||$ فنحصل على بعد D عن
المستقيم d .

التمرين (1)

في معلم متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة
 $A(3, -1, 2)$ والمستويان:

$$P: 2x - y + z - 4 = 0$$

$$Q: x + y + 2z - 5 = 0$$

1- اثبت تقاطع المستويين P, Q

2- عين تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك
 d

3- اوجد A' المسقط القائم للنقطة A على
المستقيم d

4- استنتج بعد A عن المستقيم d



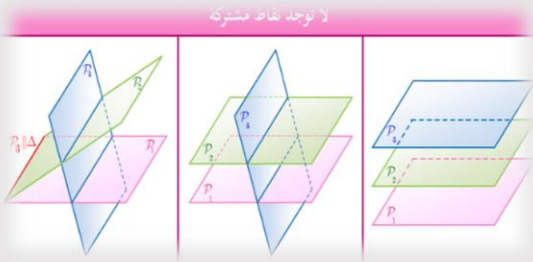
الفائدة الثانية: دراسة وضع 3 مستويات

لدراسة وضع 3 مستويات P, Q, R :

- 1- نوجد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لمستويين P, Q و ليكن d
- 2- نعوض التمثيل الوسيطي لهذا الفصل في المستوي الثالث R

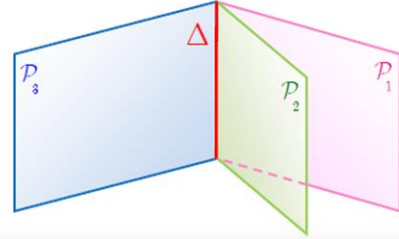
ونميز الحالات الآتية:

- إذا كان المستقيم يوازي المستوي فالمستويات الثلاثة لا تتقاطع أبداً



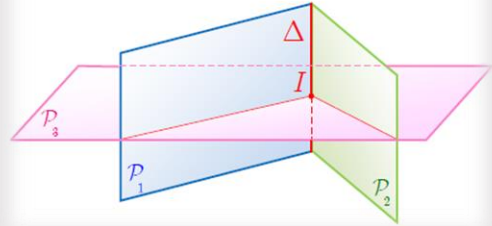
- إذا كان المستقيم محتوي في المستوي فالمستويات الثلاثة متقاطعة بهذا الفصل المشترك d

يوجد مستقيم مشترك



- إذا كان المستقيم يقطع المستوي في نقطة N فالمستويات الثلاثة متقاطعة في هذه النقطة N

توجد نقطة وحيدة مشتركة



مثال (1)

$$\begin{aligned} P_1: -x + 2y + 3z &= 5 \\ P_2: 3x - y - 4z &= -5 \\ P_3: 2x + 3y - 2z &= -2 \end{aligned}$$

- 1- أثبت أن P_1, P_2 متقاطعين في فصل مشترك d وأوجد تمثيلاً وسيطياً له
- 2- أثبت أن المستقيم d يقطع المستوي في P_3 في نقطة يُطلب تعيينها
- 3- استنتج نقطة تقاطع المستويات P_1, P_2, P_3

المسألة (1)

في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$$A(1,1,0), B(1,2,1), C(4,0,0)$$

- 1- أثبت أن النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.

2- أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالشكل:

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

3- ليكن المستويان P و Q معادليهما:

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$

$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في فصل مشترك d الذي تمثيله الوسيط:

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

4- ماهي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) ؟

5- احسب بعد A عن المستقيم d .

الحل



المسألة (2)

نتأمل في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$Q: x + y + z - 1 = 0$$

$$R: x - z - 1 = 0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان

مشترك Δ , اكتب تمثيله الوسيطي.

2- تحقق أن المستوي يعامد Δ ويمر بالنقطة A .

3- أثبت أن المستويات P, Q, R تتقاطع بالنقطة I يطلب تعيين احداثياتها.

4- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ .

الحل



المسألة (3)

في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان:

$$P: x - y + 2z - 1 = 0$$

$$Q: 2x + y + z + 1 = 0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان في فصل مشترك d .

2- اكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم d .

3- اكتب معادلة المستوي R المار من A المعامد للمستويين P و Q .

4- جد إحداثيات B الناتجة من تقاطع المستوي R والمستقيم d .

5- احسب بعد النقطة A عن المستقيم d .

6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q .



الحل





$$3) \begin{cases} P_1: 2x - y + 3z = 0 \\ P_2: x + 2y + z = 0 \\ P_3: 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} P_1: x - 2y - 3z = 3 \\ P_2: 2x - y - 4z = 7 \\ P_3: 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$$



مسائل وتمارين (1)

1- بين في كل من الحالات التالية إذا كان المستوى P, Q متعامدين.

$$P: x + 2y - 5z + 7 = 0$$

$$Q: x + 2y + z - 3 = 0$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2- احسب بعد النقطة $A(0, \sqrt{2}, 1)$ عن المستوى P الذي معادلته:

$$P: x + y - 2z + 4 = 0$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$4) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x - 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3- نتأمل في المعلم المتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

النقطتين $A(1, -1, 2), B(2, 0, 4)$

والمستوي P الذي معادلته

$$x - y + 3z - 4 = 0$$

جد معادلة المستوي Q العمودي على P ويمر

بالنقطتين A, B

الحل

4- في معلم متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل

النقطتين $A(2, -1, 0), B(-1, 3, 5)$

والمستوي p الذي يقبل معادلة

$$2x - 3y + z - 5 = 0$$

أثبت ان المستقيم (AB) يقطع المستوي P

وعين إحداثيات c نقطة التقاطع.

