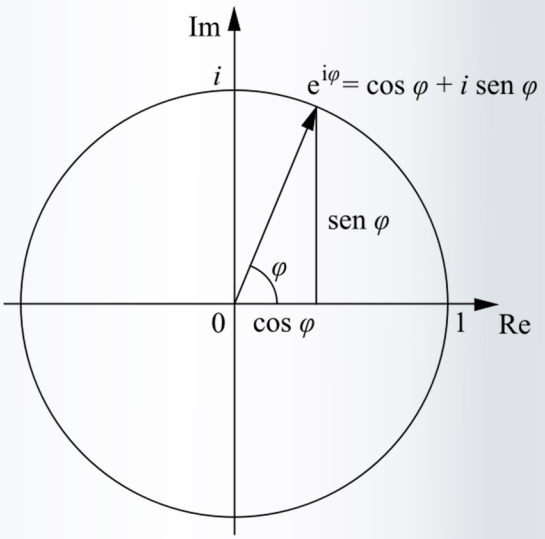
منصة طريقي
التعليمية الافتراضية
مع أنس أحمد

شرح الرياضيات

الحصة



π

1

الدرس الأول

مدخل إلى الأعداد الحقيقية

بسم الله على
أحلامكم
بسم الله على
مساعيكم
وبارك الله
الخطى

تعريف الوحدة التخيلية

سنصطلح انه يوجد عدد تخيلي i يحقق ان $\boxed{i^2 = -1}$ ولذلك تطبيقات عددية وهندسية وواقعية سنتعرف عليها ولاسيما في الهندسة وبالتالي إذا كان b عدداً حقيقياً ما فإن أي عدد من الشكل bi هو تخيلي بحت مثلاً $3i\ , -2i\ , \frac{i}{2}$

مجموعة الاعداد العقدية $\mathcal{C}$: هي مجموعة جديدة تعد توسيعاً لمجموعة الاعداد الحقيقية R

حيث نضيف لها الاعداد التخيلية فيكون كل عدد عقدي هو من الشكل $z = a + bi$ **وبالتالي يكون العدد العقدي z مكون من قسمين:**

قسم حقيقي هو a نرمز له بالرمز $Re(z)$

وقسم تخيلي هو b نرمز له بالرمز $Im(z)$ إذن:

قوى العدد i

نحن نعلم أن:

$$i^2 = -1$$

ولكن إذا كان ... i^3, i^4, i^5 ... شو نساوي!!

سهلة ;)

$$i^3 = i^2.i = -1(i) = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

الحالة العامة:

أ- إذا كانت القوة زوجية:

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$$

ثم نكمل الحل.

ب- في حال كانت القوة فردية:

$$i^{2n+1} = i^{2n}.i = (i^2)^n.i = (-1)^n.i$$

الشكل الجبري لعدد عقدي

هو $z = a + ib$ ويكون

$$Re(z) = a \quad , \quad Im(z) = b$$

أمثلة

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$3 + 2i$	3	2
$4 - 2i$	4	-2
$1 + \frac{i}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
4	4	0
$-i$	0	-1

تسمية:

❖إذا كان $Im(z) = 0$ فإننا نسمي z عدد حقيقي.

❖إذا كان $Re(z) = 0$ نسمي z عدد تخيلي بحت.

العمليات على الشكل الجبري

■ المرافق:

إذا كان $z = a + ib$ فإننا نرمز لمرافقه بالرمز $\bar{z}$ ويكون $\boxed{\bar{z} = a - ib}$

أي نغير إشارة القسم التخيلي فقط.

مثال

اكتب مرافق كلٍ من الأعداد العقدية الآتية:

z	$\bar{z}$
$3 + 2i$	
$1 - i$	
$1 + \sqrt{2}i - 3i$	
$i - 3$	
$2i + 3$	
$3i$	
2	

ملاحظة هامة:

يكون العدد z حقيقي بحت إذا وفقط إذا كان $\bar{z} = z$

ويكون العدد z تخيلي بحت إذا وفقط إذا كان $\bar{z} = -z$

■ الجمع والطرح:

يتم جمع (طرح) القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي.

مثال

في كلٍ من الحالات الآتية اكتب قيمة

$z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$

$z_2 = 1 - i$	$z_1 = 3 + 4i$	1
$z_2 = 2i$	$z_1 = 4 + 3i$	2
$z_2 = 4 + 3i$	$z_1 = 2 - i$	3
$z_2 = \frac{4}{3} + i$	$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$	4
$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$	$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$	5

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **الضرب:** يتم الضرب بشكل عادي مع مراعاة ان $i^2 = -1$

مثال

في كلٍ مما يلي احسب جداء العددين z_1 و z_2

$z_2 = 1 - i$	$z_1 = 3 + 4i$	**1**
$z_2 = 2i$	$z_1 = 4 + 3i$	**2**
$z_2 = 4 + 3i$	$z_1 = 2 - i$	**3**
$z_2 = \frac{4}{3} + i$	$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$	**4**
$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$	$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$	**5**

الحل

- **القسمة:** لقسمة عددين عقديين نضرب البسط والمقام بمرافق المقام ثم نستفيد من المطابقة

$$z.\bar{z} = x^2 + y^2$$

(طيارة)

مثال

احسب $\frac{z_1}{z_2}$ في الحالات التالية:

$$z_1 = 3 + 2i \, , z_2 = 1 - i$$

$$z_1 = 1 \, , z_2 = \sqrt{2} + i$$

.....

