

أولاً: تغيير المتحول:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

نفرض $t = \frac{1}{x}$ وبالتالي $x = \frac{1}{t}$
نغير جهة السعي:

$$(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow (t \rightarrow 0)$$

نعوض:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

نفرض $t = \frac{1}{x}$ وبالتالي $x = \frac{1}{t}$
نغير جهة السعي:

$$(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow (t \rightarrow 0)$$

نعوض:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

نضيف ونطرح 1 في المضمون:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{x-1}{x+1} - 1\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{x-1-x-1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{-2}{x+1}\right)$$

نفرض $t = \frac{-2}{x+1}$ وبالتالي:

$$x = \frac{-2}{t} - 1 = \frac{-2-t}{t}$$

نغير جهة السعي:

$$(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow (t \rightarrow 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-2-t) \ln(1+t)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (-2-t) \left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2 = (2 \cdot 0)^2 = 0$$

تدرب 1

$$f(x) = x^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2} \right); a = +\infty$$

$$= x^2 \left(\frac{\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2} \right) \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2} \right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}} \right)$$

$$= x^2 \left(\frac{2 + \frac{1}{x} - 2}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}} \right)$$

$$= x^2 \left(\frac{1}{x \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2} \right)} \right)$$

$$= x \left(\frac{1}{\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2} \right)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \sin x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}, a = 0^+$$

$$= \sin x \sqrt{\frac{1}{x^2} (x^2 + 1)}$$

$$= \sin x \left(\frac{1}{|x|} \right) \sqrt{x^2 + 1}$$

عند $x = 0^+$ فإن $|x| = x$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} (\sqrt{x^2 + 1})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1(1) = 1$$

$$f(x) = x(\ln x - 1), a = 0^+$$

$$= x \ln x - x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

تدرب 2

$$f(x) = \frac{6x^2 + 2 - 2\cos 2x}{2x^2}; a = 0$$

$$f(x) = \frac{6x^2}{2x^2} + \frac{2(1 - \cos 2x)}{2x^2}$$

$$= 3 + \frac{2 \sin^2 x}{x^2}$$

$$= 3 + 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 + 2(1)^2 = 5$$

$$f(x) = \frac{2\cos x - 2}{\sqrt{4x^2 + 2} - \sqrt{2}}; a = 0$$

$$f(x) = \frac{-2(1 - \cos x)(\sqrt{4x^2 + 2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{4x^2 + 2} - \sqrt{2})(\sqrt{4x^2 + 2} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{-4 \sin^2 \frac{x}{2} (\sqrt{4x^2 + 2} + \sqrt{2})}{4x^2 + 2 - 2}$$

$$= 1^\infty$$

$$f(x) = (1 + 1 - x)^{\frac{1}{x-1}}$$

نفرض $x = 1 - t$ وبالتالي $t = 1 - x$
نغير جهة السعي:

$$(x \rightarrow 1) \Rightarrow (t \rightarrow 0)$$

$$f(t) = (1 + t)^{\frac{1}{-t}} = \left((1 + t)^{\frac{1}{t}} \right)^{-1}$$

وبالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e^{-1}$$

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{3}} ; a = +\infty$$

$$= \left(1 + \frac{x-2}{x+1} - 1 \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$= \left(1 + \frac{x-2-x-1}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$= \left(1 + \frac{-3}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

نفرض $t = -\frac{3}{x+1}$ فيكون:

$$x+1 = -\frac{3}{t}$$

$$x = -\frac{3}{t} - 1 = \frac{-3-t}{t}$$

نغير جهة السعي:

$$(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow (t \rightarrow 0)$$

لدينا الأس:

$$t = -\frac{3}{x+1}$$

$$\frac{1}{t} = -\frac{x+1}{3}$$

$$-\frac{1}{t} = \frac{x+1}{3}$$

$$f(t) = (1 + t)^{-\frac{1}{t}}$$

$$= \left((1 + t)^{\frac{1}{t}} \right)^{-1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = e^{-1}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} ; a = 0$$

$$f(x) = \frac{\sin x (\sqrt{1+x} + 1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x} + 1)}$$

$$= \frac{\sin x (\sqrt{1+x} + 1)}{1+x-1}$$

$$= \frac{\sin x (\sqrt{1+x} + 1)}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} (\sqrt{1+x} + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1(1) = 2$$

$$f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x+1} ; a = +\infty$$

$$= -\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 (\sqrt{4x^2+2} + \sqrt{2})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{4} (2\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} ; a = +\infty$$

$$= x \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right)$$

$$= x \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+2)(x+1)}} \right)$$

$$= x \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+3x+2}} \right)$$

$$= x \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}} \right)$$

$$= x \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} \right)$$

في جوار $+\infty$ تكون $|x| = +x$

$$= x \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{x \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{x+2-x-1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} ; a = 0$$

$$f(x)$$

$$= \frac{(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x})(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})}{x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})}$$

$$= \frac{1 + \sin x - 1 + \sin x}{x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})}$$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2}{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \left(\frac{2}{2} \right) = 1$$

$$f(x) = (2-x)^{\frac{1}{x-1}} ; a = 1$$

تدرب 3

ملاحظة: سنوجد مجموعة التعريف فيما يلي ثم نحسب النهايات عند أطرافها:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = x - \ln x$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{x} (1 + x \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty (1 + 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$D_1: \ln x = 0$$

$$x = 1$$

$$D_1 =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$D_2 =]0, +\infty[$$

$$D_f = D_1 \cap D_2 =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 - 2 \cos(\sqrt{x})}{x}; a = 0$$

$$f(x) = x + \frac{2(1 - \cos(\sqrt{x}))}{x}$$

$$= x + 2 \frac{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}}{x}$$

$$= x + 4 \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}}{2} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} (1)^2 = 1$$

$$f(x) = (3 + x)^{\frac{1}{x+2}}; a = -2$$

$$= (1 + 2 + x)^{\frac{1}{x+2}}$$

نفرض $t = 2 + x$

$$x = t - 2$$

نغير جهة السعي:

$$(x \rightarrow -2) \Rightarrow (t \rightarrow 0)$$

نعوض:

$$f(t) = (1 + t)^{\frac{1}{t-2+2}} = (1 + t)^{\frac{1}{t}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = e$$

$$f(x) = \frac{7x - 7}{\sqrt{3x + 1} - 2}; a = 1$$

$$f(x) = \frac{(7x - 7)(\sqrt{3x + 1} + 2)}{(\sqrt{3x + 1} - 2)(\sqrt{3x + 1} + 2)}$$

$$= \frac{7(x - 1)(\sqrt{3x + 1} + 2)}{3(x - 1)}$$

$$= \frac{7}{3} (\sqrt{3x + 1} + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{28}{3}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x + 5} - 3}{2 - \sqrt{3x + 1}}; a = 1$$

$$= \frac{(\sqrt{4x + 5} - 3)(\sqrt{4x + 5} + 3)(2 + \sqrt{3x + 1})}{(2 - \sqrt{3x + 1})(2 + \sqrt{3x + 1})(\sqrt{4x + 5} + 3)}$$

$$= \frac{(4x + 5 - 9)(2 + \sqrt{3x + 1})}{(4 - 3x + 1)(\sqrt{4x + 5} + 3)}$$

$$= \frac{4(x - 1)(2 + \sqrt{3x + 1})}{-3(x - 1)(\sqrt{4x + 5} + 3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{4}{3} \left(\frac{4}{6} \right) = -\frac{8}{9}$$

$$f(x) = \ln(2x+1) - \ln(x)$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty - \infty$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(2)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{x}; a = 0$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

لأن:

$$f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln\sqrt{2}}{x-1}; a = 1$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$g(x) = \ln(\sqrt{x+1}) - \ln(\sqrt{2})$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln(x+1) - \ln\sqrt{2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2(x+1)}$$

$$g(1) = 0$$

$$g'(1) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{\ln\sqrt{x}}{x}; a = +\infty$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$D_1 =]0, +\infty[$$

$$D_2 =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = x(1 - \ln x)$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$f(x) = \frac{x - \ln x}{x}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$$

$$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$$

$$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right)}{2x} = +\infty$$

$$f(x) = \ln(e^x + 2)$$

$$D_f =] - \infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = 2xe^{-x}$$

$$D_f =] - \infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$$

$$f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$$

$$D_f =] - \infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^x - e^x + 1}{e^x} = +\infty$$

$$f(x) = e^{2x} - x - 2$$

$$D_f =] - \infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$f(x) = x - \ln(e^x + 1); a = +\infty$$

$$= x - \ln \left(e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right) \right)$$

$$= x - x - \ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)$$

$$= -\ln \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

تدرب 5

$$f(x) = 4x + \frac{1 + \sin^2 x}{x^4 + 1}; y_\Delta = 4x$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1 + \sin^2 x}{x^4 + 1}$$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

نضيف 1:

$$1 \leq 1 + \sin^2 x \leq 2$$

نقسم على $x^4 + 1 > 0$:

$$\frac{1}{x^4 + 1} \leq \frac{1 + \sin^2 x}{x^4 + 1} \leq \frac{2}{x^4 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^4 + 1} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4 + 1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

تدرب 4

$$f(x) = e^x - x^2$$

$$D_f =] - \infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 + e^x}$$

$$D_f =] - \infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(2 + \frac{1}{e^x} \right)}{e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right)} = 2$$

$$f(x) = \ln(x) - e^x$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$D_f =] - \infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} = 1$$

$$f(x) = (3 - x)e^x$$

$$D_f =] - \infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x - xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$$

$$D_f =] - \infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$$

$$D_f =] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

1- لإيجاد الأعداد:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + 1}{x^3 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a$$

$$f(x) - x = \frac{x^3 + 1 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \frac{1 - x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0 = b$$

2- بفرض أن $y_\Delta = ax + b$ فإن $y_\Delta = x$

3- الوضع النسبي:

$$f(x) - x = \frac{1 - x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = 0$$

$$\frac{1 - x}{x^2 + 1} = 0$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\frac{1-x}{x^2+1}$	+	0	-
الوضع	c تحت Δ c فوق Δ		

تدرب 7

$$f(x) = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x}$$

1- نعيد صياغة التابع:

$$f(x) = 2x + \frac{\cos^2 x}{x}$$

نفرض $y_\Delta = 2x$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \cos^2 \infty \Rightarrow \text{إحاطة}$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

نقسم على $x < 0$ في جوار $+\infty$:

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos^2 x}{x} = 0$$

فإن Δ مقارب مائل للتابع.

2- لدينا:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x}$$

البسط موجب دوماً والمقام سالب دوماً على مجموعة التعريف فإن C تحت Δ .لدراسة الوضع النسبي نلاحظ أن $f(x) - y_\Delta \geq 0$ فإن c فوق Δ .

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}; y_\Delta = 2x - 1$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

لدراسة الوضع النسبي:

عندما $x > 0$ فإن c فوق Δ .عندما $x < 0$ فإن c تحت Δ .

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x+1} - \sqrt{x}; y_\Delta = x + 1$$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

 $f(x) - y_\Delta > 0$ فإن c فوق Δ .

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x - 2x \cos 2x}{2x^2}; y_\Delta = \frac{1}{2}x$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{2} + \frac{2x(1 - \cos 2x)}{2x^2} - \frac{x}{2}$$

$$= \frac{2 \sin^2 x}{x}$$

بالإحاطة نجد:

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

نضرب بـ 2:

$$0 \leq 2 \sin^2 x \leq 2$$

نقسم على $x > 0$ في جوار $+\infty$:

$$0 \leq \frac{2 \sin^2 x}{x} \leq \frac{2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim 0 = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

عندما $x > 0$ فإن c فوق Δ .عندما $x < 0$ فإن c فوق Δ .

تدرب 6

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

مكتبة الرياضيات/ قسم التحليل إعداد المدرس: نذير تيناوي

$$y_{d_2} = -2x - 1$$

لدراسة الوضع النسبي نجد:

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{4}{\sqrt{(2x+1)^2 + 4} + \sqrt{(2x+1)^2}} > 0$$

C فوق d_1 و d_2 .

تدرب 10

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - \ln x} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

لدراسة الاستمرار:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

حسب شرط الاستمرار:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

محقق فالتابع مستمر عند $a = 0$.