الحل



6- في المعلم المتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل
النقاط $A(1,2,0)$, $B(0,0,1)$, $C(1,5,5)$

يطلب تعيين D' المسقط القائم للنقطة
 $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC)

الحل

5- في معلم متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل
النقطتين $A(2,5,3)$, $B(-1,0,-1)$ ومستويًا
 P يقبل $\vec{u}(1,1,-2)$, $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين
موجهين اثبت أن المستقيم (AB) عمودي
على P

الحل



[illegible]

8- في معلم متجانس، اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ، وتمر من النقطة A في كل من الحالات الآتية،

$$\Omega(0,0,1), A(1,1,1) \quad (1)$$

الحل

[illegible]

7- نتأمل في معلم المتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط
 $A(2,1,3)$, $B(1,0,-1)$, $C(4,0,0)$
 $D(0,4,0)$, $E(1,-1,1)$

1- اثبت ان النقاط E, D, C ليست واقعة على استقامة واحدة.

2- أثبت ان المستقيم (AB) عمودي على المستوى (CDE)

9- في معلم المتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تتأمل النقاط $A(2, -2, 2)$ والمستوي

$$P: x + 2y + 3z = 5$$

اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس P

الحل

$$\Omega (0, 5, -1), A(1, -2, 3) \quad (2)$$

التمرين (2)

تتأمل في معلم متجانس النقاط:

$$A(2, 1, 3), B(1, 0, -1), C(4, 0, 0), \\ D(0, 4, 0), E(1, -1, 1)$$

أثبت أن النقاط E, D, C ليست واقعة على استقامة واحدة

أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE)



عين إحداثيات النقطة D' المسقط القائم للنقطة
 D على المستوي (ABC)

الحل

الحل

التمرين (3)

في معلم متجانس تتأمل النقاط:

$A(2,4,3), B(4,-2,3), C(1,-1,1), D(3,3,-3)$

أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة
واحدة



بنوك الأمتة

1- ان المستويان الاتيان:

$$P: 2x + y - z - 3 = 0, Q: 4x + 2y - 2z + 1 = 0$$

a	متقاطعان	b	متخالفان	c	متوازيان
---	----------	---	----------	---	----------

2- ان المسافة بين P و Q هي:

a	$\frac{49}{24}$	b	$\frac{7}{\sqrt{24}}$	c	$\frac{\sqrt{24}}{7}$	d	7
---	-----------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	---

3- ان المستويان الاتيان:

$$P: x + y - 2z = 1, Q: x + y + z = 0$$

a	متقاطعان	b	متخالفان	c	متعامدان
---	----------	---	----------	---	----------

4- ان بعد النقطة $A(2,1,2)$ عن الفصل المشترك للمستويين P و Q هو:

a	$\sqrt{3}$	b	3	c	9	d	$\sqrt{12}$
---	------------	---	---	---	---	---	-------------

ليكن لدينا المستقيم d تمثيله الوسيط:

$$d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t - 1; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

والمستقيم d' الفصل المشترك للمستويين:

$$P: x - y - z = 0, Q: x + y + 2z - 4 = 0$$



5- ان التمثيل الوسيطى للمستقيم d' يعطى بالشكل:

$d': \begin{cases} x = -t \\ y = 3t + 4; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 4 \end{cases}$	b	$d': \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 4; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 4 \end{cases}$	a
$d': \begin{cases} x = -t \\ y = -3t + 4; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 4 \end{cases}$		$d': \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t - 4; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 4 \end{cases}$	c

6- ان شعاع توجيه المستقيم d :

$\vec{u}_{d'}(1,3,-2)$	c	$\vec{u}_{d'}(-1,3,-2)$	b	$\vec{u}_{d'}(3,3,-2)$	a
------------------------	---	-------------------------	---	------------------------	---

7- هل المستقيمان d و d' يقعان في مستو واحد؟

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

ليكن $P: 2x - y + z - 8 = 0$ والمستقيم d المعطى وسطيا بالشكل

$$d: \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

8- ان احداثيات نقطة تقاطع المستوي و المستقيم هي :

$M(-1,-2,8)$	c	$M(-1,2-8)$	b	$M(1,-2,8)$	a
--------------	---	-------------	---	-------------	---

9- ان المستقيمان :

$$(d): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 3 \end{cases}, (d'): \begin{cases} x = s \\ y = -3s - 3; s \in \mathbb{R} \\ z = -s + 1 \end{cases}$$

متوازيان	d	متقاطعان في نقطة	c	متخالفان	b	متقاطعان	a
----------	---	------------------	---	----------	---	----------	---

10- هل المستقيمان d و d' في مستو واحد؟

لا	b	نعم	a
----	---	-----	---

لدينا المستويات الثلاثة الآتية:

$$P_1: -x + 2y + 3z = 5$$

$$P_2: 3x - y - 4z = -5$$

$$P_3: 2x + 3y - 2z = -2$$

11- ان المستويين P_1 و P_2 :

محتويان	d	متوازيان	c	متخالفان	b	متقاطعان	a
---------	---	----------	---	----------	---	----------	---