.....

$z_1 = 6 + 8i \, , z_2 = 3 + 4i$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الحقيقي والتخيلي

أثبت ان العدد Z حقيقي، أو اثبت ان العدد Z تخيلي بحت.

- لإثبات ان Z حقيقي نحسب $\bar{Z}$ ونثبت ان $\bar{Z} = Z$
- لإثبات أن Z تخيلي بحت نحسب $\bar{Z}$ ونثبت ان $\bar{Z} = -Z$

خواص مساعدة: إذا كان W عدداً عقدياً طويلته واحد فإننا نعلم أنّ:

$$W.\bar{W} = |W|^2$$
$$W.\bar{W} = 1^2$$
$$W.\bar{W} = 1$$

وبالتالي يكون:

$$\bar{W} = \frac{1}{W}$$

مثال (1)

أولاً: ليكن Z عدداً عقدياً ما، وليكن u طويلته 1 وهو مختلف عن الواحد

أثبت أن العدد $Z = \frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ $(u \neq 1)$ حقيقي.

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ثانياً: نفترض أن $u \neq 1$ وأن $Z = \frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$ عددٌ حقيقي، أثبت أنه إما ان يكون Z حقيقي أو ان $|u| = 1$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

نتأمل عددين عقديين w, z يحققان $|w| = |z|$ ، $zw \neq -1$ أثبت ان العدد العقدي $Z = \frac{z+w}{1+zw}$ عدداً حقيقي.

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

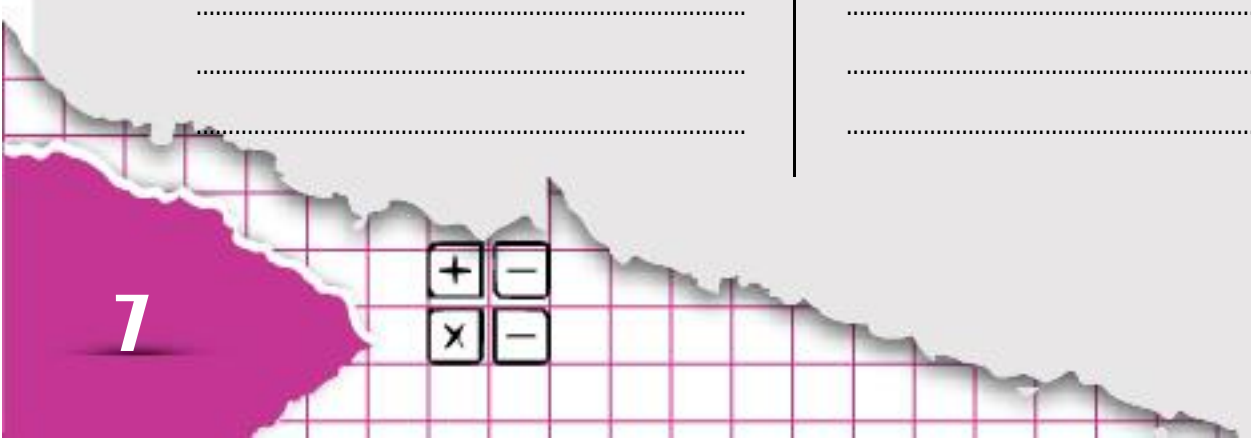
مثال (3)

ليكن t عدداً عقدياً يحقق أن $|t| = 1$ ومختلف عند الواحد وليكن العدد $Z = \frac{Z-t\bar{Z}}{2i-2it}$

الحل

.....

.....



بنوك الأسئلة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

1- ليكن لدينا الاعداد العقدية: $Z_1 = 2 + 4i , Z_2 = 3 - i , Z_3 = -\frac{5}{2}i$ اوجد ما ان مرافق Z_1 :

a	$\bar{Z}_1 = 2 + 4i$	b	$\bar{Z}_1 = -2 - 4i$	c	$\bar{Z}_1 = -2 + 4i$	d	$\bar{Z}_1 = 2 - 4i$

2- مرافق العدد z_3 هو:

a	$\bar{Z}_3 = \frac{2}{5}i$	b	$\bar{Z}_3 = \frac{5}{2}i$	c	$\bar{Z}_3 = -\frac{5}{2}i$	d	$\bar{Z}_3 = -\frac{2}{5}i$

3- العدد $z_1 + z_2$ هو:

a	$5 + 3i$	b	$-5 - 3i$	c	$-5 + 3i$	d	$5 - 3i$

4- العدد $z_3 - z_1$ هو:

a	$-2 - \frac{13}{2}i$	b	$-2 + \frac{13}{2}i$	c	$2 - \frac{13}{2}i$	d	$2 + \frac{13}{2}i$

