حول النهايات

1) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; $a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$$

2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$; $a=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نخرج x^2 من المقام عامل مشترك،

وبالتالي:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$;x\to-\infty$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}\right)=-1$$

3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; $a=0$

$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نضرب بمرافق البسط ونقسم عليه،

وبالتالي:

$$f(x)=\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

4) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نضرب بمرافق البسط ومرافق المقام،

وبالتالي:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}\right)$$

$$=\frac{(x^2+1-x^2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}\right)}{(x^2-1-x^2+2)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$ أيضاً حالة عدم تعيين

لإزالتها نخرج عامل مشترك، وبالتالي:

$$f(x)=\frac{|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$;\ x\to+\infty$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+1}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

5) $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$; $a=2$

$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نقوم بتحليل البسط، وبالتالي:

$$f(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to2} f(x)=4+4+4=12$$

6) $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}$; $a=3$

$\lim_{x\to3} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نخرج x عامل مشترك من البسط، وبالتالي:

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x(x-3)}{x-3}=x\Rightarrow \lim_{x\to3} f(x)=3$$

7) $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-3x$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

نهاية سعيدة، نضرب بالمرافق ونقسم عليه،

وبالتالي:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$=\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0$$

8) $f(x)=\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+2}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

نهاية سعيدة، نضرب بالمرافق ونقسم عليه،

وبالتالي:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+2}\right)\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}\right)}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}}$$

$$= \frac{3x^2+1-(3x^2+2)}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{\infty} = 0$$

9) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{5x+1} - x \;\; ; \;\; a = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

نهاية جزئيّة، نخرج عامل مشترك، وبالتالي:

$$f(x) = \sqrt{x}\sqrt{5+\frac{1}{x}} - x \quad ; x \to +\infty$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sqrt{x}\sqrt{5+\frac{1}{x}} - x$$

$$= \sqrt{x}\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}} - \sqrt{x}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\left(\underbrace{\sqrt{5}-\sqrt{x}}_{-\infty}\right) = -\infty$$

10) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = 2$$

وعند التعويض بالنهاية نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2^{\frac{5}{2}} - 2\left(2^{\frac{3}{2}}\right) = 2^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}} = 0$$

11) غير موجودة لأن:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{\sin(-x)}{x} = -1$$

وبالتالي النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار فالنهاية غير موجودة.

12) عند الصفر من اليمين:

$$\lim_{x\to.0^+}\frac{1-2x-(1-3x)}{x} = \lim_{x\to0^+} 1 = 1$$

عند الصفر من اليسار:

$$\lim_{x\to.0^-}\frac{1-2x-(1-3x)}{x} = \lim_{x\to0^+} 1 = 1$$

إذن النهاية موجودة وقيمتها 1.

13) لدينا:

$$\frac{\sqrt{x+a^2}-a}{x} = \frac{x+a^2-a^2}{x\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+a^2}+a}$$

وبأخذ النهاية عند الصفر:

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$$

حول التوابع اللوغارتمية والأسية

1) لجواب: $\boxed{c: \; 2lna + 3lnb - lnc - 6lnd}$ ، التفسير:

$$\ln\left(\frac{a^2\times b^3}{c\times d^6}\right) = \ln(a^2 . b^3) - \ln(c . d^6)$$
$$= \ln(a^2) + \ln(b^3) - \ln(c) - \ln(d^6)$$
$$= 2\ln(a) + 3\ln(b) - \ln(c) - 6\ln(d)$$

2) الجواب: $\boxed{a: \; 3\ln(2) + 2\ln(5) + ln3}$ ، التفسير:

$$\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{600}{599}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}.\ldots.\frac{600}{599}\right)$$
$$= \ln(600)$$
$$= \ln(6\times10^2)$$
$$= \ln(6) + 2\ln(10)$$
$$= \ln(3\times2) + 2\ln(5\times2)$$
$$= \ln(3) + \ln(2) + 2\ln(5) + 2\ln(2)$$
$$= 3\ln(2) + 2\ln(5) + \ln(3)$$

3) الجواب: $\boxed{a: \; 2\ln|x|}$.

4) $n \le 4$ بالتجريب.

5) $n \le 4$ بالتجريب.

6) لدينا:

$$0.2 \ge \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\frac{2}{10} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\frac{1}{5} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

نأخذ لوغارتم الطرفين:

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right) \geq n.\ln\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$-\ln(5) \geq nln\left(\frac{2}{5}\right)$$

نقسم على $\ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0$:

$$-\frac{\ln(5)}{\ln(2)-\ln(5)} \leq n$$

نعوض القيم التقريبية:

$$-\frac{1.7}{0.7-1.7} \leq n$$

$$1.7 \leq n$$

بشكل تقريبي.. بالتالي:

$$2 \leq n$$

7) لدينا:

$$\ln(x) = \ln(y+1)\ ; x > 0\ , y > -1$$

$$x = y + 1 \Rightarrow y = x - 1$$

معادلة نصف مستقيم.. ولكن ليش؟؟!!! لأن مجموعة تعريف التابع اللوغاتمي $x > 0$ يعني بس عالمجال $]0, +\infty[$ فصار اسمو نصف مستقيم لأن ئلو بداية 😉

8) الجواب: $\boxed{b: \text{جزء من قطع مكافئ}}$ ، التفسير:

$$\ln(y) = 2\ln(x)$$
$$\Rightarrow E\ :\ ]0, +\infty[$$
$$y = x^2$$

جزء من قطع مكافئ.

9) الجواب: $\boxed{c: \text{جزء من قطع زائد}}$ ، التفسير:

$$\ln(y) + \ln(x) = 0$$
$$\Rightarrow E:\ ]0, +\infty[$$
$$\Rightarrow \ln(x.y) = 0 \Rightarrow x.y = 1$$

جزء من قطع زائد.

10) الجواب: $\boxed{a:\ \log(2) + \log(3) - 1}$ ، التفسير:

$$\log(0.6) = \log\left(\frac{6}{10}\right) = \log(6) - \log(10)$$
$$= \log(3 \times 2)\ - 1$$
$$= \log(3) + \log(2) - 1$$

11) الجواب: $\boxed{b:\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$ ، التفسير:

$$y = \log_a(x) \Rightarrow x = a^y$$
$$\ln(x) = \ln(a^y) \Rightarrow \ln(x) = y\ln(a)$$
$$\Rightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

12) لدينا:

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

13) حسب اوبيتال:

$$\frac{-\frac{1}{x}}{1} = -\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

14) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

15) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{\ln(x)} = 2$$

16) لدينا:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}(0) = 0$$

17) لدينا:

$$f(x) = \frac{ln\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}} = \frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2(0) = 0$$

18) لدينا:

$$f(x) = \ln(x)\,[\ln(x) - 1]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

19) لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

20) لدينا:

$$f(x) = \frac{1 + xln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1+0}{0^+} = +\infty$$

21) لدينا:

$$f(x) = 3x - xln(x)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 0 = 0$$

22) لدينا:

طريقة (1):

$$f(x) = xln^2x = x(lnx)^2 = \left(\sqrt{x}\ln(x)\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

طريقة (2):

$$xln^2x = \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}$$

حسب اوبيتال:

$$\frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2\ln(x)}{-\frac{1}{x}}$$

نشتق مرة أخرى:

$$\frac{2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 2x$$

نعوض فنجد:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(0) = 0$$

23) لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{x - xln(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

24) لدينا:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$$

25) نضرب ونقسم على $\sin(x)$:

$$f(x) = \frac{\frac{\sin(x)}{x}\ln(1+sin(x))}{\sin(x)}$$

مبرهنتين جوابهن واحد وحدة لوغارتمية ووحدة مثلثية:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

26) لدينا:

حسب اوبيتال:

$$\frac{\ln(sin(x))}{x-\frac{\pi}{2}} \to \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{1} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{0}{1} = 0$$

27) لدينا:

$$g(x) = xln\left(\sqrt{x+1}\right) - \ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$g(1) = 0$$

$$g'(x) = \ln\sqrt{x+1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}x$$

$$= \ln\left(\sqrt{x+1}\right) + \frac{x}{2(x+1)}$$

$$g'(1) = \ln\left(\sqrt{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4} = \frac{2\ln(2)+1}{4}$$

حسب قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = ln\sqrt{2} + \frac{1}{4}$$

28) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\lambda x+1}{2x+3}\right) = 1$$

$$\ln\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 1$$

$$\frac{\lambda}{2} = e$$

$$\lambda = 2e$$

29) $\boldsymbol{f(x) = e^x - \ln(x)}$; $\boldsymbol{a = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

لإزالتها:

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 0) = +\infty$$

30) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - e^x}$; $\boldsymbol{a = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

لإزالتها:

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{e^x}{x^2}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1 - \infty) = -\infty$$

31) $\boldsymbol{f(x) = x - \ln(e^x + 1)}$; $\boldsymbol{a = +\infty}$

$$f(x) = x - \ln\left(e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right)$$

$$= x - \left(\ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right)$$

$$= x - x - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

32) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)}$; $\boldsymbol{a = 0}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

33) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x - \ln(e^{\lambda x} + 1)$$

$$2x - \ln\left(e^{\lambda x}(1 + e^{-\lambda x})\right)$$

$$= 2x - [\lambda x + \ln(1 + e^{-\lambda x})]$$

$$= 2x - \lambda x - \ln(1 + e^{-\lambda x})$$

في حال كانت $\lambda > 2$ ستكون النهاية $-\infty$

في حال كانت $0 < \lambda < 2$ ستكون النهاية $+\infty$

34) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

35) نسحب x عامل مشترك:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{e^x}{x} = -\infty$$

36) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$$

37) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

38) تساوي 1 (مبرهنة أسية مغيرين ديكورها)

39) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{4}$$

40) لدينا:

$$f(x) = 2e^x - xe^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

41) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

42) نعوض:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2)$$

43) لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}} + 2x - 2 = \frac{1 + 2xe^{2x}}{e^{2x}} - 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1 + 0}{0^+} - 2 = +\infty$$

44) لدينا:

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

حول تغيير المتحول

1) لدينا:

$$\frac{\lambda}{x} = t \Rightarrow x = \frac{\lambda}{t}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\lambda \ln(1 + t)}{t} = \lambda = 2$$

2) لدينا:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(3-x)}{-2(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(1+2-x)}{-2(2-x)}$$

بفرض $t=2-x$ بتلاقي انو صار عندك مبرهنة شهيرة.

$$t=2-x$$

$$x\to 2\Rightarrow t\to 0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{-2t}=-\frac{1}{2}$$

3) لدينا:

$$xln\left(1+\frac{x-1}{x+1}-1\right)=xln\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)$$

بفرض:

$$t=-\frac{2}{x+1}$$

$$x+1=-\frac{2}{t}\Rightarrow x=-\frac{2}{t}-1$$

نغير جهة السعي:

$$x\to+\infty\Rightarrow t\to 0$$

نعوض:

$$\lim_{t\to 0}\left(-\frac{2}{t}-1\right)\ln(1+t)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{-2\ln(1+t)}{t}-\ln(1+t)\right]=-2$$

4) لدينا:

$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(1+\frac{x+1}{x+2}-1\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{-1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$$

بفرض:

$$t=-\frac{1}{x+2}$$

$$x+2=-\frac{1}{t}$$

$$x=-\frac{1}{t}-2$$

نغير جهة السعي:

$$x\to+\infty\Rightarrow t\to 0$$

نعوض:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{-\frac{1}{t}-2}{2}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}}(1+t)^{-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{2}}}(1+t)^{-1}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

5) لدينا:

$$(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$$

بفرض:

$$1+t=2-x$$

فتكون:

$$x=2-t-1$$

$$x=1-t$$

نغير جهة السعي:

$$(x\to 1)\Rightarrow(t\to 0)$$

نعوض:

$$(1+t)^{\frac{1}{1-t-1}}=(1+t)^{-\frac{1}{t}}$$

$$=\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{e}=e^{-1}$$

6) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}(3-2x)^{\frac{1}{2x-1}}=2^{+\infty}=+\infty$$

7) حسب اوبيتال:

$$\frac{2e^{2n}}{2(1+n)}=\frac{e^{2n}}{1+n}$$

اوبيتال مرة تانية:

$$2e^{2n}$$

نعوض:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

8) لدينا:

$$u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

"مبرهنة شهيرة حبيبات قلبي فرضو $t = \frac{1}{n}$ بتطلع"

9) لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2$$

حول النهايات المثلثية

1) الجواب: $\boxed{a\ :\ 0}$, التفسير:

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin\pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

2) الجواب: $\boxed{b\ :\ 4}$, التفسير:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(4x)}{x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{4\sin(4x)}{4x}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to0} f(x) = 4(1) = 4$$

و ذلك حسب قاعدة:

$$\boxed{\lim_{\heartsuit\to0}\frac{\sin\heartsuit}{\heartsuit} = 1}$$

3) الجواب: $\boxed{b\ :\ 3}$, التفسير:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(6x)}{2x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{3\sin(6x)}{3\times 2x} = \frac{3\sin(6x)}{6x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = 3(1) = 3$$

4) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{1}{2}}$, التفسير:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x\sin x}{1-2\cos(2x)}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نستخدم الدستور:

$$\boxed{1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)}$$

$$f(x) = \frac{x\sin x}{2\sin^2 x} = \frac{x}{2\sin x} = \frac{1}{2}.\frac{x}{\sin x}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{2}$$

5) الجواب: $\boxed{c\ :\ 0}$, التفسير:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{\sin x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{-(1-\cos x)}{\sin x} = \frac{-\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sin x}$$

نقسم البسط و المقام على x :

$$f(x) = \frac{\frac{-\left(2\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{-\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to0} f(x) = \frac{-1(0)}{1} = 0$$

6) الجواب: $\boxed{a\ :\ -4}$, التفسير:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(3x)-\cos x}{x\sin x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نستخدم الدستور:

$$\cos(3x)-\cos x$$
$$= -2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right).\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$
$$= -2\sin\left(\frac{4x}{2}\right).\sin\left(\frac{2x}{2}\right)$$
$$= -2\sin(2x).\sin(x)$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{-2\sin(2x).\sin(x)}{x\sin(x)} = \frac{-4\sin(2x)}{2x}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to0} f(x) = -4(1) = -4$$

7) الجواب: $\boxed{a\ :\ 1}$, التفسير:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x)+\sin(x)}{\sin(5x)-\sin(x)}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: باستخدام اوبيتال:

$$\frac{3\cos(3x)+\cos(x)}{5\cos(5x)-\cos(x)}$$

نعوض $x = 0$:

$$\frac{3+1}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$$

8) الجواب: $\boxed{b\ :\ 7}$, التفسير:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\tan(7x)}{x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{7\tan(7x)}{7x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=7(1)=7$$

9) الجواب: $\boxed{d\ :\ 4}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1}-1}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب و نقسم على مرافق المقام:

$$f(x)=\frac{\sin(2x).\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$
$$=\frac{\sin(2x).\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}$$
$$=2.\frac{\sin(2x)}{2x}.\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=2(1)\left(\sqrt{0+1}+1\right)=2(2)=4$$

10) الجواب: $\boxed{b\ :\ 1}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sin(x).\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=0(+\infty)$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\sin(x).\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\sin(x).\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}$$
$$=\sin(x).\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$
$$\boxed{x\to 0^+ \Rightarrow |x|=x}$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{\sin(x)}{x}.\sqrt{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\left(\sqrt{0+1}\right)=1(1)=1$$

11) الجواب: $\boxed{a\ :\ 0}$, التفسير:

- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(x)}$$

نقسم البسط و المقام على x :

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}}=\frac{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}{\frac{\sin(x)}{x}}$$
$$=\frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}}\right)$$
$$=\frac{1(0)}{1}=0$$

- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x}\right)=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{1-\cos(2x)}{x}=\frac{2\sin^2(x)}{x}=2.\frac{\sin(x)}{x}.\sin(x)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x}\right)=2(1)(0)=0$$

و بالتالي حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)\le\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$\le\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x}\right)$$
$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to 0} f(x)\le 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

12) الجواب: $\boxed{c\ :\ 0}$, التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x+1}\right)=?$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$-1\le\sin(x)\le 1$$
$$\Rightarrow\frac{-1}{x+1}\le\frac{\sin(x)}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x+1}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x+1}\right)$$
$$\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$
$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to+\infty} f(x)\le 0$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

13) الجواب: $\boxed{d\ :\ 1}$, التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sin(x)}{x+5}\right)=?$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$-1\le\sin(x)\le 1$$

نضرب ب -1 :

$$1\ge-\sin(x)\ge-1$$

نضيف x :

$$x+1\ge x-\sin(x)\ge x-1$$

نقسم على $(x+5)$:

$$\frac{x+1}{x+5} \geq \frac{x-\sin(x)}{x+5} \geq \frac{x-1}{x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+5}\right) \geq \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sin(x)}{x+5}\right) \geq \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)$$

$$1 \geq \lim_{x\to+\infty} f(x) \geq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

14) الجواب: $\boxed{a\ :\ 3}$, التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right) = ?$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