تدرب 11

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{2x} & : x \neq 0 \\ 2A - \frac{1}{2} & : x = 0 \end{cases}$$

نوجد النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ لأن}$$

نعوض في شرط الاستمرار:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$2A - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

التفسير الهندسي للنهيات:

تدرب 12

محلول في الأوراق.

تدرب 9

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}; x \neq 1 \\ \frac{4}{3}; x = 1 \end{cases}$$

الشرط:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{4}{3} = f(1)$$

التابع مستمر على $\mathbb{R}$.

تدرب 8

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 5}$$

نكتب مضمون التابع بالشكل القانوني:

$$4 \left(x^2 + x + \frac{5}{4} \right)$$

$$= 4 \left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \right)$$

$$= 4 \left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right)$$

$$= (2x + 1)^2 + 4$$

نشكل التابع:

$$f(x) - \sqrt{(2x + 1)^2}$$

$$= \sqrt{(2x + 1)^2 + 4} - \sqrt{(2x + 1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{(2x + 1)^2 + 4} - \sqrt{(2x + 1)^2})(\sqrt{(2x + 1)^2 + 4} + \sqrt{(2x + 1)^2})}{\sqrt{(2x + 1)^2 + 4} + \sqrt{(2x + 1)^2}}$$

$$= \frac{(2x + 1)^2 + 4 - (2x + 1)^2}{\sqrt{(2x + 1)^2 + 4} + \sqrt{(2x + 1)^2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{(2x + 1)^2 + 4} + \sqrt{(2x + 1)^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \sqrt{(2x + 1)^2} = 0$$

وبالتالي فإن:

$$y_{\Delta} = |2x + 1|$$

في جوار $+\infty$:

$$y_{d_1} = 2x + 1$$

في جوار $-\infty$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - \ln x} ; x > 0 \\ 0 ; x = 0 \end{cases} ; a = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x - \ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x - \ln x)} = 0$$

قابل للاشتقاق عند 0.

تدرب 16

$$f(x) = e^x$$

1- للحساب:

$$f(\ln 2) = e^{\ln 2} = 2$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(\ln 2) = 2$$

2- لاستنتاج النهاية من قانون تعريف العدد المشتق (قابلية الاشتقاق عند نقطة):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ = \lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{e^x - 2}{x - \ln 2} = f'(\ln 2) = 2 \end{aligned}$$

تدرب 17

$$f(x) = x \ln x - e$$

$$f(e) = 0$$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(e) = 2$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x \ln x - e}{x - e} = f'(e) = 2$$

تدرب 18

$$f(x) = e^{2x} - 2x$$

المماس الأفقي أي ميله معدوم:

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$2e^{2x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow e^{2x} = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 1 - 0 = 1$$

وبالتالي معادلة المماس الأفقي:

تدرب 13

محلول في الأوراق.

تابع الجزء الصحيح:

تدرب 14

$$f(x) = 2x + E(x) ; x \in [0, 3[$$

1- لكتابة التابع بصيغة مستقلة:

$$f(x) = \begin{cases} 2x ; x \in [0, 1[\\ 2x + 1 ; x \in [1, 2[\\ 2x + 2 ; x \in [2, 3[\end{cases}$$

2- لدراسة الاستمرار:

$$f(1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

التابع غير مستمر على $[0, 3[$.

3- رسوم بايديك أحلا 😊

4- لدراسة النهاية:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

نضيف $2x$:

$$3x - 1 < 2x + E(x) \leq 3x$$

نقسم على $x^2 + 1 > 0$:

$$\frac{3x - 1}{x^2 + 1} < \frac{f(x)}{x^2 + 1} \leq \frac{3x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 0$$

الاشتقاق:

تدرب 15

ملاحظة: سنستخدم هذا القانون في الحل:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f(x) = x \ln(x + 1) ; a = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x + 1) = 0$$

قابل للاشتقاق عند 0.

$$f(x) = \sin(\sqrt{x}) ; a = 0^+$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x} \sqrt{x}} = +\infty$$

غير قابل للاشتقاق عند 0.

تدرب 21

$$f(x) = \frac{x + |x|}{x + 2}$$

1- نعرف التابع $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + |x|}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + |x|}{x(x + 2)}$$

نميز حالتين:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$$

فالتابع غير قابل للاشتقاق عند $a = 0$.

2- نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y_T = f'(0^+)(x - 0) + f(0)$$

$$y_T = 1$$

التقريب التآلفي:

تدرب 22

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ 1 ; x = 0 \end{cases}$$

1- شرط الاستمرار:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

محقق فالتابع مستمر عند $a = 0$.

2- نحسب المشتق:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x) - 1}{(e^x - 1)^2}$$

3- نفرض:

$$a = 0, h = 0.1$$

نعوض في القانون:

$$f(a + h) \approx f'(a).h + f(a)$$

$$f(0 + 0.1) \approx 0.1(0) + 1$$

$$f(0.1) \approx 1$$

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = 1$$

تدرب 19

$$f(x) = \ln(x + 1)$$

نقطة التقاطع مع محور الترتيب أي:

$$x = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\Rightarrow y = x$$

تدرب 20

$$f(x) = \frac{x}{x + 1}, y - 4x = 0$$

$$y = 4x$$

$$\Rightarrow m = 4$$

$$f'(x) = \frac{x + 1 - x}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 4$$

$$\frac{1}{(x + 1)^2} = 4$$

$$(x + 1)^2 = \frac{1}{4}$$

إما:

$$x + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right) - 1 = 4x + 1$$

أو:

$$x + 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 3$$

$$\Rightarrow y = 4\left(x + \frac{3}{2}\right) + 3 = 4x + 9$$

اشتقاق تابع مركب:

تدرب 23

$$f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$$

1- نشتق:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

2- أ- لدينا:

$$\sin x \in]0, +\infty[$$

و $\sin x$ اشتقاقي على $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ وبالتالي g اشتقاقي على I .

ب- من قاعدة اشتقاق التابع المركب:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(\sin x) \cdot (\sin x)' \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\sin x} - \ln(\sin x)}{(\sin x + 1)^2} \cdot \cos x \end{aligned}$$

تدرب 24

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

1- لحساب المشتق:

 f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

2- نجد أن:

$$g(x) = f(\sqrt{x}), h(x) = f(\sin x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' \\ &= \frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + 1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + 1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(\sin x) \cdot (\sin x)' \\ &= \frac{\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + 1}{\sin^2 x} \cdot \cos x \\ &= \frac{\cos x (\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + 1)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

المشتقات من مراتب عليا:

تدرب 25

$$f(x) = -\ln(1-x)$$

تصويب صيغة السؤال:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

1- نحسب المشتقات:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2- نرسم للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

محقة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n): f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \dots \dots \dots \text{الفرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1): f^{(n+1)}(x) = \frac{(n)!}{(1-x)^{n+1}}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

نشتق الطرفين:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \frac{0 - n(1-x)^{n-1}(-1)(n-1)!}{(1-x)^{2n}} \\ &= \frac{n!}{(1-x)^{2n}(1-x)^{-n+1}} \\ &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \end{aligned}$$

القضية صحيحة.

دراسة اطراد تابع وحل المتراجحات المختلطة:

تدرب 26

$$g(x) = e^x + 2 - x$$

1- g اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x - 1 \\ g'(x) = 0 &\Rightarrow e^x - 1 = 0 \\ e^x &= 1 \\ x &= 0 \\ g(0) &= 3 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	---	0	+++
$g(x)$		3	

نجد من الجدول أن:

التابع الفردي والتابع الزوجي:

تدرب 28

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

1- لدراسة قابلية الاشتقاق:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= g(x) \\ g(x) &= \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x-2} \\ &= \frac{x(4-x^2)}{(x-2)(\sqrt{4-x^2})} \\ &= \frac{x(2-x)(2+x)}{(x-2)(\sqrt{4-x^2})} \\ &= \frac{-x(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{4-x^2})} = \frac{-x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}} \\ \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= -\infty \end{aligned}$$

 $x = 2$ مماس شاقولي.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} &= h(x) \\ &= \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x+2} = \frac{x(4-x^2)}{(x+2)(\sqrt{4-x^2})} \\ &= \frac{x(x+2)(2-x)}{(x+2)(\sqrt{4-x^2})} = \frac{x(2-x)}{\sqrt{4-x^2}} \\ \lim_{x \rightarrow -2} h(x) &= -\infty \end{aligned}$$

 $x = -2$ مماس شاقولي.

2- الشرط الأول:

$$x \in [-2, 2] \Rightarrow -x \in [-2, 2]$$

الشرط الثاني:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x\sqrt{4-(-x)^2} \\ &= -x\sqrt{4-x^2} = -f(x) \end{aligned}$$

التابع متناظر بالنسبة للمبدأ.

3- المجال $[0, 2]$:

$$f(0) = 0, f(2) = 0$$

 f اشتقاقي على $[0, 2]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot x \\ &= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4-2x^2 = 0$$

$$4 = 2x^2$$

$$x = +\sqrt{2} \text{ مقبول}$$

$$g(x) \geq 3 > 0$$

$$g(x) > 0$$

$$\Rightarrow S =]-\infty, +\infty[$$

تدرب 27

$$\ln(x+1) \leq \sqrt{x+1}$$

$$0 \leq \sqrt{x+1} - \ln(x+1)$$

نفرض التابع المعرف على $]-1, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \sqrt{x+1} - \ln(x+1)$$

 g اشتقاقي على $]-1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{\sqrt{x+1} - 2}{2(x+1)} \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+1} = 2$$

$$x+1 = 4$$

$$x = 3$$

$$g(3) = 2 - 2\ln(2)$$

x	-1	3	$+\infty$
$g'(x)$	---	0	+++
$g(x)$		$2 - 2\ln(2)$	

نلاحظ من الجدول أن:

$$g(x) \geq 2 - 2\ln(2) > 0$$

$$g(x) > 0$$

$$\sqrt{x+1} - \ln(x+1) > 0$$

$$\sqrt{x+1} > \ln(x+1)$$

محقة.

-2 الشرط الأول:

$$x \in]-2, 2[\Rightarrow -x \in]-2, 2[$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -f(x)$$

التابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

-3 النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \ln\left(\frac{0}{4}\right) = -\infty$$

 $x = -2$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقطع على يمين مقاربه.

$$f(0) = 0$$

 f اشتقاقي على $]-2, 0]$:

$$f(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x)$$

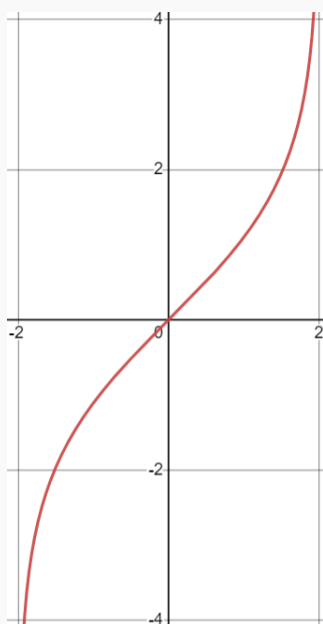
$$f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} = \frac{2-x+2+x}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$$

$$f'(x) \neq 0$$

جدول التغيرات:

x	-2	0
$f'(x)$	+++++	
$f(x)$	$-\infty$	0

-4 الرسم:



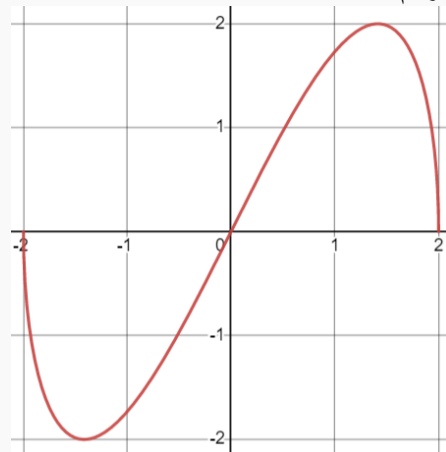
-5 نجد أن:

$$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -f(x)$$

الخط البياني للتابع g ينتج عن الخط البياني للتابع f بتناظر بالنسبة لمحور الترتيب.مرفوض $x = -\sqrt{2}$