12- ان التمثيل الوسيطى للمستقيم d :

a	$d: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t + 2; t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$	b	$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ -t - 2; t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$	c	$d: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t + 2; t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$
---	--	---	--	---	--

13- ان المستويات الثلاثة متقاطعة بالنقطة :

a	$I(1,0,2)$	b	$I(2,0,-1)$	c	$I(2,0,1)$
---	------------	---	-------------	---	------------

14- في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$$A(1,1,0), B(1,2,1), C(4,0,0)$$

ان معادلة المستوي (ABC) تعطى بالشكل :

a	$3x + 9y - 9z - 6 = 0$	b	$2x + 6y - 3z - 4 = 0$	c	$x + 3y - 3z - 4 = 0$
---	------------------------	---	------------------------	---	-----------------------

15- ليكن المستويان P و Q معادلتيهما :

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$

$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

ان المستويين يتقاطعان في فصل مشترك d الذي تمثيله الوسيطى:

a	$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$	b	$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ -3; t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$	c	$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$
---	--	---	--	---	--

16- ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) ؟

a	$M\left(-\frac{1}{2}, -3, -\frac{3}{2}\right)$	b	$M\left(\frac{1}{2}, -3, \frac{3}{2}\right)$	c	$M\left(-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$
---	--	---	--	---	--

17- في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط $A(1,2,0), B(0,0,1), C(1,5,5)$ ان الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$:

a	مرتبطين خطيا	b	متوازيان	c	غير مرتبطين خطيا
---	--------------	---	----------	---	------------------

18- ان معادلة المستوي (ABC) :

a	$13x - 5y - 3z + 3 = 0$	b	$9x - 5y + 3z - 3 = 0$	c	$13x - 5y + 3z - 3 = 0$
---	-------------------------	---	------------------------	---	-------------------------

19- ان احداثيات D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC) :

a	$(2,4,1)$	b	$(2,4,-1)$	c	$(-2,4,-1)$
---	-----------	---	------------	---	-------------

في معلم متجانس نتأمل النقاط :

$$A(2,4,3), B(4,-2,3), C(1,-1,1), D(3,3,-3)$$

20- ان النقاط A, B, C :

a	تقع على استقامة واحدة	b	لا تقع على استقامة واحدة
---	-----------------------	---	--------------------------

21- ان معادلة المستوي (ABC) :

$3x + y - 4z - 2 = 0$	c	$3x + y - 4z + 2 = 0$	b	$3x + y + 4z + 2 = 0$	a
-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---

22- ان احداثيات المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC) :

$D''(0,2,1)$	c	$D''(0,-2,1)$	b	$D'(1,2,1)$	a
--------------	---	---------------	---	-------------	---

ليكن لدينا المستقيم d معادلته الوسطية:

$$d: \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

23- والنقطة D(1,1,1) ان D' مسقط النقطة D على المستقيم d:

$D'(\frac{13}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{5})$	c	$D'(\frac{14}{3}, \frac{12}{3}, \frac{9}{3})$	b	$D'(\frac{14}{5}, \frac{12}{5}, \frac{9}{5})$	a
---	---	---	---	---	---

24- ان احداثيات نقطة تقاطع الثلاث مستويات هي:

$$\begin{aligned} P_1: 5x + y + z &= -5 \\ P_2: 2x + 13y - 7z &= -1 \\ P_3: x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

$I(-8, -13, 22)$	c	$I(-8, 13, 22)$	b	$I(-8, 13, -22)$	a
------------------	---	-----------------	---	------------------	---

25- ان احداثيات نقطة تقاطع الثلاث مستويات هي:

$$\begin{aligned} P_1: x - 2y - 3z &= 3 \\ P_2: 2x - y - 4z &= 7 \\ P_3: 3x - 3y - 5z &= 8 \end{aligned}$$

$I(2, 1, -1)$	c	$I(2, -1, -1)$	b	$I(2, 1, 1)$	a
---------------	---	----------------	---	--------------	---

26- ان التمثيل الوسيطى للمستقيم الناتج عن تقاطع المستويات الثلاثة:

$$\begin{aligned} P_1: 2x - y + 3z &= 0 \\ P_2: x + 2y + z &= 0 \\ P_3: 3x - 4y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

$d: \begin{cases} x = 7t \\ y = t \\ z = 5t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	c	$d: \begin{cases} x = -7t \\ y = t \\ z = 5t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	b	$d: \begin{cases} x = 7t \\ y = t \\ z = -5t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	a
---	---	--	---	--	---

27- ان المستويات الثلاثة :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= 1 \\ 3x - 4y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

متقاطعة بمستقيم	c	متقاطعة بنقطة	b	متخالفة	a
-----------------	---	---------------	---	---------	---

في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تتامل النقاط:

$$A(-1, 2, 3), B(2, 1, 1), C(-3, 4, -1), D(3, 1, 1)$$

28- ان معادلة المستوي (ABC) هي :

$2x + 4y + z - 9 = 0$	c	$x - z + 3 = 0$	b	$-3x + 2y + 6 = 0$	a
-----------------------	---	-----------------	---	--------------------	---

29- ان التمثيل الوسيطى للمستقيم d المار من D والعمودي على (ABC) هو:

$d: \begin{cases} x = 5t + 6 \\ y = -2t + 2 \\ z = -\frac{3}{2}t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	c	$d: \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 0 \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	b	$d: \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 4t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	a
--	---	--	---	---	---

30- ان بعد D عن المستوي (ABC) هو:

$\frac{2}{\sqrt{21}}$	c	$\sqrt{6}$	b	3	a
-----------------------	---	------------	---	---	---

31- ان حجم الهرم $D - ABC$ هو :

25	c	$2\sqrt{21}$	b	$4\frac{4}{3}$	a
----	---	--------------	---	----------------	---

في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تتامل النقاط:

$$A(2, -2, 2), B(1, 1, 0), C(1, 0, 1), D(0, 0, 1)$$

32- ان معادلة المستوي (BCD) هي:

$x - z = 1$	c	$y + z - 1 = 0$	b	$x - 5y + z + 3 = 0$	a
-------------	---	-----------------	---	----------------------	---

33- الوسيطى للمستقيم Δ المار من النقطة A والمعامد للمستوي (BCD) هو:

$\Delta: \begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 1 \\ y = 5t - 7 \\ z = -t - 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	c	$\Delta: \begin{cases} x = 0 \\ y = t - 3 \\ z = 5t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	b	$\Delta: \begin{cases} x = -2 \\ y = t - 2 \\ z = t + 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	a
---	---	---	---	---	---

34- ان احداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD) هي:

$(1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	c	$(0, -2, 1)$	b	$(2, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$	a
----------------------------------	---	--------------	---	----------------------------------	---

35- ان معادلة الكرة التي تقبل $[AD]$ قطرا لها هي :

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$	c	$x^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 16$	b	$(x + \frac{3}{2})^2 + (y - 7)^2 + z^2 = \frac{3}{2}$	a
---	---	------------------------------------	---	---	---

في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان:

$$P: x - y + 2z - 1 = 0$$

$$Q: 2x + y + z + 1 = 0$$

36- ان التمثيل الوسيطى للمستقيم d الفصل المشترك للمستويين Q, P المتقاطعين هو:

$\Delta: \begin{cases} x = -t \\ y = \frac{3}{2}t + 1 \\ z = -t - 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	c	$\Delta: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2}t + 3 \\ z = -t - 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	b	$\Delta: \begin{cases} x = t + 5 \\ y = -t + \frac{1}{2} \\ z = t + 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	a
---	---	--	---	---	---

37- ان معادلة المستوي R المار من A والمعامد لكل من المستويين Q, P هو:

$x + 3y - z - 1 = 0$	c	$x + 3y + z - 6 = 0$	b	$5x - y + 2 = 0$	a
----------------------	---	----------------------	---	------------------	---

38- ان احداثيات النقطة B الناتجة عن تقاطع المستقيم d والمستوي R هي:

$(-3, 2, 3)$	c	$(0, -2, 1)$	b	$(\frac{3}{2}, -1, -\frac{3}{2})$	a
--------------	---	--------------	---	-----------------------------------	---

39- ان بعد النقطة A عن المستقيم d هو:

$\frac{2}{\sqrt{21}}$	c	$\sqrt{6}$	b	3	a
-----------------------	---	------------	---	---	---

40- ان معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q هي:

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$	c	$x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + (x-3)^2 = 1$	b	$(x+3)^2 + (y-5)^2 + z^2 = \frac{3}{2}$	a
-----------------------------------	---	---	---	---	---

في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$$A(1,1,0), B(1,2,1), C(4,0,0)$$

والمستويان:

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$

$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

41- ان معادلة المستوي (ABC) هي:

$-x + 2y + 5z = 3$	c	$2x - z + 1 = 0$	b	$x + 3y - 3z - 4 = 0$	a
--------------------	---	------------------	---	-----------------------	---

42- ان المستويين Q, P يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطى:

$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	c	$d: \begin{cases} x = -t + \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = 5t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	b	$d: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -5 \\ z = 2t - 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$	a
---	---	---	---	--	---

43- ان نقطة تقاطع المستويات Q, P و (ABC) هي:

$(0, -4, 1)$	c	$(-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2})$	b	$(\frac{3}{4}, -1, -5)$	a
--------------	---	----------------------------------	---	-------------------------	---

44- ان بعد النقطة A عن المستقيم d :

$\frac{5}{2}$	c	$\frac{34}{4}$	b	$\sqrt{\frac{7}{2}}$	a
---------------	---	----------------	---	----------------------	---

في معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$Q: x + y + z - 1 = 0$$

$$R: x - z - 1 = 0$$

45- ان المستويين P, Q يتقاطعان بفصل مشترك Δ تمثيله الوسيطي:

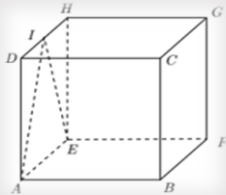
$\Delta: \begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = t \\ z = t - 2 \end{cases}$	c	$\Delta: \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$	b	$\Delta: \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = -2t + 1 \\ z = \frac{3}{2}t - 5 \end{cases}$	a
--	---	--	---	---	---

46- ان المستويات P, Q, R تتقاطع بنقطة احداثياتها:

$(-3,2,1)$	c	$(\frac{1}{2}, 3, 0)$	b	$(1,0,0)$	a
------------	---	-----------------------	---	-----------	---

47- ان بعد النقطة A عن المستقيم Δ :