نضرب ب -1 :

$$1 \geq -\sin(x) \geq -1$$

نضيف $3x$:

$$3x+1 \geq 3x-\sin(x) \geq 3x-1$$

نقسم على $\sqrt{1+x^2}$:

$$\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{3x-\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}} \geq f(x) \geq \frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{+\infty}{+\infty}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x| = x$$

$$\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{3}{1} = 3$$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{+\infty}{+\infty}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \frac{3x-1}{|x|.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x| = x$$

$$\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x-1}{x.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = \frac{3}{1}$$

$$= 3$$

و بالتالي فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \geq \lim_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$3 \geq \lim_{x\to+\infty} f(x) \geq 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

15) الجواب: $\boxed{b\ :\ +\infty}$, التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2\sin(x)}{5}\right) = ?$$

- $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$

نضرب بـ 2 :

$$0 \leq 2\sin^2(x) \leq 2$$

نقسم على 5 :

$$0 \leq \frac{2\sin^2(x)}{5} \leq \frac{2}{5}$$

نضيف x :

$$x \leq x+\frac{2\sin^2(x)}{5} \leq \frac{2}{5}+x$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x) \leq \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2\sin(x)}{5}\right) \leq \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}+x\right)$$

$$+\infty \leq \lim_{x\to+\infty} f(x) \leq +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

16) الجواب: $\boxed{a\ :\ 0}$, التفسير:

- $\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin^2(x)}{\sin(x)}\right)$

$$= \lim_{x\to0}(2\sin(x)) = 0$$

- $\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2} = \frac{-(1-\cos(x))}{x^2}+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\frac{x^2}{4}}+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2}{4}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2}{4}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\right)=\frac{-2}{4}(1)(1)+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{-2}{4}+\frac{1}{2}=0$$

و بالتالي حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}\right)\le \lim_{x\to 0} f(x)$$
$$\le \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow 0\le \lim_{x\to 0} f(x)\le 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

17) لدينا:

$$-1\le \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\le 1$$
$$-(x-1)^2\le f(x)\le (x-1)^2$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=0$$

18) الجواب: $\boxed{a\ :\ a}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{a\sin(ax)}{ax}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=a(1)=a$$

19) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)}{bx}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم التعيين:

$$f(x)=\frac{a\sin(ax)}{b(ax)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{a}{b}(1)=\frac{a}{b}$$

20) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(ax)}{bx}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{a\tan(ax)}{b(ax)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{a}{b}(1)=\frac{a}{b}$$

21) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{ax.\sin(ax).bx}{ax.bx.\sin(bx)}=\frac{a.\sin(ax).bx}{ax.b.\sin(bx)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a.\sin(ax).bx}{ax.b.\sin(bx)}\right)=\frac{a}{b}$$

22) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$, التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{ax.\tan(ax).bx}{ax.bx.\sin(bx)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{a}{b}$$

23) الجواب: $\boxed{a\ :\ \begin{cases} d_1: y=x+2 \\ d_2: y=x-2 \end{cases}}$, التفسير:

$$-1\le \sin(x)\le 1 \qquad \times 2$$
$$-2\le 2\sin(x)\le 2 \qquad +x$$
$$x-2\le x+2\sin(x)\le x+2$$

و بالتالي:

$$d_1: y=x+2 \ \&\ d_2: y=x-2$$

24) الجواب: $\boxed{a\ :\ g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$, التفسير:

يجب أن تكون:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

لنثبت ذلك:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=+\infty-\infty$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=0$$

و بالتالي فإنّ:

$$g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

25) نضرب بالمرافق في التابع f:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

نأخذ المقام:

$$2\sqrt{x} \le \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \le 2\sqrt{x+1}$$

"أي مجموع محصور بين أكبرهم ضرب عدد الحدود وأصغرهم ضرب عدد الحدود".. نقلب أطراف المتراجحة:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \ge f(x) \ge \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

الجواب الصحيح: a

26) الجواب: $\boxed{b\ :\ (\sin(x)+2)^2+2}$, التفسير:

$$f(x) = \sin^2(x) + 4\sin(x) + 6$$
$$(\sin(x)+2)^2 + 2$$
$$= \sin^2(x) + 4\sin(x) + 4 + 2$$
$$= \sin^2(x) + 4\sin(x) + 6$$
$$= f(x)$$

27) الجواب: $\boxed{a\ :\ 3 \le f(x) \le 11}$, التفسير:

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$

نضيف 2 :

$$1 \le \sin(x)+2 \le 3$$

نربّع:

$$1 \le (\sin(x)+2)^2 \le 9$$

نضيف 2 :

$$3 \le (\sin(x)+2)^2+2 \le 11$$
$$3 \le f(x) \le 11$$

28) الجواب: $\boxed{b\ :\ +\infty}$, التفسير:

$$g(x) = x^2.f(x)$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2) \times \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$= (+\infty)(a) = +\infty$$

حيثُ أنَّ $3 \le a \le 11$ و ذلك من السؤال السابق:

$$3 \le f(x) \le 11$$

و بالتالي فإنَّ:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\boxed{(+\infty)\left(\text{عدد}\right) = +\infty}$$

29) الجواب: $\boxed{a\ :\ \sin(x^2-1)}$, التفسير:

$$(g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sin(x^2-1)$$

30) الجواب: $\boxed{a\ :\ \frac{1}{2}\sin h}$, التفسير:

$$S_{OAM} = \frac{OA \times MM'}{2} = \frac{1}{2}\,MM' = \frac{1}{2}\sin h$$

31) الجواب: $\boxed{c\ :\ \frac{1}{2}\tan h}$, التفسير:

$$S_{OAT} = \frac{OA \times AT}{2} = \frac{1}{2}AT = \frac{1}{2}\tan h$$

32) الجواب: $\boxed{b\ :\ cosh \le \frac{sinh}{h} \le 1}$, التفسير:

لدينا:

$$\sin h \le h \quad , \quad h > 0$$
$$\Rightarrow \frac{\sin h}{h} \le 1 \quad \ldots.(1)$$

و لدينا:

$$h \le \tan h \Rightarrow h \le \frac{\sin h}{\cos h} \quad \times \frac{\cos h}{h}$$
$$\cos h \le \frac{\sin h}{h} \quad \ldots..(2)$$

إذاً من (1) و (2) نجد:

$$cosh \le \frac{sinh}{h} \le 1$$

33) الجواب: a

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

حول المقارب المائل

1) **الجواب:**

$$f(x) = 2x+1+\underbrace{\sqrt{x^2+4x+5}}_{\text{بالإتمام إلى مربع كامل}}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x+1+\sqrt{x^2+4x+4+1}$$
$$= 2x+1+\sqrt{(x+2)^2+1}$$
$$\Rightarrow \Delta: y = 2x+1+\sqrt{(x+2)^2}$$

$-\infty$ بجوار $\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = -x-2$

$$\Rightarrow \Delta: y = 2x+1-x-2$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta: y = x-1}$$

2) **الجواب:**

$$f(x) = \sqrt{4x^2+kx+5}$$

حيثُ $y = 2x+4$ مقارب مائل لـ C_f .

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{4\left(x^2+\frac{k}{4}x+\frac{5}{4}\right)}}_{\text{بالإتمام إلى مربع كامل}}$$

$$= 2\sqrt{x^2+\frac{k}{4}x+\frac{k^2}{64}-\frac{k^2}{64}+\frac{5}{4}}$$

$$= 2\sqrt{\left(x+\frac{k}{8}\right)^2+\frac{80-k^2}{64}}$$

$$\Rightarrow \Delta: y = 2\sqrt{\left(x+\frac{k}{8}\right)^2}$$

$+\infty$ بجوار $\Rightarrow \boxed{\Delta: y = 2\left(x+\frac{k}{8}\right) = 2x+\frac{k}{4}}$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$\frac{k}{4} = 4 \Rightarrow k = 16$$

3) $f(x) = x + k + \frac{x^2+3}{x-1}$

بالقسمة الإقليديّة لـ (x^2+3) على $(x-1)$ نجد:

$$f(x) = x + k + x + 1 + \frac{4}{x-1}$$
$$= 2x + 1 + k + \frac{4}{x-1}$$

عندئذٍ نجد:

$$\Delta: y = 2x + 1 + k + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x-1}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \Delta: y = 2x + 1 + k$$

ولدينا $y = 2x + 1$ ، بالمقارنة نجد:

$$\boxed{k = 0}$$

4) $f(x) = x + \frac{x^2+kx}{x-1}$

$$\Delta: y = 2x + 1$$

بالقسمة الإقليديّة لـ (x^2+kx) على $(x-1)$ نجد:

$$f(x) = x + x + k + 1 + \frac{k+1}{x-1}$$
$$\Rightarrow f(x) = 2x + 1 + k + \frac{k+1}{x-1}$$
$$\Rightarrow \Delta: y = 2x + 1 + k + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{k+1}{x-1}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \Delta: y = 2x + 1 + k$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$\boxed{k = 0}$$

5) **الجواب:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(y_\Delta) = \lim_{x\to-\infty}(3x-1)$$
$$= -\infty$$

" نهاية التابع من نهاية مقاربه في نفس الجوار "

6) **الجواب:**

بما أنّ $y = 4x - 5$ مقارب مائل لـ C_f بجوار الـ $+\infty$ فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = a = 4$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}(2x+1)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right)$$
$$= (4)(2) = 8$$

7) f تابع فردي، وبالتالي:

$$f(-x) = -f(x)$$

$y = x - 1$ مقارب مائل، وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = a = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)+1}{x+f(x)+f(-x)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)+1}{x+f(x)-f(x)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}\right) = 1+0 = 1$$

8) **الجواب:**

f تابع زوجي $\Leftarrow$ C_f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب yy' و $f(-x) = f(x)$ أي نبدّل كل x بـ $-x$ فنحصل على:

$$y = 2(-x) \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

9) **الجواب:**

f تابع فردي $\Leftarrow$ C_f متناظر بالنسبة للمبدأ و $f(-x) = -f(x)$ أي نبدّل كل x بـ $-x$ ونبدّل كل y بـ $-y$ فنحصل على:

$$-y = 2(-x) + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}$$

10) **الجواب:** التابع f لا يملك مقاربات أفقيّة. " قد يملك مقارباً أفقيّاً في جوار الـ $+\infty$ "

11) **الجواب:**

$$f(x) = -\frac{x}{3} + \ln\left(\left|\frac{x-1}{3x}\right|\right)$$
$$\Delta: y = -\frac{x}{3} + \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\left|\frac{x-1}{3x}\right|\right)$$
$$\Rightarrow \Delta: y = -\frac{x}{3} + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta: y = -\frac{1}{3}x - \ln(3)}$$

12) **الجواب:**

$$f(x) = \ln(e^{\alpha x} + e^x + 1)$$
$$= \ln\left(e^{\alpha x}\left[1 + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha x}}\right]\right)$$
$$= \ln(e^{\alpha x}) + \ln\left(1 + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha x}}\right)$$
$$= \alpha x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=a=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{e^{\alpha}}+\frac{1}{e^{\alpha x}}\right)}{x}\right)=2$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=2}$$

13) **الجواب:**

$$f(x)=|3x-1|+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$\Delta: y=|3x-1|+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta: y=|3x-1|+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta: y=|3x-1|+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

عندما $x\to+\infty$ نجد:

$$\Delta_1: y=3x-1+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_1: y=3x-1+\frac{1}{1}=3x$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_1: y=3x}$$

وعندما $x\to-\infty$ نجد:

$$\Delta_2: y=-3x+1+\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_2: y=-3x+1-1=-3x$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_2: y=-3x}$$

المقاربان يتقاطعان في النقطة التي إحداثيّاتها $(0\,,0)$

14) **الجواب:**

$$f(x)=5-4x+\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

$$\Delta: y=5-4x$$

C_f فوق مقاربه عندما $f(x)-y_{\Delta}>0$ أي

عندما:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)>0$$

شرط الحل:

$$\frac{x+1}{x-4}>0 \Rightarrow E=]-\infty\,,-1[\cup]4\,,+\infty[$$

يكون $\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)>0$ عندما $\frac{x+1}{x-4}>1$ وبالتالي:

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-4}-1>0 \Rightarrow \frac{x+1-x+4}{x-4}>0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{x-4}>0$$

ندرس الإشارة:

	4
5	$+\ +\ +\ +\ +\ +$
$x-4$	$---\ \ 0\ \ +++$
	محقّقة غير محقّقة

وبالتالي:

$$\Rightarrow x\in]4\,,+\infty[$$

نقاطع مع شرط الحل $\Leftarrow C_f$ يقع فوق مقاربه على المجال:

$$\boxed{]4\,,+\infty[}$$

15) **الجواب:**

$$f(x)=-3x+\sqrt{4x^2+1}$$

$$y=0\Rightarrow 0=-3x+\sqrt{4x^2+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4x^2+1}=3x \overset{\text{نربّع}}{\Longrightarrow} 4x^2+1=9x^2$$

$$\Rightarrow 5x^2=1\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=+\frac{1}{\sqrt{5}} & \text{مقبول} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{5}} & \text{مرفوض} \end{cases}}$$

حيثُ أنّ شرط الحل هو:

$$3x>0\Rightarrow x>0$$

16) **الجواب:**

$$f(x)=2x-1+|x-3|$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x-1+x-3 & : x>3 \\ 2x-1-x+3 & : x\le 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 3x-4 & : x>3 \\ x+2 & : x\le 3 \end{cases}$$

نقاط تقاطع التابع f مع محور الفواصل تعني $y=0$ وبالتالي:

$$\begin{cases} 3x-4=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{4}{3}} \\ x+2=0\Rightarrow \boxed{x=-2} \end{cases}$$

17) **الجواب:**

$$f(x)=x+\sqrt{|4x^2+1|}$$

$$\Rightarrow \Delta: y=x+\sqrt{|4x^2|}$$

$$\Rightarrow \Delta: y=x+|2x|$$

في جوار الـ $+\infty$:

$$\Delta: y=x+2x=3x\Rightarrow \boxed{\Delta: y=3x}$$

18) **الجواب:**

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$
$$\Delta: y = x + \sqrt{|4x^2|}$$
$$\Rightarrow \Delta: y = x + |2x|$$

في جوار الـ $-\infty$:

$$\Delta: y = x - 2x = -x \Rightarrow \boxed{\Delta: y = -x}$$

19) **الجواب:**

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

نفك القيمة المطلقة:

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = +\frac{1}{2} \end{cases}$$

ندرس الإشارة:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert 4x^2 - 1\rvert$	$+++$	0	$---$	0	$+++$		
	$(4x^2 - 1)$		$(1 - 4x^2)$		$(4x^2 - 1)$		

وبالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4x^2 - 1} \ ; \ x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\\ x + \sqrt{1 - 4x^2} \ ; \ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

المقارب بجوار الـ $+\infty$ وبالتالي:

$$\Delta: y = x + \sqrt{4x^2} = x + |2x|$$

بجوار $+\infty$: $|2x| = 2x$

$$\Rightarrow \Delta: y = x + 2x = 3x$$

وبالتالي $y = 3x$ مقارب مائل بجوار الـ $+\infty$ عند المجال:

$$\boxed{\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[}$$

20) **الجواب:**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x\right) = \frac{15}{8}$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \left(\sqrt{2}x + \frac{15}{8}\right)\right) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta: y = \sqrt{2}x + \frac{15}{8}}$$

21) لدينا:

$$f(x) = 2x + \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$
$$\Rightarrow y_\Delta = 2x + \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}}\right)}_{u(x)}$$
$$u(x) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2\left(4 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$
$$= \frac{2x}{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} u(x) = \frac{2}{-\sqrt{4 + 0}} = \frac{2}{-2} = -1$$
$$\boxed{\Rightarrow c: \ y_\Delta = 2x - 1}$$

22) لدينا:

$$y = ax + b = -x - 1$$
$$\Rightarrow a = -1 \ , \ b = -1$$
$$\Rightarrow \boxed{b: \ a = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = -1}$$

23) y_Δ مقارب:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} y_\Delta = +\infty$$

24) لدينا:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\left(\frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}\right).f(x)\right) =$$
$$\lim_{x \to -\infty} \left(\left(\frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}\right).\underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{a=-1}\right) = 3(-1) = -3$$
$$\Rightarrow \boxed{b: -3}$$

25) $x = 2$ مقارب شاقولي أي أن $x = 2$ تعدم المقام

وبالتالي:

$$2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$y = 3$ مقارب أفقي أي أنّ:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$
$$\Rightarrow \frac{-a}{1} = 3 \Rightarrow a = -3$$

وبالتالي الثنائيّة: $(-3, 2)$

26) القسمة الإقليديّة نجد:

$$f(x) = -2x + 3 + \frac{1}{1 - x}$$

وبالتالي $\boxed{d: \ y_\Delta = 3 - 2x}$ مقارب مائل لـ C

27) لدينا:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2mx + 4}$$

بالإتمام إلى مربّع كامل نجد:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2mx + m^2 - m^2 + 4}$$

$$= \sqrt{(x-m)^2 - m^2 + x}$$
$$\Rightarrow y_\Delta = |x-m| = x-m \ : \ x \to +\infty$$
$$y_\Delta = x+1 \Rightarrow -m = +1 \Rightarrow \boxed{m=-1}$$

28) بالقسمة الاقليدية نجد:

$$f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-1} = x-3+\frac{1}{x-1}$$
$$\Rightarrow y_\Delta = x-3$$