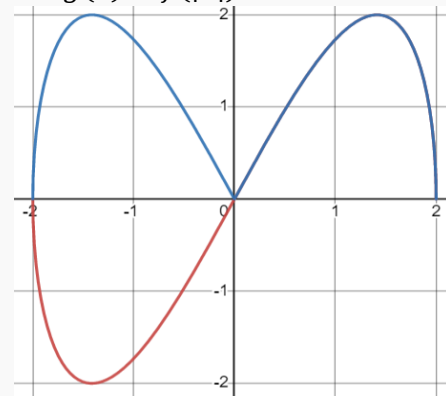
x	0	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	+++	0	---
$f(x)$	0	2	0

-4 الرسم:



-5 نلاحظ أن:

$$g(x) = f(|x|)$$



تدرب 29

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

-1 لدينا:

$$\frac{2+x}{2-x} > 0$$

$$2+x = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$2-x = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$2+x$	---	0	+++	+++
$2-x$	+++	+++	0	---
$\frac{2+x}{2-x}$	---	0	+++	---
> 0	$P \notin$	P	$P \notin$	

$$\Rightarrow D_f =]-2, 2[$$

مركز التناظر:

تدرب 30

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$$

1- الشرط الأول:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

نضرب بـ -1:

$$-x \in \mathbb{R} \setminus \{+1\}$$

نضيف +2:

$$-2 - x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

الشرط الثاني:

$$f(x) + f(-2 - x) = 2b$$

$$f(x) + f(-2 - x)$$

$$= \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$$

$$+ \frac{2(-2 - x)^2 + (-2 - x) + 7}{-2 - x + 1}$$

$$= \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1} - \frac{8 + 8x + 2x^2 - 2 - x + 7}{x + 1}$$

$$= \frac{2x^2 + x + 7 - 2x^2 - 7x - 13}{x + 1}$$

$$= \frac{-6x - 6}{x + 1} = -6 \left(\frac{x + 1}{x + 1} \right) = -6 = 2b$$

فالنقطة $I(-1, -3)$ مركز تناظر للتابع.

2- بالقسمة الإقليدية نجد:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x + 1}$$

بالمقارنة نجد:

$$a = 2, b = -1, c = 8$$

3- نفرض $y = 2x - 1$:

$$f(x) - y = \frac{8}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y = 0$$

إذا y مقارب مائل في جوار $\pm\infty$.عندما $x > -1$ فإن C فوق المقارب.عندما $x < -1$ فإن C تحت المقارب.

4- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

اشتقاق f على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f'(x)$$

$$= \frac{(4x + 1)(x + 1) - 1(2x^2 + x + 7)}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 4x + x + 1 - 2x^2 - x - 7}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - 6}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$2(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

إما:

$$x = -3$$

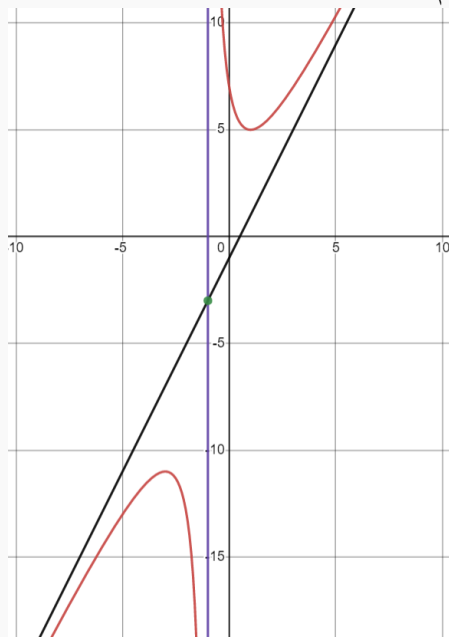
أو:

$$x = 1$$

$$f(1) = 5, f(-3) = -11$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+++$	0	$---$	$---$	0	$+++$
$f(x)$	$-\infty$	-11	$-\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$

5- الرسم:



6- نلاحظ أن:

$$f(-x) = g(x)$$

الخط البياني للتابع g ينتج عن الخط البياني للتابع f بتناظر بالنسبة لمحور الفواصل.

تدرب 31

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

1- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

تدرب 32

محلول.

تدرب 33

محلول.

تدرب 34

محلول.

تدرب 35

محلول.

تدرب 36

محلول.

تدرب 37

محلول.

دراسة تغيرات تابع:

تدرب 38

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

-1 مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

اشتقاقى على D_f :

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - (2x+2)(x+2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - 4x - 2x - 4}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$-(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0$$

$$x = -1 \text{ مرفوض}, x = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$$

 f اشتقاقى على $]1, 3[$:

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x} = \frac{3-x+x-1}{(x-1)(3-x)}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(3-x)}$$

$$f'(x) \neq 0$$

x	1	3
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

-2 الشرط الأول:

$$x \in]1, 3[$$

$$-x \in]-3, -1[$$

$$4-x \in]1, 3[$$

الشرط الثاني:

$$f(x) + f(4-x) = 2b$$

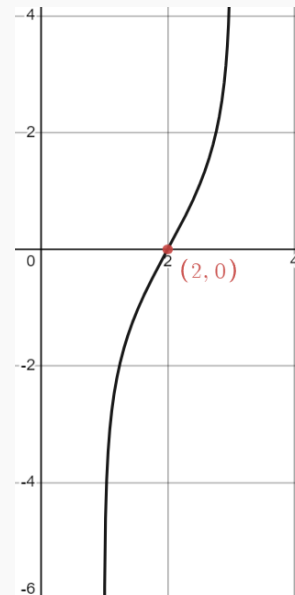
$$f(x) + f(4-x)$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) + \ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{3-x} \times \frac{3-x}{x-1}\right) = \ln(1) = 0$$

إذاً $I(2, 0)$ مركز تناظر للتابع.

-3 الرسم:



الصورة عند الأطراف المغلقة:

$$f(3) = 0$$

 f اشتقاقي على $]-\infty, 3]$

$$f'(x) = \sqrt{3-x} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} \cdot x$$

$$= \frac{2(3-x) - x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6 - 3x = 0$$

$$3x = 6$$

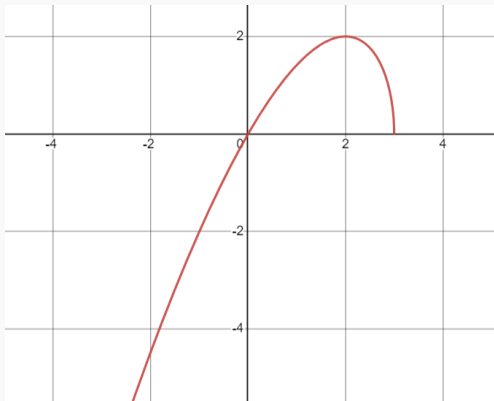
$$x = 2$$

$$f(2) = 2$$

الجدول:

x	$-\infty$	2	3
$f'(x)$	+++++	0	-----
$f(x)$	$-\infty$	2	0

-3 الرسم:



تدرب 40

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; D_f =]-\infty, +\infty[$$

-1 الشرط الأول:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -x - \frac{x}{\sqrt{(-x)^2+1}}$$

$$= -x - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= -\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -f(x)$$

$$f(-3) = -\frac{1}{4}$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$f'(x)$	---	0	+++	---
$f(x)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$	0

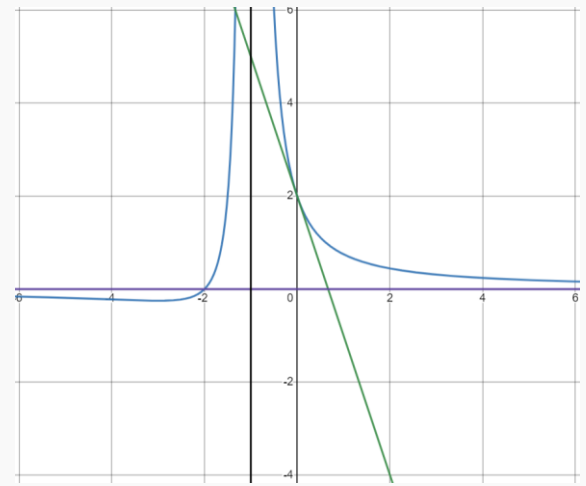
-2 في التقاطع مع محور الترتيب $x = 0$:

$$f(0) = 2$$

$$f'(0) = -3$$

$$\Rightarrow y_T = -3(x - 0) + 2 = -3x + 2$$

-3 الرسم:



تدرب 39

$$f(x) = x\sqrt{3-x}$$

-1 لإثبات انه يقبل مماساً شاقولياً يكفي أن نثبت أنه غير اشتقاقي عند $a = 3$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$g(x) = \frac{x\sqrt{3-x} - 0}{x - 3} = \frac{x(3-x)}{-(3-x)\sqrt{3-x}}$$

$$= \frac{x}{-\sqrt{3-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

وبالتالي $x = 3$ مماساً شاقولياً للتابع.

-2 النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

فالتابع f فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

2- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1$$

$$= \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

في جوار $-\infty$ إن $|x| = -x$

$$= \frac{x \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y_1 = \frac{1 - 1}{+\infty} = 0$$

إذن y_1 مقارب مائل في جوار $-\infty$.

3- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}} - 1$$

$$= \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1$$

في جوار $+\infty$ فإن $|x| = +x$

$$= \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_2 = 1 - 1 = 0$$

إذن y_2 مقارب مائل في جوار $+\infty$.

4- النهايات:

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -\infty$$

 f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1}$$

$$= 1 + \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

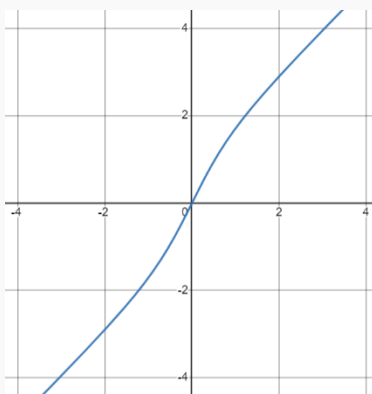
$$= \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} + x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

نجد أن المشتق موجب لا ينعدم.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	+++++
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

5- لا يقبل لأن المشتق لا ينعدم.

6- الرسم:



تدرب 41

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

1- مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

 $x = 0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

 $x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه. f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

-5 لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}; u_0 = 2$$

أ- نرسم للقضية بالرمز $E(n)$:نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2} \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \dots \dots \text{الفرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \dots \dots \text{الطلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$$

لدينا التابع f متزايد على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$, نصور الأطراف فيه:

$$f(\sqrt{2}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

محققة فالقضية صحيحة.

ب- بما أن المتتالية محدودة من الأدنى ولقد أثبتنا في الطلب السابق أن:

$$u_{n+1} \leq u_n$$

فالممتتالية متناقصة وبالتالي هي متقاربة, لتعيين نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x$$

$$\frac{x^2 + 2}{2x} = x$$

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$2 = x^2$$

$$x = +\sqrt{2} \text{ مقبول}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ مرفوض}$$

بالتالي:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

نعدم:

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f(-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

الجدول:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	++	0	--	0	++
$f(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

-2 نفرض $y_d = \frac{x}{2}$:

$$f(x) - y_d = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y_d = 0$$

لدراسة الوضع النسبي نجد أن:

عندما $x > 0$ فإن C فوق d .عندما $x < 0$ فإن C تحت d .