5- العدد $z_1 . z_2$ هو:

a	$-10 + 10i$	b	$10 - 10i$	c	$10 + 10i$	d	$-10 - 10i$

6- القسم الحقيقي للعدد z_3 هو:

a	$-\frac{2}{5}$	b	0	c	1	d	$-\frac{5}{2}$

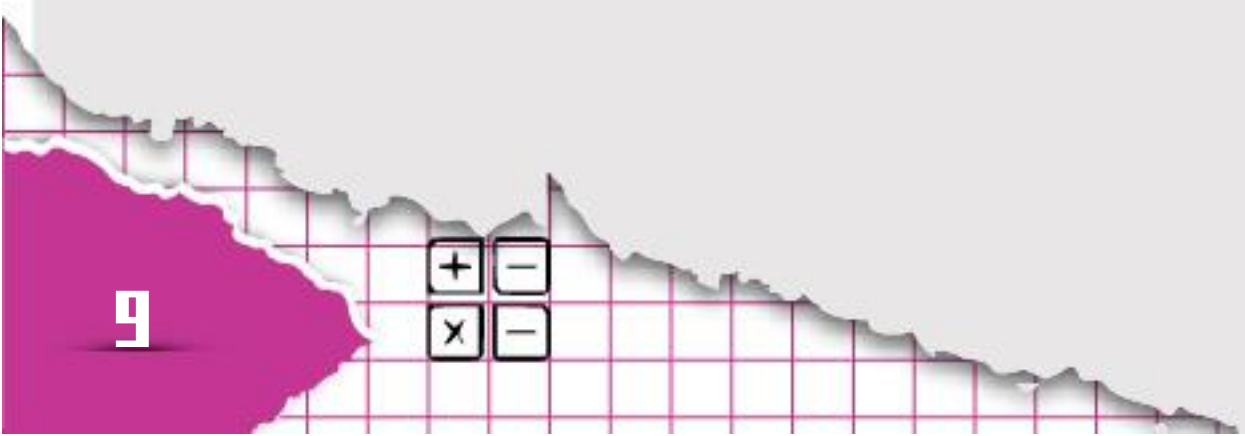
7- القسم التخيلي للعدد z_2 هو:

a	-3	b	-1	c	3	d	1

8- العدد العقدي الممثل لـ z_1^2 هو:

a	$-12 + 16i$	b	$-12 + 8i$	c	$12 - 16i$	d	$12 + 8i$

D	1
B	2
A	3
A	4
C	5
B	6
B	7
A	8



2

الدرس الثاني

الأعداد الحقيقية هندسياً

صدق
بنفسك
وبقدراتك،
وستصل
إلى القمة.

بفرض $z = x + iy$ العدد العقدي الذي تمثله النقطة $M(x, y)$.

و بفرض أن الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يصنع زاوية θ مع محور الفواصل و أن $OM = r$

رسم توضيحي:

نلاحظ من الرسم أنّ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

و أن:

$$cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{r}$$

$$sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{r}$$

و منه نجد أنّ :

$$x = rcos\theta$$
$$y = rsin\theta$$

نعوض في الشكل الجبري:

$$z = rcos\theta + i\, rsin\theta$$

نخرج r عاملاً مشتركاً:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ويدعى الشكل الأخير بالشكل المثلثي للعدد العقدي z

واصطلح العالم أويلر Euler الترميز :

$$cos\theta + isin\theta = e^{i\theta}$$

فنجد إذن:

$$\boxed{z = r\, e^{i\theta}}$$

ويدعى الشكل الأخير بالشكل الأسي للعدد العقدي z

ولكتابة أي عدد عقدي بالشكل المثلثي أو الأسي نتبع الخطوات:

1- نتأكد ان z مكتوب بالشكل الجبري أي:
$z = x + iy$

2- نحسب الطويلة: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3- نضع:

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r}\end{aligned}\right\}$$

نستنتج الزاوية θ

4- إذا كان المطلوب الشكل المثلثي فنعوض في القانون:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وإذا كان المطلوب الشكل الأسي نعوض في القانون $z = re^{i\theta}$

مثال (1)

اكتب العدد $z = \sqrt{3} + i$ بالشكل المثلثي

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

اكتب العدد $z = -1 - i$ بالشكل المثلثي

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3)

اكتب العدد $z = 2i - 2\sqrt{3}$ بالشكل المثلثي:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (4)

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد الآتية:

$Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \ , Z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$

$Z_3 = 4 - 4i \ , Z_4 = -2i$

$Z_5 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \ , Z_6 = \frac{4}{1-i}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التحويلات السريعة

- **حالة كون العدد الحقيقي**

$z = a$

هنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: $a > 0$ (موجب)

عندها تكون الطويلة $r = a$

والزاوية $\theta = 0$

الحالة الثانية: $a < 0$ (سالب):

عندها تكون الطويلة $r = |a|$

والزاوية $\theta = \pi$

أمثلة

الشكل المثلثي	الشكل الجبري
$3[\cos 0 + i\sin 0]$	$z = 3$
$2[\cos 0 + i\sin 0]$	$z = 2$
$3[\cos \pi + i\sin \pi]$	$z = -3$
$\frac{1}{2}[\cos \pi + i\sin \pi]$	$z = -\frac{1}{2}$

الشكل المثلثي	الشكل الجبري
$3e^{i0}$	$z = 3$
$2e^{i0}$	$z = 2$
$3e^{i\pi}$	$z = -3$
$\frac{1}{2}e^{i\pi}$	$z = -\frac{1}{2}$

- **حالة العدد تخيلي بحت $z = bi$:**

هنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: $b > 0$ (موجب) :

عندها تكون الطويلة $r = b$

والزاوية $\theta = \frac{\pi}{2}$

الحالة الثانية: $b < 0$ (سالب) :

عندها تكون الطويلة $r = |b|$

والزاوية $\theta = -\frac{\pi}{2}$

أمثلة

الشكل المثلثي	الشكل الجبري
$3\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$	$z = 3i$
$2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$	$z = 2i$
$3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$	$z = -3i$
$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$	$z = \frac{1}{2}i$

الشكل المثلثي	الشكل الجبري
$3e^{\frac{i\pi}{2}}$	$z = 3$
$2e^{\frac{i\pi}{2}}$	$z = 2$
$3e^{-\frac{i\pi}{2}}$	$z = -3$
$\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$z = -\frac{1}{2}$

على وجه الخصوص احفظ أنّ:

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$
$$-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$$
$$-1 = e^{i\pi}$$

العمليات على الشكل المثلثي

① الضرب:

$$Z_1 . Z_2 = r_1 . r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

نضرب الطويلات ونجمع الزوايا

مثال

.....