29) بالقسمة الاقليدية نجد:

$$f(x) = \frac{x^2-3mx+1}{x-1}$$
$$= x-3m+1+\frac{-3m+2}{x-1}$$
$$\Rightarrow y_\Delta = x-3m+1 = x-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow -3m+1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow -3m = -1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{a \ : \ m = \frac{1}{2}}$$

30) لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}$$
$$\Rightarrow y_\Delta = \frac{1}{2}x + \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}x + 0 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}x+1$$
$$\Rightarrow \boxed{a \ : \ y_\Delta = \frac{1}{2}x+1}$$

31) لدينا التابع:

$$f(x) = 2x-1+\sqrt{x^2+4x}$$

بالإتمام إلى مربّع كامل نجد:

$$f(x) = 2x-1+\sqrt{(x+2)^2-4}$$
$$y_\Delta = 2x-1+x+2 \ : \ x \to +\infty$$
$$\Rightarrow \boxed{b \ : \ y_\Delta = 3x+1}$$

32) $\lim_{x\to 0} f(x) = 5+\infty = +\infty$

وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي في جوار الـ $+\infty$

33) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{m=3}\right)$$
$$= -1+3 = +2$$

34) $y=2$ مقارب أفقي:

$$f(x) = \frac{x+b}{cx+d} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{c} = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$x=-1$ مقارب شاقولي، أي أن $x=-1$ تعدم المقام:

$$\frac{1}{2}(-1)+d = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Rightarrow \frac{0+b}{0+d} = 0$$
$$\Rightarrow b = d = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{c \ : \ b+d+c = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}}$$

35) $y_\Delta = x-3$

$$f(x) = x+1+\lambda\, x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0$$
$$f(x)-y_\Delta = 4+\lambda\, x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(4+\lambda\, x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$
$$\Rightarrow 4+\lambda \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \ 4+\lambda\,(1) = 0 \Rightarrow \boxed{b \ : \ \lambda = -4}$$

36) $c \ : \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} y_\Delta = +\infty$

حول الاستمرار وقابلية الاشتقاق

1) **الجواب:**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{k\,x} & : \ 0 \le x \le 2 \\ x & : \ x > 2 \end{cases}$$

f مستمر على المجال $I = [0\,,+\infty[$ أي مستمر عند نقاط الانقطاع ومنه مستمر عند $a=2$

وبالتالي:

$$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$$
$$f(2) = \sqrt{2k} \ , \lim_{x\to 2} f(x) = 2$$
$$\sqrt{2k} = 2 \overset{\text{نربّع}}{\Longrightarrow} 2k = 4 \Rightarrow k = 2$$

2) **الجواب:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{\sin(x)} & : \ x > 0 \\ 2x-m & : \ x \le 0 \end{cases}$$

f مستمر عند الصفر، أي أنّ:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$$
$$f(0) = 2(0)-m = -m$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x(x-2)}{\sin(x)}\right) = (1)(0-2)$$
$$= -2$$
$$\Rightarrow\ -m = -2 \Rightarrow m = 2$$

3) **الجواب:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(ax)}{x\tan(ax)} & : x < 0 \\ \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{b+x} - \sqrt{b}\right) & : x > 0 \\ \dfrac{1}{6} & : x = 0 \end{cases}$$

f مستمر عند الصفر أي أنّ:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$f(0) = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{b}}{0} = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نضرب بالمرافق:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{b+x}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{b}\right)}{x\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{b}\right)}$$
$$= \frac{b+x-b}{x\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{b}\right)} = \frac{1}{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{b}} = \frac{1}{2\sqrt{b}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نضرب بالمرافق:

$$f(x) = \frac{(1-\cos(ax))(1+\cos(ax))}{x\left(\frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}\right)(1+\cos(ax))}$$
$$= \frac{1-\cos^2(ax)}{x\,.\sin(ax)\left(\frac{1}{\cos(ax)}+1\right)}$$
$$= \frac{a\,.\sin^2(ax)}{ax\,.\sin(ax)\left(\frac{1}{\cos(ax)}+1\right)}$$
$$= \frac{a\,.\sin(ax)}{x}\,\frac{1}{\frac{1}{\cos(ax)}+1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{a(1)}{1+1} = \frac{a}{2}$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{6} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2\sqrt{b}} \Rightarrow a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$2\sqrt{b} = 6 \Rightarrow \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9$$

ومنه:

$$b = \frac{1}{a^2}$$

4) **الجواب:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$$

f مستمر، أي مستمر عند الصفر، وبالتالي:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$$
$$f(0) = m$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نضرب بالمرافق:

$$f(x) = \frac{(\cos(x)-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$
$$= \frac{(\cos(x)-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1} \times \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}$$
$$= \frac{(\cos^2(x)-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2(\cos(x)+1)}$$
$$= -\frac{\sin^2(x)}{x^2}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\cos(x)+1}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -(1)^2\,.\frac{1+1}{1+1} = -1$$
$$\Rightarrow m = -1$$

5) **الجواب:**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(f(x)-1)}{\sqrt{x}-1}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(f(x)-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(f(x)-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-1}{x-1}\left(\sqrt{x}+1\right)\right)$$
$$= f'(1)\left(\sqrt{1}+1\right) = 2\sqrt{3}(2) = 4\sqrt{3}$$

6) **الجواب:**

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1-1}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين، نفرض:

$$f(x) = \tan(x)\ , f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$f'(x) = 1+\tan^2(x)\ ,\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1+1^2 = 2$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right) = 2$$

7) **الجواب:**

$$f(x)=\big(x+mE(x)\big)^2 \ : I=[-2\,,0[$$

نكتب f بعبارة لا تحوي $E(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\big(x+m(-2)\big)^2 & : x\in[-2\,,-1[\\ \big(x+m(-1)\big)^2 & : \ x\in[-1\,,0[\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x-2m)^2 & : x\in[-2\,,-1[\\ (x-m)^2 & : \ x\in[-1\,,0[\end{cases}$$

f مستمر عند $a=-1$ أي أنّ:

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$$
$$f(-1)=(-1-m)^2$$
$$\lim_{x\to-1}f(x)=(-1-2m)^2$$

وبالتالي:

$$(-1-m)^2=(-1-2m)^2$$
$$\Rightarrow 1+2m+m^2=1+4m+4m^2$$
$$\Rightarrow 3m^2+2m=0$$
$$\Rightarrow m(3m+2)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}m=0 \text{ مرفوض} \ ; m\in\mathbb{R}^*\\ 3m+2=0\Rightarrow m=-\dfrac{2}{3} \text{ مقبول}\end{cases}$$

8) **الجواب:**

$$g(x)=x\sqrt{x}\ ,\ \ h(x)=x|x|$$
$$f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

g اشتقاقي عند الصفر (تابع جذري مضروب بمضمونه)

h اشتقاقي عند الصفر (تابع قيمة مطلقة مضروب بمضمونه)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x^2+1} & : x>0\\ \dfrac{x^2-x}{x^2+1} & : x\le 0\end{cases}$$

f اشتقاقي عند الصفر أي أنّ:

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$$
$$f(0)=\frac{0-0}{0+1}=0$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{0+0}{0+1}=0$$

وبالتالي f اشتقاقي عند الصفر.

ومنه فإنّ التوابع $f\,,g\,,h$ اشتقاقيّة عند الصفر.

9) **الجواب:**

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين، نفرض:

$$f(x)=\cos(x)\ ,\ f(0)=1$$
$$\Rightarrow f'(x)=-\sin(x)\ ,\ \ f'(0)=0$$
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=f'(0)$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)=0$$

10) **الجواب:**

f تابع اشتقاقي على المجال I ⟸ يقبل مماساً عند كل نقطة من نقاطه.

11) الجواب: $\boxed{b:5}$, التفسير:

$$f(2)=\frac{2(2)+1}{2-1}=\frac{5}{1}=5$$

12) الجواب: $\boxed{a\ :\ 2\sqrt{3}}$, التفسير:

$$f(0)=2\sqrt{3}$$

13) الجواب: $\boxed{a\ :\ \text{نعم}}$, التفسير:

حتى يكون مستمر عند $x=2$ يجب أنّ يتحقق:

$$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$$

- $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\frac{(2)^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x+2)=4$$
$$=f(2)\quad \text{محققة}$$

14) الجواب: $\boxed{b\ :\ \text{لا}}$, التفسير:

حتى يكون مستمر عند $x=1$ يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

- $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x-1}\right)=\frac{1-3+2}{1-1}$
$$=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}=x-2$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x-2)\ =-1\neq f(1)$$

ليست محققة.

15) الجواب: $\boxed{a:\frac{1}{2}}$, التفسير:

$f(x)$ مستمر عند $x=0$ إذاً هو يحقق:

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{x^2+x+1})(1+\sqrt{x^2+x+1})}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$
$$=\frac{1-(x^2+x+1)}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}=\frac{1-x^2-x-1}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$
$$=\frac{-x^2-x}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}=\frac{x(-x-1)}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$
$$=\frac{-x-1}{1+\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x-1}{1+\sqrt{x^2+x+1}}\right)$$
$$=\frac{-1}{1+\sqrt{1}}=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow m-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow m=1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

16) الجواب: $\boxed{c:-\frac{9}{8}}$, التفسير:

$f(x)$ مستمر عند $x=0$ إذاً هو يحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3+\cos(x)}-2}{x^2}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$\frac{\sqrt{3+\cos(x)}-2}{x^2}$$
$$=\frac{(\sqrt{3+\cos(x)}-2)(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{3+\cos(x)-4}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{\cos(x)-1}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{-(1-\cos(x))}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\frac{x^2}{4}(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=-\frac{2}{4}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{1}{\sqrt{3+\cos(x)}+2}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{2}{4}(1)(1)\left(\frac{1}{\sqrt{4}+2}\right)=\frac{-1}{2(4)}$$
$$=-\frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow m+1=-\frac{1}{8}\Rightarrow m=-\frac{9}{8}$$

17) الجواب: $\boxed{b:\frac{7}{16}}$, التفسير:

$f(x)$ مستمر عند $x=0$ إذاً هو يحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{2+2\cos(x)}-\sqrt{3+\cos(x)}}{x^2}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه

فنجد:

$$\frac{\sqrt{2+2\cos(x)}-\sqrt{3+\cos(x)}}{x^2}$$
$$=\frac{2+2\cos(x)-(3+\cos(x))}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$
$$=\frac{2-3+2\cos(x)-\cos(x)}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$
$$=\frac{\cos(x)-1}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$
$$=\frac{-(1-\cos(x))}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$
$$=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\frac{x^2}{4}\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\frac{x^2}{4}\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}(1)\left(\frac{1}{2+2}\right)=-\frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow 2m-1=-\frac{1}{8}\Rightarrow 2m=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$
$$\Rightarrow m=\frac{7}{16}$$

18) لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0+\infty}=0$$

إذن $m=0$.

19) لدينا:

التابع ذو فرعين.. على الفرق الذي يحوي الصفر

$x=0\,;f(x)=0$ فيكون المشتق $f'(0)=0$.

20) قابلية الاشتقاق من اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{x-1}=0$$

قابلية الاشتقاق من اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{x-1}=0$$

إذن التابع قابل للاشتقاق عند $a=1$ وg بالتالي اشتقاقي على $\mathbb{R}$.

حول تعريف النهايات بلغة المجالات

1) **الجواب:**

لدينا $f(x)\in\ ]1.99\ ,\ 2.01[$ عندما $x>A$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$$

نحدّد المركز l :

$$l=\frac{b+a}{2}=\frac{2.01+1.99}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$

ومنه نستنتج أنّ $\boxed{y=2}$ مقارب أفقي للخط C في جوار الـ $+\infty$

2) **الجواب:**

$$x>A\ \Rightarrow f(x)>M$$

نعلم أنّه إذا كان $x>A$ وكان $f(x)>M$ فإنّ:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

3) لدينا:

$$\ell=2\ ,\varepsilon=b-\ell=0.01=\frac{1}{100}$$

نعوض في القانون:

$$|f(x)-2|<\frac{1}{100}$$
$$\left|\frac{2\ln(x)-1-2\ln(x)-2}{\ln(x)+1}\right|<\frac{1}{100}$$
$$\frac{3}{\ln(x)+1}<\frac{1}{100}$$
$$\ln(x)>299$$
$$x>e^{299}$$

4) لدينا:

$$\left|\frac{e^{x+1}-2}{e^x+e}-e\right|<\frac{1}{1000}$$
$$\left|\frac{e^x.e-2-e.e^x-e^2}{e^x+e}\right|<\frac{1}{1000}$$
$$\left|\frac{-2-e^2}{e^x+e}\right|<\frac{1}{1000}$$
$$\frac{2+e^2}{e^x+e}<\frac{1}{1000}$$
$$e^x+e>10^3(2+e^2)$$
$$e^z>10^3(2+e^2)-e$$
$$x>\ln(10^3(2+e^2)-e)$$

5) لدينا:

$$\ln(e^{2x}+3)>\ln(10^{10})$$
$$e^{2x}+3>10^{10}$$
$$e^{2x}>10^{10}-3$$
$$2x>\ln(10^{10}-3)$$
$$x>\frac{\ln(10^{10}-3)}{2}$$

6) $|f(x)-l|<\varepsilon$

$$l=\lim_{x\to-\infty}f(x)=-2$$
$$\varepsilon=b-l=-1.95+2=+0.05$$
$$\left|\frac{2x+3}{1-x}+2\right|<0.05$$
$$\Rightarrow\left|\frac{2x-3+2-2x}{1-x}\right|<\frac{5}{100}$$
$$\Rightarrow\frac{|-1|}{|1-x|}<\frac{5}{100}\Rightarrow\frac{1}{1-x}<\frac{5}{100}$$
$$\Rightarrow 5(1-x)>100$$
$$\Rightarrow 5-5x>100\Rightarrow -5x>95$$
$$\Rightarrow\boxed{c\ :\ x<-19}$$

7) $l=\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\right)=\frac{1}{1}=1$$

$$\varepsilon=b-l=1.1-1=0.1$$
$$|f(x)-l|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-1\right|<0.1$$
$$\Rightarrow\left|\frac{2+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|<\frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right|<\frac{1}{10}\Rightarrow\sqrt{x}+1>10$$
$$\Rightarrow\sqrt{x}>9\Rightarrow\boxed{b\ :\ x>81}$$

8) التقاطع مع محور الفواصل يعني أن $y=0$:

$$\Rightarrow \sqrt{5x^2-1}-x=0$$
$$\Rightarrow \sqrt{5x^2-1}=x$$
$$\Rightarrow 5x^2-1=x^2 \Rightarrow 4x^2=1$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{d\ :\ x=\pm\frac{1}{2}}$$

حول الجزء الصحيح

1) **الجواب:**

$$f(x)=2x-3E(x) \quad : \quad x\in[1\,,3[$$

نُجزّء مجال الدّراسة إلى عدّة مجالات طولها 1 :

$$I=[1\,,3[=\begin{cases}[1\,,2\,[\\ [2\,,3\,[\end{cases}$$

نعوّض قيمة تابع الجزء الصحيح في المجال المرافق:

$$f(x)=\begin{cases}2x-3(1) & : \quad x\in[1\,,2[\\ 2x-3(2) & : \quad x\in[2\,,3\,[\end{cases}$$
$$\Rightarrow \boxed{f(x)=\begin{cases}2x-3 & : \quad x\in[1\,,2[\\ 2x-6 & : \quad x\in[2\,,3[\end{cases}}$$

2) **الجواب:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+E(x^2)}{x^2+1}\right)$$

نعلم أنّ:

$$x-1\le E(x)<x$$
$$\Rightarrow x^2-1\le E(x^2)<x^2$$

نضيف x :

$$\Rightarrow x+x^2-1\le x+E(x^2)<x^2+x$$

نقسم على $x^2+1>0$:

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+1}\le\frac{x+E(x^2)}{x+1}<\frac{x^2+x}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)=1$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+E(x^2)}{x^2+1}\right)=1}$$

3) **الجواب:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+E(\ln(x))}{x}\right)$$

نعلم أنّ:

$$x-1\le E(x)<x$$

ومنه:

$$\ln(x)-1\le E(\ln(x))<\ln(x)$$

نضيف 1 :

$$1+\ln(x)-1\le 1+E(\ln(x))<1+\ln(x)$$

نقسم على x :

$$\frac{\ln(x)}{x}\le\frac{1+E(\ln(x))}{x}<\frac{1+\ln(x)}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+E(\ln(x))}{x}\right)=0}$$

4) **الجواب:**

$$f(x)=2x+E(x)-3$$

بما أنّ 500 عدد صحيح فإنّ:

$$E(500)=500$$

بالتعويض في الدالة نجد:

$$f(500)=2(500)+500-3=1497$$

وبالتالي المجال الذي يحصر $f(500)$ هو:

$$\boxed{[1497\,,1497\,]\text{ أو }\{1497\}}$$

5) **الجواب:**

$$f(x)=\frac{x}{4}+\sqrt{2}\,E(\sqrt{x})$$
$$f(16)=\frac{16}{4}+\sqrt{2}\,E(\sqrt{16})$$
$$=4+\sqrt{2}\,E(4)=4+4\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{f(16)=4+4\sqrt{2}}$$

ومنه $f(16)$ تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $3\sqrt{2}$ أو $4\sqrt{2}$ زيادة.