-3 الشرط الأول:

$$x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^*$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

التابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

-4 الرسم:



$$f(-3) = \frac{12}{-2} = -6$$

5- التقاطع مع محور الترتيب:

$$x = 0$$

$$y_T = f'(0)(x - 0) + f(0) \\ = -3(x - 0) + 3 = -3x + 3$$

6- النقطة $A(-1, -2)$:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 - x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) + f(2a - x) = 2b$$

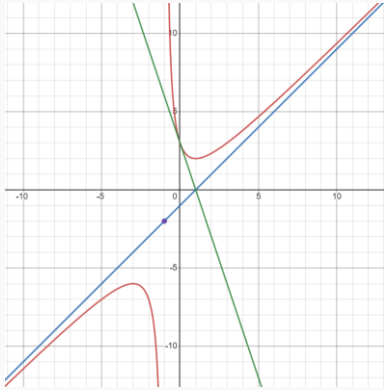
$$f(x) + f(-2 - x)$$

$$= \frac{x^2 + 3}{x + 1} + \frac{(-2 - x)^2 + 3}{-2 - x + 1} \\ = \frac{x^2 + 3}{x + 1} + \frac{4 + 4x + x^2 + 3}{-x - 1} \\ = \frac{x^2 + 3 - (7 + 4x + x^2)}{x + 1}$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f(x)$		0		0	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow -6$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow +\infty$

$$= \frac{x^2 + 3 - 7 - 4x - x^2}{x + 1} \\ = \frac{-4(x + 1)}{(x + 1)} = -4$$

7- الرسم:



8- تصويب صيغة $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$, لدينا:

$$f(-x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x} = -\frac{x^2 + 3}{x - 1} = -g(x)$$

$$f(-x) = -g(x)$$

نضرب بـ -1 :

$$g(x) = -f(-x)$$

الخط البياني للتابع g ينتج عن الخط البياني للتابع f بتناظر بالنسبة للمبدأ.

تدرب 42

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

1- مجموعة التعريف:

$$D_f =] - \infty, -1[\cup] -1, +\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C على يسار مقاربه.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C على يمين مقاربه.

2- بالقسمة الإقليدية:

$$\frac{x^2 + 3}{x + 1} = x - 1 + \frac{6}{x + 1}$$

نفرض $y_d = x - 1$:

$$f(x) - y_d = \frac{6}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y_d = 0$$

3- لدراسة الوضع النسبي نجد أن:

عندما $x > -1$ فإن C فوق d .

عندما $x < -1$ فإن C فوق d .

4- f اشتقاقي على $] - \infty, -1[\cup] -1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x(x + 1) - x^2 - 3}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x = -3, x = 1$$

$$f(1) = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$

يوجد قيمتين للمقدار $\frac{a}{b}$.

تدرب 49

$$e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$x^2 - 2 \leq 4 - x$$

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(-6) = 25$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - 6}{2} = -\frac{7}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	2	$+\infty$	
$x^2 + x - 6$	++++	0	----	0	++++
≥ 0	مقبول	غير مقبول	مقبول		

$$S =] -\infty, -\frac{7}{2}] \cup [2, +\infty[$$

$$e^{2x^2-1} \geq 3$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$2x^2 - 1 \geq \ln(3)$$

$$2x^2 - 1 = \ln(3)$$

$$2x^2 = \ln(3) + 1$$

$$x^2 = \frac{\ln(3) + 1}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\ln(3) + 1}{2}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}$	$+\infty$	
$2x^2-1-\ln 3$	++++	0	----	0	++++
≥ 0	مقبول	غير مقبول	مقبول		

$$S =] -\infty, -\sqrt{\frac{\ln(3) + 1}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{\ln(3) + 1}{2}}, +\infty[$$

تدرب 47

$$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln x + \ln y = 1 \end{cases}$$

نضع $\ln x = X$ و $\ln y = Y$

$$= \begin{cases} X \cdot Y = -12 \\ X + Y = 1 \end{cases}$$

نبحث عن عددين ضربهم -12 وجمعهم +1 وهما:

$$X = +4, Y = -3$$

$$X = \ln x = 4 \Rightarrow x = e^4$$

$$Y = \ln y = -3 \Rightarrow y = e^{-3}$$

ملاحظة: يمكن العكس بين القيمتين فتكون $y = e^4$ و $x = e^{-3}$.

تدرب 48

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln(ab)}{2}$$

$$2 \ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln(ab)$$

$$\ln\left(\frac{a^2 + 2ab + b^2}{9}\right) = \ln(ab)$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{9} = ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 9ab$$

$$a^2 - 7ab + b^2 = 0$$

نقسم على b^2 :

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{7a}{b} + 1 = 0$$

نفرض $\frac{a}{b} = x$:

$$x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(1)(1) = 45$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$$

$$e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$e(e^{3x} + 4e^{2x} - 5e^x) = 0$$

$$\text{نفرض } t = e^x$$

$$t^3 + 4t^2 - 5t = 0$$

$$t(t^2 + 4t - 5) = 0$$

إما:

$$t = 0$$

أو:

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$(t + 5)(t - 1) = 0$$

إما:

$$t = -5$$

أو:

$$t = 1$$

والحلول مقبولة في شرط الحل.

$$\frac{e^{-x} - 1}{e^x - 1} = -2$$

شرط الحل:

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$e^{-x} - 1 = -2e^x + 2$$

نضرب بـ e^x :

$$1 - e^x = -2e^{2x} + 2e^x$$

$$2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$$

نفرض $e^x = t$:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(2)(1) = 1$$

$$t_1 = \frac{3+1}{2(2)} = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ مرفوض}$$

$$4e^{2x} - e^x + 2 = 0$$

$$E = \mathbb{R}$$

نفرض $e^x = t$

$$4t^2 - t + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(4)(2) = 1 - 32 = -31 < 0$$

مستحيلة.

$$e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$$

$$E = \mathbb{R}$$

نفرض $e^{-x} = t$

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$(t - 6)(t - 1) = 0$$

إما:

$$t = 6$$

$$e^{-x} = 6$$

$$\Rightarrow -x = \ln(6) \Rightarrow x = -\ln(6)$$

أو:

$$t = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

والحلان مقبولان في شرط الحل.

$$e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$$

$$E = \mathbb{R}$$

نفرض $e^x = t$:

$$t^3 - 3t - 2 < 0$$

بالقسمة على $t + 1$ نجد:

$$t^3 - 3t - 2 = (t + 1)(t^2 - t - 2)$$

وبالتالي:

$$(t + 1)(t^2 - t - 2) < 0$$

$$(t + 1)(t + 1)(t - 2) < 0$$

$$(t + 1)^2(t - 2) < 0$$

بما أن $(t + 1)^2$ موجب فالإشارة من إشارة $(t - 2)$:

$$t - 2 < 0$$

$$t < 2$$

$$e^x < 2$$

$$x < \ln 2$$

$$S =] - \infty, \ln 2[$$

$$-8t \geq -12$$

$$t \leq \frac{3}{2}$$

$$2^x \leq \frac{3}{2}$$

$$x \ln(2) \leq \frac{3}{2}$$

$$x \leq \frac{3}{2 \ln(2)}$$

$$S = [\frac{3}{2 \ln(2)}, +\infty[$$

$$3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7$$

نضرب المتراجحة بـ 3^x :

$$3 \cdot 3^{2x} + 2 \geq 7 \times 3^x$$

نفرض $t = 3^x$:

$$3t^2 - 7t + 2 \geq 0$$

$$3t^2 - 7t + 2 = 0$$

$$\Delta = 49 - (4)(3)(2) = 25$$

$$t_1 = \frac{7+5}{6} = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{\ln 3}$$

$$t_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3 \ln 3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3 \ln 3}$	$\frac{2}{\ln 3}$	$+\infty$	
$3 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 2$	+++	0	---	0	+++
$0 >$	مقبول	غير مقبول		مقبول	

تدرب 51

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

من 1 نجد:

$$3^x = \frac{9}{3^y}$$

نعوض في 2:

$$\frac{9}{3^y} + 3^y = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{9 + 3^{2y}}{3^y} = 4\sqrt{3}$$

$$t_2 = \frac{3-1}{2(2)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln(2) \text{ مقبول}$$

تدرب 50

$$\frac{2^x}{2^x + 1} < \frac{1}{3}$$

$$3 \times 2^x < 2^x + 1$$

$$-2 \times 2^x + 1 > 0$$

$$-2 \times 2^x > -1$$

$$2^x < \frac{1}{2}$$

$$x \ln(2) < -\ln(2)$$

$$x < -1$$

$$S =]-\infty, -1[$$

$$4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$2^{2x} + 2^x \cdot 2 - 3 \leq 0$$

نفرض $t = 2^x$:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0$$

إما:

$$t = -3 \text{ مرفوض}$$

أو:

$$t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x \ln 2 = 0$$

$$x = 0$$

$$S =]-\infty, 0]$$

$$4e^{2x} - e^x + 2 = 0$$

نفرض $e^x = t$:

$$4t^2 - t + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(4)(2) = -31 < 0$$

مستحيلة.

$$2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$$

نفرض $t = 2^x$:

$$2t - 10t + 12 \geq 0$$

$$x = \ln\left(\frac{6+e}{4}\right)$$

$$\begin{cases} e^{4x}e^y = \frac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$$

بالمعادلة الأولى نجد:

$$e^{4x+y} = e^{-2}$$

$$4x + y = -2$$

ومن المعادلة الثانية نجد:

$$y = -\frac{2}{x}$$

نعوض في المعادلة الأولى:

$$4x - \frac{2}{x} = -2$$

$$\frac{4x^2 - 2}{x} = -2$$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(4)(-2) = 36$$

$$x_1 = \frac{-2+6}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = -4$$

$$x_2 = \frac{-2-6}{8} = -1 \Rightarrow y_2 = 2$$

تدرب 52

محلول.

تدرب 53

$$y' + 5y = 0$$

$$A(-2, 1)$$

$$y' = -5y$$

$$y = k \cdot e^{-5x}$$

ولدينا:

$$f(-2) = 1$$

$$\Rightarrow k \cdot e^{10} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{e^{10}} = e^{-10}$$

تدرب 53

$$y' + 2y = 0$$

$$3^{2y} - 4\sqrt{3} \times 3^y + 9 = 0$$

نفرض $3^y = t$:

$$t^2 - 4\sqrt{3}t + 9 = 0$$

$$\Delta = 48 - 4(1)(9) = 12$$

$$t_1 = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3^y = \ln(3\sqrt{3}) \Rightarrow y \ln(3) = \ln(3\sqrt{3})$$

$$y = \frac{\ln(3\sqrt{3})}{\ln(3)}$$

وبالتالي تكون x :

$$3^x = \frac{9}{3^y} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x \ln(3) = 2 \ln(3) \Rightarrow x = 2$$

وممكن أن يكون العكس أيضاً.

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{2}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى بـ -2 :

$$\begin{cases} -2e^x + e^y = -2 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

نجمع:

$$2e^y = 2 + e$$

$$e^y = \frac{2+e}{2}$$

$$y = \ln\left(\frac{2+e}{2}\right)$$

نعوض في 2:

$$2e^x + \frac{2+e}{2} = 4 + e$$

$$2e^x = 4 + e - \frac{2+e}{2}$$

$$2e^x = \frac{8 + 2e - 2 - e}{2}$$

$$2e^x = \frac{6+e}{2}$$

$$e^x = \frac{6+e}{4}$$

$$0 \in f([-\ln(2), +\infty[) =]\ln(2) - 1, +\infty[$$

يوجد حل وحيد للمعادلة وبالتالي للمعادلة جذران وللتأكد من أن 0 حلاً لها:

$$f(0) = 0$$

-4 نلاحظ أن:

f مستمر ومتناقص على المجال $] -2, -1[$ و:

$$\alpha \in f([-2, -1[) =]2e^{-1} - 1, 2e^{-2}[$$

وبالتالي:

$$-2 < \alpha < -1$$

المسألة الثانية

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

-1 النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

-2 نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = \frac{4}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_d = 0$$

d مقارب للتابع.

-3 نشكل الفرق:

$$f(x) - y_{d'} = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x - 3$$

$$= -4 + \frac{4}{e^x + 1} = \frac{-4e^x - 4 + 4}{e^x + 1} = \frac{-4e^x}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y_{d'} = 0$$

d' مقارب للتابع.

