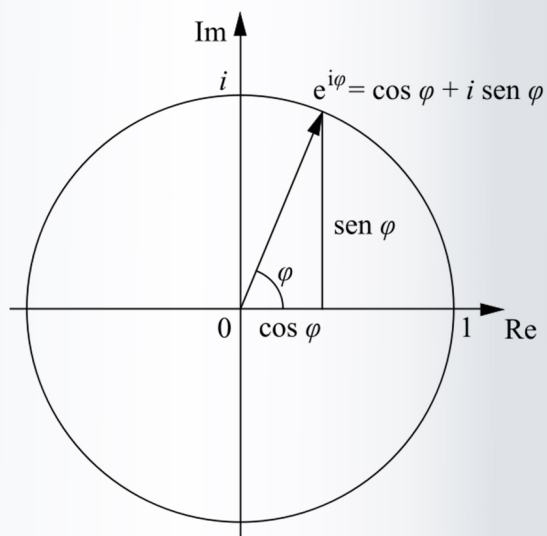


$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - m)^2}{n}}$$

كشف الرياضيات

الحقيقية



π

مدخل إلى الأعداد الحقيقية

Scan me!



بسم الله على

أحلامكم

بسم الله على

مساعيكم

وبارك الله

الخطى

الحالة العامة:

أ- إذا كانت القوة زوجية:

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$$

ثم نكمل الحل.

ب- في حال كانت القوة فردية:

$$i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (i^2)^n \cdot i = (-1)^n \cdot i$$

الشكل الجبري لعدد عقدي

هو $z = a + ib$ ويكون

$$Re(z) = a, \quad Im(z) = b$$

أمثلة

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$3 + 2i$	3	2
$4 - 2i$	4	-2
$1 + \frac{i}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
4	4	0
$-i$	0	-1

تعريف الوحدة التخيلية

سنصطلح انه يوجد عدد تخيلي i يحقق ان $i^2 = -1$ ولذلك تطبيقات عددية وهندسية وواقعية سنتعرف عليها ولاسيما في الهندسة وبالتالي إذا كان b عدداً حقيقياً ما فإن أي عدد من الشكل bi هو تخيلي بحت مثلاً $3i, -2i, \frac{i}{2}$

مجموعة الاعداد العقدية C : هي مجموعة جديدة تعد توسيعاً لمجموعة الاعداد الحقيقية R

حيث نضيف لها الاعداد التخيلية فيكون كل عدد عقدي هو من الشكل $z = a + bi$ وبالتالي يكون العدد العقدي z مكون من قسمين:

قسم حقيقي هو a نرمز له بالرمز $Re(z)$

وقسم تخيلي هو b نرمز له بالرمز $Im(z)$ إذن:

قوى العدد i

نحن نعلم أن:

$$i^2 = -1$$

ولكن إذا كان $i^3, i^4, i^5 \dots$ شو نساوي!!

سهولة (:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1(i) = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

يكون العدد z حقيقي بحت إذا وفقط إذا كان $\bar{z} = z$
ويكون العدد z تخيلي بحت إذا وفقط إذا كان $\bar{z} = -z$

يتم جمع (طرح) القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي.

$z_2 = 1 - i$	$z_1 = 3 + 4i$	1
$z_2 = 2i$	$z_1 = 4 + 3i$	2
$z_2 = 4 + 3i$	$z_1 = 2 - i$	3
$z_2 = \frac{4}{3} + i$	$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$	4
$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$	$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$	5

[illegible]

❖ إذا كان $Im(z) = 0$ فإننا نسمي z عدد حقيقي.

❖ إذا كان $Re(z) = 0$ نسمي z عدد تخيلي بحت.

z	$\bar{z}$
$3 + 2i$	
$1 - i$	
$1 + \sqrt{2}i - 3i$	
$i - 3$	
$2i + 3$	
$3i$	
2	

■ **الضرب:** يتم الضرب بشكل عادي مع مراعاة

$$i^2 = -1$$

مثال

في كل مما يلي احسب جداء العددين z_1 و z_2

$z_2 = 1 - i$	$z_1 = 3 + 4i$	1
$z_2 = 2i$	$z_1 = 4 + 3i$	2
$z_2 = 4 + 3i$	$z_1 = 2 - i$	3
$z_2 = \frac{4}{3} + i$	$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$	4
$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$	$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$	5

الحل



■ **القسمة:** لقسمة عددين عقديين نضرب البسط والمقام بمرافق المقام ثم نستفيد من المطابقة

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

(طيارة)

مثال

احسب $\frac{z_1}{z_2}$ في الحالات التالية:

$$z_1 = 3 + 2i, z_2 = 1 - i$$

$$z_1 = 1, z_2 = \sqrt{2} + i$$



خواص مساعدة: إذا كان w عدداً عقدياً

طويلته واحد فإننا نعلم أن:

$$w \cdot \bar{w} = |w|^2$$

$$w \cdot \bar{w} = 1^2$$

$$w \cdot \bar{w} = 1$$

وبالتالي يكون:

$$\bar{w} = \frac{1}{w}$$

مثال (1)

أولاً: ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن u طويلته 1

وهو مختلف عن الواحد

($u \neq 1$) أثبت أن العدد $Z = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ حقيقي.

الحل

الحقيقي والتخيلي

أثبت ان العدد z حقيقي، أو اثبت ان العدد z تخيلي بحت.

- لإثبات ان z حقيقي نحسب $\bar{z}$ ونثبت ان $\bar{z} = z$
- لإثبات أن z تخيلي بحت نحسب $\bar{z}$ ونثبت ان $\bar{z} = -z$



مثال (2)

[illegible]

مثال (3)

الحل

الحل

.....

الحل

الحل

[illegible]

[illegible][illegible]

بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

1- ليكن لدينا الأعداد العقدية: $Z_1 = 2 + 4i$, $Z_2 = 3 - i$, $Z_3 = -\frac{5}{2}i$ اوجد ما ان مرافق Z_1 :

a	$\bar{Z}_1 = 2 + 4i$	b	$\bar{Z}_1 = -2 - 4i$	c	$\bar{Z}_1 = -2 + 4i$	d	$\bar{Z}_1 = 2 - 4i$
---	----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	----------------------

2- مرافق العدد z_3 هو:

a	$\bar{Z}_3 = \frac{2}{5}i$	b	$\bar{Z}_3 = \frac{5}{2}i$	c	$\bar{Z}_3 = -\frac{5}{2}i$	d	$\bar{Z}_3 = -\frac{2}{5}i$
---	----------------------------	---	----------------------------	---	-----------------------------	---	-----------------------------

3- العدد $z_1 + z_2$ هو:

a	$5 + 3i$	b	$-5 - 3i$	c	$-5 + 3i$	d	$5 - 3i$
---	----------	---	-----------	---	-----------	---	----------

4- العدد $z_3 - z_1$ هو:

a	$-2 - \frac{13}{2}i$	b	$-2 + \frac{13}{2}i$	c	$2 - \frac{13}{2}i$	d	$2 + \frac{13}{2}i$
---	----------------------	---	----------------------	---	---------------------	---	---------------------

5- العدد $z_1 \cdot z_2$ هو:

a	$-10 + 10i$	b	$10 - 10i$	c	$10 + 10i$	d	$-10 - 10i$
---	-------------	---	------------	---	------------	---	-------------

6- القسم الحقيقي للعدد z_3 هو:

a	$-\frac{2}{5}$	b	0	c	1	d	$-\frac{5}{2}$
---	----------------	---	---	---	---	---	----------------

7- القسم التخيلي للعدد z_2 هو:

a	-3	b	-1	c	3	d	1
---	----	---	----	---	---	---	---

8- العدد العقدي الممثل لـ z_1^2 هو:

a	$-12 + 16i$	b	$-12 + 8i$	c	$12 - 16i$	d	$12 + 8i$
---	-------------	---	------------	---	------------	---	-----------

D	1
B	2
A	3
A	4
C	5
B	6
B	7
A	8





الدرس الثاني

الأعداد الحقيقية هندسياً

صدق

بنفسك

وبقدراتك،

وستصل

إلى القمة.



$$z = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

نخرج r عاملاً مشتركاً:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ويدعى الشكل الأخير بالشكل المثلثي للعدد العقدي z

واصطلاح العالم أويلر Euler الترميز:

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

فنجذ إذن:

$$z = r e^{i\theta}$$

ويدعى الشكل الأخير بالشكل الأسّي للعدد العقدي z

ولكتابة أي عدد عقدي بالشكل المثلثي أو الأسّي نتبع الخطوات:

1- نتأكد ان z مكتوب بالشكل الجبري أي:
 $z = x + iy$

2- نحسب الطويلة: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3- نضع:

بفرض $z = x + iy$ العدد العقدي الذي تمثله النقطة $M(x, y)$.

و بفرض أن الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يصنع زاوية θ مع محور الفواصل و أن $OM = r$

رسم توضيحي:

نلاحظ من الرسم أنّ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

و أنّ:

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{r}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{r}$$

و منه نجد أنّ:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

نعوض في الشكل الجبري:

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} \end{aligned} \right\}$$

نستنتج الزاوية θ

4- إذا كان المطلوب الشكل المثلثي فنعوض في القانون:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

الشكل الأسّي نعوض في القانون $z = re^{i\theta}$

مثال (1)

اكتب العدد $z = \sqrt{3} + i$ بالشكل المثلثي

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

اكتب العدد $z = -1 - i$ بالشكل المثلثي

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3)

اكتب العدد $z = 2i - 2\sqrt{3}$ بالشكل المثلثي:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (4)

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد الآتية:

$$Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, Z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$Z_3 = 4 - 4i, Z_4 = -2i$$

$$Z_5 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, Z_6 = \frac{4}{1-i}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....