6) لنكتبه بصيغة مستقلة:

$$f(x)=\begin{cases}(x-2m)^2\,;[-2,-1[\\ (x-m)^2\,;[-1,0[\end{cases}$$

لدينا:

$$f(-1)=(-1-m)^2=m^2+2m+1$$
$$\lim_{x\to-1}f(x)=(-1-2m)^2=4m^2+4m+1$$

نضع النهاية تساوي الصورة ونعزل:

$$3m^2+2m=0$$
$$m(3m+2)=0$$

$m=0$ مرفوض

$m=-\frac{2}{3}$ مقبول

7) ما رأيك؟ .....

8) لدينا:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$-1 < E(x) - x \leq 0$$

محصور بين المستقيمين:

$$y = -1 \, , y = 0$$

9) لدينا:

$$1 - E(x) = 0$$
$$1 = E(x)$$
$$x \in [1,2[$$
$$\Rightarrow \mathbb{R} \backslash [1,2[$$

حول مركز التناظر

نعلم أنّ إحداثيّات مركز التناظر يجب أن تحقّق:

الشرط الأوّل:

$$\boldsymbol{x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f}$$

الشرط الثاني:

$$\boldsymbol{f(x) + f(2a - x) = 2b}$$

1) **الجواب هو:**

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} \, , \frac{1}{2}\right)}$$

نلاحظ أن للتابع المقاربات الآتية:

$x = 0$ شاقولي و $x = 1$ شاقولي و $y = x$ مقارب مائل وبالتالي:

$$x_0 = a = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = b = \frac{1}{2}$$

فيكون مركز التناظر $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2) **الجواب:**

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \quad : \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 \, , 1\}$$

البحث عن المقاربات:

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left[\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}\right]$

$$= \lim_{x \to -1^-} \left[\frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}\right] = -\frac{3}{2}$$

- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left[\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}\right] = -\frac{3}{2}$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left[\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}\right]$

$$= \lim_{x \to 1^-} \left[\frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}\right]$$
$$= \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left[\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}\right]$

$$= \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ومنه $x = 1$ مقارب شاقولي.

ايجاد المقارب المائل:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

بالقسمة الإقليديّة لـ $(x^3 + 1)$ على $(x^2 - 1)$ نجد:

$$f(x) = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

ومنه $y = x$ مقارب مائل .

نلاحظ أنّ التابع f يملك مقارب شاقولي $x = 1$ ومقارب مائل $y = x$ وبالتالي فاصلة مركز التناظر هي:

$$x_0 = 1$$

نعوّض $x_0 = 1$ في معادلة المقارب المائل فنجد أنّ تراتيب مركز التناظر هو:

$$y_0 = 1$$

وبالتالي مركز التناظر هو:

$$\boxed{(1 \, , 1)}$$

3) **الجواب:**

$$f(x) = \frac{e^x + 3}{e^x - 1} \quad : \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{e^x + 3}{e^x - 1}\right]$$
$$= \frac{3}{-1} = -3$$

ومنه $y_1 = -3$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x + 3}{e^x - 1}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\frac{3}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right] = 1$$

ومنه $y_2 = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x+3}{e^x-1}\right]$$
$$= \frac{1+3}{1-1} = \frac{4}{0} = +\infty$$

ومنه $x = 0$ مقارب شاقولي.

نلاحظ أنّ التابع f يقبل مقاربين أفقيّين $y_1 =$ 1 و $y_2 = -3$ ومقارب شاقولي $x = 0$ وبالتالي فإنّ فاصلة مركز التناظر هي:

$$x_0 = 0$$

وتراتيب مركز التناظر هي:

$$y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$$

إذاً مركز التناظر هو:

$$\boxed{(0\,,-1)}$$

4) **الجواب هو:**

$$(0\,,1)$$

حيثُ أنّ:

$$f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x-1} \quad ; \quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

نلاحظ أن للتابع المقاربات:

$x = 1$ شاقولي

$y = 0$ أفقي

فيكون مركز التناظر:

$$(1,0)$$

5) **الجواب:**

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) \quad ; \quad D_f =]1\,,3[$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln\left(\frac{1-1}{3-1}\right) = \ln(0) = -\infty$$

ومنه $x_1 = 1$ مقارب شاقولي.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \ln\left(\frac{3-1}{3-3}\right) = \ln\left(\frac{2}{0}\right) = +\infty$$

ومنه $x_2 = 3$ مقارب شاقولي.

نلاحظ أنّ التابع f يقبل مقاربين شاقوليّين $x_1 =$ 3 و $x_2 = 1$ وبالتالي فاصلة مركز التناظر هي:

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

وتراتيب مركز التناظر تساوي:

$$y_0 = f(x_0) = f(2)$$
$$= \ln\left(\frac{2-1}{3-2}\right)$$
$$= \ln(1) = 0$$

وبالتالي مركز التناظر هو:

$$\boxed{(2\,,0)}$$

6) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = -3$$

ولدينا $A(1,-1)$ مركز تناظر فتكون:

$$f(2-x) + f(x) = 2(b) = -2$$

نعوض في النهاية فنجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-2x}{f(2-x)+f(x)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

7) لدينا:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$$

يملك مقارباً شاقولياً.

بقسمة البسط على المقام قسمة اقليدية نجد:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

فيكون المقارب المائل $y = x - 1$

نعوض $x = 1$ فيه $y = 1 - 1 = 0$ فتكون النقطة $(1,0)$ مركز التناظر.

8) لدينا:

$$f(1-x) + f(x) = 3$$

فتكون:

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

فالنقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ مركز تناظر. (الخيار c)

9) لدينا:

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$$

نضرب ب -2:

$$-2x \in \mathbb{R}\backslash\{2,-2\}$$

نضيف 3:

$$3-2x \in \mathbb{R}\backslash\{5,1\}$$

10) لدينا:

$$f(-2-x)=\frac{2(-2-x)^2+3(-2-x)+9}{-2-x+1}$$

$$=\frac{2(4+4x+x^2)-6-3x+9}{-x-1}$$

$$=\frac{8+8x+2x^2-3x+3}{-x-1}=\frac{2x^2+5x+11}{-x-1}$$

لدينا:

$$f(x)+f(-2-x)$$

$$=\frac{2x^2+3x+9}{x+1}+\frac{2x^2+5x+11}{-x-1}$$

$$=\frac{2x^2+3x+9-2x^2-5x-11}{x+1}$$

$$=\frac{-2x-2}{x+1}=-2$$

11) لدينا:

$$f(-2-x)+f(x)=2b=2(-3)=-6$$

حول التابع الدوري

1) الخيار d لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{\pi x+1}{x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3+\cos\left(\frac{2\pi x+2}{x+3}\right)}$$

$$=\sqrt{3+\cos(0)}=2$$

2) حذف

3) لدينا f تابع دوري ودوره الأصغر π وزوجي وبالتالي اصغر مجال يمكن دراسته عليه هو $[0,\frac{\pi}{2}]$.

4) نلاحظ من الرسم أن $T=2\pi$ حيث أنه كل ما يمشي 2π عم يكرر رسمته. (مشي من $-\pi$ لـ π على محور الفواصل)

حول تعيين الثوابت

1) لدينا:

$$f(x)=\frac{a\sqrt{x}}{x+b}$$

نوجد المشتق:

$$f'(x)=\frac{\frac{a}{2\sqrt{x}}(x+b)-a\sqrt{x}}{(x+b)^2}$$

$$f'(1)=\frac{\frac{a}{2}(1+b)-a}{(1+b)^2}$$

نضع $f'(1)=0$

$$\frac{a}{2}(1+b)-a=0$$

$$a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b-1\right)=0$$

$$a\left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\right)=0$$

إما $a=0$ أو $b=1$. ولكن a الحل مرفوض لأن a و b مغايرين للصفر.

نضع $f(1)=-1$:

$$f(1)=-1$$

$$\frac{a}{1+b}=-1$$

$$a=-1-b$$

نعوض $b=1$ فتكون:

$$a=-1-1=-2$$

$$a=-2\,,b=1$$

2) **الجواب:**

لدينا:

$$f'(1)=0$$

$$f'(x)=3ax^2+6x-3$$

$$f'(1) = 3a + 3$$

نعوض:

$$3a + 3 = 0$$

$$a = -1$$

لأن يوجد في الخيارات "لا يمكن تعيينها" نختبر قيمة a:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3$$

$$= -3(x^2 - 2x + 1)$$

$$= -3(x-1)^2 < 0$$

التابع متناقص تماماً على D_f:

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
f'	$- - - - 0 - - - - -$
f	↘↘↘↘ $\quad$ ↘↘↘↘↘

بالتالي التابع لا يملك قيمة حدية وبالتالي لا يمكن تعيينها.

3) لدينا:

$$f'(0) = 4$$

$$f(0) = 3$$

المعلومة الأولى:

$$f'(x) = \frac{(9x^2 + a)(x^2 + 1) - (2x)(3x^3 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(0) = a$$

وبالتالي:

$$a = 4$$

المعلومة الثانية:

$$f(0) = b$$

وبالتالي:

$$b = 3$$

4) لدينا:

$$f'(x) = \cos x + a$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

5) لدينا:

$$f(1) = 5 \Rightarrow \frac{2 + a + b}{2} = 5$$
$$\Rightarrow a + b = 8 \ldots (1)$$

$f(1) = 5$ قيمة حديّة محليّاً، وبالتالي:

$$f'(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{(4x + a)(x + 1) - (1)(2x^2 + ax + b)}{(x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{2(4 + a) - (2a + b)}{4} \quad ; \quad f'(1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8 + 2a - 2 - a - b}{4} = 0 \Rightarrow 6 + a - b = 0$$

$$\Rightarrow a - b = -6 \ \ldots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$
$$\Rightarrow b = 8 - 1 = 7$$
$$\Rightarrow (1\,,7)$$

6) **الجواب:**

$$f(x) = \frac{3x(x + 2)}{(x - 2)(x + 1)}$$

$$f(x) = \frac{a}{1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 2}$$

بتوحيد المقامات نجد:

$$a(x + 1)(x - 2) + b(x - 2) + c(x + 1) = 3x^2 + 6x$$

نأخذ $x = -1$ فنجد:

$$-3b = 3 - 6 \Rightarrow -3b = -3 \Rightarrow b = 1$$

نأخذ $x = 2$ فنجد:

$$3c = 24 \Rightarrow c = \frac{24}{3} = 8$$

نأخذ $x = 0$ فنجد:

$$-2a - 2(1) + 8 = 0 \Rightarrow a = 3$$

7) لدينا:

$$f'(1) = 0$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow f(1) = a + b$$
$$\Rightarrow a + b = 1 \quad \ldots (1)$$
$$f'(x) = a + \frac{3}{2}b\sqrt{x} \Rightarrow f'(1) = a + \frac{3}{2}b$$
$$\Rightarrow a + \frac{3}{2}b = 0 \ \ldots (2)$$

بطرح (2) من (1) نجد:

$$-\frac{1}{2}b = 1 \Rightarrow b = -2$$
$$\Rightarrow a = 1 + 2 = 3 \Rightarrow a = 3$$

8) $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b}$

$f(-2) = 2$ قيمة حديّة محليّاً وبالتالي:

$$f'(-2) = 0$$

$$f(-2) = \sqrt{4 - 2a + b}$$
$$\Rightarrow 2 = \sqrt{4 - 2a + b}$$

نربّع الطرفين:

$$\Rightarrow 4 = 4 + 2a + b \Rightarrow b = 2a \quad \dots (*)$$

$$f'(x) = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax + b}}$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{-4 + a}{2\sqrt{4 - 2a + b}}$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{-4 + a}{2\sqrt{4 - 2a + b}}$$
$$\Rightarrow 0 = -4 + a \Rightarrow a = 4$$

نعوّض في $(*)$:

$$\Rightarrow b = 2(4) = 8 \Rightarrow b = 8$$

9) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

يقبل مماس أفقي وحيد أي أنّ المشتق ينعدم مرّة واحدة وبالتالي:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \quad ; a = 3a\,, b = 2b\,, c = c$$
$$\Rightarrow \Delta = 4b^2 - 4(3a)(c) = 4b^2 - 12ac$$

كون المشتق ينعدم مرّة واحدة فإنّ:

$$\Delta = 0$$

$$\Rightarrow 4b^2 - 12ac = 0 \Rightarrow b^4 - 3ac = 0$$

حول مبرهنة القيمة الوسطى

1) لدينا التابع زوجي وبالتالي خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب فإذا كان يقبل ثلاث حلول على المجال $]0, +\infty[$ فسيقبل ثلاثة حلول أخرى على المجال $]-\infty, 0[$ وبالتالي عدد الحلول على اجتماع المجالين $\mathbb{R}^*$ هو 6 حلول.

2) لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$$

f مستمر على المجال:

$$\mathbb{R} =]-\infty\,, +\infty\,[$$

$$f'(x) = x^4 - x^2$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases} \end{cases}$$

3) $x(2x+1)^2 = 5 \Rightarrow x(2x+1)^2 - 5 = 0$
$$\Rightarrow f(x) = x(2x+1)^2 - 5$$
$$\Rightarrow f(x) = x(4x^2 + 4x + 1) - 5$$
$$\Rightarrow f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x - 5$$

f مستمر على $\mathbb{R}$ ، نشتق:

$$f'(x) = 12x^2 + 8x + 1$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 8x + 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16 > 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

يوجد حلّان:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8 + 4}{24} = -\dfrac{1}{6} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8 - 4}{24} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3} + 1\right)^2 - 5 \\ \quad = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{9}\right) - 5 = -\frac{137}{27} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-1 + 1)^2 - 5 = -5 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\frac{137}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

وبالتالي يوجد حل وحيد في المجال:

$$\left[-\frac{1}{6}\,, +\infty\right[$$

4) $f(a).f(b) < 0$

5) f مستمر على $\mathbb{R}$, ويمكن كتابة التابع بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \left(-\sqrt{x}\right)$$

التابع $\frac{1}{x-1}$ تابع متناقص على $]1, +\infty[$

التابع $-\sqrt{x}$ تابع متناقص على $]1, +\infty[$

ومجموع تابعين متناقصين هو تابع متناقص وبالتالي:

$$0 \in f(]1, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,+\infty[$.

ملاحظة: يمكن دراسة الاطراد عن طريق جدول التغيرات وتصوير المجال أيضاً عن طريقه ولكن في شغف الرياضيات نحرص على أن تتعلم كل شيء 😉

6) لدينا:

$$f(x)=3x+\cos(x)$$

نوجد المشتق:

$$f'(x)=3-\sin(x)=3-\sin(x)$$

لدينا:

$$-1\leq \sin(x)\leq 1$$

$$1\geq -\sin(x)\geq -1$$

$$4\geq f'(x)\geq 2>0$$

f متزايد تماماً ومستمر و $0\in f(\mathbb{R})$:

وبالتالي للمعادلة حل وحيد.

7) لدينا:

$$f(x)=x^3-x-1$$

$$f'(x)=3x^2-1$$

$$f'(x)=0$$

$$3x^2-1=0$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\frac{1-3-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{-2-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-1$$

$$=\frac{-1+3-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{2-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}-1$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}-1$	↘	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}-1$	↗	$+\infty$

للمعادلة حل وحيد

8) محلول من شوي

9) لدينا:

$$f(x)=x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

$$D_f:]-\infty,-\frac{1}{2}[\cup]0,+\infty[$$

$$f'(x)=1-\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}}=\frac{1+2x^2+x}{2x^2+x}>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$$

فيكون جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'	$+$	$+$	$+$	$+$	$\|$	$+$	$+$
f	$-\infty$	↗	$+\infty$	$\|$	$-\infty$	↗	$+\infty$

بالتالي نجد أن للمعادلة حلّان وليس حل وحيد

10) لدينا:

$$f(x)-g(x)=0$$

$$\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}=0$$

$$h(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$$

$$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

نعدم:

$$x=0\,;h(0)=0$$

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$+$
$h(x)$	$\|\|$	↘	0	↗	↗

نلاحظ أنه يمر بالصفر مرة واحدة وبالتالي للمعادلة $h(x)=0$ حل وحيد أي $f(x)=g(x)$ لها حل وحيد أيضاً

11) لدينا:

$$f(5)=5-10+3\ln\left(\frac{6}{1}\right)=-5+3\ln(6)$$

$$=3\ln(6)-5=3\ln(2)+3\ln(3)-5>0$$

$$f(6)=5-12+3\ln\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$=-7+3\ln(7)-3\ln(2)<0$$

بالتالي حصلنا على تناوب بالإشارة فالحل ينتمي للمجال $]5,6[$.

12) لدينا:

$$g(x)=f(x)-y_T=\frac{2e^x-3}{e^x+1}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=\frac{2e^x(e^x+1)-e^x(2e^x-3)}{(e^x+1)^2}-\frac{5}{4}$$

$$=\frac{e^x[2e^x+2-2e^x+3]}{(e^x+1)^2}-\frac{5}{4}$$

$$=\frac{5e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{5}{4}=\frac{20e^x-5(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{20e^x-5e^{2x}-10e^x-5}{4(e^x+1)^2}=\frac{-5(e^{2x}-2e^x+1)}{4(e^x+1)^2}$$

$$=-\frac{5}{4}\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}\leq 0$$

نعدم:

$$(e^x-1)^2=0$$

$$e^x-1=0$$

$$x=0$$

$$g(0)=0$$

جدول اطراد:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'	$-$	$-$	0	$-$	$-$
g	↘		0	↘	

لدينا:

$g(x)>0$ على المجال $]-\infty,0[$ بالتالي C فوق T.