-4 f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

نعدم:

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$f'(-2) = \frac{1}{2}$$

$$y' = -2y$$

$$\Rightarrow y = k \cdot e^{-2x}$$

$$y' = -2y = -2k \cdot e^{-2x}$$

نعوض -2 في المشتق:

$$f'(-2) = -2ke^4$$

$$\frac{1}{2} = -2ke^4$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{4e^4}$$

المسألة الأولى

$$f(x) = 2e^x - x - 2$$

-1 النهايات:

$$f(x) = x \left(\frac{2e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

-2 f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2e^x - 1$$

نعدم:

$$2e^x - 1 = 0$$

$$e^x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\ln(2)$$

$$f(-\ln(2)) = 1 + \ln(2) - 2 = \ln(2) - 1$$

x	$-\infty$	$-\ln(2)$	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++
$f(x)$	$+\infty$	$\ln(2) - 1$	$+\infty$

-3 الاستنتاج:

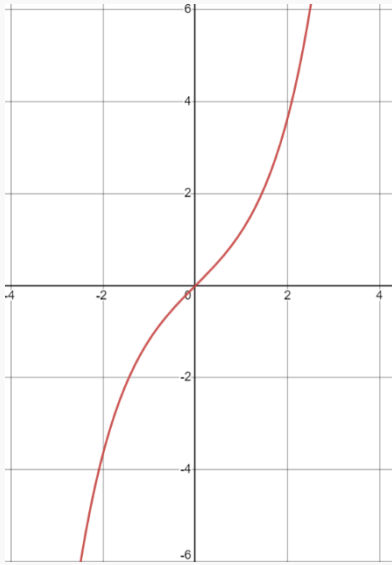
على المجال $] -\infty, -\ln(2)[$ نلاحظ أن التابع متناقص ومستمر و:

$$0 \in f([-\infty, -\ln(2)[) =]\ln(2) - 1, +\infty[$$

يوجد حل وحيد للمعادلة.

على المجال $] -\ln(2), +\infty[$ نلاحظ أن التابع متزايد ومستمر و:

الرسم:



-b لدينا:

$$f(0) = 0$$

المبدأ.

$$f'(0) = 1$$

فتكون معادلة المماس:

$$y_d = x$$

لدراسة الوضع النسبي نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

نعرف:

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

g اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1$$

نعدم:

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - 1 = 0$$

نضرب بـ e^x :

$$\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \frac{1}{2} = 0$$

نضرب المعادلة بـ 2:

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$f(0) = -1 + 2 = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-----	0	+++++
f(x)	$-\infty$	1	$+\infty$

-5 في نقطة التقاطع مع محور الترتيب نضع:

$$x = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$y_T = 1$$

المسألة الثالثة

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

-1 لدينا:

-a الشرط الأول:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$= -f(x)$$

فالتابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

والتابع لا يعدم.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+++++	+++++
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

$$g(x) = \frac{-e^{2x}+1}{2e^x} \text{ تصويب صيغة}$$

للاستنتاج نأخذ:

$$g(x) = -\frac{e^{2x}}{2e^x} + \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{2}(-e^x + e^{-x})$$

$$= -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$$

المسألة الرابعة

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

1- لدينا:

a- لنوجد مجموعة التعريف:

$$e^{2x} - e^x + 1 > 0$$

$$e^{2x} - e^x + 1 = 0$$

نفرض $t = e^x$:

$$t^2 - t + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3$$

مستحيلة.

وبالتالي مجموعة التعريف:

$$D_f = \mathbb{R}$$

b- لدينا:

$$f(x) = \ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}))$$

$$= \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$= 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

وبالتالي المقولة صحيحة.

c- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_d = \ln(1) = 0$$

d مقارب في جوار $+\infty$.

d- المماس الموازي لمحور الفواصل هو مماس أفقي وبالتالي يجب أن ينعدم المشتق:

f اشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

نعدم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x} - e^x = 0$$

$$\Rightarrow e^x(2e^x - 1) = 0$$

إما:

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-----	0	+++++
$g(x)$		0	

نلاحظ أن:

على $[0, +\infty[$ فوق C.على $] -\infty, 0]$ تحت C.

2- لدينا:

a- f مستمر ومتزايد ولدينا:

$$m \in f([-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$.

b- للإثبات:

$$f(x) = m$$

$$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = m$$

$$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - m = 0$$

نضرب بـ $2e^x$:

$$e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$$

نفرض $e^x = t$:

$$t^2 - 2mt - 1 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 - (4)(1)(-1) = 4m^2 + 4$$

$$= 4(m^2 + 1)$$

$$t_1 = \frac{2m + \sqrt{4(m^2 + 1)}}{2} = m + \sqrt{m^2 + 1}$$

$$e^x = m + \sqrt{m^2 + 1}$$

$$x = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1}) = \alpha$$

3- نعوض:

$$\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x} - e^{2x} - 2 - e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{4}(-4) = -1$$



المسألة الخامسة

$$f(x) = (1-x)2^x = (1-x)e^{x\ln(2)}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{x\ln(2)} - \frac{x\ln(2)e^{x\ln(2)}}{\ln(2)} \right)$$

$$= 0$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -e^{x\ln(2)} + \ln(2)e^{x\ln(2)}(1-x)$$

$$= -e^{x\ln(2)} + \ln(2)e^{x\ln(2)} - x\ln(2)e^{x\ln(2)}$$

$$= e^{x\ln(2)}(-1 + \ln(2) - x)$$

نعدم:

$$e^{x\ln(2)} = 0$$

مستحيلة.

$$-1 + \ln(2) - x = 0$$

$$x = \ln(2) - 1$$

$$f(\ln(2) - 1) = -\ln(2)(e^{\ln(2)(\ln(2)-1)})$$

$$= -\ln(2)e^{\ln^2 2 - \ln 2}$$

الجدول:

x	$-\infty$	$\ln(2) - 1$	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++
$f(x)$	0	$-\ln 2 \cdot e^{\ln^2 2 - \ln(2)}$	$+\infty$

الرسم:

$$e^x = 0 \text{ مستحيلة}$$

أو:

$$2e^x - 1 = 0$$

$$2e^x = 1$$

$$e^x = \frac{1}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

ومعادلته:

$$y = f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

وبالتالي المقولة صحيحة فيوجد مماساً أفقياً موازياً لمحور الفواصل عند $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

2- لدينا كل ما نريد من أجل جدول التغيرات ماعدا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$y = 0$ مقارب أفقي.

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(e^{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++
$f(x)$	0	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$+\infty$

3- لكتابة معادلة المماس:

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(0) = 1$$

$$f(0) = 0$$

$$\Rightarrow y_T = 1(x - 0) + 0 = x$$

4- الرسم:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$$

$$+\infty \text{ مقارب شاقولي نحو } x = -\frac{1}{2}$$

C يقع على يسار المقارب

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$-\infty \text{ مقارب شاقولي نحو } x = -\frac{1}{2}$$

C يقع على يمين المقارب

f اشتقاقي على D_f :

ولكن سنغير شكل f للسهولة

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$f(x) = x - [\ln(2x+1) - \ln(x)]$$

$$f(x) = x - \ln(2x+1) + \ln(x)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x}$$

نوجد المقامات

$$f'(x) = \frac{x(2x+1) - 2x + 2x + 1}{x(2x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x+1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2)(1)$$

$$1 - 8 = -7 < 0$$

مستحيلة الحل

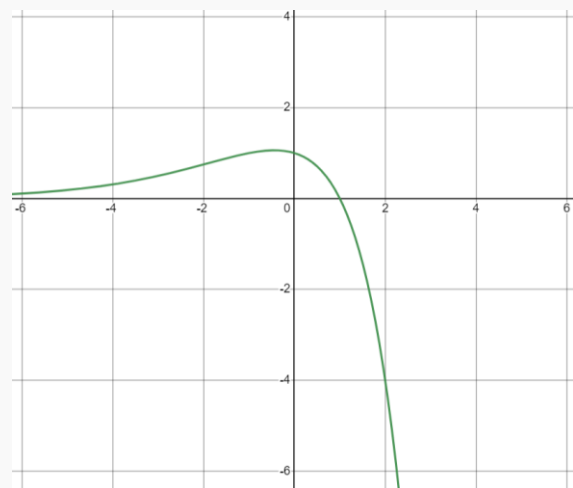
$$f'(x) > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$		$+\infty$

$$f(x) - y_d =$$

$$x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - (x - \ln(2))$$

$$f(x) - y_d = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - x + \ln(2)$$



المسألة السادسة

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

f معرف بشرط

$$2 + \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{2x+1}{x} > 0$$

البسط:

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

المقام:

$$x = 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+	+
x	-	-	0	+
$\frac{2x+1}{x}$	+	0	-	+
مراجعة	م	م	م	م

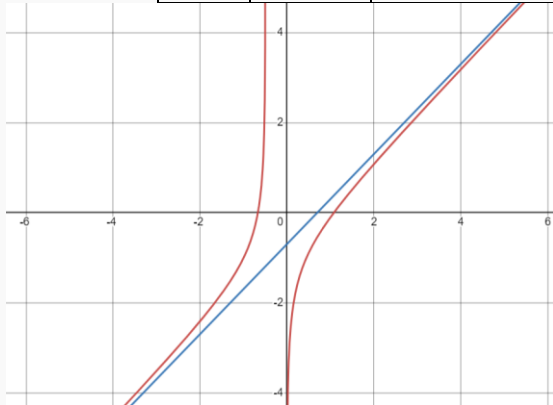
$$D_f =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - \ln(2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \ln(2) = +\infty$$

$$y = x - \ln(2)$$

x	y	(x, y)
0	$-\ln 2$	$(0, -\ln 2)$
$\ln 2$	0	$(\ln 2, 0)$



المسألة السابعة

$$f(x) = \frac{2}{e^{2x} + 1} + x$$

1- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_{d_1} = 0$$

إذن d_1 مقارب مائل في جوار $+\infty$.

2- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_{d_2} = \frac{2}{e^{2x} + 1} - 2$$

$$= \frac{2 - 2e^{2x} - 2}{e^{2x} + 1} = \frac{-2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y_{d_2} = 0$$

إذن d_2 مقارب مائل في جوار $-\infty$.

3- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

 f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} + 1$$

$$= \frac{-2e^{2x} + (e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$f(x) - y_d = -\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \ln(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_d) = -\ln(2) + \ln(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_d) = 0$$

 d مقارب مائل في جوار $+\infty$ دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_d = -\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \ln(2)$$

$$-\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \ln(2) = 0$$

$$\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \ln(2)$$

$$2 + \frac{1}{x} = 2$$

$$\frac{1}{x} = 0$$

مستحيلة

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f(x) - y_d$		+		-
		d فوق C	d تحت C	

 f مستمر و متزايد على $]1, 2[$

$$0 \in f(]1, 2[) =]1 - \ln(3), 2 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)[$$

للمعادلة حل وحيد α على المجال $]1, 2[$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x + 1)}$$

$$y = \underbrace{f'\left(\frac{4}{3}\right)}_{\frac{4}{3}} \left(x - \underbrace{\frac{1}{1}}_1\right) + \underbrace{f\left(\frac{4}{3}\right)}_{1 - \ln(3)}$$

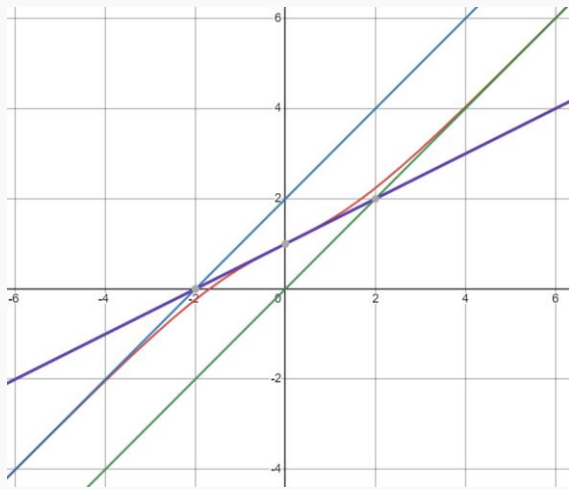
$$T : y = \frac{4}{3}(x - 1) + 1 - \ln(3)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+		+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

لدراسة الوضع النسبي:

محذوف

الرسم:



المسألة الثامنة

أولاً:

$$g(x) = x^2 + \ln x - 1$$

1- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

نعدم:

$$2x^2 + 1 = 0$$

$$2x^2 = -1$$

مستحيلة.