2	c	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	b	5	a
---	---	----------------------	---	---	---



ليكن المكعب المجاور طول حرفه 1 ونعرف عليه المعلم

المتجانس $(A, \vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$ و I منتصف $[DH]$:

48- ان إحداثيات النقطة A هي:

$A(0,1,0)$	d	$A(1,0,1)$	c	$A(1,0,0)$	b	$A(0,0,0)$	a
------------	---	------------	---	------------	---	------------	---

49- ان إحداثيات النقطة D هي:

$D(1,0,1)$	d	$D(1,1,1)$	c	$D(0,0,1)$	b	$D(0,1,1)$	a
------------	---	------------	---	------------	---	------------	---

50- ان إحداثيات النقطة H هي:

$H(0,1,1)$	d	$H(0,0,1)$	c	$H(1,1,1)$	b	$H(0,1,0)$	a
------------	---	------------	---	------------	---	------------	---

51- ان إحداثيات النقطة I هي:

$I(0,0,1)$	d	$I(1, \frac{1}{2}, 1)$	c	$I(0, \frac{1}{2}, 1)$	b	$I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$	a
------------	---	------------------------	---	------------------------	---	----------------------------------	---

52- إن إحداثيات النقطة O مركز ثقل المثلث AEI هي:

$O\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	d	$O\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$	c	$O\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$	b	$O\left(0, 4, \frac{1}{3}\right)$	a
---	---	---	---	---	---	-----------------------------------	---

53- إن المثلث AIE :

متساوي الساقين	b	متساوي الأضلاع	c	قائم الزاوية	d	غير ذلك	a
----------------	---	----------------	---	--------------	---	---------	---

54- إن مركبات الشعاع $\vec{AI}$ هي:

$\vec{AI} = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$	b	$\vec{AI} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	c	$\vec{AI} = (0, 1, 1)$	d	$\vec{AI} = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$	a
---	---	---	---	------------------------	---	---	---

55- إن مركبات الشعاع $\vec{AE}$ هي:

$\vec{AE} = (0, 1, 0)$	b	$\vec{AE} = (-1, 1, 0)$	c	$\vec{AE} = (0, 1, 1)$	d	$\vec{AE} = (1, 1, 0)$	a
------------------------	---	-------------------------	---	------------------------	---	------------------------	---

56- إن طويلة الشعاع $\vec{AI}$ هي:

$AI = \frac{\sqrt{5}}{2}$	b	$AI = 1$	c	$AI = \frac{3}{2}$	d	$AI = \frac{4}{3}$	a
---------------------------	---	----------	---	--------------------	---	--------------------	---

57- إن طويلة الشعاع $\vec{AE}$ هي:

$AE = 4$	b	$AE = \frac{1}{2}$	c	$AE = 1$	d	$AE = \frac{5}{3}$	a
----------	---	--------------------	---	----------	---	--------------------	---

B	49	B	37	C	25	A	13	C	1
D	50	C	38	B	26	C	14	B	2
B	51	B	39	A	27	C	15	C	3
C	52	C	40	C	28	C	16	B	4
A	53	A	41	A	29	C	17	A	5
D	54	C	42	C	30	C	18	C	6
A	55	B	43	B	31	B	19	A	7
A	56	A	44	B	32	B	20	C	8
C	57	B	45	A	33	D	21	B	9
		A	46	A	34	A	22	B	10
		C	47	C	35	A	23	A	11
		A	48	A	36	B	24	C	12



الدرس الثامن

8

المخروط والاسطوانة والمجموعات النقطية

المثابرة

هي مفتاح

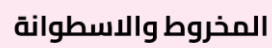
النجاح، فلا

تياس مهسا

واجهتك

الصعوبات.



[illegible]

المجموعات النقطية

المجموعات النقطية سندرسها من خلال المسائل والتمارين:

المسألة (1)

في معلم متجانس تتأمل النقطتين :

$$A(2, -1, 2), B(-2, 1, -2)$$

نقرن بكل نقطة من الفراغ $M(x, y, z)$ المقدار:

$$f(M)^2 = MA^2 + MB^2$$

1- اكتب $f(M)$ بدلالة x, y, z

2- بين طبيعة مجموعة النقاط ε المحققة
للشرط

$$f(M) = 18$$

3- بين طبيعة مجموعة النقاط Γ المحققة
للشرط :

$$f(M) = 30$$

4- نفرض عدداً حقيقياً k , ما الشرط الذي يجب
ان يحققه العدد k لتمثل مجموعة النقاط
 M المحققة للشرط المحققة للشرط
 $f(M) = k$ كرة مركزها المبدأ

الحل



المسألة (2)

نتأمل في معلم متجانس النقطتين:

$$A(1,1,1), B(0,-1,-1)$$

1- أعط معادلة لمجموعة النقاط $M(x, y, z)$

المحققة للشرط :

$$MA = 2MB$$

وماذا طبيعة هذه النقاط؟

الحل

2- صف مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ المحققة

للشرط

$$AM = AB$$

ثم اكتب المعادلة الديكارتية لهذه المجموعة



4- صف مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ المحققة للشرط

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

واكتب معادلتها الديكارتية

[illegible]

3- صف مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ المحققة للشرط:

$$AM = BM$$

ثم اكتب معادلتها الديكارتية

[illegible]

5- صف مجموعة النقاط المحققة للشرط :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