.....

.....

.....

.....

② القسمة:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

نقسم الطويلات ونطرح الزوايا

مثال

.....

.....

.....

.....

.....

③ القوة:

$$Z^n = [r(\cos\theta + i \sin\theta)]^n$$
$$Z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

مثال

.....

.....

.....

.....

.....

دستور دوموافر:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

④ المرافق:

$$\overline{(\cos\theta + i \sin\theta)}$$
$$= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

مثال

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال (1)

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد الآتية:

-1 $Z = (1 - i)^2$

.....

.....

.....

$$Z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$$ -2

$$Z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$$ -3

$$Z = \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^2}{(1+i)^3}$$ -4

-5 $Z = -3i\, e^{\frac{i\pi}{3}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

-6 $Z = (1-\sqrt{2})e^{\frac{i\pi}{5}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

-7 $Z = i\, e^{\frac{i\pi}{7}}$

.....

.....

.....

.....

.....

فائدة هامة: تفيد العمليات السابقة في إيجاد النسب المثلثية لزوايا غير شهيرة:

يرد سؤالٌ يطلب منها إيجاد عدد عقدي ما بالشكلين الجبري والمثلثي (وتكون الزاوية غير شهيرة)

فهنا بعد الحصول على الشكل الجبري و المثلثي نتبع الخطوات التالية:

1- نضع $Z_{\text{الجبري}} = Z_{\text{المثلثي}}$

2- نقسم الطرفين على r

$$Cos\theta + i\, Sin\theta = \frac{x}{r} + i\frac{y}{r}$$

3- نطابق الجزء الحقيقي مع الحقيقي و التخيلي مع التخيلي فنصل إلى :

$$Cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$Sin\theta = \frac{y}{r}$$

مثال (1)

نعطى العددين:

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} \;\&\; Z_2 = 1-i$$

1- اكتب بالشكل المثلثي

$$Z_1\ ,\ Z_2\ ,\frac{Z_1}{Z_2}$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2- اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الجبري

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

نتأمل العددين العقديين:

$$Z_1 = \sqrt{3} + 3i \quad , \quad Z_2 = 1 + i$$

1- اكتب Z_1 و Z_2 و $Z_1.Z_2$ بالشكل المثلثي

2- اكتب $Z_1.Z_2$ بالشكل المثلثي

3- استنتج $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

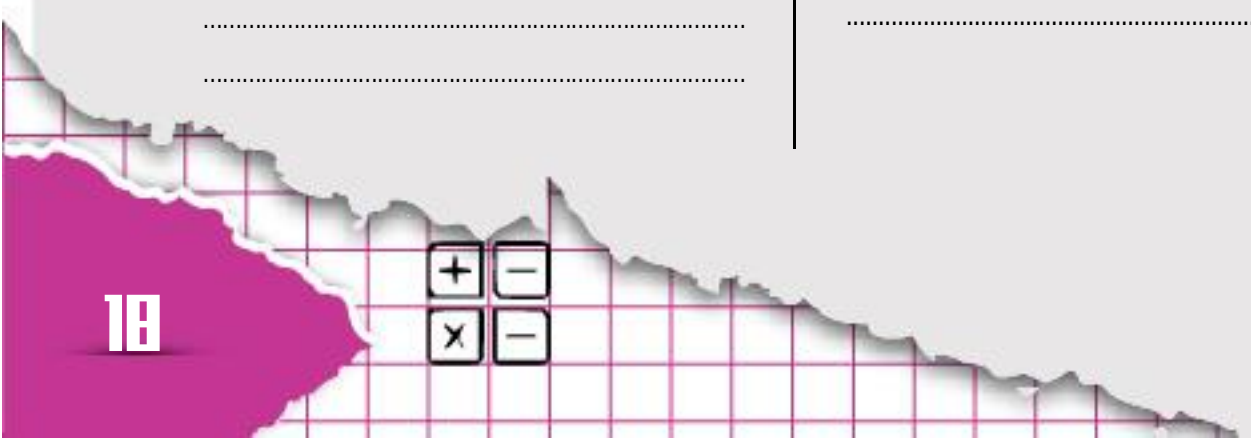
.....

.....

.....

.....

.....



مثال (3)

نتأمل النقطتين A و B التين يمثلهما العددان

$a = 2$ و $b = 2.e^{3i\pi/4}$. وليكن I منتصف $[AB]$.

1- a- ارسم شكلاً مناسباً, وبين طبيعة المثلث

OAB.

b- استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.