الجدول:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+++++
$g(x)$		$-\infty \rightarrow +\infty$

2- نجد أن التابع مستمر ومتزايد على مجموعة تعريفه وأيضاً:

$$0 \in f([0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

وللتأكد أن $\alpha = 1$ حلاً:

$$g(1) = 0$$

وبالتالي إشارة $g(x)$:

$$= \frac{-2e^{2x} + e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{4x} + 1}{(e^{2x} + 1)^2}$$

نعدم:

$$e^{4x} + 1 = 0$$

$$e^{4x} \neq -1$$

مستحيلة.

الجدول:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	+++++
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4- لدينا:

$$A(0,1)$$

الشرط الأول:

$$x \in \mathbb{R}$$

$$-x \in \mathbb{R}$$

الشرط الثاني:

$$f(x) + f(-x) = 2b$$

$$\frac{2}{e^{2x} + 1} + x + \frac{2}{e^{-2x} + 1} - x$$

$$= \frac{2}{e^{2x} + 1} + \frac{2}{\frac{1}{e^{2x}} + 1}$$

$$= \frac{2}{e^{2x} + 1} + \frac{2}{\frac{1 + e^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{2 + 2e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

$$= 2 \left(\frac{1 + e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right) = 2 = 2b$$

إذن $A(0,1)$ مركز تناظر للتابع.

5- لدينا:

$$x = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_T = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$= \frac{1}{2}x + 1$$



المسألة التاسعة

$$f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x^2}; x \in]0, +\infty[$$

$$g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x; x \in]0, +\infty[$$

1- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} = \frac{3x^3 + 2}{x} > 0$$

لا يعدم.

الجدول:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2- نعوض في التابع:

$$g(1) = 0$$

نلاحظ أن $g(x) \geq 0$ على المجال $[1, +\infty[$

نلاحظ أن $g(x) < 0$ على المجال $]0, 1[$

3- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g(x) \geq 0 \text{ على المجال } [1, +\infty[$$

$$g(x) < 0 \text{ على المجال }]0, 1[$$

ثانياً:

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}; x \in]0, +\infty[$$

1- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2- f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+++++
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

3- $f(1) = 2$ قيمة حدية صغرى ومعادلة المماس الافقي:

$$y = 2$$

4- تشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

لدراسة الوضع النسبي، نعدم الفرق:

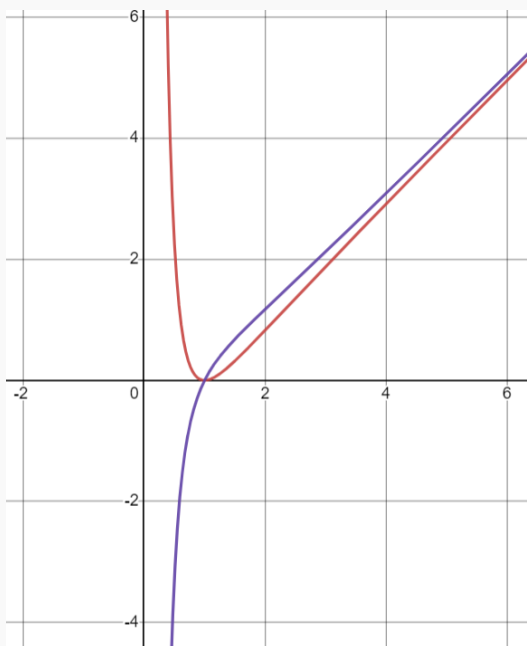
$$-\frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$-\frac{\ln x}{x}$		0	-----
الوضع		C فوق Δ	C تحت Δ

5- الرسم:



-7 لدينا:

لا يوجد حلول $m \in]-\infty, 0[$ حل وحيد $m = 0$ حلان $m \in]0, +\infty[$

المسألة العاشرة

$$f(x) = x + x(\ln x)^2$$

$$g(x) = (\ln x + 1)^2$$

$$D =]0, +\infty[$$

-1 النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + (\sqrt{x} \ln x)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + (2\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 = 0$$

-2 اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 + \ln^2 x + 2\ln x \left(\frac{1}{x}\right)x$$

$$= \ln^2 x + 2\ln x + 1 = (\ln x + 1)^2 = g(x)$$

-3 المعادلة:

$$g(x) = 0$$

$$(\ln x + 1)^2 = 0$$

$$\ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} \\ &= \frac{x^4 - x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(x^3 - 1 + 2\ln x)}{x^4} \\ &= \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

الجدول:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

-4 تشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_d = 0$$

لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_d = 0$$

$$-\ln x = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$-\frac{\ln x}{x^2}$	+++++	0	-----
الوضع		C فوق Δ	C تحت Δ

-5 الرسم:



-6 الرسم:

-2 f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}}$$

نعدم:

$$2e^x - 2xe^x = 0$$

$$2e^x(1 - x) = 0$$

إما:

$$2e^x = 0$$

مستحيلة.

أو:

$$1 - x = 0$$

$$x = 1$$

$$f(1) = \frac{2}{e}$$

الجدول:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	++++	0	-----
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

-3 الرسم:



-4 لحساب المساحة:

$$f(x) = 2xe^{-x}$$

$$\int_0^1 f(x) dx$$

نفرض:

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2$$

$$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

-4 لدينا:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{e}\right) &= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \left(\ln \frac{1}{e}\right)^2 \\ &= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} (-\ln e)^2 = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	++++	0	++++
$f(x)$	0	$\frac{2}{e}$	$+\infty$

-5 في النقطة التي فاصلتها $\frac{1}{e}$:

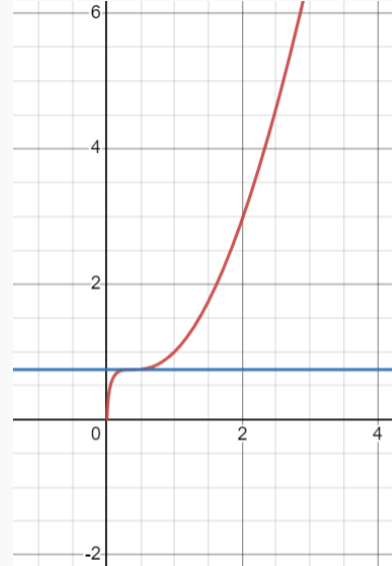
$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

$$\Rightarrow y_{\Delta} = \frac{2}{e}$$

مماس أفقي.

الرسم:



المسألة الحادية عشر

$$f(x) = \frac{2x}{e^x}; D_f = \mathbb{R}$$

-1 النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

 $y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

الأسى لا ينعدم. وبالتالي:

$$1 - x^2 = 0$$

$$1 = x^2$$

$$x = \pm 1$$

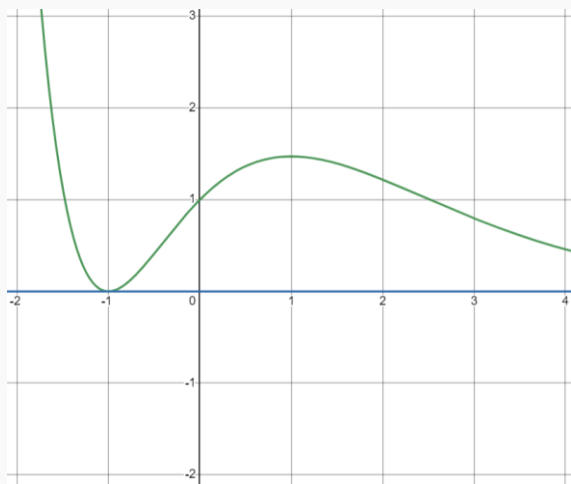
$$f(1) = \frac{4}{e}, f(-1) = 0$$

الجدول:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	---	0	+++	---
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4}{e}$	0

 $f(-1) = 0$ قيمة حدية صغرى $f(1) = \frac{4}{e}$ قيمة حدية كبرى

-4 الرسم:



-5 لدينا:

$$f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{e^{-x}}$$

$$= (-x+1)^2 e^x = (x-1)^2 e^x = g(x)$$

 C_1 ينتج عن C بتناظر بالنسبة لمحور الترتيب.

-6 لدينا:

$$h(x) = \ln(f(x))$$

$$f(x) > 0$$

ومن الجدول نلاحظ أن:

$$D_h =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$\Rightarrow [2xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x}$$

$$= [2xe^{-x}]_0^1 - 2[e^{-x}]_0^1$$

$$= (2e^{-1}) - 2[(e^{-1} - 1)]$$

$$= 2e^{-1} - 2e^{-1} + 2 = 2$$

-5 نجد أن:

$$f(-x) = -\frac{2x}{e^{-x}} = -2xe^x$$

$$f(-x) = -g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = -f(-x)$$

 C_1 ينتج عن C بتناظر بالنسبة للمبدأ.

-6 نعوض التابع ومشتقه:

$$\begin{aligned} \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}} + \frac{2x}{e^x} &= \frac{2e^x - 2xe^x + 2xe^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{2e^x}{e^{2x}} = 2e^{-x} \end{aligned}$$

التابع f هو حلاً للمعادلة.

المسألة الثانية عشر

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}; D_f = \mathbb{R}$$

-1 لحساب النهايات:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

 $y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.-2 f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - e^x(x+1)^2}{e^{2x}}$$

$$= e^x(x+1) \left(\frac{2-x-1}{e^{2x}} \right)$$

$$= e^x(x+1) \left(\frac{1-x}{e^{2x}} \right) = \frac{e^x(1-x^2)}{e^{2x}}$$

$$= (1-x^2)e^{-x}$$

-3 نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

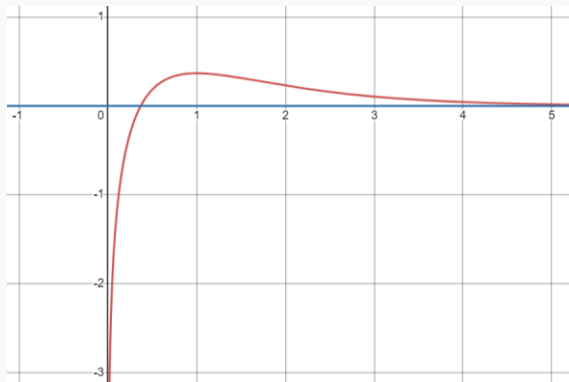
$$(1-x^2)e^{-x} = 0$$

$$= \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

-5- الجدول:

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		0	-----
f(x)	$-\infty$	e^{-1}	0

-6- الرسم:



المسألة الرابعة عشر

$$f(x) = e^{-2x} + 2x - 2; D_f = \mathbb{R}$$

-1- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}} + 2x - 2 = \frac{1 + 2xe^{2x}}{e^{2x}} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

-2- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = e^{-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

نلاحظ أن C فوق Δ لأن $f(x) - y_d > 0$ -3- اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2e^{-2x} + 2$$

نعدم:

$$-2e^{-2x} + 2 = 0$$

$$-2e^{-2x} = -2$$

$$e^{-2x} = 1$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

$$f(0) = -1$$

المسألة الثالثة عشر

$$f(x) = e^{-x}(1 + \ln x)$$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x$$

معرفان على:

$$I =]0, +\infty[$$

-1- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

g اشتقاقي على I:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2}$$

نعدم:

$$-1-x = 0$$

$$x = -1$$

مرفوض.

الجدول:

x	0	$+\infty$
g'(x)	-----	-----
g(x)	$+\infty$	$-\infty$

-2- التابع مستمر ومتناقص على I و:

$$0 \in f(I) =]-\infty, +\infty[$$

بالتالي يوجد حل وحيد α للمعادلة $g(x) = 0$ وللتحقق أن $\alpha = 1$:

$$g(1) = 0$$

-3- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

-4- f اشتقاقي على I:

$$f(x) = e^{-x} + e^{-x} \ln x$$

$$f'(x) = -e^{-x} - e^{-x} \ln x + \frac{e^{-x}}{x}$$

$$= e^{-x} \left(-1 - \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

الجدول:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

التابع مستمر ومتناقص على المجال

 $]-\infty, 0[$ و:

$$0 \in f(]-\infty, 0[) =]-1, +\infty[$$

بالتالي يوجد حل وحيد على المجال $]-\infty, 0[$

التابع مستمر ومتزايد على المجال

 $]0, +\infty[$ و:

$$0 \in f(]0, +\infty[) =]-1, +\infty[$$

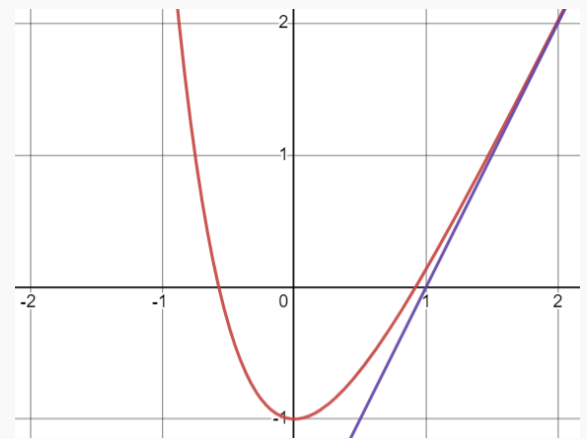
بالتالي يوجد حل وحيد على المجال

 $] -1, +\infty[$.وبالتالي يوجد جذرين للمعادلة $f(x) = 0$ وللتأكد ان أحدهما ينتمي للمجال $[-1, 0]$: f مستمر ومتناقص على المجال و:

$$0 \in f([-1, 0]) = [-1, e^2 - 4]$$

وبالتالي أحد الحلول ينتمي للمجال.