- حالة العدد تخيلي بحت $z = bi$:

هنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: $b > 0$ (موجب):

عندها تكون الطويلة $r = b$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

الحالة الثانية: $b < 0$ (سالب):

عندها تكون الطويلة $r = |b|$

$$\theta = -\frac{\pi}{2}$$

أمثلة

الشكل الجبري	الشكل المثلثي
$z = 3i$	$3 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right]$
$z = 2i$	$2 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right]$
$z = -3i$	$3 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$
$z = \frac{1}{2}i$	$\frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right]$

الشكل الجبري	الشكل المثلثي
$z = 3$	$3e^{i\frac{\pi}{2}}$
$z = 2$	$2e^{i\frac{\pi}{2}}$
$z = -3$	$3e^{-i\frac{\pi}{2}}$
$z = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

- حالة كون العدد الحقيقي

$$z = a$$

هنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: $a > 0$ (موجب):

عندها تكون الطويلة $r = a$

$$\theta = 0$$

الحالة الثانية: $a < 0$ (سالب):

عندها تكون الطويلة $r = |a|$

$$\theta = \pi$$

أمثلة

الشكل الجبري	الشكل المثلثي
$z = 3$	$3[\cos 0 + i \sin 0]$
$z = 2$	$2[\cos 0 + i \sin 0]$
$z = -3$	$3[\cos \pi + i \sin \pi]$
$z = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}[\cos \pi + i \sin \pi]$

الشكل الجبري	الشكل المثلثي
$z = 3$	$3e^{i0}$
$z = 2$	$2e^{i0}$
$z = -3$	$3e^{i\pi}$
$z = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}e^{i\pi}$



③ القوة:

$$Z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n$$

$$Z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

مثال

.....

.....

.....

.....

.....

دستور دومافر:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

④ المرافق:

$$\overline{(\cos \theta + i \sin \theta)}$$

$$= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

مثال

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال (1)

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد الآتية:

$$Z = (1 - i)^2 \quad -1$$

.....

.....

.....

على وجه الخصوص احفظ أن:

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

$$-1 = e^{i\pi}$$

العمليات على الشكل المثلثي

① الضرب:

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

نضرب الطويلات ونجمع الزوايا

مثال

.....

.....

.....

.....

② القسمة:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

نقسم الطويلات ونطرح الزوايا

مثال

.....

.....

.....

.....



فائدة هامة: تفيد العمليات السابقة في إيجاد النسب المثلثية لزوايا غير شهيرة:

يرد سؤال يطلب منها إيجاد عدد عقدي ما بالشكلين الجبري والمثلثي (وتكون الزاوية غير شهيرة)

فهنا بعد الحصول على الشكل الجبري و المثلثي تتبع الخطوات التالية:

1- نضع $Z_{\text{الجبري}} = Z_{\text{المثلثي}}$

2- نقسم الطرفين على r

$$\cos\theta + i \sin\theta = \frac{x}{r} + i \frac{y}{r}$$

3- نطابق الجزء الحقيقي مع الحقيقي و

التخيلي مع التخيلي فنصل إلى :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} \end{aligned}$$

مثال (1)

نعطى العددين:

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2} \text{ \& } Z_2 = 1 - i$$

1- اكتب بالشكل المثلثي

$$Z_1, Z_2, \frac{Z_1}{Z_2}$$

الحل

$$Z = -3i e^{\frac{i\pi}{3}} \quad -5$$

$$Z = (1 - \sqrt{2}) e^{\frac{i\pi}{5}} \quad -6$$

$$Z = i e^{\frac{i\pi}{7}} \quad -7$$



مثال (2)

تأمل العددين العقديين:

$$Z_1 = \sqrt{3} + 3i, \quad Z_2 = 1 + i$$

-1 اكتب Z_1 و Z_2 و $Z_1 \cdot Z_2$ بالشكل المثلثي

-2 اكتب $Z_1 \cdot Z_2$ بالشكل المثلثي

-3 استنتج $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

الحل

-2 اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الجبري

-3 استنتج $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$



2- a- احسب العدد العقدي z_I الممثل

لنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

b- استنتج كلاً من $\cos \frac{3\pi}{8}$ و $\sin \frac{3\pi}{8}$.

الحل

مثال (3)

نتأمل النقطتين A و B التين يمثلهما العددان
 $a = 2$ و $b = 2e^{3i\pi/4}$. وليكن I منتصف $[AB]$.

1- a- ارسم شكلاً مناسباً، وبين طبيعة المثلث
 OAB .

b- استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u}, \vec{OI})$.



الشكل الثاني:

$$Z = r(-\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

نلاحظ أن المشكلة هنا أن الكوساين سالب

فلدينا الكوساين سالب و الساين موجب و هذا يوافق

الربع الثاني $(\pi - \theta)$ لذلك نستبدل الزاوية بـ $\pi - \theta$

$$Z = r(\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta))$$

الشكل الثالث:

$$Z = r(-\cos\theta - i \sin\theta) = -r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

نلاحظ أن المشكلة هنا : الساين و الكوساين سالبين

وهذا يوافق الربع الثالث $(\pi + \theta)$

لذلك نستبدل الزاوية بـ $\pi + \theta$

$$Z = r(\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta))$$

الشكل الرابع:

$$Z = r(\sin\theta + i \cos\theta)$$

هنا نلاحظ أن الساين حلّ محل الكوساين و بالعكس

و التحويل الذي يجعل الساين كوساين و يجعل

الكوساين ساين هو طرح الزاوية من $\frac{\pi}{2}$

لذلك نستبدل الزاوية بـ $\frac{\pi}{2} - \theta$

$$Z = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

أشكال مثلثية ناقصة



الشكل الأول:

$$Z = r(\cos\theta - i \sin\theta)$$

نلاحظ أن المشكلة هنا أن إشارة الساين سالبة

فلدينا الكوساين موجب و الساين سالب و هذا يدلّ

على أننا في الربع الرابع $(-\theta)$

لذلك نصلح الشكل باستبدال الزاوية بـ $-\theta$

$$Z = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$



$$z = 3 \left(\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)^2 \quad (4)$$

.....

.....

.....

.....

$$z = \left[2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) \right]^{12} \quad (5)$$

.....

.....

.....

.....

التمرين (2)

(1) نضع

$$Z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ و } Z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ و } Z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

جد الشكل الأسّي للأعداد الآتية:

$$Z_1 \cdot Z_2 \quad -1$$

.....

.....

.....

.....

$$\frac{Z_1}{Z_2} \quad -2$$

.....

.....

.....

.....

التمرين (1)

في كل من الحالات الآتية اكتب الشكل المثلي
للعدد العقدي z

$$z = 3 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) - i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) \quad (1)$$

.....

.....

.....

.....

$$z = -2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (2)$$

.....

.....

.....

.....

$$z = \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \quad (3)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \quad -3$$

2) اكتب بالشكل الأسّي الأعداد التالية:

$$Z_1 = 2\sqrt{3} + 6i \quad -1$$

$$Z_2 = (1 + i)\sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{3})} \quad -2$$

$$Z_3 = \frac{6}{(1+i)} \quad -3$$

$$Z_4 = (1 + i\sqrt{3})^4 \quad -4$$

$$Z_5 = (1 - \sqrt{2})e^{i(\frac{\pi}{4})} \quad -5$$

$$Z_6 = (1 + i\sqrt{3})^4 \quad -6$$



$$Z_9 = \underbrace{-12}_r e^{i\frac{\pi}{4}} -9$$

أنا لست r

$$Z_{10} = \underbrace{3i}_r e^{i\frac{\pi}{3}} -10$$

أنا لست r

(3) نضع $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي من الخواص التالية صحيحة

$$|Z| = 1 -1$$

$$Z = -(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}} -2$$

$$\arg Z = -\frac{\pi}{12} -3$$

$$Z = e^{i\frac{13\pi}{12}} -4$$

الحل

$$Z_7 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5 -7$$

$$Z_8 = \frac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4} -8$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

دستورا أول:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

نتائج هامة:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

التمرين (1)

بسط كتابة العدد العقدي

$$Z = \frac{1 + \cos x - i \sin x}{1 + \cos x + i \sin x}$$

موضحاً قيم x التي يكون عندها Z موجوداً

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

طريقة ثانية لحل الطلب الأول:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

إضافي : بفرض u عدد عقدي ما . أثبت أن العدد:

$$W = i \frac{u - Z\bar{u}}{1 - Z}$$

تخلي بحت

.....

.....

.....

.....

.....



[illegible]

مثال (1)

[illegible]

مثال (2)

التحريين (2)

$$Z = \cos(2x) + i \sin(2x)$$

فكرة هامة

2- يصبح لدينا:

$$Z = e^{i(\text{نصف الزاوية})} \left[e^{-i(\text{نصف الزاوية})} + e^{i(\text{نصف الزاوية})} \right]$$

بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

ليكن لدينا العدديان العقديان: $Z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $Z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ اوجد:

-1 $|Z_1| = ?$

a	$ Z_1 = 2$	b	$ Z_1 = 0$	c	$ Z_1 = 1$	d	غير ذلك
---	-------------	---	-------------	---	-------------	---	---------

-2 $|Z_2| = ?$

a	$ Z_2 = 1$	b	$ Z_2 = -3$	c	$ Z_2 = 3$	d	$ Z_2 = 2$
---	-------------	---	--------------	---	-------------	---	-------------

-3 $\bar{Z}_1 = ?$

a	$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	b	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	c	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	d	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
---	--	---	---	---	--	---	---

-4 $\bar{Z}_2 = ?$

a	$-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	b	$3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	c	$3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	d	غير ذلك
---	---	---	---	---	--	---	---------

-5 $\arg(Z_2) = ?$

a	$-\frac{3\pi}{4}$	b	$\frac{\pi}{4}$	c	$-\frac{\pi}{4}$	d	$\frac{3\pi}{4}$
---	-------------------	---	-----------------	---	------------------	---	------------------

-6 $(Z_1)^7 = ?$

a	$\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$	b	$7\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$	c	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$	d	$\cos\left(\frac{\pi}{21}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{21}\right)$
---	--	---	--	---	---	---	--

-7 $(Z_2)^2 = ?$

a	$27\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	b	$27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{12}\right)\right)$
c	$9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	d	$27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$$:Z_1 \cdot Z_2 = ? \quad -8$$