2- a- احسب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

b- استنتج كلاً من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أشكال مثلثية ناقصة

الشكل الأول:

$$Z = r(cos\theta - isin\theta)$$

نلاحظ أن المشكلة هنا أنّ إشارة الساين سالبة

فلدينا الكوساين موجب و الساين سالب و هذا يدّل على أننا في الربع الرابع $(-\theta)$

لذلك نصلح الشكل باستبدال الزاوية بـ $-\theta$

$$Z = r\big(\cos(-\theta) + isin(-\theta)\big)$$

الشكل الثاني:

$$Z = r(-\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

نلاحظ أن المشكلة هنا أن الكوساين سالب

فلدينا الكوساين سالب و الساين موجب و هذا يوافق الربع الثاني $(\pi - \theta)$ لذلك نستبدل الزاوية بـ $\pi - \theta$

$$Z = r\big(\cos(\pi - \theta) + isin(\pi - \theta)\big)$$

الشكل الثالث:

$$Z = r(-cos\theta - i\,sin\theta) = -r(cos\theta + isin\theta)$$

نلاحظ أن المشكلة هنا : الساين و الكوساين سالبين

وهذا يوافق الربع الثالث $(\pi + \theta)$

لذلك نستبدل الزاوية بـ $\pi + \theta$

$$Z = r\big(\cos(\pi + \theta) + isin(\pi + \theta)\big)$$

الشكل الرابع:

$$Z = r(sin\theta + icos\theta)$$

هنا نلاحظ أن الساين حلّ محل الكوساين و بالعكس

و التحويل الذي يجعل الساين كوساين و يجعل الكوساين ساين هو طرح الزاوية من $\frac{\pi}{2}$

لذلك نستبدل الزاوية بـ $\frac{\pi}{2} - \theta$

$$Z = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

التمرين (1)

في كلٍ من الحالات الآتية اكتب الشكل المثلثي للعدد العقدي z

1) $z = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

2) $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3) $z = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4) $z = 3\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2$

5) $z = \left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{12}$

التمرين (2)

1) نضع

$Z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $Z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $Z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

جد الشكل الأسي للأعداد الآتية:

-1 $Z_1 . Z_2$

-2 $\frac{Z_1}{Z_2}$

$Z_1.Z_2.Z_3$ -3

.....

.....

.....

.....

.....

2) اكتب بالشكل الأسي الأعداد التالية:

$Z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$ -1

.....

.....

.....

.....

.....

$Z_2 = (1+i)\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ -2

.....

.....

.....

.....

.....

$Z_3 = \frac{6}{(1+i)}$ -3

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$Z_4 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$ -4

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$Z_5 = \left(1 - \sqrt{2}\right)e^{\left(i\frac{\pi}{4}\right)}$ -5

.....

.....

.....

.....

.....

$Z_6 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$ -6

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$Z_7 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$ -7

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$Z_8 = \frac{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^5}{(1-i)^4}$ -8

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$Z_9 = \underbrace{-12}_{r \text{ أنا لست}} \; e^{i\frac{\pi}{4}}$ -9

.....

.....

.....

.....

.....

$Z_{10} = \underbrace{3i}_{r \text{ أنا لست}} \; e^{i\frac{\pi}{3}}$ -10

.....

.....

.....

.....

.....

3) نضع $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي من الخواص التالية صحيحة

1- $|Z| = 1$

2- $Z = -(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$

3- $arg\, Z = -\frac{\pi}{12}$

4- $Z = e^{i\frac{13\pi}{12}}$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

طريقة ثانية لحل الطلب الأول:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

إضافي : بفرض u عدد عقدي ما . أثبت أن العدد:

$$W = i\frac{u - Z\bar{u}}{1 - Z}$$

تخيلي بحت

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

دستورا أويلر:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

نتائج هامة:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

التمرين (1)

بسط كتابة العدد العقدي

$$Z = \frac{1 + cos\,x - i\,sin\,x}{1 + cos\,x + i\,sin\,x}$$

موضحاً قيم x التي يكون عندها Z موجوداً

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (2)

اكتب بالشكل الجبري

$$Z = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{i2x}$$

$$Z = \cos(2x) + i \sin(2x)$$

كيف نكتب العدد $Z = 1 + e^{i\theta}$ بالشكل الأسي

1- نخرج $e^{i(\text{نصف الزاوية})}$

2- يصبح لدينا:

$$Z = e^{i(\text{نصف الزاوية})} \left[\frac{1}{e^{i(\text{نصف الزاوية})}} + e^{i(\text{نصف الزاوية})} \right]$$

$$Z = e^{i(\text{نصف الزواية})} \left[e^{-i(\text{نصف الزاوية})} + e^{i(\text{نصف الزاوية})} \right]$$

فالشكل يصبح :

$$Z = e^{\frac{i\theta}{2}} \underbrace{\left[e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}} \right]}_{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$Z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}$$

مثال (1)