الرسم: 4-



لحساب المساحة:

$$\int_0^1 -f(x)dx$$

$$= -\left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + x^2 - 2x\right]_0^1$$

$$= -\left(-\frac{e^{-2}}{2} - 1\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2e^2} + \frac{3}{2}$$

5- نجد أن:

$$f(-x) = e^{2x} - 2x - 2$$

$$= -(-e^{2x} + 2x + 2) = -g(x)$$

نضرب الطرفين بـ -1 :

$$\Rightarrow g(x) = -f(-x)$$

 C' ينتج عن C بتناظر بالنسبة للمبدأ.

المسألة الخامسة عشر

$$f(x) = e^x + \ln(1-x); D_f =]-\infty, 1[$$

$$g(x) = (1-x)e^x - 1; D_g = \mathbb{R}$$

1- اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = -e^x + e^x(1-x)$$

$$= e^x(-1 + 1 - x) = -xe^x$$

نعدم المشتق:

$$-xe^x = 0$$

$$x = 0$$

$$g(0) = 0$$

الجدول:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+++++	0	-----
$g(x)$		0	

نلاحظ أن:

$$g(x) \leq 0$$

2- f اشتقاقي على $]-\infty, 1[$:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{e^x(1-x) - 1}{1-x} = \frac{g(x)}{1-x}$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

 $x = 1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.

لدينا:

$$f(0) = 1$$

الجدول:

وبالتالي $I(0,1)$ مركز تناظر للتابع f .

3- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(3 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

 $y = -1$ مقارب افقي في جوار $-\infty$. $y = 3$ مقارب افقي في جوار $+\infty$.اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3e^x(e^x + 1) - e^x(3e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(3e^x + 3 - 3e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

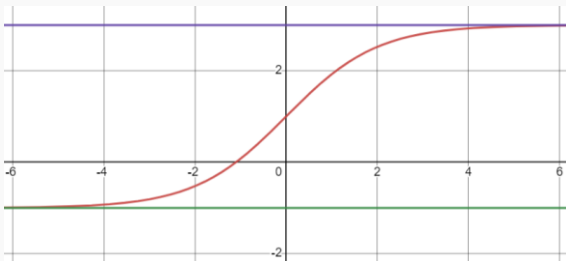
نعدم:

$$4e^x \neq 0$$

الجدول:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	
$f(x)$	-1	3

4- الرسم:



$$(3 - m)e^x - 1 - m = 0$$

$$3e^x - e^x m - m - 1 = 0$$

$$-e^x m - m = -3e^x + 1$$

$$m(-e^x - 1) = -3e^x + 1$$

$$m = \frac{-(3e^x + 1)}{-(e^x + 1)} = f(x)$$

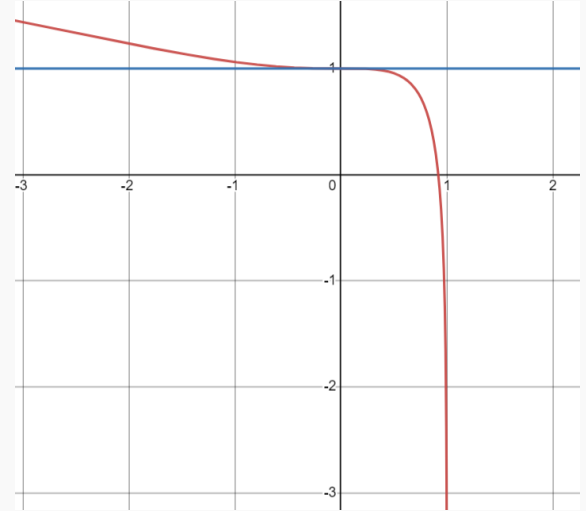
لا يوجد حلول $m \in]-\infty, -1]$ حل وحيد $m \in]-1, 3[$ لا يوجد حلول $m \in [3, +\infty[$

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	-----	0	-----
$f(x)$	$+\infty$	1	$-\infty$

3- لدينا $x = 0$ قيمة تعدم المشتق بالتالي المماس عندها يكون مماس أفقي:

$$y_T = 1$$

4- الرسم:



المسألة السادسة عشر

$$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

1- نحسب:

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} \\ &= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3 - e^x}{1 + e^x} \\ &= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3 - e^x}{1 + e^x} \\ &= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3 - e^x}{1 + e^x} = \frac{3e^x - 1 + 3 - e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = 2 \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 2 \end{aligned}$$

2- لدينا:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$-x \in \mathbb{R}$$

محقق، ولقد برهنا بالطلب السابق أن:

$$f(x) + f(-x) = 2b$$

مكتبة الرياضيات/ قسم التحليل إعداد المدرس: نذير تيناوي

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$$

$$w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

$$= \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) = r$$

حسابية وأساسها $r = -\ln(2)$

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_5$$

$$S = \frac{w_0 + w_5}{2} (6)$$

$$= \frac{\ln(8) + \ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2} (6)$$

$$= \frac{\ln\left(8 \times \frac{1}{4}\right)}{2} \times 6$$

$$= 3 \ln(2)$$

تدرب 56

$$u_n = \frac{3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

تدرب 57

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

نلاحظ أنها متتالية هندسية وأساسها $q = \frac{1}{5}$:

$$S_q = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}} \right)$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{4}$$

تدرب 58

$$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2, u_0 = \frac{5}{2}$$

1- نرسم للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): 2 \leq u_n \leq 3$$

5- للإثبات:

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = \frac{1}{1 + e^x}$$

محققة.

لحساب المساحة:

$$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

بالقسمة الإقليدية:

$$f(x) = 3 - \frac{4}{1 + e^x} = 3 + 4 \left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} \right)$$

$$\int_0^{\ln 2} f(x) dx = [3x + 4 \ln|-e^{-x}|]_0^{\ln 2}$$

$$= (3 \ln 2 - 4 \ln 2) = -\ln(2)$$

المتتاليات ونهاية متتالية:

تدرب 55

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 3, u_0 = 2$$

$$v_n = u_n + 6$$

1- نوجد v_{n+1} :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2} u_n - 3 + 6$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2} u_n + 3}{u_n + 6} = \frac{\frac{1}{2} u_n + 3}{2 \left(\frac{1}{2} u_n + 3 \right)}$$

$$= \frac{1}{2} = q$$

هندسية وأساسها $\frac{1}{2}$.لحساب v_0 :

$$v_0 = u_0 + 6 = 8$$

$$v_n = v_0 \cdot q^n = 8 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

2- نزل u_n من v_n :

$$v_n = u_n + 6 \Rightarrow u_n = v_n - 6$$

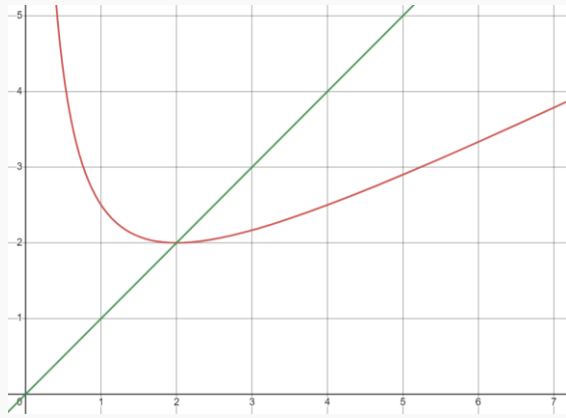
$$= 8 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 6$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -6$$

3- لدينا:

$$w_n = \ln(v_n)$$

مكتبة الرياضيات/ قسم التحليل إعداد المدرس: نذير تيناوي



تدرب 60

$$u_{n+1} = e\sqrt{u_n}, u_0 = e^3$$

$$v_n = \ln(u_n) - 2$$

1- نوجد v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2$$

$$= \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$$

$$= \ln(e) + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)}{\ln(u_n) - 2} = \frac{1}{2} = q$$

$$v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln(e^3) - 2 = 1$$

2- لدينا:

$$v_n = v_0 \cdot q^n = 1 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

$$v_n = \ln(u_n) - 2$$

$$\ln(u_n) = v_n + 2$$

$$u_n = e^{v_n+2} = e^{\frac{1}{2^n}+2}$$

3- لحساب النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$$

تدرب 61

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

1- نعرف f على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$2 \leq u_1 \leq u_0$$

$$2 \leq \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \leq 3$$

$$2 \leq \frac{13}{6} \leq 3$$

محقة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \dots \dots \text{فرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \dots \dots \text{طلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

نصور الأطراف:

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة.

4- لدينا من الطلب السابق:

$$u_{n+1} \leq u_n$$

فالمتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فإنها متقاربة ولإيجاد نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x$$

$$\frac{x^2 + 2x}{2x} = x$$

$$x^2 + 2x = 2x^2$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x + 2) = 0$$

إما:

$$x = 0 \text{ مرفوض}$$

أو:

$$x = 2 \text{ مقبول}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

5- الرسم:

$$\frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^{n+1} + 2n} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

محقة فالفرضية صحيحة.

2- لدينا من الطلب السابق:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

$n = 1$

$$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$$

$n = 2$

$$\frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^2}$$

.

.

.

$n = n - 1$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نجمع المتراجحات:

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

نلاحظ أن في الطرف الأيمن متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{تُهمل}} \leq 1$$

نضيف 1 والتي هي تكافئ $\frac{1}{1!}$:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2$$

$$u_n \leq 2$$

3- نوجد u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}}_{u_n} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

f اشتقائي على $[0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x + 2 - x - 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{(x+1)^2} > 0$$

على مجموعة التعريف وبالتالي المتتالية متزايدة.

2- نشكل الفرق:

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2$$

$$= \frac{2n-1-2n-2}{n+1} = \frac{-3}{n+1} < 0$$

$$u_n - 2 < 0$$

$$u_n < 2$$

3- بما انها متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة ولحساب نهايتها:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

تدرب 62

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

1- نرسم للفرضية بالرمز $E(n)$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

نثبت صحة الفرضية $E(1)$:

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2}$$

محقة.

نفرض صحة الفرضية $E(n)$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \dots \dots \text{الفرض}$$

نثبت صحة الفرضية $E(n+1)$:

$$\frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \dots \dots \text{الطلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

نضرب بـ $\frac{1}{n+2}$:

$$\frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^n(n+2)}$$

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

تدرب 63

لدينا مجموع لحدود عددها n وأصغر هذه الحدود هو $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ (لأن الكسور التي لها نفس البسوط يكون صاحب أكبر مقام هو الكسر الأصغر)أكبر هذه الحدود $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (لأن الكسور التي لها نفس البسوط يكون صاحب أصغر مقام هو الكسر الأكبر)

إن:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\text{أصغرهم}} \leq u_n \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{أكبرهم}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

الآن نحسب نهاية طرفي المتراجحة:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1 \end{aligned}$$

وبشكل مماثل:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1 \end{aligned}$$

فحسب الإحاطة يكون $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

تدرب 64

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

-1 دراسة اطراد u_n :

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}}_{u_n} + \frac{1}{5^{n+1}}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{5^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$$

متزايدة.