$g(x)<0$ على المجال $]0,+\infty[$ بالتالي C تحت T.

13) لدينا:

$$\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\geq 0$$

$$g(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$$

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x}{(x+1)^2}$$

نعدم:

$$x=0\,;g(0)=0$$

x	-1		0		$+\infty$
g'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
g	↘		0	↗	

$$g(x)\geq 0$$

$$\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\geq 0$$

$$\ln(x+1)\geq\frac{x}{x+1}$$

أيا كانت $x\in]-1,+\infty[$

14) لدينا:

$$\ln(x+1)-\sqrt{x+1}<0$$

$$g(x)=\ln(x+1)-\sqrt{x+1}$$

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$$

نعدم:

$$2-\sqrt{x+1}=0$$

$$\sqrt{x+1}=2$$

$$x+1=4$$

$$x=3$$

$$g(3)=2\ln(2)-2<0$$

x	-1		3		$+\infty$
g'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
g	↗		$2ln(2)-2$	↘	

$$g(x)\leq 2\ln(2)-2<0$$

$$g(x) < 0$$

$$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

$$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}\,; \forall x > -1$$

$$]-1, +\infty[$$

15) لدينا:

$$e^x - x > 0$$

$$g(x) = e^x - x$$

$$g'(x) = e^x - 1$$

نعدم:

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g(0) = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	↘	1	↗

$$g(x) \geq 1 > 0$$

$$g(x) > 0$$

$$e^x - x > 0$$

$$e^x > x$$

أيا تكن $x \in \mathbb{R}$.

16) لدينا:

$$\ln(x) - 2\sqrt{x} \leq 0$$

$$g(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

نعدم:

$$1 - \sqrt{x} = 0$$

$$x = 1$$

$$g(1) = -2$$

x	0	1	$+\infty$
g'	‖	$+$ 0	$-$
g	‖	↗ -2	↘

$$g(x) \leq -2 < 0$$

$$g(x) < 0$$

$$\ln(x) - 2\sqrt{x} < 0$$

$$\ln(x) < 2\sqrt{x}$$

مهما تكن $x \in]0, +\infty[$

17) لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

نشكل الفرق:

$$f(x) - 2 = \frac{2x+1}{x-1} - 2 = \frac{2x+1-2x+2}{x-1}$$

$$= \frac{3}{x-1}$$

على المجال $]1, +\infty[$ يكون C فوق مقاربه الأفقي

إذن الخيار b هو الخاطئ.

18) لدينا:

$$f'(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}(x+1) = \frac{xln(x)+x+1}{x}$$

إذن على مجموعة التعريف تكون إشارة المشتق من إشارة البسط.

19) لدينا:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln(x) + 1 = \frac{-1 + x^2\ln(x) + x^2}{x^2}$$

إذن إشارة المشتق من إشارة البسط.

20) لدينا:

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{xln(x)+x+1}{x}$$

$$g(x) = xln(x) + x + 1$$

$$g'(x) = \ln(x) + 1 + 1 = \ln(x) + 2$$

نعدم:

$$\ln(x) + 2 = 0$$

$$x = e^{-2}$$

$$g(e^{-2}) = -\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2} + 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2} > 0$$

x	0	e^{-2}	$+\infty$

g'	$\|\|$	$-----0+++++++$
g	$\|\|$	$\searrow$ $\frac{e^2-1}{e^2}$ $\nearrow$

$$g(x) \geq \frac{e^2-1}{e^2} > 0$$

$$g(x) > 0$$

إذن:

$$f'(x) > 0$$

أي f مطرد تماماً (متزايد تماماً).

21) لدينا:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln(x) + 1 = \frac{-1 + x^2\ln(x) + x^2}{x^2}$$

لدينا:

$$f'(1) = 0$$

إذن يقبل قيمة حدية عند $a = 1$.

حول المشتقات من مراتب عليا

1) لدينا:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f'''(x) = \frac{4\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}4x}{16x^2.x}$$

$$= \frac{\frac{8x+4x}{2\sqrt{x}}}{16x^3} = \frac{12x}{32x^3\sqrt{x}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

2) مشتق العدد صفر يا جماعة..

3) بدنا نشتق 7 مرات هههههههههه:

$$f'(x) = 1 + 6x + 20x^4 + 30x^5$$

$$f''(x) = 6 + 80x^3 + 150x^4$$

$$f'''(x) = 240x^2 + 600x^3$$

كملو اشتقاق بيطلع 0 السابع.

مسائل عامة

1) لدينا:

$$f(3 + 0.1) \approx 0.1f'(3) + f(3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\approx 0.1\frac{1}{4} + 2 \approx \frac{81}{40}$$

2) **الجواب:**

$$g(x) = x\sqrt{x}$$

$g(x)$ اشتقاقي عند الصفر ((جذر مضروب بمضمونه))

$$h(x) = x|x|$$

$h(x)$ اشتقاقي عند الصفر.

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\left(\frac{x^2+|x|}{x^2+1}\right) - 0}{x}$$

$$= \frac{x^2 + |x|}{(x^2+1)x}$$

نميّز حالتين:

الحالة الأولى $x \to 0^-$:

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{(x^2+1)x} = \frac{x(x-1)}{x(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} g(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

وبالتالي $f(x)$ اشتقاقي من اليسار عند الصفر ومنه:

$$f'(0^-) = -1$$

الحالة الثانية $x \to 0^+$:

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x(x^2+1)} = \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)} = \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

وبالتالي $f(x)$ اشتقاقي من اليمين عند الصفر ومنه:

$$f'(0^+) = 1$$

و $f(x)$ غير اشتقاقي عند الصفر لأن:

$$f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

3) **57) الجواب:**

حسب قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x-x^2}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x(1-x)}}{-(1-x)} = \lim_{x\to 1} -\frac{x\sqrt{x}}{1-x}$$

$$= \infty$$

له مماس شاقولي عند $a = 1$ معادله $x = 1$.

4) **الجواب:**

لنعيد صياغة شكل التابع $-2x^2 + 4x$

$$-2x^2 + 4x = x(-2x + 4)$$

وهذا جداء تابعين مختلفين بجهة الإطراد فهو تابع متناقص.. نعود للتابع:

$$f(x) = x(-2x + 4) + \sqrt{x(-2x + 4)} - \frac{1}{x(-2x + 4)}$$

لدينا:

$$\sqrt{x(-2x + 4)}$$

هو عبارة عن تركيب التابعين $\sqrt{x}$ و $x(-2x + 4)$ وبالتالي تركيب تابعين مختلفين بجهة الاطراد تابع متناقص.

لدينا:

$$x(-2x + 4) + \sqrt{x(-2x + 4)}$$

مجموع تابعين متناقصين هو تابع متناقص.

وأخيراً:

$$-\frac{1}{x(-2x + 4)}$$

أولاً هو تركيب تابعين $-\frac{1}{x}$ و $x(-2x + 4)$ وتركيب تابعين مختلفين بجهة الاطراد تابع متناقص وبالتالي:

f تابع متناقص لأنه مكون من مجموع تابعين متناقصين.

5) **الجواب:**

لدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\vec{u}(k, f'(x)) , \vec{v}(x, f(x))$$

$$kf(x) - xf'(x) = 0$$

$$kf(x) - x\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$kf(x) - \frac{1}{x} = 0$$

نشتق الطرفين:

$$kf'(x) + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$k\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{k + 1}{x^2} = 0$$

$$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$$

6) لدينا:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin(x) + 3\cos^2(x)} - 2$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x) - 6\sin(x)}{2\sqrt{1 + \sin(x) + 3\cos^2(x)}}$$

7) لدينا:

بما أن التابع اشتقاقي وبالتالي التابع مستمر فـ نستفيد من الشرطين:

$$\lim_{x-1} f(x) = f(1)$$

$$a + 4 = 8 + b$$

$$a - b = 4$$

وبما أنه قابل للاشتقاق فإن مشتقه من اليمين يساوي مشتقه من اليسار:

$$f'(1^+) = f'(1^-)$$

$$2a + 2 = 8$$

$$a = 3$$

نعوض لنجد b:

$$3 - b = 4$$

$$b = -1$$

8) لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x) - 1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-(1 - \cos(x))}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)(x)}{(4x)\left(\frac{x}{4}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(-\frac{2x}{4}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\right) = (0)(1) = 0$$

9) **الجواب:**

$$f(x) = 4\sin^3(x) + 3\cos(x)$$
$$f'(x) = 12\sin^2(x).\cos(x) - 3\sin(x)$$
$$= 3\sin(x)\,(4\sin(x).\cos(x) - 1)$$
$$= 3\sin(x)\left(4\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) - 1\right)$$
$$= 3\sin(x)\,(2\sin(2x) - 1)$$

10) **الجواب:**

$$f(x) = \tan(x)$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$$

11) **الجواب:**

$\sin(3x)$ دوري أصغر دور له هو:

لأنّ $\frac{3\pi}{2}$

$$3x = 2\pi \Longrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

12) **الجواب:**

$$f(x) = \tan(x)$$

$f(x)$ هو تابع فردي دوره π:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$$

وبالتالي f متزايد تماماً.

المسألة الأولى

1) **الحل:**

$$f(x) = \frac{\ln(x) + x^2 + x}{2x} + 3x$$
$$;\ D_f =]0, +\infty[$$
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x} + \frac{x^2}{2x} + \frac{x}{2x} + 3x$$
$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\ln(x)}{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 3x$$
$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\ln(x)}{2x} + \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty(-\infty) + 0 + \frac{1}{2} = -\infty$$

ومنه فإنّ المستقيم $x = 0$ مقارب شاقولي بجوار الـ $-\infty$

قد يوجد مقارب مائل:

$$\Delta: y = \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{2x}\right)}_{=0}$$

ومنه فإنّ المستقيم:

$$\Delta: y = \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}$$

مقارب مائل بجوار الـ $+\infty$ ، لدراسة لوضع النسبي

ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\ln(x)}{2x}$$

البسط:

$$\ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$$

المقام $2x$ موجب تماماً على D_f :

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$----$	0	$++++$
الوضع النسبي	C_f فوق y_Δ		C_f تحت y_Δ

وبالتالي القضيّة خاطئة.

للتابع مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته:

$$y = \frac{5}{2}x + 1$$

2) **الحل:**

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(2x) - 2(\ln(x))}{4x^2} + \frac{7}{2}$$
$$= \frac{2 - 2\ln(x)}{4x^2} + \frac{7}{2}$$
$$= \frac{2 - 2\ln(x) + 14x^2}{4x^2}$$
$$= \frac{2(7x^2 + 1 - \ln(x))}{4x^2}$$
$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{7x^2 + 1 - \ln(x)}{2x^2}$$

المسألة الثانية

1) **الحل:**

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$
$$;\ D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

المقاربات المائلة عند الـ $+\infty$:

$$\Delta_1: y = x - 1 + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{e^x+1}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \Delta_1: y = x - 1$$

المقاربات المائلة عند الـ $-\infty$:

$$\Delta_2: y = x - 1 + \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{e^x+1}\right)}_{=4}$$

$$\Rightarrow \Delta_2: y = x + 3$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(e^x+1) - 4e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

ومنه فإنّ القضيّة الصحيحة هي:

$$f'(x) = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

تذكّر أنّ:

$$\boxed{(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2}$$

2) **الحل:**

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (e^x-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$
$$f(0) = -1 + \frac{4}{2} = 1$$

وبالتالي لا يوجد قيم حديّة للتابع.

3) **الحل:**

$y = 1$ معادلة المقارب الأفقي لـ C_f ، ندرس

الوضع النسبي، أي ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y \Rightarrow f(x) - 1$$

من جدول تغيّرات f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$++++$		0		$++++$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+1$	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنّ $f(x) - 1 > 0$ على المجال:

$]0, +\infty[$

أي أنّ C_f فوق $y = 1$ على المجال:

$]0, +\infty[$

المسألة الثالثة

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

1) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

2) لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

3) لدينا:

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{-e^x - e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}$$

$$f'''(x) = \frac{e^x - e^x(x-2)}{e^{2x}} = \frac{3-x}{e^x}$$

إذن نلاحظ أن المشتق النوني:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n-x)}{e^x}$$

4) ندرس تغيرات التابع:

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$$

نعدم:

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'	$++++$		0		$------$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$$\int xe^{-x}\,dx$$

x	e^{-x}
1	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$$[-xe^{-x} - e^{-x}]$$

الآن من الرسم (عندما ندرس تغيرات التابع) نجد:

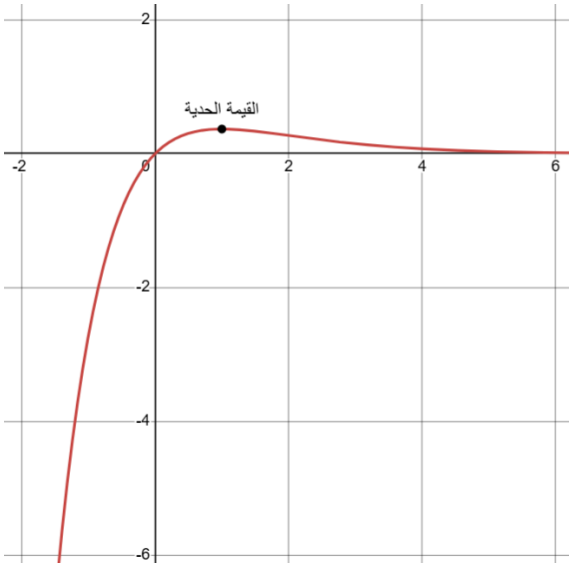
$$\int_{-ln2}^{0} -f(x)\,dx + \int_{0}^{ln2} f(x)\,dx$$

$$\int_{0}^{-ln2} f(x)\,dx + \int_{0}^{ln2} f(x)\,dx$$

$$[-xe^{-x} - e^{-x}]_0^{-ln2} + [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^{ln2}$$

$$= [(2\ln(2) - 2) - (-1)]$$
$$+ \left[\left(-\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\right) - (-1)\right]$$
$$= 2\ln(2) - 1 - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3\ln(2) - 1}{2}$$

5) الخط البياني للتابع:



للمعادلة حلان مختلفان عندما $m \in]1/e\ ,1[$

المسألة الرابعة

$$f(x) = \frac{1}{x} + xln(x)$$

1) لدينا:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln(x) + 1 = \frac{-1 + x^2\ln(x) + x^2}{x^2}$$

إذن إشارة المشتق من أشارة المقدار
$x^2\ln(x) + x^2 - 1$

2) لدينا:

$$f'(1) = 0$$

3) لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

نجد أن جدول تغيرات التابع:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'	$+++++$	0	$------$		
f	$+\infty$	$\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$	1	$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	$+\infty$

فتكون المساحة:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)\,dx$$

نوجد التابع الأصلي:

$$\ln|x| + \int xlnx\,dx$$

$$Y = \int xlnx\,dx$$

$$u = \ln(x) \to u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \to v = \frac{x^2}{2}$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{x}{2}dx$$

$$\left[\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

نعوض:

$$\left[\ln|x| + \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$= \left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - \left(-1 - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2}\right)$$

$$= \frac{4+e^2}{4} - \left(-1 - \frac{2+1}{4e^2}\right) = \frac{4+e^2}{4} + 1 + \frac{3}{4e^2}$$

$$= \frac{4e^4 + 16e^2 + 4e^2 + 3}{4e^2} = \frac{4e^4 + 20e^2 + 3}{4e^2}$$

4) لدينا:

$$a = 1$$

$$f(1) = 1$$

$$f'(1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0(x-1) + 1$$

$$y = 1$$

أو أساساً بإمكانك تعرفها من الطلب الثاني بما أنو 1 عدمت المشتق معناها معادلة المماس الأفقي للتابع $y = f(1)$ 😊

حول التوابع المركبة

1) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 3} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{X\to+\infty} f(X) = 3$$

2) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{X\to 2} f(X) = \frac{5}{3}$$

3) لدينا:

$$f\big(g(x)\big) = \frac{\frac{2}{x-1}+2}{\frac{2}{x-1}} = \frac{\frac{2+2x-2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}$$

$$= \frac{2x}{2} = x$$

4) لدينا:

$$g\big(f(x)\big) = g(x^2-1) = \sin(x^2-1)$$

5) لدينا:

$$\big[f\big(g(x)\big)\big]' = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

$$1 = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

$$1 = \frac{1}{g(x)}g'(x)$$

$$g'(x) = g(x)$$

6) **الجواب:**

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\,f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x + \sqrt{1+x^2} = f(x)$$

7) **الجواب:**

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

نضرب بالمرافق:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2} = \sqrt{x^2+1}-x$$

$$= \sqrt{(-x)^2+1} + (-x) = f(-x)$$

8) **الجواب:**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

لدينا:

$$g'(x) = f'(x) + f'(-x)(-1) = 0$$

التابع g تابع ثابت صحيحة.

$$g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$$

متناظر لمحور التراتيب صحيحة.