اكتب العدد $Z = 1 + e^{\frac{i\pi}{3}}$ بالشكل الأسي

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

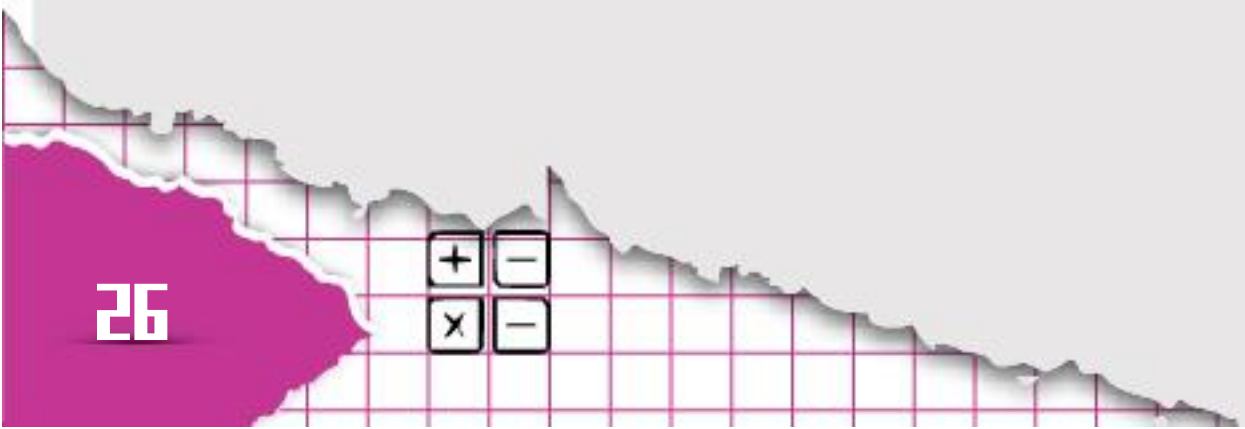
مثال (2)

اكتب $Z = 1 + e^{\frac{i2\pi}{5}}$ بالشكل الأسي

.....

.....

.....



بنوك الأئمة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

ليكن لدينا العددان العقديان: $Z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $Z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ اوجد:

-1 $|Z_1| = ?$:

a	$\lvert Z_1\rvert = 2$	b	$\lvert Z_1\rvert = 0$	c	$\lvert Z_1\rvert = 1$	d	غير ذلك

-2 $|Z_2| = ?$:

a	$\lvert Z_2\rvert = 1$	b	$\lvert Z_2\rvert = -3$	c	$\lvert Z_2\rvert = 3$	d	$\lvert Z_2\rvert = 2$

-3 $\bar{Z}_1 = ?$:

a	$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	b	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	c	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	d	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

-4 $\bar{Z}_2 = ?$:

a	$-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	b	$3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	c	$3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	d	غير ذلك

-5 $\arg(Z_2) = ?$:

a	$-\frac{3\pi}{4}$	b	$\frac{\pi}{4}$	c	$-\frac{\pi}{4}$	d	$\frac{3\pi}{4}$

-6 $(Z_1)^7 = ?$:

a	$\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$	b	$7(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right))$	c	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$	d	$\cos\left(\frac{\pi}{21}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{21}\right)$

-7 $(Z_2)^2 = ?$:

a	$27\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	b	$27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{12}\right)\right)$
c	$9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	d	$27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

-8 $:Z_1.Z_2 =?$

a	$3\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$	b	$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
c	$3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	d	$3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

-9 $:\frac{Z_1}{Z_2} =?$

a	$-\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	b	$\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$
c	$-\frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	d	$\frac{1}{3}(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right))$

-10 $:\frac{Z_2}{Z_1} =?$

a	$-3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	b	$3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$
c	$3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	d	$-3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

اكتب بالشكل الجبري:

-11 $Z=\frac{1}{2-i}$

a	$-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$	b	$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$	c	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$	d	$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

-12 $Z=(1+i)e^{i\frac{\pi}{4}}$

a	$2+2i$	b	$\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	c	$\sqrt{2}i$	d	$2-2i$

اكتب بالشكل المثلثي:

-13 $Z=\sqrt{3}-3$

a	$3\cos(\pi)$ $+i\sin(\pi)$	b	$\sqrt{3}\cos(\pi)$ $+i\sin(\pi)$	c	$(3-\sqrt{3})(\cos\pi$ $+i\sin\pi)$	d	غير ذلك

-14 $Z=-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

a	$2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$	b	$2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$
c	$2\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$	d	$2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

-15 $Z=\left(\frac{3i-1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right)$

a	$\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$	b	$\cos(3\pi)+i\sin(3\pi)$
c	$\cos(\pi)+i\sin(\pi)$	d	$(a\ ,C)$

اكتب بالشكل الاسي كلا مما يأتي:

-16 $Z=(1-\sqrt{2})\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$(\sqrt{2}-\sqrt{3})e^{i\frac{4\pi}{3}}$	b	$(\sqrt{2}-1)e^{i\frac{4\pi}{3}}$	a
$(\sqrt{2}+1)e^{i\frac{4\pi}{3}}$	d	$(1-\sqrt{2})e^{i\frac{4\pi}{3}}$	c

-17 $Z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$

$32e^{i\frac{6\pi}{4}}$	d	$32e^{i\frac{5\pi}{3}}$	c	$32e^{i\frac{4\pi}{3}}$	b	$32e^{-i\frac{4\pi}{3}}$	a

-18 $Z=\left(1+\sqrt{3}i\right)^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$(a\ ,b)$	d	$16e^{i\frac{5\pi}{3}}$	c	$16e^{i\frac{8\pi}{3}}$	b	$16e^{i\frac{2\pi}{3}}$	a

إن العبارة الآتية بالشكل الجبري:

-19 $Z=(1+i)^{2016}$

$(a\ ,b)$	d	$Z=2^{1008}$	c	$Z=2i^{1008}$	b	$Z=-2^{1008}$	a

إن العبارة الآتية بالشكل المثلثي:

-20 $Z=\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right).2(cos\frac{\pi}{4}-isin\frac{\pi}{4})$

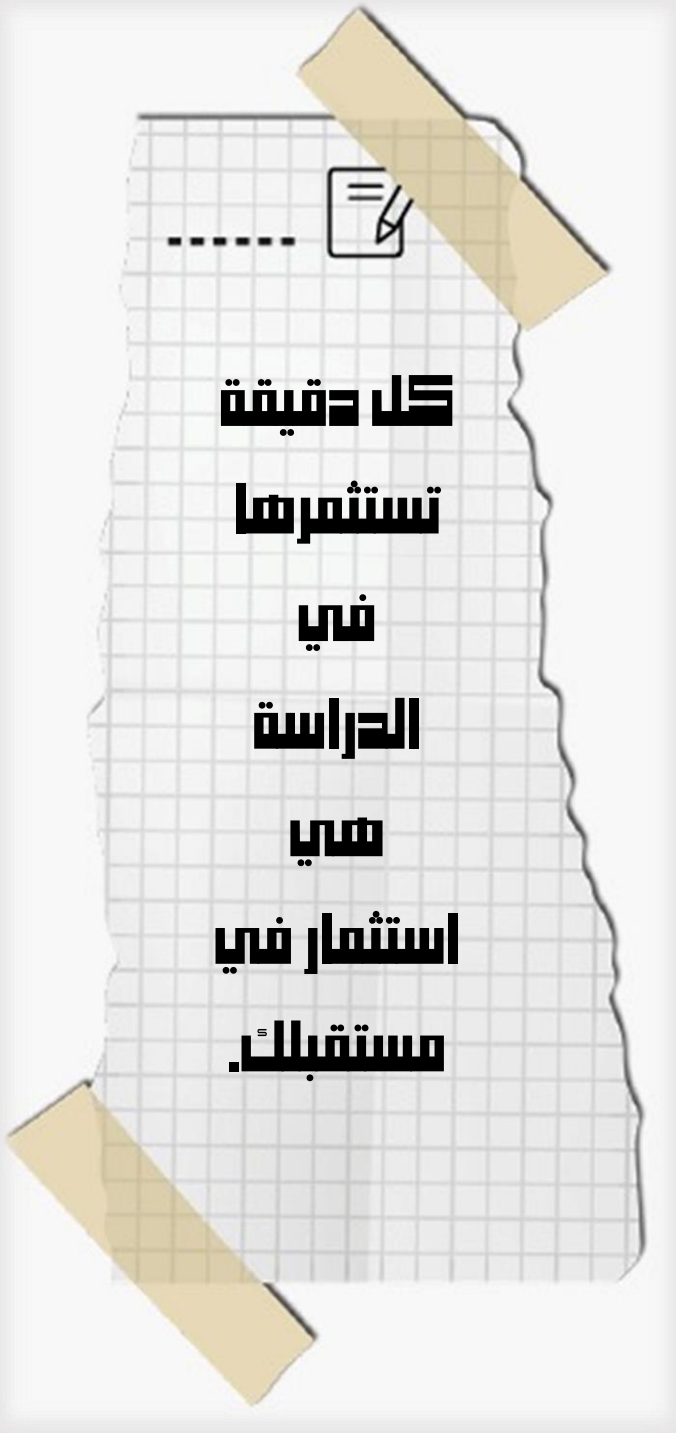
$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)$	b	$12\left(\cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)$	a
$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)$	d	$2\left(\cos\frac{\pi}{12}+isin\frac{\pi}{12}\right)$	c

B	11	C	1
C	12	C	2
C	13	A	3
D	14	C	4
A	15	C	5
A	16	A	6
A	17	D	7
D	18	A	8
C	19	B	9
C	20	C	10

3

الدرس الثالث

المعادلات الحقدية



المعادلات من الدرجة الأولى

النوع الأول: معادلات في z فقط:

نعزل Z

النوع الثاني: معادلات في $\overline{Z}$ فقط:

1- نأخذ مرافق للطرفين

2- نعزل Z

مثال

حل المعادلة $iZ + 1 = 2i$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

النوع الثالث: معادلات في Z و $\overline{Z}$:

1- نفرض $Z = x + yi \Leftarrow \overline{Z} = x - yi$

2- نعوض ونكتب الطرفين بالشكل الجبري

3- حقيقي = حقيقي

تخيلي = تخيلي

مثال

حل المعادلات التالية:

1) $Z - 2\overline{Z} = 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $2iZ + \overline{Z} = 3 + 3i$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المعادلات من الدرجة الثانية

النوع الأول: المعادلات من الشكل:

$$Z^2 = -k^2$$

عندئذٍ نضع $i^2 = -1$

$$\Rightarrow Z^2 = i^2 k^2$$

$$\Rightarrow Z = ki \ \ or \ \ Z = -ki$$

مثال

حل المعادلة $Z^2 = -9$

.....

.....

.....

.....

.....

مثال

حل المعادلة $Z^2 = -2$

.....

.....

.....

.....

.....

طريقة ثانية:

.....

.....

.....

.....

.....