ثم اكتب المعادلة الديكارتية

$$|2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}|$$

المسألة (3)

بين في كلٍ مما يلي مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ المحققة للشرط المعطى:

$$|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}|$$

تجميع حالات مجموعات النقاط $M(x, y, z)$

المستوي المحوري للقطعة $[AB]$	$AM = BM$ أو $ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} $
الكرة التي مركزها A ونصف قطرها $const$	$AM = const$ أو $ \overrightarrow{AM} = const$
الكرة التي قطرها $[AB]$	$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$
المستوي المار من النقطة A ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ (أو $\vec{n}$) ناظماً له	$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ أو :
1- نفرض $M(x, y, z)$ 2- نعوض في المعادلة 3- نصلح ثم نقارن الشكل المختزل مع الأشكال السابقة	أي حالة أخرى

لا تنس الأشكال العامة للأسطوانة والمخروط

$$d': \begin{cases} x = s \\ y = -3s - 3 \\ z = -s + 1 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

وهل المستقيمين d و d' يقعان في مستو واحد؟ فسر إجابتك.

السؤال (4)

نتأمل في المعلم المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتين:

$$A(2,0,1), B(1,-2,1)$$

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

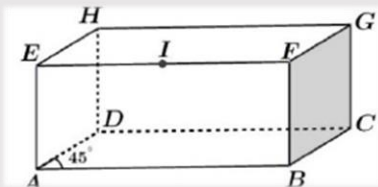
السؤال (5)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي $P: x + 2y + z - 1 = 0$:

احسب بعد النقطة A عن المستوي P ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .

السؤال (6)

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$ وقياس الزاوي $\widehat{DAB}$ يساوي 45° والنقطة I منتصف $[EF]$:



1- احسب $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

2- عين موضع النقطة M التي تحقق:

$$\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{FB} + \frac{1}{2} \vec{GH}$$

أسئلة الدورات

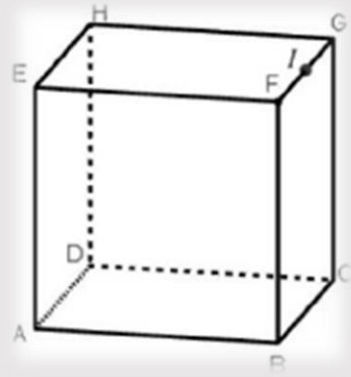
ستقسم أسئلة الدورات إلى:

أسئلة - تمارين - مسائل

سنبدأ بالأسئلة الآن:

السؤال (1)

في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف $[FG]$ والمطلوب:



عين النقطة M التي تحقق:

$$\vec{DM} = \vec{DH} + \vec{DC} + \vec{GI}$$

السؤال (2)

1- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

2- تحقق ان المستوي P الذي معادلته:

$$P: x - y + z + 3 = 0$$

يمس الكرة S .

السؤال (3)

اكتب شعاعي توجيه المستقيمين d و d' :

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

السؤال (7)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$

- 1- اكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم d المار من A وبشبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$.
- 2- أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان.

السؤال (8)

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$ والمستوي:

$$P: 3x - y - 3z - 8 = 0$$

- 1- أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P .
- 2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ، ثم عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P .

السؤال (9)

نتأمل المستويين:

$$P_1: 2x - y + z + 1 = 0$$

$$P_2: x + y - z = 0$$

- 1- تيقن أن المستويين متعامدان.
- 2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك لهما.

السؤال (10)

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستوي $P: 2x + y - 3z + 2 = 0$ والنقطة $A(1,1,-2)$

- 1- أثبت أن النقطة A لا تنتمي للمستوي P .
- 2- اكتب معادلة المستوي Q المار من A والموازي للمستوي P .

السؤال (11)

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط الآتية:

$$A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,0,5), D(6,2,5)$$

- 1- أثبت أن $\vec{AB}, \vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً.
- 2- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

واستنتج أن النقاط D, C, B, A تقع في مستو واحد.

السؤال (12)

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P: 2x + y - 2z - 4 = 0$

- 1- احسب بعد النقطة A عن المستوي P .
- 2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .

السؤال (13)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

- 1- احسب $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ثم استنتج $\cos(\widehat{BAC})$.
- 2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC ، عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$|2\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC}| = |\vec{AB}|$$

السؤال (14)

التمرين (2)

نتأمل الهرم $ABCD - S$ قاعدته مربع طول ضلعه 4 ورأسه S .

وطول كل حرف من حروفه الجانبية 4 والنقطة O مرسوم S القائم على القاعدة:

- 1- احسب $\vec{SA} \cdot \vec{SB}$.
- 2- احسب طول القطر CA ثم احسب $\vec{AC} \cdot \vec{AS}$.
- 3- عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

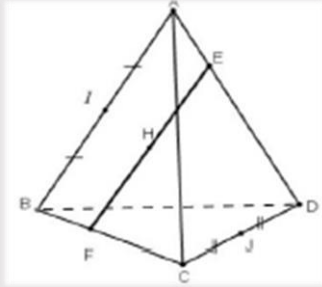
$$(S, 1), (B, 3), (A, 2)$$

التمرين (3)

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. وليكن α عدد حقيقي،
 I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ والنقطتان E و F تحققان:

$$\vec{BF} = \alpha \cdot \vec{BC}, \quad \vec{AE} = \alpha \cdot \vec{AD}$$

وأخيراً H منتصف $[EF]$.