بما أن التابع g ثابت فإن نهايته تساوي قيمة أي عدد منه وبالتالي يمكن القول أن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = g(1) = g(0) = g(2) \ldots$$

سنأخذ g(0):

$$g(0) = f(0) + f(-0) = 2f(0)$$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2g(0)$$

وبالتالي الخيار التالت صحيح فالأخير هو ما تبقى خاطئ.

9) **الجواب:**

لدينا:

$$g'(x) = f'(x) + f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= f'(x) + f'\left(\frac{1}{x}\right).\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

وبالتالي g تابع ثابت وليس متزايد.. منتهية. الخيار الأول غلط.

10) **الجواب:**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = f(\tan(x)) - x$$

$$\Rightarrow g'(x) = (\tan(x))'.f'(\tan(x)) - 1$$
$$= \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)\left(\frac{1}{1+\tan^2(x)}\right) - 1$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x).\tan^2(x)} - 1$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x)\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)} - 1$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} - 1$$
$$= \frac{1}{1} - 1 = 0$$

11) **الجواب:**

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5}$$

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x-3}{x+5}\right) = \frac{\frac{x-3}{x+5} - 3}{\frac{x-3}{x+5} + 5}$$
$$= \frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}} = \frac{-2x-18}{6x-22}$$
$$= \frac{-2(x+9)}{2(3x-11)} = -\frac{x+9}{3x-11}$$

12) **الجواب:**

لدينا:

$$g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$$

زوجي.

13) **الجواب:**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$
$$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - f'(-x)$$
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

14) **الجواب:**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow g'(x) = f'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' f'\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= f'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$
$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$$

15) **الجواب:** مكرر

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = f(\tan(x)) - x$$

$$\Rightarrow g'(x) = (\tan(x))'.f'(\tan(x)) - 1$$
$$= \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)\left(\frac{1}{1+\tan^2(x)}\right) - 1$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x).\tan^2(x)} - 1$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x)\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)} - 1$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} - 1 = 1 - 1 = 0$$

16) **الجواب:**

لدينا:

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

عند $x = 0$ يكون التابع شكله:

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{x^2-1}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(0) = -1$$

نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y = -1(x-0) + 0$$

$$y = -x$$

17) **الجواب:**

لدينا معادلة المماس في النقطة a:

$$f(a) = \frac{a^2+a}{a^2+a+3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x+3) - (2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$= \frac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'(a)=\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}$$

فتكون معادلة المماس:

$$y=\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(x-a)+\frac{a^2+a}{a^2+a+3}$$

ليكون المماس مار بالمبدأ نعوض النقطة (0,0):

$$0=\frac{3(2a+1)(-a)+(a^2+a)(a^2+a+3)}{(a^2+a+3)^2}$$

ينعدم الكسر اذا نعدم بسطه:

$$-6a^2-3a+a^4+a^3+3a^2+a^3+a^2+3a=0$$

$$-2a^2+a^4+2a^3=0$$

$$a^2(a^2+2a-2)=0$$

إما:

$$a^2=0\Rightarrow a=0$$

أو:

$$a^2+2a-2=0$$

$$\Delta=4-4(-2)(1)=4+8=12$$

للمعادلة حلان:

$$a_1=\frac{-2+\sqrt{12}}{2}\ ,a_2=\frac{-2-\sqrt{12}}{2}$$

إذن يوجد ثلاث مماسات تمر من المبدأ (يعني حسسب كم قيمة لـ a بيطلعلي)

التكامل

1) لدينا:

$$F(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+1}$$

$$G(x)=\frac{2x^2+\lambda x+5}{2x+2}$$

$$F(x)-G(x)=$$

$$=\frac{x^2+3x+1}{x+1}-\left(\frac{2x^2+\lambda x+5}{2x+2}\right)$$

$$=\frac{2x^2+6x+2-2x^2-\lambda x-5}{2x+2}$$

$$=\frac{(6-\lambda)x-3}{2x+2}$$

ليتم المطلوب يجب أن يكون

$$6-\lambda=-3$$

$$\Longrightarrow 6+3=\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda=9$$

$$\Rightarrow \frac{-3x-3}{2x+2}=\frac{-3(x+1)}{2(x+1)}$$

$$=-\frac{3}{2}$$

2) $F(x)=\lambda-2\cos^2 x$

$$G(x)=-2\cos^2 x$$

$$F(x)-G(x)$$

$$=\lambda-2\cos^2 x+2\cos^2 x$$

$$=\lambda$$

إذن يجب أن تكون عدد حقيقي ما أي:

$$\lambda\in\mathbb{R}$$

3) $\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2+x}.dx$

نفرض:

$$H=x^2+x$$

$$H'=2x+1$$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{2}(2x+1)e^{x^2+x}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 H'.e^H.dx$$

$$=\frac{1}{2}[e^H]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(e^1-e^0)=\frac{e-1}{2}$$

4) لدينا:

نفرض:

$$H=x^2-9$$

$$H'=2x$$

$$f(x)=x(x^2-9)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2x(x^2-9)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2-9}$$

5) لدينا:

$$\int_1^0 x^3\sqrt{(x^2+1)^2}.dx$$

$$=\int_1^0 x^3(x^2+1).dx$$

$$=\int_1^0 x^5+x^3\ .dx$$

$$= \left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4}\right]_1^0 = 0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{-4-6}{24} = -\frac{10}{24}$$

6) لدينا:

$$\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x} . dx$$
$$= \int_1^e \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln(x) . dx$$

نفرض:

$$H = \ln(x)$$
$$H' = \frac{1}{x}$$
$$\int_1^e \frac{1}{x} + H' . H . dx$$
$$= \left[\ln|x| + \frac{H^2}{2}\right]_1^e$$
$$= \left[\ln|x| + \frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e$$
$$= \ln(e) + \frac{\ln^2(e)}{2} - \left[\ln(1) + \frac{\ln^2(1)}{2}\right]$$
$$= 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

7) لدينا:

$$\int_1^e \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} . dx$$
$$= \int_1^e \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln(x) . dx$$

نفرض:

$$H = \ln(x)$$
$$H' = \frac{1}{x}$$
$$= \int_1^e \frac{1}{x} - H' . H . dx$$
$$= \left[\ln(x) - \frac{H^2}{2}\right]_1^e$$
$$= \left[\ln(x) - \frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e$$
$$= \ln(e) - \frac{\ln^2(e)}{2} - 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

8) لدينا:

$$\int_1^e \left(\frac{\ln^2(x) + 2\ln(x) + 2}{x}\right) dx$$
$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x}\ln^2(x) + 2\frac{1}{x}\ln(x) + \frac{2}{x}\right) dx$$

نفرض:

$$H^2 = \ln^2(x)$$
$$H' = \frac{1}{x}$$

ونفرض:

$$H = \ln(x)$$
$$H' = \frac{1}{x}$$
$$= \int_1^e \left(H' . H^2 + 2H' . H + \frac{2}{x}\right) dx$$
$$= \left[\frac{H^3}{3} + 2\frac{H^2}{2} + 2\ln(x)\right]_1^e$$
$$= \left[\frac{\ln^3(x)}{3} + \frac{2\ln^2(x)}{2} + 2\ln(x)\right]_1^e$$
$$= \frac{\ln^3(e)}{3} + \ln^2(e) + 2\ln(e) - 0$$
$$= \frac{1}{3} + 1 + 2 = \frac{10}{3}$$

9) لدينا:

$$\int_{e^2}^{e^3} \left(\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)-1}}\right) dx$$
$$= \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x}(\ln(x)-1)^{-\frac{1}{2}} . dx$$

نفرض:

$$H = \ln(x) - 1$$
$$H' = \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \int_{e^2}^{e^3} H'(H)^{-\frac{1}{2}} . dx$$
$$= \left[\frac{H^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{e^2}^{e^3} = 2[\ln(x)-1]_{e^2}^{e^3}$$
$$= 2[3 - 1 - (2-1)]$$
$$= 2(2-1) = 2$$

10) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x . dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x - 1) dx$$
$$= [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 1 - \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{4-\pi}{4}$$

11) لدينا:

$$\int_0^k (x^2 + x) dx = \frac{5}{6}$$

$$\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^k=\frac{5}{6}$$
$$\frac{k^3}{3}+\frac{k^2}{2}-0=\frac{5}{6}$$
$$\frac{2k^3+3k^2}{6}=\frac{5}{6}$$
$$2k^3+3k^2-5=0$$

يجب أن يكون المجموع صفر بالتالي $k=1$

(بالتجريب).

12) لدينا:

$$0\le x\le a$$

نضيف 1:

$$1\le x+1\le a+1$$

نقلب:

$$1\ge\frac{1}{x+1}\ge\frac{1}{a+1}$$

نكامل بالنسبة:

$$\int_0^a 1\,dx\ge\int_0^a\frac{1}{x+1}dx\ge\int_0^a\frac{1}{a+1}dx$$
$$a\ge\ln(a+1)\ge\frac{a}{a+1}$$

نقسم على a:

$$1\ge\frac{\ln(a+1)}{a}\ge\frac{1}{a+1}$$

13) لدينا:

$$\int_1^0\frac{x}{e^x}\,dx$$
$$=\int_1^0 xe^{-x}\,dx$$
$$u=x\to u'=1$$
$$v'=e^{-x}\to v=-e^{-x}$$
$$\Rightarrow=[-xe^{-x}]_1^0+\int_1^0-e^{-x}\,dx$$
$$=[-xe^{-x}]_1^0-[e^{-x}]_1^0$$
$$=0+\frac{1}{e}-1+\frac{1}{e}=\frac{2-e}{e}$$

14) لدينا:

$$\int_0^{\pi}(wx+1)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$$

$$u=2x+1\to u'=2$$
$$v'=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\to v=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[(2x+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}[(2\pi+1)(1)-0]+\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$=\pi+\frac{1}{2}+0-1=\pi-\frac{1}{2}$$

15) لدينا:

$$\int_1^e\frac{1+\ln(x)}{x^2}\,dx$$
$$=\int_0^e(1+\ln(x))x^{-2}\,.dx$$
$$=\int_0^e(x^{-2}+x^{-2}\ln(x))\,dx$$
$$\int_0^e x^{-2}+\int_0^e\underbrace{x^{-2}\ln(x)}_{\text{بالتدرئة}}\,.dx$$
$$u=\ln(x)\to u'=\frac{1}{x}$$
$$v'=x^{-2}\to v=-\frac{1}{x}$$
$$=\int_0^e x^{-2}+\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e-\int_0^e-\frac{1}{x^2}$$
$$=\int_0^e x^{-2}+\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e+\int_0^e x^{-2}$$
$$=2\int_0^e x^{-2}+\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e$$
$$=2\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_0^e+\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e$$
$$=2\left[-\frac{1}{e}+1\right]+\left[-\frac{1}{e}+0\right]$$
$$=-\frac{2}{e}+2-\frac{1}{e}=\frac{-3+2e}{e}$$

16) لدينا:

$$\int_1^e\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3\ln(x)}{x^2}\right)dx$$

$$I_1=\int_1^e x^{-2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e=-\frac{1}{e}+1=\frac{e-1}{e}$$

$$I_2=3\int_1^e x^{-2}\ln(x)\,dx$$

$$u=\ln(x)\to u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=x^{-2}\to v=-\frac{1}{x}$$

$$I_2 = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e + \int_1^e x^{-2}\, ex$$

$$I_2 = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e + I_2$$

نعوض في التكامل الكلي:

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3\ln(x)}{x^2}\right) dx = I_1 - \left[\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e + I_2\right]$$

$$= \left[\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e = \frac{1}{e}$$

17) لدينا:

$$I = \int_0^1 x^2 e^x \,.\, dx$$

$$u = x^2 \to u' = 2x$$

$$v' = e^x \to v = e^x$$

$$= [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{2x.e^x}_{J}$$

$$J = \int_0^1 2x.e^x \,.\, dx$$

$$u = 2x \to u' = 2$$

$$v' = e^x \to v = e^x$$

$$J = [2x.e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x$$

$$= [2e - 0] - [2e^x]_0^1$$

$$= 2e - 2e + 2 = 2$$

$$\Rightarrow I = [x^2.e^x]_0^1 - 2$$

$$= e - 2$$

18) محلول

19) لدينا:

$$\int_1^{e^2} \left(\frac{1}{x(\ln(x) - 1)}\right).dx$$

$$= \int_1^{e^2} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x) - 1} \,.\, dx$$

$$= [\ln|ln(x) - 1|]_1^{e^2}$$

$$= \ln|ln(e^2) - 1| - \ln|\ln(1) - 1|$$

$$= \ln(2 - 1) - 0 = 0$$

20) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) \,.\, \sin(2x) \;.\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) \,.\, 2\sin(x) \,.\, \cos(x) \;.\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2(x) \,.\, \sin(x) \,.\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -(2\cos^2(x)\,(-\sin(x)).\, dx$$

نفرض:

$$H = cos(x)$$

$$H' = -\sin(x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2H^2.H'.\, dx$$

$$= -2\left[\frac{H^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -2\left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{-2\sqrt{2} - 8}{12}$$

21) لدينا:

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x) \,.\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2(x) \,.\, \sin(x) \,.\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} (1 - \cos^2(x)).\, \sin(x) \,.\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x) \,.\, dx$$

نفرض:

$$H = \cos(x)$$

$$H' = -\sin(x)$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x) - H'.H^2.\, dx$$

$$= \left[-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

22) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\,.\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x))^2\,.\cos(x)\,.\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))^2.\cos(x)\,.\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin(x)+\sin^2(x)).\cos(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)-2\cos(x)\sin(x)$$
$$+\cos(x)\sin^2(x)$$

نفرض:

$$H=\sin(x)$$
$$H'=\cos(x)$$

$$=\left[\sin(x)-\frac{2\sin^2(x)}{2}+\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(1-1+\frac{1}{3}\right)-(0)=\frac{1}{3}$$

23) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\cos^2(x)}\,.\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\cos^2(x))}\,.\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2(x)}\,.\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin(x)|.\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(x)\,.\,dx$$

$$=[2\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=0-2=-2$$

24) لدينا:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos(x)}\,dx$$

$$\sqrt{2-2\cos(x)}=\sqrt{2(1-\cos(x))}=\sqrt{2.2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=2\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos(x)}\,dx=\int_0^{\pi} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}=-4\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=-4\,(0-1)=4$$

25) لدينا:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(2x)}\,.\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{2\sin(x)\,.\cos(x)}\,.\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(-\sin^2(x))}{\cos(x)\,.\sin(x)}+\frac{\cos^2(x)}{\cos(x)\,.\sin(x)}\,.\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(-\sin(x))}{\cos(x)}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,.\,dx$$

$$=\frac{1}{2}[-\ln|cos(x)|+\ln|sin(x)|]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{sin(x)}{cos(x)}\right|\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\ln|tan(x)|^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\ln\sqrt{|\tan(x)|}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln(1)-\ln(\sqrt{3})=-\ln(\sqrt{3})=-\frac{1}{2}\ln(3)$$

26) لدينا:

$$\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,.\,dx$$

نفرض:

$$H=e^x+e^{-x}$$
$$H'=e^x-e^{-x}$$

$$=[\ln(e^x+e^{-x})]_0^1$$

$$=\ln(e^1+e^{-1})-\ln(1+1)$$

$$=\ln\left(e+\frac{1}{e}\right)-\ln(2)$$

$$=\ln\left(\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$$

27) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,.\,dx$$

نفرض:

$$H=\cos(x)+\sin(x)$$
$$H'=\cos(x)-\sin(x)$$

$$= [\ln|cos(x) + sin(x)|]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \ln(0+1) - \ln(1+0) = 0$$

28) لدينا:

$$F(x) = (ax+b)e^{-x}$$
$$f(x) = \frac{5x-4}{e^x}$$

نشتق F :

$$F'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x}$$
$$= e^{-x}(a - ax - b)$$
$$= \frac{a - ax - b}{e^x}$$

نقارن بين F' و f :

$$\Rightarrow a - ax - b = 5x - 4$$
$$\Rightarrow a = -5$$
$$\Rightarrow -5 - b = -4$$
$$\Rightarrow b = -1$$

29) لدينا:

$$F(x) = P(x)e^{2x}$$
$$f(x) = x^3 e^{2x}$$

نعلم أن:

$$F'(x) = f(x)$$

فنجد أن:

$$\deg P(x) = 3$$

30) لدينا:

$$\int_1^3 |2x-4|.\,dx$$
$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$2x-4$		$----$		$++++$	
$\|2x-4\|$		$-2x+4$		$2x-4$	

$$\Rightarrow \int_1^2 -2x+4 \; + \int_2^3 2x-4$$
$$= [-x^2+4x]_1^2 + [x^2-4x]_2^3$$
$$= (-4+8) - (-1+4) + (9-12) - (4-8)$$
$$= -4+8+1-4+9-12-4+8 = 2$$

31) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(cos(x), sin(x))\,.\,dx$$
$$\sin(x) = \cos(x)$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
max		$\cos(x)$	$\sin(x)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)$$
$$= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) - \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

32) لدينا:

$$\int_0^1 \min(x^2, x)$$
$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$$
$$\Rightarrow x(x-1) = 0$$