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$	b	$3\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$	a
$3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$	d	$3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	c

$$:\frac{Z_1}{Z_2} = ? \quad -9$$

$\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	b	$-\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	a
$\frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	d	$-\frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	c

$$:\frac{Z_2}{Z_1} = ? \quad -10$$

$3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	b	$-3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	a
$-3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	d	$3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	c

اكتب بالشكل الجبري:

$$Z = \frac{1}{2-i} \quad -11$$

$\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$	d	$\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$	c	$\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$	b	$-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$	a
------------------------------	---	------------------------------	---	------------------------------	---	-------------------------------	---

$$Z = (1+i)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad -12$$

$2 - 2i$	d	$\sqrt{2}i$	c	$\sqrt{2} + \sqrt{2}i$	b	$2 + 2i$	a
----------	---	-------------	---	------------------------	---	----------	---

اكتب بالشكل المثلثي:

$$Z = \sqrt{3} - 3 \quad -13$$

غير ذلك	d	$(3 - \sqrt{3})(\cos \pi + i\sin \pi)$	c	$\sqrt{3}\cos(\pi) + i\sin(\pi)$	b	$3\cos(\pi) + i\sin(\pi)$	a
---------	---	--	---	----------------------------------	---	---------------------------	---

$$Z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad -14$$

$2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$	b	$2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$	a
$2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	d	$2\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$	c

$$Z = \left(\frac{3i-1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right) \quad -15$$

$\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)$	b	$\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$	a
(a, C)	d	$\cos(\pi) + i\sin(\pi)$	c



اكتب بالشكل الاسي كلا مما يأتي:

$$Z = (1 - \sqrt{2}) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \quad -16$$

$(\sqrt{2} - \sqrt{3})e^{i\frac{4\pi}{3}}$	b	$(\sqrt{2} - 1)e^{i\frac{4\pi}{3}}$	a
$(\sqrt{2} + 1)e^{i\frac{4\pi}{3}}$	d	$(1 - \sqrt{2})e^{i\frac{4\pi}{3}}$	c

$$Z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{i} \right)^5 \quad -17$$

$32e^{i\frac{6\pi}{4}}$	d	$32e^{i\frac{5\pi}{3}}$	c	$32e^{i\frac{4\pi}{3}}$	b	$32e^{-i\frac{4\pi}{3}}$	a
-------------------------	---	-------------------------	---	-------------------------	---	--------------------------	---

$$Z = (1 + \sqrt{3}i)^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} \quad -18$$

(a, b)	d	$16e^{i\frac{5\pi}{3}}$	c	$16e^{i\frac{8\pi}{3}}$	b	$16e^{i\frac{2\pi}{3}}$	a
----------	---	-------------------------	---	-------------------------	---	-------------------------	---

إن العبارة الآتية بالشكل الجبري:

$$Z = (1 + i)^{2016} \quad -19$$

(a, b)	d	$Z = 2^{1008}$	c	$Z = 2i^{1008}$	b	$Z = -2^{1008}$	a
----------	---	----------------	---	-----------------	---	-----------------	---

إن العبارة الآتية بالشكل المثلثي:

$$Z = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) \cdot 2 \left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4} \right) \quad -20$$

$2 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right)$	b	$12 \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)$	a
$2 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right)$	d	$2 \left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} \right)$	c

B	11	C	1
C	12	C	2
C	13	A	3
D	14	C	4
A	15	C	5
A	16	A	6
A	17	D	7
D	18	A	8
C	19	B	9
C	20	C	10



الدرس الثالث

المعادلات العقدية



Scan me!

كل دقيقة
تستثمرها
في
الدراسة
هي
استثمار في
مستقبلك.

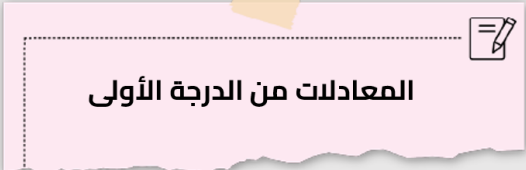
مثال

حل المعادلات التالية:

$$Z - 2\bar{Z} = 2 \quad (1)$$

[illegible]

$$2iZ + \bar{Z} = 3 + 3i \quad (2)$$

[illegible]

النوع الأول: معادلات في z فقط:

نعزل Z

النوع الثاني: معادلات في $\bar{Z}$ فقط:

1- نأخذ مرافق للطرفين

2- عزل Z

مثال

حل المعادلة $i\bar{Z} + 1 = 2i$

الحل

[illegible]

النوع الثالث: معادلات في Z و $\bar{Z}$:

1- نفرض $\bar{Z} = x - yi \Leftarrow Z = x + yi$

2- نعوض ونكتب الطرفين بالشكل الجبري

3- حقیقی = حقیقی

تخیلی = تخیلی

المعادلات من الدرجة الثانية

النوع الأول: المعادلات من الشكل:

$$Z^2 = -k^2$$

عندئذ نضع $i^2 = -1$

$$\Rightarrow Z^2 = i^2 k^2$$

$$\Rightarrow Z = ki \text{ or } Z = -ki$$

مثال

حل المعادلة $Z^2 = -9$

مثال

حل المعادلة $Z^2 = -2$

طريقة ثانية:



النوع الثاني: المعادلات من الشكل

$$Z^2 = a + ib$$

1- نفرض $Z = x + iy$

2- نضع المعادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \dots (1) \\ x^2 - y^2 = a \dots (2) \\ 2xy = b \dots (3) \end{cases}$$

3- نجمع (1) و (2) فنحسب x_1 و x_2

4- نطرح (1) و (2) فنحسب y_1 و y_2

5- من المعادلة (3) نميز حالتين:

أ- $2xy = b > 0$ فنأخذ x و y من نفس

الإشارة ونضعها بالشكل الجبري

ب- $2xy = b < 0$ فنأخذ x و y من

إشارتين متعاكستين ونضعها

بالشكل الجبري

التمرين (1)

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

(1)

$$Z^2 = 3 + 4i$$



ملاحظة:

قد يأتي السؤال بصيغة " أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $w = a + ib$ " فنحل كالتالي:

أولاً: نسطع المعادلة $z^2 = a + ib$

ثانياً: نحلها مثل الطريقة السابقة

مثال (1)

أوجد الجذران التربيعيان للعدد i

الحل

مثال (2)

أوجد الجذران التربيعيان للعدد $W = 4 + 4i$



$$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب- حالة $\Delta = 0$:

للمعادلة حل وحيد :

$$Z = -\frac{b}{2a}$$

ت- حالة $\Delta < 0$: أي $\Delta = -k^2$

عندها للمعادلة حلان عقديان

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ث- حالة $\Delta = a + ib$ (عدد عقدي) :

عندئذ نفرض $w = x + iy$ هو الجذر

التريعي لـ Δ عندها

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 - y^2 = a$$

$$2xy = b$$

ونوجد الحلول فنحصل على جذري

المميز Δ :

$$Z_1 = \frac{-b + w_1}{2a}$$

$$Z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$$

مثال (1)

حل المعادلة:

$$Z^2 + Z + 1 = 0$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

النوع الثالث: المعادلات في Z و Z^2 :

(1) نخرج Z عامل مشترك

(2) إما / أو

مثال (1)

أوجد جذر المعادلة

$$2iZ + Z^2 = 0$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

النوع الرابع: المعادلات من الشكل

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

(1) نحسب المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(2) نميز الحالات:

أ- حالة $\Delta > 0$:

للمعادلة حلان

$$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$



مثال (2)

اكتب طول المعادلة

$$(z^2 + 3\sqrt{3}z + 9)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9) = 0$$

بالشكل الأسّي

الحل

التمرين (1)

حل في C المعادلات الآتية:

$$z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0 \quad (1)$$



[illegible]

ملاحظة: عند وجود i بالمقام يمكن أن نرفعها إلى البسط ونضرب ب (-1) أي

$$\frac{\text{عدد}}{i} = -i(\text{عدد})$$

[illegible]



إذا كانت المعادلة

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

وكان Z_1 و Z_2 حلول هذه المعادلة، عندئذ:

$$Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = \frac{c}{a}$$

③ إذا كانت المعاملات a و b و c حقيقية فإن

Z_1 و Z_2 مترافقان أي

$$Z_1 = \overline{Z_2}$$

التمرين (2)

جد عددين عقديين q و p كي تقبل المعادلة

$$Z^2 + pZ + q = 0$$

العددين $1 + 2i$ و $3 - 5i$ جذرين لها.

الحل

$$Z^2 + (1 + 8i)Z - 17 + i = 0 \quad ③$$



This image shows a full page of white paper with horizontal dashed black lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

التمرين (5)

نتأمل كثير الحدود:

$$P(Z) = Z^4 - 19Z^2 + 52Z - 40$$

1 عین عددین حقیقیین a و b یحققان أن

$$P(Z) = (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + 4Z + 2a)$$

2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

[illegible]

التحريين (4)

احسب الجداء

$(Z^2 + 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5)$ ثم حل في $\mathbb{C}$

المعادلة

$$Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15 = 0$$

[illegible][illegible]

المعادلات من الدرجة الثالثة فما فوق

① نبحث عن حلول المعادلة بالتجريب أو من

طلب سابق ولیکن w

② نميز حالتين:

أ- إذا كان w حقيقي نقسم المعادلة على

$Z - w$ فنحصب على معادلة من الشكل

$$\underbrace{(Z - w)}_{\text{linear}} \underbrace{Q(Z)}_{\text{quadratic}} = 0$$

ناتج القسمة المقسوم عليه

ثم نستخدم خاصية الجداء الصفري



ب- إذا كان $Z = w$ تخيلي و الأمثال حقيقية

عندئذ $Z^2 = w^2$ نقسم على $Z^2 - w^2$

فنحصل على معادلة من الشكل:

$$(Z^2 - w^2)Q(Z)$$

ثم نستفيد من خاصية الجداء الصفري

مثال (1)

لتكن المعادلة:

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = 0$$

1 أثبت أن $Z = -1$ حل للمعادلة

2 اكتب المعادلة بالشكل:

$$(Z + 1)Q(Z) = 0$$

3 أوجد حلول هذه المعادلة

الحل

إضافي: لتكن A, B, C نقاط المستوي التي تمثل

حلول المعادلة السابقة

أثبت أن ABC مثلث متساوي الأضلاع



النوع الأخير: جملة معادلتين مجهولين:

مثال (1)

$$\begin{cases} 3Z + Z' = 5 + 2i \\ -Z + Z' = 1 - 2i \end{cases}$$

مسائل وتمارين

1 لتكن النقاط A و B و C و D نقاطاً تمثل الأعداد العقدية :

$$a = 1 \text{ و } b = e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ و } c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ و } d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}$$

① اكتب c بالشكل الأسّي و d بالشكل الجبري

② وضع النقاط A و B و C و D في مستوي مزدوج بمعلم متجانس ثم أثبت أن $OABC$ معين

الحل

مثال (2)

$$\begin{cases} 2iZ + Z' = 2i \\ 3Z - iZ' = 1 \end{cases}$$

ويتم الحل بالحذف بالجمع أو بالتعويض



③ ليكن $\alpha = e^{2i\frac{\pi}{5}}$ نضع

$$A = \alpha + \alpha^4 \quad B = \alpha^2 + \alpha^3$$

① أثبت أن $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$

واستنتج أن A, B هما جذرا المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$... (*)

② عبر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

③ حل المعادلة (*) واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

الحل

② ليكن Z و Z' عددين عقديين أثبت أ، :

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$$

الحل



بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي , حل أو أحد حلول المعادلة في كل مما يلي هو:

$$3Z - 2 = 6Z + 1 \quad -1$$

2	d	-1	c	3	b	1	a
---	---	----	---	---	---	---	---

$$2Z + i\bar{Z} = 5 + 4i \quad -2$$

$2 - i$	d	$2 + i$	c	$3 - i$	b	$3 + i$	a
---------	---	---------	---	---------	---	---------	---

$$\frac{\bar{z}-3}{\bar{z}+3} = i \quad -3$$

$3i$	d	3	c	$-4i$	b	$-3i$	a
------	---	---	---	-------	---	-------	---

$$7Z^2 = -3iZ \quad -4$$

$\begin{Bmatrix} 0 \\ 7 \\ -\frac{3}{3}i \end{Bmatrix}$	d	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{7}{7}i \end{Bmatrix}$	c	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{7}{7}i \end{Bmatrix}$	b	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ -\frac{7}{7}i \end{Bmatrix}$	a
---	---	--	---	---	---	---	---

$$-7\bar{Z} = -7 + 7i \quad -5$$

$-1 - i$	d	$1 + i$	c	$1 - i$	b	$7 + 7i$	a
----------	---	---------	---	---------	---	----------	---

$$4Z^2 - 100 = 0 \quad -6$$

$\begin{Bmatrix} 26 \\ -26 \end{Bmatrix}$	d	$\begin{Bmatrix} 5 \\ -5 \end{Bmatrix}$	c	$\begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \end{Bmatrix}$	b	$\begin{Bmatrix} 25 \\ -25 \end{Bmatrix}$	a
---	---	---	---	---	---	---	---

$$Z^2 - 5 = 12i \quad -7$$

$\begin{Bmatrix} -3 - 2i \\ 3 - 2i \end{Bmatrix}$	d	$\begin{Bmatrix} 3 + 2i \\ -3 - 2i \end{Bmatrix}$	c	$\begin{Bmatrix} 3 + 2i \\ 3 - 2i \end{Bmatrix}$	b	$\begin{Bmatrix} -3 + 2i \\ 3 + 2i \end{Bmatrix}$	a
---	---	---	---	--	---	---	---

$$iZ^2 + Z + 3 + i = 0 \quad -8$$

$\begin{Bmatrix} 1 - i \\ -2 + i \end{Bmatrix}$	d	$\begin{Bmatrix} -1 - i \\ 1 + 2i \end{Bmatrix}$	c	$\begin{Bmatrix} -1 - i \\ 2 - i \end{Bmatrix}$	b	$\begin{Bmatrix} 1 - i \\ 1 + 2i \end{Bmatrix}$	a
---	---	--	---	---	---	---	---

$$Z^2 - (1 + \sqrt{3})Z + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad -9$$

$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}$	d	$1 + \sqrt{3}$	c	$\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$	b	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$	a
------------------------------------	---	----------------	---	--------------------------	---	------------------------------------	---

$$(Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4) = 0 \quad -10$$

$\begin{cases} 1-i \\ 1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i \end{cases}$	d	$\begin{cases} 1+i \\ 1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i \end{cases}$	c	$\begin{cases} 1+i \\ -1-\sqrt{3}i \\ -1+\sqrt{3}i \end{cases}$	b	$\begin{cases} 1+i \\ -1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i \end{cases}$	a
---	---	---	---	---	---	--	---

$$(2 - Z - Z^2)^3 = 0 \quad -11$$

$\begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$	d	$\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	c	$\begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$	b	$\begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$	a
--------------------------------------	---	------------------------------------	---	-------------------------------------	---	--------------------------------------	---

$$Z^3 = 27i \quad -12$$

$\begin{cases} 3e^{i\frac{\pi}{6}} \\ 3e^{-i\frac{5\pi}{6}} \\ 3e^{i\frac{3\pi}{2}} \end{cases}$	d	$\begin{cases} 3e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ 3e^{-i\frac{5\pi}{6}} \\ 3e^{-i\frac{3\pi}{2}} \end{cases}$	c	$\begin{cases} 3e^{i\frac{\pi}{6}} \\ 3e^{-i\frac{5\pi}{6}} \\ 3e^{i\frac{3\pi}{2}} \end{cases}$	b	$\begin{cases} 3e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ 3e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ 3e^{-i\frac{3\pi}{2}} \end{cases}$	a
--	---	--	---	--	---	---	---

13- ليكن u عددا عقديا لا يساوي الواحد وطويلته تساوي الواحد ان العدد $W = \frac{Z-u\bar{Z}}{i-iu}$

حقيقي	a	تخيلي بحت	b	حقيقي بحت	c	غير ذلك	d
-------	---	-----------	---	-----------	---	---------	---

$$|Z - Z'|^2 + Z'\bar{Z} + Z\bar{Z}' \quad -14$$

$ Z ^2 - Z' ^2$	a	$ Z ^2 + Z' ^2$	b	$ Z' ^2 - Z ^2$	c	$ Z ^2 + Z' ^2 - Z'\bar{Z}$	d
------------------	---	------------------	---	------------------	---	------------------------------	---

15- ان طوية العدد $Z = \sin \theta + i \cos \theta$ يساوي

4	d	1	c	12	b	2	a
---	---	---	---	----	---	---	---

16- ان زاوية العدد $Z = \cos \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}$ تساوي

$\frac{\pi}{12}$	d	$\frac{\pi}{6}$	c	$\frac{\pi}{3}$	b	$\frac{\pi}{4}$	a
------------------	---	-----------------	---	-----------------	---	-----------------	---

17- ان طوية العدد $Z = \cos \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}$ تساوي

2	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	c	$\sqrt{2}$	b	1	a
---	---	----------------------	---	------------	---	---	---

18- بفرض z, w عددين عقدين طوية كل منهما تساوي الواحد وبحققان ان $z \cdot w \neq -1$ فان:

$$Z = \frac{z+w}{zw+1}$$

فان Z :

حقيقي	a	تخيلي	b	تخيلي بحت	c	غير ذلك	d
-------	---	-------	---	-----------	---	---------	---

19- ان المقدار $P(z) = 5z^3 - 3z^2 - z - 1 = 0$ يكتب بالشكل:

$P(z) = (z-1)(5z^2 - 2z + 1)$	b	$P(z) = (z-1)(5z^2 + 2z + 1)$	a
$P(z) = (z+1)(5z^2 + 2z + 3)$	d	$P(z) = (z+1)(5z^2 + 2z + 1)$	c

20- ان حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي:

$\{1\}$	b	$\left\{1, -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right\}$	a
$\left\{1, \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, -\frac{1}{10} + \frac{2}{5}i\right\}$	d	$\left\{1, -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right\}$	c

21- ليكن المقدار $P(z) = 2z^3 - 5z^2 + 3z - 2 = 0$, إن $P(2)$ يساوي:

0	d	1	c	i	b	$-2i$	a
---	---	---	---	---	---	-------	---

22- إن $P(z)$ يكتب بالشكل:

$(z - 2)(2z^2 - z - 1)$	b	$(z - 2)(2z^2 - z + 1)$	a
$(z + 2)(2z^2 - z + 1)$	d	$(z + 2)(2z^2 + z + 1)$	c

23- إن عدد حلول المعادلة $P(z) = 0$ هو:

مستحيلة الحل	d	1	c	2	b	3	a
--------------	---	---	---	---	---	---	---

B	13	C	1
C	14	C	2
A	15	A	3
C	16	A	4
A	17	C	5
A	18	C	6
C	19	C	7
D	20	C	8
A	21	B	9
A	22	C	10
A	23	B	11
A	24	B	12



الدرس الرابع

تطبيقات العصرية

كل

صباحاً

فالنجاح

يحتاج إلى

وقت

وجهد.



• العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز
ثقل المثلث ABC :

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

$$Z_G = \frac{a + b + c}{3} \text{ أو}$$

• المسافة بين نقطتين:

$$AB = |Z_{\overline{AB}}| = |Z_B - Z_A|$$

• شرط توازي شعاعين:

يكون الشعاعان $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ متوازيان إذا تحقق
أحد الشرطين:

$$Z_{\overline{AB}} = k \cdot Z_{\overline{CD}} \quad (1)$$

وهذا نفسه يكتب بالشكل:

$$\frac{Z_{\overline{AB}}}{Z_{\overline{CD}}} = k$$

وهذا نفسه يؤول إلى المساواة:

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C} = k$$

حيث $k \in \mathbb{R}$

(2) الزاوية بين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ هي 0 أو π

ولكن كيف نحسب هذه الزاوية؟

• الزوايا:

نرمز للزاوية الموجهة التي تنقل حامل الشعاع $\vec{u}$

إلى حامل الشعاع $\overline{AB}$ بالرمز: $(\vec{u}, \overline{AB})$

وهي تساوي:

درسنا سابقاً أن كل عدد عقدي $Z = x + iy$

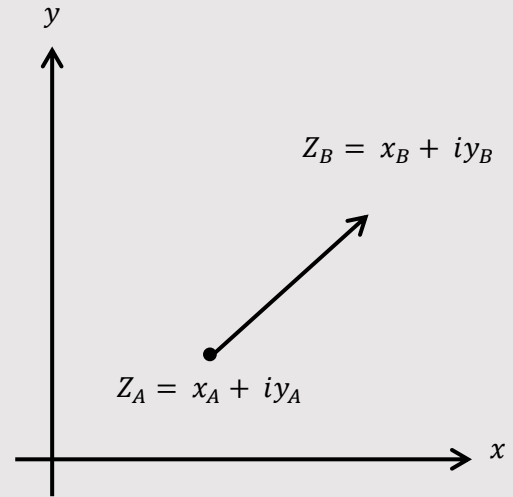
يمثل نقطة في المستوي $M(x, y)$

لذلك إذا كانت $A(x, y)$ نقطة فإننا نرمز للعدد
العقدي الممثل لها

بأحد الرمزتين:

$$a = x + iy \text{ or } Z_A = x + iy$$

وعليه يمكن استخلاص التعاريف التالية:



• العدد العقدي الممثل للشعاع $\overline{AB}$:

$$Z_{\overline{AB}} = Z_B - Z_A$$

$$Z_{\overline{AB}} = b - a \text{ أو}$$

• العدد العقدي الممثل للنقطة I منتصف
النقطة $[AB]$:

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

$$Z_I = \frac{a + b}{2} \text{ أو}$$

② أوجد الأعداد العقدية الممثلة للأشعة
 $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$

التمرين (3)

$$Z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$$

$$Z_B = 2(1 - i\sqrt{3})$$

① أثبت أن A و B تنتمي إلى الدائرة التي
مركزها O ونصف قطرها 4 .

② عين العدد العقدي الممثل للنقطة c التي
تجعل O مركز ثقل المثلث ABC .

③ بين طبيعة المثلث ABC .

الحل

③ بين طبيعة المثلث ABC .



مثال

ليكن A, B, C و M, P, N منتصفات
 $[AB][AC][BC]$ أثبت للمثلثين مركز ثقل ذاته



سادساً: التناظر المحوري الذي محوره oy :

M' نظيرة M بالنسبة لمحور التناظر ويكون قانونه:

$$z' = -\bar{z}$$

مثال (1)

أوجد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة النقطة M وفق انسحاب T شعاعه $3\vec{u} - 4\vec{v}$

$$Z = 2 + 4i$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

ليكن $Z = 2 + 3i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M أوجد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر الذي مركزه $\Omega(5 - 2i)$

.....

.....

.....

التحويلات الهندسية للأعداد العقدية

أولاً: الانسحاب:

M' صورة النقطة M وفق انسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ ويكون قانونه:

$$z' = z + \alpha + i\beta$$

ثانياً: التناظر:

M' صورة النقطة M وفق تناظر مركزه $\Omega(w)$ ويكون قانونه:

$$z' - w = -(z - w)$$

ثالثاً: التحاك:

M' صورة النقطة M وفق تحاك مركزه $\Omega(w)$ ونسبته k فيكون قانونه:

$$z' - w = k(z - w)$$

ملاحظة: ماذا تستنتج بخصوص التناظر؟

رابعاً: الدوران:

M' صورة النقطة M وفق دوران مركزه $\Omega(w)$ وزاويته θ فيكون قانونه:

$$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$$

خامساً: التناظر المحوري الذي محوره ox :

M' نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل ويكون قانونه:

$$z' = \bar{z}$$

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (5)

ليكن $Z = 3 + 5i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M , أوجد M' وفق الدوران الذي مركزه $\Omega(3 - 2i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{6}$

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (6)

ما هو التحويل الذي يقرن B بالنقطة A فيما يلي:

$$b - 1 = e^{\frac{i\pi}{2}}(a - 1)$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$b - 3 + 2i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(a - 3 + 2i)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3)

ليكن $Z = 3 + 5i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M , أوجد M' صورة النقطة M وفق التحاكي الذي مركزه $\Omega(3 - 2i)$ ونسبته -2

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (4)

ما هو التحويل الذي يقرن B بالنقطة A فيما يلي:

$$b - 1 = -3(a - 1)$$

B صورة A وفق تحاكٍ مركزه $\Omega(1)$ ونسبته $k = -3$.

.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

لتكن النقطتان:

$$G(3 - \sqrt{3}i), H(3 + \sqrt{3}i)$$

ولیکن R الدوران الذي مركزه O وتحقق $R(G) = H$

احسب $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران .

المسألة (1)

تأمل مثلثاً OAB , ننشئ خارج هذا المثلث
المربعين $OAMN$, $OBPQ$ و متوازي الأضلاع
 $NOQR$. نهدف في هذا التمرين إلى إثبات أن
المستقيمين (OR) و (AB) متعامدان و أن
 $OR = AB$ و ذلك باستعمال الأعداد العقدية '
لنختر معلماً متجانساً مباشراً $(\vec{u}, o, \vec{v})$ و ليكن
 a, b العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين
 A, B

[illegible]

[illegible]

[illegible]

من هو العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ؟

① عبر بدلالة b و c عن الأعداد b' و c' و m

c' هي صورة c وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

المسألة (2)

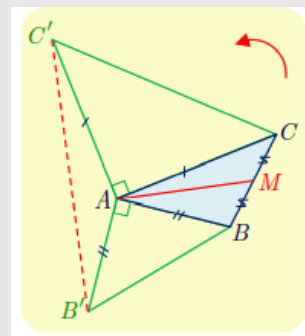
نتأمل في المستوي ABC مثلثاً مباشراً التوجيه
كيفياً و لتكن M منتصف $[AC]$ و ليكن $AB'B$ و

ACC' مثلثين قائمين و متساويي الساقين
مباشرين , أثبت أن المتوسط (AM) في المثلث

ABC هو ارتفاع في المثلث $AB'B$ و أن

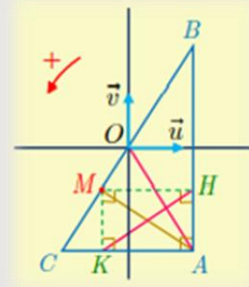
$$B'C' = 2AM$$

الطلب: $AM \perp B'C'$ و $B'C' = 2AM$



المسألة (4)

مسألة تعامد



نتأمل في المستوي الموجه، مثلثاً مباشراً ABC قائماً في A . النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) . بالترتيب، H و K هما المسقطان القائمان للنقطة M على (AB) و (AC) بالترتيب.

نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (OA) و (HK) .

نختار معلماً متجانساً مباشراً $(O; \vec{u}, \vec{v})$ بحيث O تقع في منتصف $[BC]$ ويكون $\vec{u}$ عمودياً على (AB) و $\vec{v}$ شعاعاً موجهاً للمستقيم (AB) . ونرمز للنقاط A, B, C, H, K, M والمطلوب:

1- علل ما يأتي: $a = \bar{b}$ و $a - m = \overline{h - k}$

2- أ- أثبت أنه إما $\arg\left(\frac{a-m}{b}\right) = +\frac{\pi}{2}$ أو

$$\arg\left(\frac{a-m}{b}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

ب- استنتج أن $\arg\left(\frac{h-k}{a}\right) = -\frac{\pi}{2}$ أو

$$\arg\left(\frac{h-k}{a}\right) = +\frac{\pi}{2}$$
 ثم استنتج المطلوب.

الحل

المطلوب :

① اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين

Z_A و Z_B اللذين يمثلان النقطتين A و B

② اكتب العدد العقدي $\frac{Z_B}{Z_A}$ بالشكل الجبري

والشكل الأسّي , ثم استنتج قيمة $\beta - \alpha$

الحل

تمرين دورة

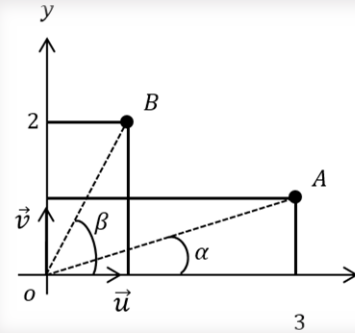
نتأمل في المستوي العقدي المزود

بالمعلم المتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$:

بفرض أن :

α القياس الأساسي للزاوية : $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$

و β القياس الأساسي للزاوية : $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$



المسألة (5)

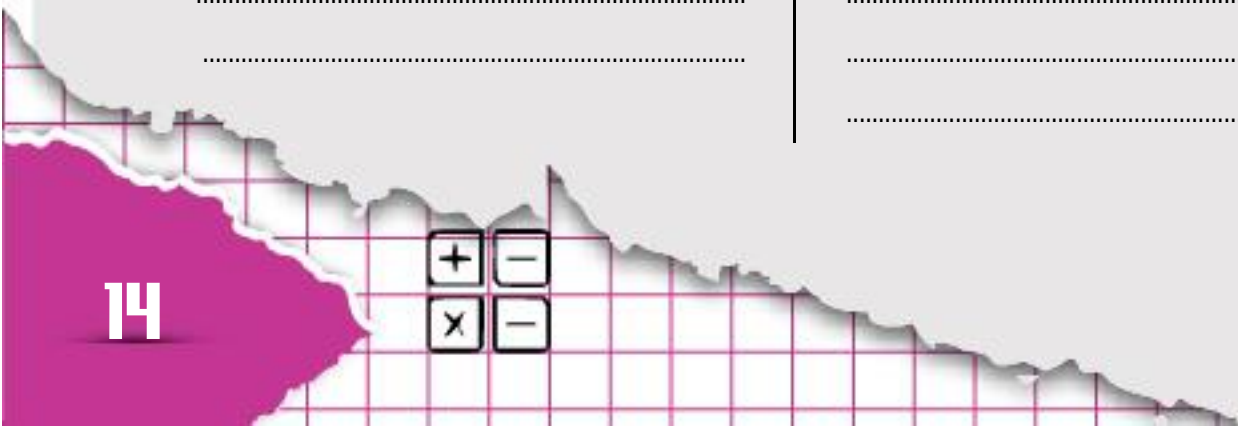
نتأمل في المستوي الموجه الشكل المجاور.
المثلثات OAB و OCD و ADE مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة. النقاط I و J و K هي منتصفات أوتار هذه المثلثات. نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (AJ) و (IK) . نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه O . ونرمز a و c إلى العددين العقديين الممثلين للنقطتين A و C .