أثبت أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

التمرين (4)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقاط:

$$A(1,0,0), B(4,3,-3), C(-1,1,2), D(0,0,1)$$

- 1- أثبت أن $\vec{AB}, \vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكون من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة:

$$MA = MB$$

وما طبيعة المجموعة S .

السؤال (15)

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين:

$$A(1,-1,2), B(2,0,4)$$

والمستوي:

$$P: x - y + 3z - 4 = 0$$

جد معادلة المستوي Q الموازي للمستوي P والمار بالنقطة A واكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$.

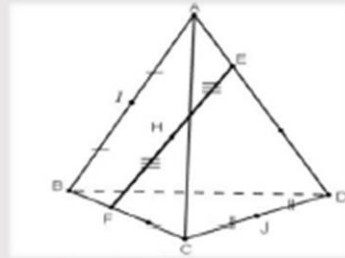
التمارين:

التمرين (1)

$ABCD$ رباعي وجوه، I و J هما على الترتيب منتصف $[AB]$ ، $[CD]$ و E و F تحققان:

$$\vec{BF} = \frac{1}{3}\vec{BC}, \quad \vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AD}$$

وأخيراً H هي منتصف $[EH]$.



أثبت أن النقاط I و H و J على استقامة واحدة.

- 3- أثبت أن المستوي الذي معادلته $z - 1 = 0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [BM].

التمرين (7)

- في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,2,4), B(2,0,-2)$
- 1- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB].
- 2- اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقط $M(x, y, z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, ما طبيعة المجموعة S؟

المسائل:

المسألة (1)

- في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتان: $A(2,1,-2), B(7,-2,0)$ والشعاغان:
- $\vec{u}(2,-1,0), \vec{v}(-3,1,2)$
- 1- اثبت أن الاشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.
- 2- اكتب معادلة المستوي الذي يقبل $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعي توجيه له
- 3- اكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم d الذي يقبل $\vec{u}$ شعاع توجيه له ويمر بالنقطة A.

المسألة (2)

- $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 2, نتأمل المعلم المتجانس $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ في المعلم
- $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = 2\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE} = 2\vec{k}$

- 2- أثبت ان الاشعة: $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.

- 3- استنتج أن D هي المركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$$

حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

التمرين (5)

المستقيمين d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$d': \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s - 2 \\ z = 3s - 2 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

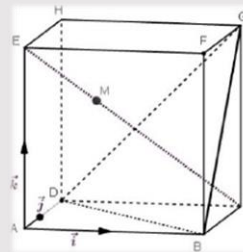
المطلوب:

- 1- أثبت أن d و d' متقاطعان ثم عين احداثيات I نقطة التقاطع.
- 2- جد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d و d' .

التمرين (6)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقط:

$$A(1,3,0), B(0,6,0), N(0,0,3), M(0,6,2)$$



- 1- اكتب معادلة المستوي (AMN) .
- 2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O والمعامد للمستوي (AMN) .

$$E(1, -1, 1), D(0, 4, 0), C(4, 0, 0)$$

$$B(1, 0, -1), A(2, 1, 3)$$

$$-1 \quad \vec{AB}, \vec{CE}, \vec{CD} \text{ جد}$$

-2 أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على

استقامة واحدة.

-3 أثبت أن (AB) يعامد للمستوي (CDE) .

-4 اكتب معادلة المستوي (CDE) .

-5 احسب بعد B عن المستوي (CDE) .

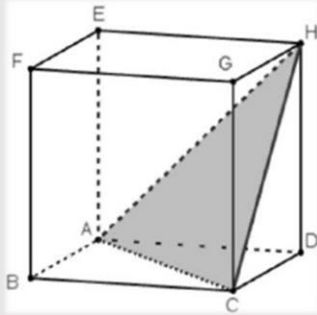
-6 اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس

المستوي (CDE) .

المسألة (5)

نتأمل في معلم متجانس $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

المكعب $ABCDEFGH$.



-1 اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط:

$$A, C, H, F, D$$

-2 اكتب معادلة المستوي (ACH) .

-3 أثبت أن المستوي P الذي معادلته:

$$P: -2x + 2y - 2z + 1 = 0$$

يوازي المستوي (ACH) .

-4 بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و

F و I على استقامة واحدة.

-1 اكتب معادلة المستوي (GBD) .

-2 اكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم (EC) .

-3 جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC)

مع المستوي (GBD) .

-4 جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\vec{EM} = \frac{1}{3}\vec{EC}$$

-5 أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC) .

المسألة (3)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$$A(1, 1, 0), B(1, 2, 1), C(4, 0, 0)$$

-1 أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

-2 أثبت ان معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

-3 ليكن المستويان:

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$

$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطى:

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

-4 ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) .

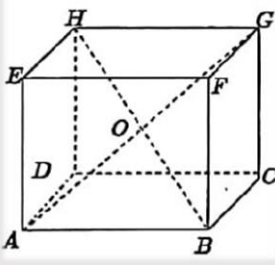
-5 احسب بعد A عن المستقيم d .

المسألة (4)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط:

5- احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$.

المسألة (8)



مكعب طول حرفه 2،

O نقطة تقاطع

القطرين $[AG]$ و

$[HB]$.