إما:

$$x = 0$$

أو:

$$x = 1$$

x	0		1
min		x	

$$\Rightarrow \int_0^1 x.\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

33) لدينا:

$$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x)$$
$$= e^x(\cos(x) - \sin(x))$$
$$f''(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) + (-\sin(x) - \cos(x))e^x$$
$$= e^x[-2\sin(x)]$$

نعوض:

$$f(x) = af'(x) + bf''(x)$$
$$e^x\cos(x) = a[e^x(\cos(x) - \sin(x))] + b[e^x(-\sin(x)]$$
$$\cos(x) = a\cos(x) - a\sin(x) - 2bsin(x)$$
$$\cos(x) = a\cos(x) + \sin(x)\,(-a - 2b)$$

بالمقارنة نجد:

$$a = 1$$
$$-a - 2b = 0$$
$$-1 - 2b = 0$$
$$b = -\frac{1}{2}$$

34) لدينا:

$$f''(x) = af'(x) + bf(x)$$
$$f'(x) = e^x \sin(2x) + 2\cos(2x)\,e^x$$
$$= e^x(\sin(2x) + 2\cos(2x))$$
$$f''(x) = e^x(\sin(2x) + 2\cos(2x)) + (2\cos(2x) - 4\sin(2x))e^x$$

$$= e^x[-3\sin(2x) + 4\cos(2x)]$$

نعوض:

$$-3\sin(2x) + 4\cos(2x) = a(\sin(2x) + 2\cos(2x)) + bsin(2x)$$

$$= \text{asin}(2x) + 2\,\text{acos}(2x) + bsin(2x)$$

بالمقارنة نجد:

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$a + b = -3 \Rightarrow b = -5$$

وبالتالي:

$$f''(x) = 2f'(x) - 5f(x)$$

نكامل الطرفين:

$$f'(x) = 2f(x) - 5F(x)$$

$$-5F(x) = f'(x) - 2f(x)$$

$$F(x) = -\frac{1}{5}f'(x) + \frac{2}{5}f(x)$$

35) **الجواب:**

لدينا:

$$g'(x) = \frac{3(1+\tan^2 x)(1+\tan(x)) - (1+\tan^2 x)(3tanx - 1)}{(tanx+1)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan^2 x)[3 + 3\,tan\,x - 3\tan x + 1]}{(1+tanx)^2}$$

$$= \frac{4 + 4\tan^2 x}{(1+tanx)^2}$$

36) **الجواب:**

لدينا:

$$g'(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$$

37) لدينا:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos(x) \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

نشتق الأطراف:

$$-x \le -\sin(x) \le -x + \frac{x^3}{6}$$

نضرب بـ -1:

$$x \ge \sin(x) \ge x - \frac{x^3}{6}$$

المتتاليات

1) لدينا:

$$u_n = \frac{10^n\left(10 + \frac{1}{10^n}\right)}{10^n\left(1 + \frac{1}{10^n}\right)}$$

$$\lim u_n = \frac{10}{1} = 10$$

2) لدينا:

$$\lim u_n = 0 - 0 + \infty = +\infty$$

3) لدينا:

$$u_{v_n} = \cos\left(\frac{\pi^{n+1}}{3.\pi^n + 3}\right)$$

$$\lim u_n = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

حسب المسيطر

ثلاثة حدود متعاقبة

1) **الجواب:**

$$a + b + c + c = 27$$
$$\Rightarrow 2b + b + c = 27$$
$$\Rightarrow 3b + c = 27$$

2) **الجواب:**

$$\left.\begin{matrix} b = 2aq \\ c = 2aq^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2a + 2aq + 2aq^2 = 14$$
$$\Rightarrow 2a + 4a + 8a = 14$$
$$\Rightarrow 14a = 14 \Rightarrow a = 1$$

نختار الحدود المتزايدة:

$$a = 1 \;,\quad b = 4 \;,\quad c = 9$$

3) **الجواب:**

$$k^2 = 1\left(k - \frac{2}{9}\right) = k - \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow k^2 - k + \frac{2}{9} = 0$$
$$\Rightarrow \left(k - \frac{2}{3}\right)\left(k - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

4) نعلم أن $a + b + c = 3b$

$$S = 3u_3 + 3u_{11} = 3(u_3 + u_{11}) = 3(60) = 180$$

5) لدينا:

$$a.b.c = 216$$
$$b^2 = a.c$$
$$b^3 = 216 \Rightarrow b = 6$$

6) حاول تقليص عدد المجاهيل :

$$u_3 = u_0 + 3r$$
$$u_2 = u_0 + 2r$$
$$u_5 = u_0 + 5r$$

نعوض :

$$2u_0 + 3r = 18$$
$$2u_0 + 7r = 34$$

بالطرح :

$$4r = 16$$
$$r = 4$$

و بالتالي $u_0 = 3$

و عليه يكون $u_n = 3 + 4n$

7) **الجواب:**

$$b = aq \quad , \quad c = aq^2$$

من الحسابية:

$$2B = A + C$$
$$\Rightarrow 10b = 12a + 2c$$

نعوّض 2 ، 1 ، نقسم على a :

$$10aq = 12a + 2aq^2$$
$$\Rightarrow 10q = 12 + 2q^2$$
$$\Rightarrow 2q^2 - 10q + 12 = 0$$
$$\Rightarrow q^2 - 5q + 6 = 0$$
$$\Rightarrow (q - 3)(q - 2) = 0$$
$$\Rightarrow q = 3 \ , \ q = 2$$

8) لدينا:

$$b^3 = 216 \Rightarrow b = 6$$

نعوض في الأخرى:

$$a + c = 21 - 6 = 15$$

9) لدينا:

$$(a + r)^2 = 1 + a(a + 2r)$$
$$a^2 + 2ar + r^2 = 1 + a^2 + 2ar$$
$$r^2 = 1$$
$$r = 1$$

10) لدينا:

$$2(2a + 1) = a + 2 + a^2 - 4$$
$$4a + 2 = a + a^2 - 2$$
$$a^2 - 3a - 4 = 0$$
$$(a - 4)(a + 1) = 0$$
$$a = 4 \, , a = -1$$

نختار $a = 4$ لأن المتتالية متناقصة

11) لدينا:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 9$$
$$2u_2 + u_2 = 9$$
$$u_2 = 3$$

لدينا:

$$u_{10} + u_{11} = 40$$
$$u_2 + 8r + u_2 + 9r = 40$$
$$17r = 34$$
$$r = 2$$

12) نفس رقم 10 بس غير حرف

13) لدينا:

$$2(3b) = 4a + 2c$$
$$6b = 4a + 2c$$

ولدينا $b = aq \, , c = aq^2$:

$$6aq = 4a + 2aq^2$$
$$aq^2 - 3aq + 2a = 0$$
$$q^2 - 3q + 2 = 0$$
$$(q - 2)(q - 1) = 0$$

$q = 2$ مقبول

منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد

$q = 1$ مرفوض

14) لدينا:

$$u_3 - 3u_5 = -42$$
$$u_2 + r - 3(u_2 + 3r) = -42$$
$$-2u_2 - 8r = -42$$
$$-8r = -42 + 10$$
$$r = 4$$

المتتاليات المعرفة بالتدريج

1) بملاحظة أن $E(0): 0 < 1 < 2$ محققة

و أن

$$E(n): 0 < u_n < 2$$
$$0 < u_n^2 < 4$$
$$0 < \frac{1}{2}u_n^2 < 2$$
$$2 < 2 + \frac{1}{2}u_n^2 < 4$$
$$0 < \sqrt{2} < \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2} < 2$$
$$0 < u_{n+1} < 2$$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة

و بالتالي $E(n)$ صحيحة مهما تكن n

2) **الجواب:**

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4$$
$$= \left(\sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}\right)^2 - 4$$
$$= 2 + \frac{1}{2}u_n^2 - 4$$
$$= \frac{1}{2}u_n^2 - 2$$
$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n^2 - 2}{u_n^2 - 4} = \frac{\frac{1}{2}u_n^2 - 2}{2\left(\frac{1}{2}u_n^2 - 2\right)} = \frac{1}{2} = q$$

3) **الجواب:**

$$v_0 = u_0^2 - 4 = 1^2 - 4 = -3$$

4) **الجواب:**

$$v_n = (q)^n . v_0 \quad \Rightarrow v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5) **الجواب:**

$$u_n^2 = v_n + 4 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$
$$\Rightarrow u_n = \sqrt{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

6) **الجواب:**

$$w_0 = v_0 - u_0 = 3 - (-1) = 4$$

7) **الجواب:**

$$w_{n+1} = 3av_n + (1-3a)u_n - (3au_n + (1-3a)v_n)$$
$$= 3av_n + (1-3a)u_n - 3au_n - (1-3a)v_n$$
$$= 3a(v_n - u_n) + (1-3a)(u_n - v_n)$$
$$= 3aw_n - (1-3a)(v_n - u_n)$$
$$= 3aw_n - (1-3a)w_n$$
$$\Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{w_n(3a - (1-3a))}{w_n}$$
$$= 3a - 1 + 3a = 6a - 1$$

8) **الجواب:**

$$w_n = w_0 . q^n = 4(6a-1)^n$$

9) **الجواب:**

$$X_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 2u_n - 4 - 4 = 2u_n - 8$$

نشكّل النسبة:

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{2u_n - 8}{u_n - 4} = \frac{2(u_n - 4)}{u_n - 4} = 2$$

وبالتالي المتتالية X_n هندسية أساسها:

$$q = 2$$

10) **الجواب:**

$$X_n = X_0(q)^n = -3(2)^n$$

11) **الجواب:**

$$u_n = X_n + 4 = -3(2)^n + 4$$

12) **الجواب:**

$$v_n = u_{n+1} - 4u_n$$
$$v_{n+1} = u_{n+2} - 4u_{n+1}$$
$$= 7u_{n+1} - 12u_n - 4u_{n+1}$$
$$= 3u_{n+1} - 12u_n$$
$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3(u_{n+1} - 4u_n)}{u_{n+1} - 4u_n} = 3$$

13) **الجواب:**

$$y_n = u_{n+1} - 3u_n$$
$$y_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$$
$$= 7u_{n+1} - 12u_n - 3u_{n+1}$$
$$= 4u_{n+1} - 12u_n$$
$$\Rightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{4u_{n+1} - 12u_n}{u_{n+1} - 3u_n}$$

$$= \frac{4(u_{n+1} - 3u_n)}{u_{n+1} - 3u_n} = 4$$

وبالتالي المتتالية y_n هندسية أساسها:

$$q = 4$$

14) **الجواب:**

الحد العام:

$$v_n = -3^{n+1} \quad , \quad y_n = -4^n$$
$$v_n = u_{n+1} - 4u_n$$
$$\Longrightarrow 4u_n = u_{n+1} - v_n$$
$$\Longrightarrow 4u_n = y_n + 3u_n - v_n$$
$$\Longrightarrow u_n = -4^n + 3^{n+1}$$

15) **الجواب :**

$$S = 1 + 2 + 4 + .. + 1024$$
$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$$
$$S = 1\frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2047$$
$$\rightarrow 2s = 4094$$
$$\rightarrow 2s + 2000 = \boxed{6094}$$

16) **الجواب:**

$$t_n = x_n . y_n$$

نشكّل الفرق:

$$t_{n+1} - t_n = x_{n+1} . y_{n+1} - x_n . y_n$$
$$= \left(\frac{2x_n . y_n}{x_n + y_n}\right)\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) - x_n . y_n = 0$$

وبالتالي المتتالية t_n ثابتة.

17) **الجواب:**

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n . y_n}{x_n + y_n} - x_n$$

$$= \frac{2x_n . y_n - x_n(x_n + y_n)}{x_n + y_n} = \frac{2x_n y_n - x_n^2 - x_n y_n}{x_n + y_n}$$
$$= \frac{x_n y_n - x_n^2}{x_n + y_n} = \frac{x_n(y_n - x_n)}{x_n + y_n} < 0$$
$$; \quad y_n - x_n < 0$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x_n + y_n}{2} - y_n = \frac{x_n + y_n - 2y_n}{2}$$
$$= \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{متزايدة}$$

18) الجواب :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1}$$

$$u_n = \left(7 - \frac{18}{9}\right)10^n + 2$$
$$u_n = 5 \times 10^n + 2$$

19) **الجواب :**

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1}$$
$$u_n = \left(0 - \frac{4}{2}\right)3^n + 2$$
$$u_n = -2 \,.\, 3^n + 2 = 2(1 - 3^n)$$

20) الجواب:

نحل المعادلة $f(x) = x$

$$2x + 3 = x$$
$$x = -3 = l$$

$$v_n = u_n - l$$
$$v_n = u_n + 3$$

$$\alpha = 3$$

21) الجواب :

$$f(x) = x$$
$$-\frac{1}{3}x + 1 = x$$
$$\frac{4}{3}x = 1$$
$$x = \frac{3}{4} = l$$
$$v_n = u_n - \frac{3}{4}$$
$$\alpha = \frac{3}{4}$$

22) **الجواب:**

$$u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n+1}$$
$$v_n = nu_n$$

$$v_{n+1} = (n+1)(v_n + 1) = (n+1)\left(\frac{nu_n + 4}{n+1}\right)$$
$$= nu_n + 4$$
$$\Longrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{nu_n + 4}{nu_n}$$
$$v_{n+1} - v_n = nu_n + 4 - nu_n = 4$$

وبالتالي المتتالية v_n حسابية أساسها:

$$r = 4$$

23) **الجواب:**

$$w_{n+1} = x_{n+1} + 2y_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}(y_n + 2x_n) + \frac{1}{3}(x_n + 5y_n)$$
$$= \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_n + \frac{5}{3}y_n$$
$$= \frac{6}{3}y_n + \frac{3}{3}x_n = 2y_n + x_n$$

$\Rightarrow w_{n+1} - w_n = 2y_n + x_n - x_n - 2y_n = 0$

وبالتالي المتتالية w_n ثابتة.

24) نضع الأمثال:

$$\alpha - 2 > 0$$

$$\alpha > 2$$

وبالتالي حسب الخيارات $\alpha = 3$.

25) **الجواب:**

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

$$\frac{3}{2}a\,u_n + \frac{a+1}{3} - u_n = 0$$

$$\frac{3}{2}a(2) + \frac{a+1}{3} - 2 = 0$$

$$3a + \frac{a+1}{3} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{1}{3} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{10a}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow 10a = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

26) لدينا:

$$v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{3u_n}{u_n + 1}}$$

$$= 1 - \frac{2u_n + 2}{3u_n} = \frac{u_n - 2}{3u_n}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_n - 2}{3u_n}}{\frac{u_n - 2}{u_n}} = \frac{1}{3} = q$$

27) لدينا:

$$u_{n+1} + 5t_{n+1} = 3u_n + 5t_n + 5u_n + 35t_n$$

$$= 8u_n + 40t_n = 8(u_n + 5t_n)$$

هندسية أساسها $q = 8$

28) لدينا:

$$u_1 = \frac{3}{6}u_0 + 3 = 3 + 3 = 6 = u_0$$

ثابتة.

29) لدينا:

$$t_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2t_n}{3} - \frac{2u_n + t_n}{3}$$

$$== \frac{-u_n + t_n}{3} = \frac{1}{3}(t_n - u_n)$$

هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

30) لدينا:

$$v_n = 5u_n - 6u_{n-1} - 2u_n = 3u_n - 6u_{n-1}$$

$$= 3(u_n - 2u_{n-1}) = 3v_{n-1}$$

هندسية أساسها $q = 3$

31) لدينا:

$$u_0 = 2\cos(2\theta)$$

$$u_1 = \sqrt{2 + 2\cos 2\theta} = \sqrt{2(1 + \cos 2\theta)}$$

$$= \sqrt{2.2\cos^2\theta} = -2\cos\theta$$

لأن $\theta \in]\pi/2\ ,\pi[$

32) لدينا:

$$v_n = 3u_n - 2u_{n-1} - 2u_n = u_n - 2u_{n-1} = v_n$$

إذن أساسها $q = 1$ وحدها العام:

$$v_n = v_0 q^n = v_0.(1)^n = 1(1)^n = (1)^n$$

33) لدينا:

$$(n+1)\ln(n+1)$$

نعرف التابع f:

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1)\ ; x > -1$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 0\ ,\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \ln(x+1) + 1$$

نعدم:

$$lln(x+1) + 1 = 0$$

$$x + 1 = \frac{1}{e}$$

$$x = \frac{1}{e} - 1$$

$$f\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \left(\frac{1}{e} - 1 + 1\right)\ln\left(\frac{1}{e} - 1 + 1\right) = -\frac{1}{e}$$

جدول تغيرات:

x	-1		$\frac{1}{e}-1$		$+\infty$
f'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|0$	$\nearrow$	$-\frac{1}{e}$	$\searrow$	$+\infty$

نلاحظ أن:

$$f(x) \geq -\frac{1}{e}$$

بالتالي u_n محدودة من الأدنى:

$$u_n \geq -\frac{1}{e}$$

المجاميع

1) **الجواب:**

$$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$$

2) **الجواب:**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{4n^2}\right) = \frac{1}{4}$$

3) **الجواب: حسابية مع قفزات:**

$$n = \frac{2n-2}{2} + 1 = n - 1 + 1 = n$$
$$S = \frac{n(2n+2)}{2} = n(1+n) = n^2 + n$$

4) **الجواب:**

$$S = \frac{100(1+100)}{2} = 50(101) = 5050$$

5) **الجواب:**

$$S = \frac{14(15+2)}{2} = 119$$

6) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

7) $u_n = \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{2n^3+1} \to +\infty$

8)

$$u_n = 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 5^3 = \frac{5^2(6)^2}{4} = 225$$

9) $n = 10$

$$S = \frac{10 \times 11 \times 12}{3} = 440$$

10) **الجواب:**

الجواب الصحيح b ذلك أن :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q = \frac{2}{5} < 1$$

لنناقش باقي الخيارات :

الأول حسب معيار الاشتقاق يتضح أنها متزايدة

الثالث : بتشكيل النسبة يتضح أنها متزايدة

الرابع : بما أن الحد الأول سالب لا يجوز استخدام معيار النسبة و بحساب الحدود الأولى .. نجد أنها متزايدة

11) **الجواب:**

$$\frac{10(6+3k)}{2} = 255$$
$$\Longrightarrow 60 + 30k = 510$$
$$\Longrightarrow 30k = 510 - 60 = 450$$
$$\Longrightarrow k = \frac{450}{30} = 15$$

12) **الجواب:**

$$S = -3 - \left[\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \cdots + \frac{3}{4^n}\right]$$

متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{1}{4}$$

وبالتالي:

$$S = \frac{1-q^n}{1-q}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$\Longrightarrow \text{الكامل } S = -3 - \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$
$$= -3 - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$= -4 + \frac{1}{(2^2)^n} = -4 + \frac{1}{2^{2n}}$$

13) **الجواب:**

$$S = 1 - \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots + \frac{1}{9^n}\right]$$

متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{1}{9}$$

وبالتالي:

$$S = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\frac{8}{9}}\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}$$

$$\Rightarrow S = 1 - \left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}\right) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8.9^n}$$
$$= \frac{7}{8} + \frac{1}{8.9^n}$$

14) **الجواب:**

$$S = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Rightarrow S = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

15) **الجواب:**

$$4^1 + 2 = 4 + 2 = 6$$

مضاعف للعدد 3 .