1- a عبر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثل النقاط B و D و E .

ب- استنتج الأعداد العقدية z_I و z_J و z_K التي تمثل النقاط I و J و K .

2- أثبت أن $z_K - z_I = i(z_J - a)$ ثم استنتج الخواص المطلوبة.



This image shows a vertical rectangular sheet of white paper. It features approximately 20 horizontal dashed lines spaced evenly apart, providing a guide for handwriting practice. The lines extend across the full width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

الكسر الذهبي

العلم نور،
والنور
يضئ
طريقك
نحو
المستقبل.

[illegible]

[illegible]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التحريين (2)

تأمل معلماً متجانساً $(o, \vec{u}, \vec{v})$ في المستوي العقدي :

والنقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية :

$$a = 6 - i$$

$$b = -6 + 3i$$

$$c = -18 + 7i$$

أثبت أن A و B و C على استقامة واحدة.

الحل

Blank lined paper with a red margin line on the left and a red binding edge on the right.

ملاحظة: غالباً نحسب $\arg$ من الشكل الأسّي

حيث: $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$, $-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$$1 = e^{i0} \quad , -1 = e^{i\pi}$$

التمرين (1)

$$a = -2, b = 2, c = -1 + i$$

$d = 1 - 3i$

① أثبت أن BCD قائم وهل هو متساوي الساقين

② أعد الطلب من أجل ACD

الحل

[illegible]

التمرين (3)

لتكن النقاط A, B, C, D التي تمثلها الأعداد :

$$a = 2 - 2i, b = -1 + 7i$$

$$c = 4 + 2i, d = -4 - 2i$$

1- لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد $w = -1 + 2i$

أثبت أن النقاط A, B, C, D تقع على دائرة

واحدة مركزها Ω

2- ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E

منتصف $[AB]$. احسب e ثم برهن أن $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

3- ماذا تستنتج .

الحل



التمرين (4)

لتكن النقاط A, B, C نقاط المستوي التي تمثل
الأعداد العقدية:

$$a = 2, \quad b = 1 + i\sqrt{3} \\ c = -1 + i\sqrt{3}$$

أثبت أن $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

الحل

التمرين (5)

نتأمل النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد

$$a = -1, b = 2 + i\sqrt{3} \\ c = \bar{b}, d = 3$$

و المطلوب :

1- ارسم النقاط A, B, C, D ثم احسب AB, AC, BC

و استنتج طبيعة المثلث ABC

2- عين $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)$ و استنتج طبيعة المثلث ACD

الحل



المجموعات النقطية

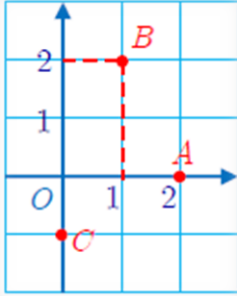


بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

-1 إذا كان $z = a + ib$ فإن الشكل الجبري للعدد $\frac{1}{z}$ هو:

$\frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2}$	b	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}i$	a
$\frac{a}{a^2 - b^2} - i \frac{b}{a^2 - b^2}$	d	$\frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$	c



• ليكن x عدداً عقدياً تمثله النقطة M في المستوي وليكن $z = 2 + xi$

أجب عن الأسئلة:

-2 إن الشكل الجبري للعدد z في حالة $M = A$ يساوي:

$z = 2 - i$	d	$z = 6 + i$	c	$z = 2$	b	$z = 3$	a
-------------	---	-------------	---	---------	---	---------	---

-3 إن الشكل الجبري للعدد z في حالة $M = B$ يساوي:

$z = 3 - 2i$	d	$z = -3 + 2i$	c	$z = -3 - 2i$	b	$z = 3 + 2i$	a
--------------	---	---------------	---	---------------	---	--------------	---

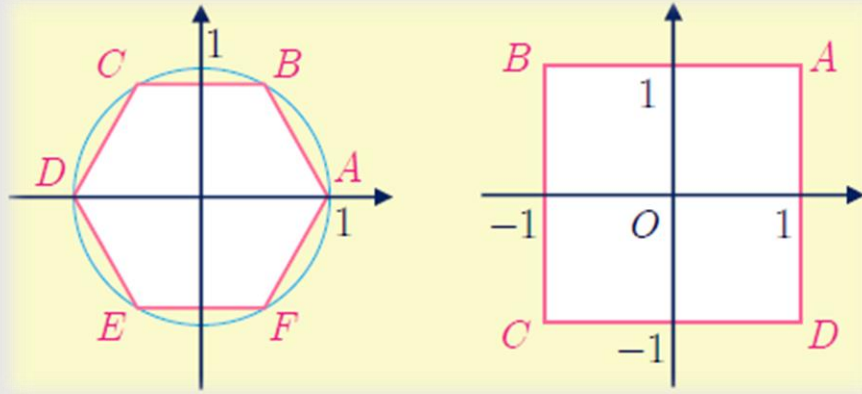
-4 إن الشكل الجبري للعدد z في حالة $M = C$ يساوي:

$z = 1 - i$	d	$z = 6 + i$	c	$z = -3 - 2i$	b	$z = 1 + i$	a
-------------	---	-------------	---	---------------	---	-------------	---

5- الشكل الجبري للعدد $Z = \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$ هو:

a	$z = \frac{2}{3} - 3i$	b	$z = \frac{2}{3}$	c	$z = \frac{2}{3}i$	d	$z = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$
---	------------------------	---	-------------------	---	--------------------	---	----------------------------------

• في الشكل المجاور $ABCD$ مربع و $ABCDEF$ مسدس منتظم تمر من رؤوسه دائرة نصف قطرها 1



والمطلوب:

6- العدد العقدي الممثل للنقطة A في المربع

a	$Z_A = 1$	b	$Z_A = 1 + i$	c	$Z_A = 1 - i$	d	$Z_A = i$
---	-----------	---	---------------	---	---------------	---	-----------

7- العدد العقدي الممثل للنقطة B في المربع

a	$Z_B = -1 - i$	b	$Z_B = 1 + i$	c	$Z_B = -1 + i$	d	$Z_B = 1 - i$
---	----------------	---	---------------	---	----------------	---	---------------

8- العدد العقدي الممثل للنقطة C في المربع

a	$Z_C = -1 - i$	b	$Z_C = 1$	c	$Z_C = 1 - i$	d	$Z_C = -1 + i$
---	----------------	---	-----------	---	---------------	---	----------------

9- العدد العقدي الممثل للنقطة D في المربع

a	$Z_D = 1$	b	$Z_D = i$	c	$Z_D = 1 + i$	d	$Z_D = 1 - i$
---	-----------	---	-----------	---	---------------	---	---------------

10- العدد العقدي الممثل للنقطة A في المسدس

a	$Z_A = -1$	b	$Z_A = 1$	c	$Z_A = 1 + i$	d	$Z_A = 1 - i$
---	------------	---	-----------	---	---------------	---	---------------

11- العدد العقدي الممثل للنقطة B في المسدس

a	$Z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$	b	$Z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}$	c	$Z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$	d	$Z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}$
---	----------------------------	---	----------------------------	---	----------------------------	---	----------------------------

12- العدد العقدي الممثل للنقطة C في المسدس

a	$Z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}$	b	$Z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}$	c	$Z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}$	d	$Z_C = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
---	-----------------------------	---	----------------------------	---	-----------------------------	---	-----------------------------

13- العدد العقدي الممثل للنقطة D في المسدس

$Z_D = e^{i\pi}$	d	$Z_D = e^{\frac{i\pi}{2}}$	c	$Z_D = e^{\frac{i\pi}{3}}$	b	$Z_D = e^{\frac{i\pi}{4}}$	a
------------------	---	----------------------------	---	----------------------------	---	----------------------------	---

14- العدد العقدي الممثل للنقطة E في المسدس

$Z_E = e^{\frac{i\pi}{3}}$	d	$Z_E = e^{\frac{4i\pi}{3}}$	c	$Z_E = e^{\frac{2i\pi}{3}}$	b	$Z_E = e^{\frac{8i\pi}{3}}$	a
----------------------------	---	-----------------------------	---	-----------------------------	---	-----------------------------	---

15- مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $\arg(-iz) = -\frac{\pi}{3}$:

تمثل مستوي محوري لقطعة مستقيمة	d	تمثل مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل	c	تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل محذوف منه المبدأ	b	تمثل دائرة	a
--------------------------------	---	--	---	--	---	------------	---

16- مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $|2z - 4 + 6i| = |2z - 4|$:

تمثل دائرة	d	تمثل مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل	c	تمثل محور لقطعة مستقيمة	b	تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل محذوف منه المبدأ	a
------------	---	--	---	-------------------------	---	--	---

17- مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $\operatorname{Re}(2 + i + z) = 4$ تمثل

دائرة نصف قطرها 4	d	$y = 2$ المستقيم الأفقي	c	$x = 2$ المستقيم الشاقولي	b	نقطة إحداثياتها (1,4)	a
-------------------	---	-------------------------	---	---------------------------	---	-----------------------	---

18- أي من الزوايا الآتية يكافئ الزاوية $-\frac{25\pi}{14}$

$\frac{10\pi}{14}$	d	$\frac{3\pi}{14}$	c	$\frac{5\pi}{14}$	b	$\frac{4\pi}{14}$	a
--------------------	---	-------------------	---	-------------------	---	-------------------	---