نختار معلم متجانس

$(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE})$ والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O .

2- أعط معادلة المستوي (GOB) .

3- احسب $\vec{OB} \cdot \vec{OG}$ واستنتج $\cos \widehat{GOB}$.

4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC) .

5- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي

(GOB) .

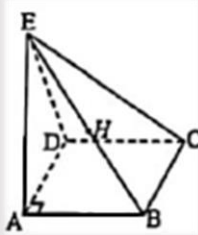
6- جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون

النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

المثقلة (A, α) و (B, β) و (C, γ) .

المسألة (9)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط:



$A(-1, 2, 3)$, $B(2, 1, 1)$, $C(-3, 4, -1)$, $D(3, 1, 1)$

1- جد $\vec{AC}$ و $\vec{AB}$ وبين أن المستقيمين (AC) و

(AB) متعامدان.

2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2, 4, 1)$ يعامد المستوي

(ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC) .

5- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها

$\Omega(1, -1, 1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبين أن

المستوي (ACH) يمس الكرة S .

المسألة (6)

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة

$A(1, 2, 0)$ والمستويات:

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$Q: x + y + z - 1 = 0$$

$$R: x - z - 1 = 0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان

مشترك Δ , اكتب تمثيله الوسيط.

2- تحقق أن المستوي يعامد Δ ويمر بالنقطة

A .

3- أثبت أن المستويات P, Q, R تتقاطع بالنقطة

I يطلب تعيين إحداثياتها.

4- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ .

المسألة (7)

$EABCD$ هرم رباعي رأسه E وقاعدته مربع طول

ضلعه 3، $[AE]$ عمودي على $(ABCD)$ و $EA = 3$.

نختار المعلم المتجانس:

$$(A, \frac{1}{3}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AD}, \frac{1}{3}\vec{AE})$$

1- عين إحداثيات A, B, C, D, E .

2- جد معادلة المستوي (EBC) .

3- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A

ويعامد المستوي (EBC) .

4- استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط

القائم لـ A على المستوي (EBC) .

2- أثبت أن: $y + z - 1 = 0$ هي معادلة المستوي (BCD) .

3- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من

النقطة A ويعامد المستوي (BCD) .

4- عين إحداثيات النقطة K المسقط القائم

لنقطة A على المستوي (BCD) .

5- اكتب معادلة الكرة التي تقبل $[AD]$ قطعاً لها.

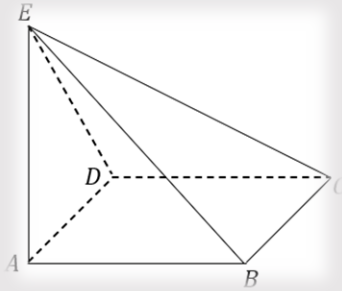
المسألة (12)

$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربع، المستقيم

$[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$, $AB = 4$

و $AE = 3$. نتأمل المعلم المتجانس

$(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب:



1- جد إحداثيات النقاط الرؤوس.

2- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق:

$$4\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CE}$$

3- احسب $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{BC}$ واستنتج نوع المثلث EBC ثم

احسب مساحته.

4- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC) .

5- اكتب معادلة المستوي (EBC) واحسب بعد

النقطة A عن المستوي (EBC) ثم استنتج

حجم الهرم $AEBC$.

3- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من

النقطة D والعمودي على المستوي

(ABC) .

4- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم

احسب حجم الهرم $D - ABC$.

5- بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

المثقلة $(A, 1)$ و $(B, -1)$ و $(C, 2)$ أثبت أن

المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان.

المسألة (10)

في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة

$A(1, 1, 2)$ والمستويان:

$$P: x - y + 2z - 1 = 0$$

$$Q: 2x + y + z + 1 = 0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان في

فصل مشترك d .

2- اكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم d .

3- اكتب معادلة المستوي R المار من A

المعامد للمستويين P و Q .

4- جد إحداثيات B الناتجة من تقاطع المستوي

R والمستقيم d .

5- احسب بعد النقطة A عن المستقيم d .

6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A

وتمس المستوي Q .

المسألة (11)

في المعلم المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$A(2, -2, 2), B(1, 1, 0), C(1, 0, 1), D(0, 0, 1)$$

1- تحقق أن النقاط B و C و D لا تقع على

استقامة واحدة.



المسألة (13)

- في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط:
- $D(1,1,1)$, $C(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $A(1,0,0)$
- 1- جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC , وأثبت أن (OG) عمودي على المستوى (ABC) .
- 2- جد معادلة المستوى (ABC) .
- 3- نعرف النقاط $A'(2,0,0)$, $B'(0,2,0)$, $C'(0,0,4)$ أثبت أن $2x + 2y + z - 4 = 0$ معادلة المستوى $(A'B'C')$.
- 4- أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطى:
- $$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t; t \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}$$
- 5- احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ .

ها هي رحلة الشغف في الأشعة قد انتهت!

نصيحة هامة جداً:

حافظ دائماً على تركيزك وتذكر أن أي معلومة
عند تكرارها ستكون أفضل وأقوى في
عقلك..

وشغف الرياضيات واثق جداً من استطاعتكم
يا أصدقائي الأعزاء..

أحفر هذه الجملة في عقلك:

لن يبلى الشغف