16) **الجواب:**

$3^{2n} - 2^n = 3^{2(1)} - 2^1 = 9 - 2 = 7$ صحيحة

17)

$$(2^5)^{11} - (5^2)^{11} = (32 - 25)k = 7k$$

18)

$$2(5^{33} - 2^{22}) = 2[(5^3)^{11} - (2^2)^{11}]$$
$$= 2[(125 - 4)k] = 2 \times 121 \times k = 2 \times 11(11k)$$
$$= 2 \times 11 \times k'$$

مضاعف للعدد 11 و زوجي

19)

$$S = (1 + 3 + 5 + \cdots + 99)$$
$$- (2 + 4 + 6 + \cdots + 100)$$
$$S = 2500 - 2550 = -50$$

20)

$$nE(x) \leq E(x) + E(2x) + \cdots + E(nx) \leq nE(nx)$$

$$\underbrace{\frac{E(x)}{n}}_{\text{نهايتها صفر}} \leq u_n \leq \underbrace{\frac{E(nx)}{n}}_{\text{نهايتها } x}$$

لاحظ أن

$$nx - 1 \leq E(nx) \leq nx$$

$$\frac{nx-1}{n} \leq \frac{E(nx)}{n} \leq x$$

و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n \in [0, x]$ و لا يمكن الحكم على نهايتها

(السؤال خاطئ ... أعتذر منكم)

21) **الجواب:**

$$3^5 \geq \frac{1}{3}(2^{5+1}) + \frac{5}{3}(5+1)^2$$
$$\Rightarrow 3^5 \geq \frac{64}{3} + \frac{180}{3}$$
$$\Rightarrow 243 \geq \frac{244}{3}$$
$$\Rightarrow 243 \geq 81.3 \quad \text{محققة}$$

22) نهدف للوصول للطلب والذي هو:

$$E(n+1): (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

لدينا من الفرض:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

نضرب بـ $(1+x)$:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

23) لدينا:

$$E(n+1): 10^{n+1} + 1 = 9k'$$

لدينا من الفرض:

$$10^n + 1 = 9k$$

نضرب ب 10:

$$10^{n+1} + 10 = 90k$$
$$10^{n+1} + 1 = 90k - 9 = 9(10k - 1) = 9k'$$

بالتالي $E(n+1)$ صحيحة.

نختبر حد البدأ:

$$10^0 + 1 = 2$$

غير قابل للقسمة على 9 بالتالي $E(n+1)$ صحيحة فقط.

24) لدينا:

$$E(n+1): n+1 > n+2$$

لدينا من الفرض:

$$n > n+1$$

نضيف 1:

$$n+1 > n+2$$

بالتالي $E(n+1)$ صحيحة. نختبر حد البدأ:

$$0 > 1$$

مستحيلة. إذن $E(n+1)$ صحيحة فقط.

25) لنوجد الأساس:

$$u_{30} - u_{15} = r(30-15)$$
$$15r = 20 - (-10)$$
$$r = 2$$

الآن:

$$S = (u_{15} - 7r) + (u_{15} - 6r) + (u_{15} - 5r)$$
$$+(u_{30} - 10r) + (u_{30} - 9r) + (u_{30} - 8r)$$
$$= 3u_{15} + 3u_{30} - 35r$$
$$= 3(-10) + 3(20) - 35(2) = -40$$

26) لدينا:

$$f(S_0) = \big(9(0) + 10(1), 3(0) + 5(1)\big) = (10,5)$$

27) مجموع متتالية هندسية أساسها $q = 10$ وعدد حدودها 6 وحدها الأول 1:

$$S = \frac{1 - 10^6}{1 - 10} = \frac{-99999}{-9} = 11111$$

28) لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

نضيف ونطرح $\frac{1}{n}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \frac{-2n - 1 + 2n}{2n(2n+1)}$$
$$= \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$$

المتتالية متناقصة تماماً (الخيار C)

29) لدينا:

u_n هندسية أساسها $q = 4$ إذن المتتالية u_n^2 أساسها 4^2 وبالتالي المجموع:

$$S = u_0^2 \frac{1 - 16^{n+1}}{1 - 16}$$

و u_0:

$$u_0 = v_0 + 1 = 15$$

نعوض:

$$S_n = 225 \frac{1 - 16^{n+1}}{-15} = 15(16^{n+1} - 1)$$

30) لدينا:

$$S = 3^0 + 3^1 + \cdots + 3^5$$
$$= 1\frac{1 - 3^6}{1 - 3} = \frac{(1 - 3^6)}{-2} = \frac{(1 - 729)}{-2} = 364$$

31) لدينا:

$$\frac{u_3}{u_0} = 2^{3-0} \Rightarrow u_3 = 8$$

نحسب المجموع:

$$u_3 \frac{1 - 2^{n-2}}{1 - 2} = 248$$
$$-8(1 - 2^{n-2}) = 248$$
$$1 - 2^{n-2} = -31$$
$$2^{n-2} = 32$$

نضع:

$$2^{n-2} = 2^5$$
$$n - 2 = 5 \Rightarrow n = 7$$

32) الجواب:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$\boldsymbol{u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}}$$

33) الجواب: $\boxed{c\ :\ k-1}$, التفسير:

$u_{n+1} = 10u_n - 18 \quad ; \quad u_0 = 7$

$u_1 = 70 - 18 = 52$

$u_2 = 520 - 18 = 502$

$u_3 = 5020 - 18 = 5002$

$u_4 = 50020 - 18 = 50002$

و بالتالي نجد أنّ عدد الأصفار للمتتالية u_k هو:

$k - 1$

34) الجواب: $\boxed{b\ :\ \text{متناوبة}}$, التفسير:

المتتالية متناوبة لأنّ حدودها من الشكل:

$$u_n = \left(-\frac{1}{1}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(-\frac{1}{n}\right)^n$$

35) الجواب: $\boxed{a\ :\ \text{ثابتة}}$, التفسير:

$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \quad , \quad u_0 = 8$

$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

و بالتالي المتتالية u_n ثابتة.

36) الجواب: $\boxed{a\ :\ a^2 + b^2 + c^2}$, التفسير:

$$b^2 = a.c \Longrightarrow a = \frac{b^2}{c}$$

نعوّض:

$$\left(\frac{b^2}{c} + b + c\right)\left(\frac{b^2}{c} - b + c\right) =$$

$$\left(\frac{b^2}{c}\right)^2 - \frac{bb^2}{c} + \frac{cb^2}{c} + \frac{bb^2}{c} - b^2 + bc + b^2 - bc + c^2$$

$$= \frac{b^4}{c^2} + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

حيثُ أنّ:

$$a = \frac{b^2}{c} \Longrightarrow a^2 = \frac{b^4}{c^2}$$

37) لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

38) لنقسم المجموع لأقسام:

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{19}{2}$$

نضرب بـ 2:

$$2S_1 = 2S_2 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 19$$

$$2S_1 = 2S_2 = \frac{1+19}{2}(19)$$

$$S_1 = S_2 = 95$$

يكون S:

$$S = S_1 + 20 + S_2 = 95 + 20 + 95 = 210$$

39) لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1} = 2u_n + n - 1 - 2t_n - n + 1$$

$$= 2u_n - 2t_n = 2(u_n - t_n) = 2v_n$$

هندسية أساسها $q = 2$ وحدها العام:

$$v_n = v_0 q^n = 2.2^n = 2^{n+1}$$

40) لدينا مجموع متتالية هندسية أساسها $q = i$

وعدد حدودها 601 و الحد الأول 1:

$$S = 1\frac{1 - i^{601}}{1 - i} = \frac{1 - i^{600}i}{1 - i} = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

لأن $i^{600} = i^4 = 1$.

41) لدينا:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{39}{4} + 20 + 20 + \cdots + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \cdots + \frac{39}{4} + 20$$

$$4S_1 = 2 + 3 + \cdots + 39 + 40$$

$$= \frac{42}{2}(39) = 819$$

$$S_1 = \frac{819}{4} = 204.75$$

ولدينا:

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{39}{4} + 20$$

أي:

$$S_2 = S_1 = 204.75$$

فيكون S:

$$S = S_1 + S_2 = 409.5$$

42) لدينا:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{10^2(11)^2}{4} = \frac{100 \times 121}{4} = 25 \times 121 = 3025$$

البنوك التي بعد التمثيل البياني لحدود متتالية

1) الجواب: متناقصة

نلاحظ أنّ:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \\ &= (u_n - 2)(u_n - 1) \end{aligned}$$

بما أنّ $u_n \leq 2$ فإنّ:

$u_n - 2 \leq 0$ سالبة

وبما أنّ $u_n \geq 1$ فإنّ:

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1) \leq 0$$

وبالتالي u_n متناقصة.

2) الجواب: المتتالية متقاربة من الصفر.

بما أنّ:

$$l_{n+1} \leq l_n \Rightarrow l_{n+1} - l_n \leq 0$$

ومنه l_n متناقصة.

بما أنّ $l_{n+1} \leq 1$ إذاً l_n محدودة من الأدنى بالعدد 1.

بما أنّ l_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة، ونهايتها هي حل المعادلة:

$$\begin{aligned} &f(x) = x \\ &\sqrt{1 + (x-1)^2} = x \\ &\Rightarrow 1 + (x-1)^2 = x^2 \\ &\Rightarrow 1 + x^2 - 2x + 1 = x^2 \\ &\Rightarrow x = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} l_n = 1 \end{aligned}$$

ومنه المتتالية l_n متناقصة ومحدودة من الأدنى ومتقاربة من الواحد.

وبالتالي القضيّة الخاطئة هي أنّ المتتالية متقاربة من الصفر.

3) الجواب $\frac{2}{\pi}$ لأنّ:

$$u_n = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{3}{\pi^3} + \cdots + \frac{\pi}{\pi^n}$$

لنثبت أوّلاً أنّ:

$$E(n): 2^n \geq n$$

$E(0)$ و $E(1)$ محققتان وضوحاً لأنّ:

$$2^1 \geq 1 \ , \quad 2^0 \geq 0$$

ولنثبت صحة $E(n)$ لكل $n \geq 1$ عندئذٍ:

$$2^{n+1} = 2.2^n \geq 2n \geq n + n \geq n + 1$$

ومنه $E(n+1)$ محققة وبالتالي:

$$2^n \geq n \ : \ \forall n$$

بالاستفادة مما سبق نستبدل كل عدد k بالبسط بـ 2^k :

$$\begin{aligned} u_n &\leq \frac{2^1}{\pi} + \frac{2^2}{\pi^2} + \frac{2^3}{\pi^3} + \cdots + \frac{2^n}{\pi^n} \\ &= q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \\ &\quad ; \ q = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_n \leq a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n}{1-\frac{2}{\pi}}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n}{\frac{\pi-2}{2}}\right) = \frac{2}{\pi-2}\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\right)$$

$$\leq \frac{2}{\pi-2}$$

ومنه المتتالية محدودة من الأعلى بـ:

$$\frac{2}{\pi-2}$$

وهو أصغر حد راجح.

لدينا أيضاً:

$$\frac{2}{\pi-2} < \frac{2}{\pi-3} < \pi$$

ومنه فإنّ:

$$\pi \ , \ \frac{2}{\pi-3}$$

حدود راجحة أيضاً، لكن:

$$\frac{2}{\pi} < \frac{2}{\pi-2}$$

ومنه $\frac{2}{\pi}$ ليس حد راجح.

4) الجواب: y_{n+1} لأنّ:

لدينا:

$$y_{n+1} = x_n + y_n$$

نحسب الحدود الأولى:

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = x_0 + y_0 = x_0 + 0 = x_0$$
$$y_2 = x_1 + y_1 = x_0 + x_1$$
$$y_3 = x_2 + y_2 = x_0 + x_1 + x_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = x_{n-1} + y_{n-1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$$
$$y_{n+1} = x_n + y_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

ومنه:

$$y_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

5) الجواب: $y_n = \frac{3}{n^2}$ لأنّ:

$$(\text{الحد الأصغر})(\text{عدد الحدود}) \leq u_n$$
$$\leq (\text{الحد الأكبر})(\text{عدد الحدود})$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 3 \, . \frac{1}{n^2}$$
$$\Rightarrow u_n \leq \frac{3}{n^2} \Rightarrow u_n = \frac{3}{n^2}$$

6) الجواب: 1 لأنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+n}\right) = 1$$

7) الجواب: $\sqrt{n+1}$ لأنّ:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

نضرب بالمرافق فنجد:

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$
$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$u_0 = \sqrt{1} - 0 = \sqrt{1}$$
$$u_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \ , \ u_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$
$$u_3 = \sqrt{4} - \sqrt{3} \, , \ldots \, , u_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$
$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
$$\Rightarrow s_n = \sqrt{n+1}$$

8) الجواب: 2 لأنّ:

$$f(x) = x$$

x هي فاصلة نقطة تقاطع C_f مع منصف الربع الأوّل، من الرسم نجد:

$$x = 0 \ , \ x = 1$$

وبالتالي عدد حلول المعادلة هو 2 .

9) الجواب: متزايدة

نلاحظ أنّ f متزايدة على $[0\,,1]$.

نريد إثبات أنّ:

$$u_{n+1} \geq u_n$$

نثبت صحة $E(0)$ أي نريد إثبات أنّ:

$$u_1 \geq u_0$$

لدينا:

$$u_1 = f(u_0)$$

وبما أنّ f متزايدة على المجال $[0\,,1]$ و $0 <$ نجد $u_0 < 1$:

$$f(u_0) \geq u_0 \Rightarrow u_1 \geq u_0$$

ونفرض صحة $u_{n+1} \geq u_n$ ولنثبت أنّ:

$$u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

لدينا:

$$f(u_{n+1}) = u_{n+2}$$

ومن الفرض $u_{n+1} \geq u_n$ و f متزايدة فإنّ:

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$$
$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$$
$$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

ومنه المتتالية متزايدة.

10) الجواب: المتتالية محدودة من الأعلى فقط.

بما أنّ:

$$0 < u_0 < 1$$

و f متزايدة و $u_{n+1} = f(u_n)$ فإنّ:

$$0 < u_n < 1$$

أي أنّ u_n محدودة. وبما أنّ المتتالية متزايدة ومحدودة فإنّ نهايتها المحتملة هي:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

11) الجواب:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

وبالتالي المتتالية متزايدة.

12) الجواب: $x_n \geq \frac{1}{2}$ لأنّ:

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$x_n = u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

لدينا n حد وأصغر هذه الحدود هو:

$$\frac{1}{2n}$$

ومنه:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \geq \frac{1}{2}$$

13) الجواب: $x_n \geq \frac{1}{2}$ مكرر عن **12**

14) الجواب: $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ لأنّ:

الخاصة $E(1)$ صحيحة وضوحاً لأنّ:

$$u_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$ عندئذٍ:

$$u_{2^{n+1}} = u_{2^n} + u_{2^n.2} - u_{2^n} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة، أي أنّ:

$$\forall n \geq : \quad u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$$

انتهت حلول المقرر.. تذكر:

مع شغف الرياضيات العلامة الكاملة

لم تعد حلماً.. بل أصبحت خطّة.