19- أي من الزوايا الآتية يكافئ الزاوية $\frac{7\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}$	d	$\frac{5\pi}{6}$	c	$-\frac{5\pi}{6}$	b	$\frac{4\pi}{6}$	a
-----------------	---	------------------	---	-------------------	---	------------------	---

20- العدد $(1 + i)^{2016}$

طويلته تساوي $\sqrt{2}$	b	طويلته تساوي الواحد	c	تخلي بحت	d	حقيقي	a
-------------------------	---	---------------------	---	----------	---	-------	---

21- إن $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$ تساوي:

a	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$	b	$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$	c	$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$	d	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
---	--	---	--	---	--	---	--

22- إذا كان $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{\frac{i\pi}{3}}$ فأى من الخواص الآتية صحيحة

a	$ Z = \sqrt{2}$	b	$Z = \bar{Z}$	c	$Z = e^{-\frac{\pi}{12}i}$	d	$Z = e^{\frac{i13\pi}{12}}$
---	------------------	---	---------------	---	----------------------------	---	-----------------------------

23- بفرض $Z = e^{ia}$, $Z' = e^{ib}$ بكتابة الجداء ZZ' بطريقتين مختلفتين يمكن استنتاج أن:

a	$\cos(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$	b	$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
c	$\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	d	$\cos(a+b) = \sin a \sin b + \sin a \sin b$

24- العدد $Z = \frac{1+\cos x - i \sin x}{1+\cos x + i \sin x}$ يساوي:

a	$\frac{1}{1+e^{-ix}}$	b	$\frac{1}{1+e^{ix}}$	c	e^{-ix}	d	e^{ix}
---	-----------------------	---	----------------------	---	-----------	---	----------

25- ليكن $a = \alpha + i\beta$ عدداً عقدياً معطى وليكن $z = x + iy$ عدداً عقدياً يحقق أن:

$$z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$$

عندئذ قيمة x, y تساوي:

a	$\alpha + \beta$	b	$\alpha\beta$	c	$\frac{\alpha}{\beta}$	d	$\frac{\beta}{\alpha}$
---	------------------	---	---------------	---	------------------------	---	------------------------

26- بفرض $t = \frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}$ عندئذ t تساوي:

a	$\cot\theta$	b	$i \tan\theta$	c	$\tan\theta$	d	$i \cot\theta$
---	--------------	---	----------------	---	--------------	---	----------------

27- بفرض z_1, z_2 الجذرين التربيعين للعدد $w = -3 + 4i$ عندئذ $z_1 + z_2$ يساوي:

a	-1	b	1	c	0	d	i
---	----	---	---	---	---	---	---

28- بفرض z_1, z_2, z_3 الجذور التريعية للعدد $z = 4i$ عندئذ قيمة المجموع $z_1 + z_2 + z_3$ يساوي:

a	-1	b	1	c	0	d	i
---	----	---	---	---	---	---	---

29- بفرض $z_1, z_2, z_3, z_4, \dots, z_n$ الجذور من المرتبة n لعدد z طويلته 1 عندئذ $z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n$ يساوي:

a	-1	b	1	c	0	d	i
---	----	---	---	---	---	---	---

30- بفرض $z = e^{\frac{i2\pi}{11}}$ فإن قيمة المجموع $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{10}$ يساوي:

a	-1	b	1	c	0	d	i
---	----	---	---	---	---	---	---

31- ليكن MPN مثلثاً ما والنقاط A, B, C منتصفات الأضلاع $[MN], [PM], [NP]$ على الترتيب

وبفرض g العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC و g' العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث MNP عندئذ:

a	$g' = g$	b	$g' = \bar{g}$	c	$g' = ig$	d	$g = i g'$
-----	----------	-----	----------------	-----	-----------	-----	------------

32- بفرض a, b, c, d, e الأعداد العقدية الممثلة للنقاط A, B, C, D, E فإذا كان:

$$\frac{a - e}{d - e} = \frac{c - e}{a - e}$$

عندئذ يمكن استنتاج أن:

a	المستقيم (EA) منصف للزاوية $\widehat{DEC}$	b	المستقيم (EA) منصف للزاوية $\widehat{CAD}$
c	المستقيم (CA) منصف للزاوية $\widehat{ECD}$	d	المستقيم (DA) منصف للزاوية $\widehat{CDE}$

33- إذا كان العددين a, b العددين العقديان الممثلان للنقطتين A, B وكان $a - 1 = 2b - 2$

عندئذ التحويل الذي يقرن النقطة B بالنقطة A هو:

a	تحاكٍ نسبته 2	b	انسحاب شعاعه $-2\vec{j}$	c	تحاكٍ نسبته -2	d	تحاكٍ نسبته 1
-----	---------------	-----	--------------------------	-----	----------------	-----	---------------

34- إن الشكل المثلثي للعدد العقدي $w = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]^5$ هو:

a	$2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$	b	$2(\cos(0) + i \sin(0))$	c	$2[\cos(\pi) + i \sin(\pi)]$	d	$-2[\cos(\pi) + i \sin(\pi)]$
-----	--	-----	--------------------------	-----	------------------------------	-----	-------------------------------

35- إذا كان $z = 2 \left[\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \right]$ فإن $\arg(\bar{z})$:

a	$\frac{3\pi}{14}$	b	$-\frac{5\pi}{14}$	c	$\frac{2\pi}{3}$	d	$\frac{5\pi}{6}$
-----	-------------------	-----	--------------------	-----	------------------	-----	------------------

36- إذا كان $z = 1 + i$ فإن $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$:

a	-1	b	$-\frac{1}{2}$	c	1	d	$\frac{1}{2}$
-----	----	-----	----------------	-----	---	-----	---------------

37- الشكل الأسّي للعدد العقدي $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ هو:

a	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$	b	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$	c	$2e^{i\frac{\pi}{12}}$	d	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$
-----	------------------------------	-----	-------------------------------	-----	------------------------	-----	------------------------------

38- إذا كان $\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ فإن $z = \alpha + \alpha^4$ هو:

a	$2i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	b	$-2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	c	$2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	d	$-2i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
-----	--------------------------------------	-----	--------------------------------------	-----	-------------------------------------	-----	---------------------------------------

39- إذا كان $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^4}$ فإن $|z|$ تساوي

a	2	b	4	c	$6 + i$	d	$4 + 3i$
-----	---	-----	---	-----	---------	-----	----------

40- إن العدد العقدي z الذي يحقق المعادلة $2iz + \bar{z} = 3 + 3i$ هو:

a	$= 1 - 2i$	b	$1 + 2i$	c	$1 + i$	d	$1 - i$
---	------------	---	----------	---	---------	---	---------

41- إذا كان العددين العقديين $1 + i$ و $1 - 2i$ جذرين للمعادلة $z^2 + pz + q = 0$ فإن:

a	$p = i - 2$ $q = 3 + i$	b	$p = i - 2$ $q = 3 - i$	c	$p = i + 2$ $q = 3 - i$	d	$p = i + 2$ $q = 3 + i$
---	----------------------------	---	----------------------------	---	----------------------------	---	----------------------------

42- إذا كانت الأعداد العقدية b, c, d تمثل النقاط B, C, D وكان $\frac{d-b}{c-b} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ فإن المثلث BCD

a	متساوي الساقين	b	قائم في B ومتساوي الساقين	c	قائم في B فقط	d	متساوي الأضلاع
---	----------------	---	-----------------------------	---	-----------------	---	----------------

43- إن مجموعة نقاط المستوى العقدي $M(z)$ حيث $|z - 2 + 5i| = |z - 3 + 2i|$ تمثل:

a	دائرة	b	مستوي محوري لقطعة مستقيمة	c	محور لقطعة مستقيمة	d	مستقيم أفقي محذوف منه نقطة
---	-------	---	---------------------------	---	--------------------	---	----------------------------

44- يرتبط العددين a, b الممثلان لنقطتين A, B بالعلاقة $b = ia$ فإن التحويل الهندسي الذي

يقرن النقطة B بالنقطة A هو:

a	تحاكي	b	دوران	c	انسحاب	d	تناظر
---	-------	---	-------	---	--------	---	-------

45- إن طويلة العدد العقدي $\alpha = \sin x + i \cos x$ تساوي:

a	e	b	$\sin^2 x$	c	1	d	$2 \cos(x)$
---	-----	---	------------	---	---	---	-------------

46- إذا كان e^{ix}, e^{-ix} جذور المعادلة $z^2 + pz + q = 0$ عندئذ:

a	$p = -2 \cos(x)$ $q = 1$	b	$p = 2$ $q = 3$	c	$p = \sin(x)$ $q = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$	d	$p = \frac{\cos(3x)}{2}$ $q = 2$
---	-----------------------------	---	--------------------	---	---	---	-------------------------------------

• ليكن العدد الحقيقي β وليكن $w = \frac{\sqrt{3}+i\beta}{\beta-i\sqrt{3}}$ والمطلوب:

47- إن طويلة w تساوي:

a	4	b	2	c	1	d	5
---	---	---	---	---	---	---	---

48- العدد $Z = \frac{z-w\bar{z}}{1-w}$.

a	تخيلي	b	حقيقي	c	معدوم	d	لا يساوي الصفر
---	-------	---	-------	---	-------	---	----------------

49- بالشكل الجبري للعدد w هو:

a	$1 + i$	b	$1 - i$	c	i	d	$-i$
---	---------	---	---------	---	-----	---	------

50- إن w^{12} يساوي:

i^{12}	d	i^4	c	1	b	i^2	a
----------	---	-------	---	---	---	-------	---

51- $\arg(z_1 \cdot z_2)$ يساوي:

$\arg(z_1 + z_2)$	d	$\arg(z_1) - \arg z_2$	c	$\arg z_1 + \arg z_2$	b	$\arg z_1 \times \arg z_2$	a
-------------------	---	------------------------	---	-----------------------	---	----------------------------	---