لدراسة اطراد v_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$v_{n+1} = u_n + \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_n + \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - u_n - \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{2^{n+1} + 5^{n+1}}{5^{n+1} \times 2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{2^{n+2} + 2^n \cdot 5^{n+1} - 5^{n+1} \times 2^{n+1}}{5^{n+1} \times 2^{n+2}}$$

$$= \frac{2^{n+1} \left(2 + \frac{1}{2} 5^{n+1} - 2.5^{n+1}\right)}{5^{n+1} \times 2^{n+2}}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{2} 5^{n+1} - 2.5^{n+1}}{2.5^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{4} - 1$$

$$= \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{3}{4} < 0$$

فالمتتالية v_n متناقصة.-2 لتبسيط عبارة u_n :نستنتج أنها متتالية هندسية وأساسها $q = \frac{1}{5}$:

$$S_q = a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{5} \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$u_n = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

-3 لدينا:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow v_n - u_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

فالمتتاليتان متجاورتان.

تدرب 65

$$S_0 = 12, t_0 = 1$$

ثابتة وقيمتها:

$$u_0 = 3t_0 + 8S_0 = 3 + 96 = 99$$

$$\Rightarrow u_n = 99 ; \forall n$$

-4 بما أنهما متجاورتان:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ell$$

لدينا:

$$u_n = 3t_n + 8S_n$$

بأخذ نهاية الطرفين:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3t_n + 8S_n$$

ولكن $u_n = 99$ وبالتالي:

$$99 = 3\ell + 8\ell$$

$$99 = 11\ell$$

$$\Rightarrow \ell = 9$$

وهي النهاية المشتركة:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 9$$

تدرب 66

$$f(x) = xe^{-x} ; D_f =]-\infty, +\infty[$$

-1 النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

 f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

نعدم:

$$1 - x = 0$$

$$x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{e}$$

الجدول:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	0	-----
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

 $f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى.

$$S_{n+1} = \frac{t_n + 3S_n}{4}, t_{n+1} = \frac{t_n + 2S_n}{3}$$

-1 لدينا:

$$v_{n+1} = S_{n+1} - t_{n+1} = \frac{t_n + 3S_n}{4} - \frac{t_n + 2S_n}{3}$$

$$= \frac{3t_n + 9S_n - 4t_n - 2S_n}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(S_n - t_n) = \frac{1}{12}v_n$$

متتالية هندسية وأساسها $q = \frac{1}{12}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$\text{لأن } -1 < q = \frac{1}{12} < 1$$

-2 الشرط الأول:

لندرس اطراد المتتالية S_n :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{t_n + 3S_n}{4} - S_n$$

$$= \frac{t_n + 3S_n - 4S_n}{4} = \frac{t_n - S_n}{4} = -\frac{1}{4}(v_n)$$

$$v_0 = S_0 - t_0 = 1 > 0 ; q > 0$$

$$v_n > 0$$

$$\Rightarrow S_{n+1} - S_n = -\frac{1}{4}(v_n) < 0$$

فالممتالية S_n متناقصة.لندرس اطراد t_n :

$$t_{n+1} - t_n = \frac{t_n + 2S_n}{3} - t_n$$

$$= \frac{2S_n - 2t_n}{3} = \frac{2}{3}(S_n - t_n) = \frac{2}{3}(v_n) \geq 0$$

فالممتالية t_n متزايدة.

الشرط الثاني:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

فالممتاليتان S_n و t_n متجاورتان.

-3 لدينا:

$$u_{n+1} = 3t_{n+1} + 8S_{n+1}$$

$$= t_n + 2S_n + 2t_n + 6S_n$$

$$= 3t_n + 8S_n = u_n$$

$$u_{n+1} = u_n ; \forall n$$

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{e} < 1$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

فالقضية صحيحة.

(b) نعرف القضية:

$$E(n): u_{n+1} \leq u_n$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\frac{1}{e} \leq 1$$

محقة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$u_{n+1} \leq u_n \dots \dots \text{الفرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \dots \dots \text{الطلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$u_{n+1} \leq u_n$$

نصور الأطراف في f :

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

القضية صحيحة والمتتالية متناقصة.

وبما أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 0 فإنها متقاربة ولتعيين نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$xe^{-x} = x$$

$$xe^{-x} - x = 0$$

$$x(e^{-x} - 1) = 0$$

إما:

$$e^{-x} - 1 = 0$$

$$e^{-x} = 1$$

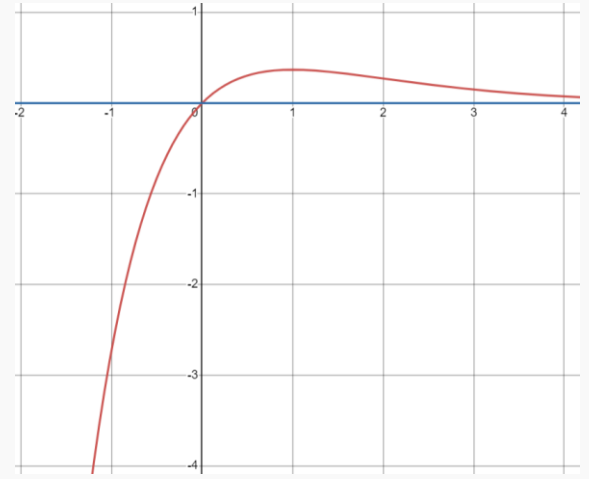
$$x = 0$$

أو:

$$x = 0$$

مقبولان.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$



-2 لدينا:

$$\int_0^1 f(x) dx$$

نفرض:

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = -[xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= -[xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$$

$$= -[e^{-1} - 0] - [e^{-1} - 1]$$

$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = -\frac{2}{e} + 1$$

-3 لدينا من الرسم أن للمعادلة $f(x) = m$ جذران مختلفان على المجال $[0, e^{-1}]$.

-4 لدينا:

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}; u_0 = 1$$

(a) نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n):$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$0 \leq 1 \leq 1$$

محقة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$0 \leq u_n \leq 1 \dots \dots \text{الفرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1 \dots \dots \text{الطلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$0 \leq u_n \leq 1$$

نصور الأطراف في التابع f :

الفرض ... $0 < u_n < 1$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... $0 < u_{n+1} < 1$

البرهان: نعرف التابع f على المجال $[2, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x}{2-x}$$

f اشتقاقي على $[2, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$$

التابع متزايد، لدينا من الفرض:

$$0 < u_n < 1$$

نصور الأطراف في التابع f :

$$f(0) < f(u_n) < f(1)$$

$$0 < u_{n+1} < 1$$

القضية صحيحة.

$$-2 \text{ المتتالية } 1 - \frac{1}{u_n} : v_n$$

(أ) لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2-u_n}{u_n} - 1}{\frac{1}{u_n} - 1} = \frac{\frac{2-u_n-u_n}{u_n}}{\frac{1-u_n}{u_n}}$$

$$= \frac{2(1-u_n)}{1-u_n} = 2 = q$$

هندسية وأساسها $2 = q$.

الحد العام:

$$v_n = v_0 \cdot q^n = 1 \cdot 2^n = 2^n$$

(ب) لكتابة الحد العام u_n :

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1$$

$$\frac{1}{u_n} = v_n + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2^n + 1}$$

المسألة الأولى

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2, \quad x_0 = 4$$

1- لحساب الحدود:

$$x_1 = \frac{3}{4}(4) + 2 = 5$$

$$x_2 = \frac{3}{4}(5) + 2 = \frac{15+8}{4} = \frac{23}{4}$$

2- لدينا:

$$y_n = x_n - 8$$

(أ) نوجد y_{n+1} :

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}x_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}x_n - 6$$

نشكل النسبة:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{3}{4}x_n - 6}{x_n - 8} = \frac{\frac{3}{4}(x_n - 8)}{x_n - 8} = \frac{3}{4} = q$$

هندسية وأساسها $\frac{3}{4}$.

(ب) لإيجاد حدها العام:

$$y_n = y_0 \cdot q^n$$

$$y_0 = x_0 - 8 = 4 - 8 = -4$$

$$\Rightarrow y_n = -4 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

(ت) لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

لأن $-1 < q < 1$.

ولدينا:

$$y_n = x_n - 8 \Rightarrow x_n = y_n + 8$$

$$= -4 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 8$$

المسألة الثانية

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}; \quad u_0 = \frac{1}{2}$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

محقة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

المسألة الرابعة

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \dots + 15$$

نضرب بالعدد 3:

$$3S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 45$$

نلاحظ أنه مجموع متتالية حسابية أساسها $r = 1$ و $a = 1$ و $l = 45$ و $n = 45$

$$3S = \frac{1 + 45}{2} (45)$$

$$3S = 23(45)$$

$$\Rightarrow S = 23(15) = 345$$

المسألة الخامسة

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots + \frac{n}{e^n}$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$1 < 2$$

محقة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$n \leq 2^n \dots \dots \dots$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$n+1 \leq 2^{n+1} \dots \dots \dots$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$n \leq 2^n$$

نضرب بالعدد 2:

$$n \leq 2n \leq 2^{n+1}$$

$$n \leq 2^n$$

فالقضية صحيحة.

2- لدينا من الطلب السابق:

$$n \leq 2^n$$

نقسم على e^n :

$$\frac{n}{e^n} \leq \frac{2^n}{e^n}$$

نبدأ بالتعويض في المتراجحة من $n = 1$ إلى n ثم نجمع المتراجحات:

$$u_n \leq \frac{2}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \dots + \frac{2^n}{e^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

3- نهاية المتتالية v_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

لأن $q > 1$.

المسألة الثالثة

$$x_n = \frac{4n+5}{n+1}, \quad y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

ندرس اطراد كل من المتتاليتين:

دراسة اطراد x_n :

نعرف التابع:

$$f(x) = \frac{4x+5}{x+1}$$

 f اشتقاقي على $[0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4x+4-4x-5}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

المتتالية متناقصة.

دراسة إطراد y_n :

نعرف التابع:

$$f(x) = \frac{4x+1}{x+2}$$

 f اشتقاقي على $[0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4x+8-4x-1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$$

المتتالية متزايدة.

نشكل الفرق:

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2} \\ &= \frac{(4n+5)(n+2) - (4n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{4n^2 + 8n + 5n + 10 - 4n^2 - 4n - n - 1}{n^2 + 3n + 2} \\ &= \frac{8n + 9}{n^2 + 3n + 2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - y_n = 0$$

المتتاليتان متجاورتان.

$$x = -\sqrt{2} \text{ مرفوض}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{2+2}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

الجدول:

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++
$f(x)$	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

-2 لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}; u_0 = 2$$

(أ) نرسم للقضية بالرمز $E(n)$:نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2} \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

محقة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \dots \dots$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \dots \dots$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$$

نصور الأطراف في f :

$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

القضية صحيحة.

(ب) من الطلب السابق أثبتنا أن:

$$u_{n+1} \leq u_n$$

فهي متناقصة وبما أنها محدودة من الأدنى فهي متقاربة.

(ت) لحساب نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x^2 + 2}{2x} = x$$

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \text{ مقبول}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ مرفوض}$$

نلاحظ أنها متتالية هندسية وأساسها $q = \frac{2}{e}$ وحدها الأول $\frac{2}{e}$:

$$S_q = a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{2}{e} \frac{1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n}{1 - \frac{2}{e}}$$

$$= \frac{2}{e} \frac{1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n}{\frac{e-2}{e}} = \frac{2}{e-2} \left(1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n\right)$$

نعوض:

$$u_n \leq \frac{2}{e-2} \underbrace{\left(1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}_{\text{يهمل}} < \frac{2}{e-2}$$

وبالتالي $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجع على المتتالية.

-3 لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{1}{e} + \underbrace{\frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots + \frac{n}{e^n}}_{u_n} + \frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$$

متزايدة.

بما أنها محدودة من الأعلى ومتزايدة فهي متقاربة.

المسألة السادسة

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}; x \in]0, +\infty[$$

-1 النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

 f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x(2x) - 2x^2 - 4}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 2x^2 - 4}{4x^2} = \frac{2x^2 - 4}{4x^2}$$

نعدم:

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = +\sqrt{2} \text{ مقبول}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$$