52- بفرض ليكن z عدداً عقدياً يحقق:

$$\bar{z} = \frac{9}{z}, \arg(iz) = \frac{\pi}{3}$$

الشكل الأسّي للعدد z هو:

$3e^{i\frac{\pi}{2}}$	d	$e^{i\frac{\pi}{6}}$	c	$3e^{i\frac{\pi}{3}}$	b	$3e^{i\frac{\pi}{6}}$	a
-----------------------	---	----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---

53- بالاستفادة من علاقات أويلر يمكن برهان أن $\cos^3 x$ يساوي:

$\frac{3 \cos(x) + \cos(3x)}{2}$	d	$\frac{3 \cos(x) + \cos(3x)}{4}$	c	$\frac{\cos(3x) - 3 \cos(x)}{4}$	b	$\frac{3 \cos(x) - \cos(3x)}{4}$	a
----------------------------------	---	----------------------------------	---	----------------------------------	---	----------------------------------	---

54- قيمة النهاية $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$ تساوي

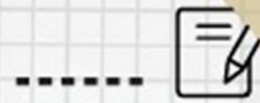
3	d	-3	c	$+\infty$	b	0	a
---	---	----	---	-----------	---	---	---

B	41	D	21	C	1
B	42	A	22	B	2
C	43	B	23	A	3
B	44	D	24	D	4
C	45	A	25	B	5
A	46	C	26	B	6
C	47	C	27	C	7
B	48	C	28	A	8
C	49	C	29	D	9
B	50	C	30	B	10
A	51	D	31	C	11
A	52	A	32	A	12
C	53	B	33	D	13
D	54	C	34	C	14
-	55	B	35	B	15
-	56	D	36	B	16
-	57	B	37	B	17
-	58	C	38	C	18
-	59	A	39	B	19
-	60	B	40	A	20





مسألة الوحدة



في هذا
الملف سيكون
قسمان من
تتمات مسائل
الوحدة
الرابعة
والخامسة من
كتاب الجزء
الثاني



السؤال الأول

لتكن النقاط A و B و C و D نقاطاً تمثل بالترتيب الأعداد العقدية $a = 1$ و $b = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

1- اكتب c بالشكل الأسّي ، واكتب d بالشكل الجبري .

-2

a - وُضِعَ النِّقَاطُ A و B و C و D فِي مَسْتَوِيٍّ مَرْبُوعٍ بِمَعْلَمٍ مُتَجَانِسٍ .

b - أثبت أن الرباعي $OACB$ معين .

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

السؤال الثاني

اكتب بالشكل الأسّي طول المعادلة :

$$(1) \quad (z^2 + 3\sqrt{3}z + 9)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9) = 0$$

1- أثبت أن النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل .

[illegible]

السؤال الثالث

بسّط كتابة العدد العقدي

$$z = \frac{1 + \cos x - i \sin x}{1 + \cos x + i \sin x}$$

موضحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الرابع

- 1- ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد .
أثبت أن $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي .
- 2- نفترض أن $u \neq 1$ وأن $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي أثبت أنه إما أن يكون z حقيقياً أو أن يكون $|u| = 1$.

.....

.....



السؤال الخامس

اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين :

$$z_2 = (3 + i)^4 \quad \text{g} \quad z_1 = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x}$$



[illegible]

السؤال السادس

ليكن z و z' عددين عقديين أثبت أن :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

[illegible]

السؤال السابع

ليكن المثلث ABC . أثبت تكافؤ الخاصيتين الآتيتين:

1- المثلث متساوي الساقين ورأسه A .

2- $2 \sin \hat{B} \cos \hat{C} = \sin \hat{A}$.

تعيين مجموعة

السؤال الثامن

ليكن a عدداً عقدياً معطى . لتكن ε مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق :

$$z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$$

عَيِّن المجموعة ε ومثلها في مستوٍ مزوّد بمعلم .



السؤال الثالث عشر

ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]-\pi, \pi[$. نعرّف $t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$.

1- احسب المقادير $\frac{2t}{1+t^2}$ و $\frac{2t}{1-t^2}$ و $\frac{1+t^2}{1-t^2}$ بدلالة النسب المثلثية للعدد θ .

2- أثبت صحة العلاقات :

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{g} \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{g} \quad \sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$



1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلات $z^2 = w$ في الحالات الآتية :

$$w = -3 + 4i \quad -a$$

$$w = -21 - 20i \quad -b$$

$$w = -7 + 24i \quad -c$$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية :

$$z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0 \quad -a$$

$$2iz^2 + (3 + 7i)z + 4 + 2i = 0 \quad -b$$

$$z^2 + (1 + 8i)z - 17 + i = 0 \quad -c$$

[illegible]

السؤال الخامس عشر

في حالة عدد عقدي $z \neq 1$ نضع $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ ونفترض أن $z = x + iy$ و $Z = X + iY$ حيث x, y, X, Y هي أعداد حقيقية .

1- احسب X و Y بدلالة العددين x و y .

2- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة

3- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة

This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

السؤال السادس عشر

عَيَّن في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق الشرط المعطى .

1- المقدار $(z + 1)(\bar{z} - 2)$ حقيقي .

2- العدد z مختلف عن $4i$ و $\frac{z+2i}{z-4i}$ عدد حقيقي .

[illegible]

من التطبيقات العقدية

السؤال الأول

نتأمل النقاط A و B و C التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية $a = S$ و $b = -4 + 4i$ و $c = -4i$.

-1

a- تحقق أن $b - c = i(a - c)$.

b- استنتج أن المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

-2 نقرن بكل نقطة $M(z)$ النقطة M' الموافقة للعدد العقدي $z' = e^{\frac{i\pi}{3}}z$.

a- ما التحويل الهندسي الموافق ؟

b- احسب الأعداد العقدية a' و b' و c' الموافقة للنقاط A' و B' و C' صور A و B و C وفق

هذا التحويل.

-3 لتكن P و Q و R منتصفات القطع المستقيمة $[A'B]$ و $[B'C]$ و $[C'A]$ ، ولتكن p و q و r

الأعداد العقدية التي توافقها.

a- احسب p و q و r .

b- تحقق أن $r - p = e^{\frac{i\pi}{3}}(q - p)$.

c- استنتج أن المثلث PQR متساوي الأضلاع.





[illegible]

السؤال الثالث

خاصة مميزة لمتوازي الأضلاع

تمثل الأعداد العقدية a و b و c و d أربع نقاط A و B و C و D . أثبت أن الرباعي $ABCD$ يكون متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $a + c = b + d$.

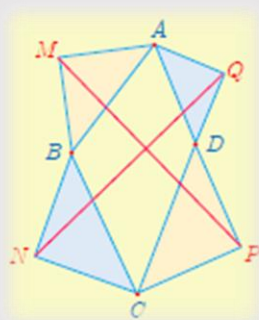
[illegible]

السؤال الرابع

نقرن بكل نقطة $M(z)$ من المستوي حيث $z \neq -\frac{1}{2}i$ النقطة M' التي يمثلها العدد العقدي $z' = \frac{z+2i}{1-2iz}$.
لتكن Γ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 . أثبت أنه إذا انتمت M إلى Γ انتمت M' إلى Γ أيضاً.
أ يكون العكس صحيحاً ؟



السؤال الخامس



نتأمل في المستوي الموجّه رباعياً محدباً مباشراً $ABCD$. نُنشئ خارجة النقاط M و N و P و Q التي تجعل المثلثات MBA و NCB و PDC و QDA قائمة في M و N و P و Q بالترتيب ومتساوية الساقين ومباشرة.

أثبت باستعمال الأعداد العقدية أن $MP = NQ$ وأن المستقيمين (MP) و (NQ) متعامدان.

السؤال السادس

نتأمل في المستوي الموجه مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً ABC مركزه النقطة I . D نقطة من داخل القطعة المستقيمة $[BC]$. نُنشئ مثلثين متساويي الأضلاع مباشرين DFC و BED .

ونعرّف J و K مركزي المثلثين DFC و BED . نهدف إلى إثبات أن المثلث IJK متساوي الأضلاع.

نختار معلماً متجانساً مباشراً $(B, \vec{u}, \vec{v})$ بحيث $\vec{BC} = a\vec{u}$ حيث $a = BC$.

1- احسب ، بدلالة a ، العددين العقديين z_A و z_I اللذين يمثلان A و I بالترتيب .

2- نفترض أن $\vec{BD} = t\vec{BC}$ حيث $t \in]0,1[$. احسب بدلالة a و t ، العددين العقديين z_J و z_K اللذين

يمثلان J و K بالترتيب .

3- تحقق أن $z_K - z_I = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_J - z_I)$ ، واستنتج الخاصة المرجوة .



نزود المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقاط A و A' و B و B' هي النقاط الموافقة للأعداد العقدية 1 و -1 و i و $-i$ بالترتيب.

نقرن كل نقطة $M(z)$ مختلفة عن النقاط O و A و A' و B و B' النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث

يكون المثلثان BMM_1 و AMM_2 قائمين ومتساويي الساقين بحيث

$$(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$$

1- ارسم شكلاً مناسباً .

a- علل صحة المساواتين $z - z_1 = i(i - z_1)$ و $1 - z_2 = i(z - z_2)$.

-b عبّر عن z_1 و z_2 بدلالة z .

3- نهدف إلى تعيين النقاط M التي تجعل المثلث OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع .

a- أثبت أن الشرط $OM_1 = OM_2$ يكافئ $|z + 1| = |z + i|$ واستنتج Δ مجموعة النقاط M

التي تجعل $OM_1 = OM_2$, وارسم Δ على الشكل نفسه .

b- أثبت أن الشرط $OM_1 = M_1M_2$ يكافئ $|z + 1|^2 = 2|z|^2$.

c- استنتج Γ مجموعة النقاط M التي تحقق $OM_1 = M_1M_2$ ، وارسم Γ على الشكل نفسه .

d- استنتج مما سبق النقاط M التي تجعل OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع . وحددها على

الشكل.

[illegible]