النوع الثاني: المعادلات من الشكل

$$Z^2 = a + ib$$

1- نفرض $Z = x + iy$

2- نضع المعادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \ldots ① \\ x^2 - y^2 = a \quad \ldots ② \\ 2xy = b \quad \ldots ③ \end{cases}$$

3- نجمع ① و ② فنحسب x_1 و x_2

4- نطرح ① و ② فنحسب y_1 و y_2

5- من المعادلة ③ نميز حالتين:

أ- $2xy = b > 0$ فنأخذ x وy من نفس الإشارة ونضعها بالشكل الجبري

ب- $2xy = b < 0$ فنأخذ x وy من إشارتين متعاكستين ونضعها بالشكل الجبري

التمرين (1)

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

1)

$$Z^2 = 3 + 4i$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$Z^2 + 7 + 24i = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظة:

قد يأتي السؤال بصيغة " أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $w = a + ib$ "فنحل كالآتي:

أولاً: نصطنع المعادلة $Z^2 = a + ib$

ثانياً: نحلها مثل الطريقة السابقة

مثال (1)

أوجد الجذران التربيعيان للعدد i

الحل

مثال (2)

أوجد الجذران التربيعيان للعدد $W = 4 + 4i$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

النوع الثالث: المعادلاتفي Z و Z^2 :

1) نخرج Z عامل مشترك

2) إما / أو

مثال (1)

أوجد جذر المعادلة

$$2iZ + Z^2 = 0$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

النوع الرابع: المعادلات من الشكل

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

1) نحسب المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

2) نميز الحالات:

أ- حالة $\Delta > 0$:

للمعادلة حلان

$$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب- حالة $\Delta = 0$:

للمعادلة حل وحيد :

$$Z = -\frac{b}{2a}$$

ت- حالة $\Delta < 0$: أي $\Delta = -k^2$

عندها للمعادلة حلان عقديان

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ث- حالة $\Delta = a + ib$ (عدد عقدي) :

عندئذٍ نفرض $w = x + iy$ هو الجذر

التربيعي لـΔ عندها

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 - y^2 = a$$

$$2xy = b$$

ونوجد الحلول فنحصل على جذري

المميز Δ :

$$w_1 , w_2$$

$$Z_1 = \frac{-b + w_1}{2a}$$

$$Z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$$

مثال (1)

حل المعادلة:

$$Z^2 + Z + 1 = 0$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

اكتب حلول المعادلة

$$(Z^2 + 3\sqrt{3}Z + 9)(Z^2 - 3\sqrt{3}Z + 9) = 0$$

بالشكل الأسي

الحل

التمرين (1)

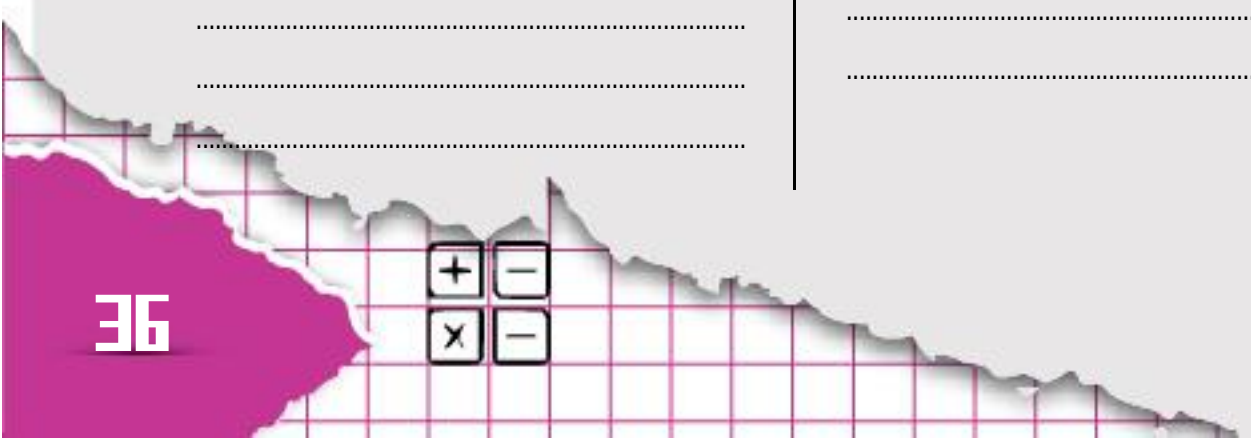
حل في C المعادلات الآتية:

① $Z^2 + (1 + 4i)Z - 5 - i = 0$

$2iZ^2 + (3+7i)Z + 4 + 2i = 0$ ②

ملاحظة: عند وجود i بالمقام يمكن أن نرفعها إلى البسط ونضرب ب(-1) أي

$$\frac{\text{عدد}}{i} = -i(\text{عدد})$$



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

③ $Z^2 + (1 + 8i)Z - 17 + i = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

خواص جذور المعادلة من الدرجة الثانية

إذا كانت المعادلة

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

وكان Z_1 و Z_2 حلول هذه المعادلة، عندئذٍ:

$$Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$$

$$Z_1 . Z_2 = \frac{c}{a}$$

③ إذا كانت المعاملات a و b و c حقيقية فإن Z_1 و Z_2 مترافقان أي

$$Z_1 = \overline{Z_2}$$

التمرين (2)

جد عددين عقديين q و p كي تقبل المعادلة $Z^2 + pZ + q = 0$ العددين $1 + 2i$ و $3 - 5i$ جذرين لها.

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

التمرين (3)

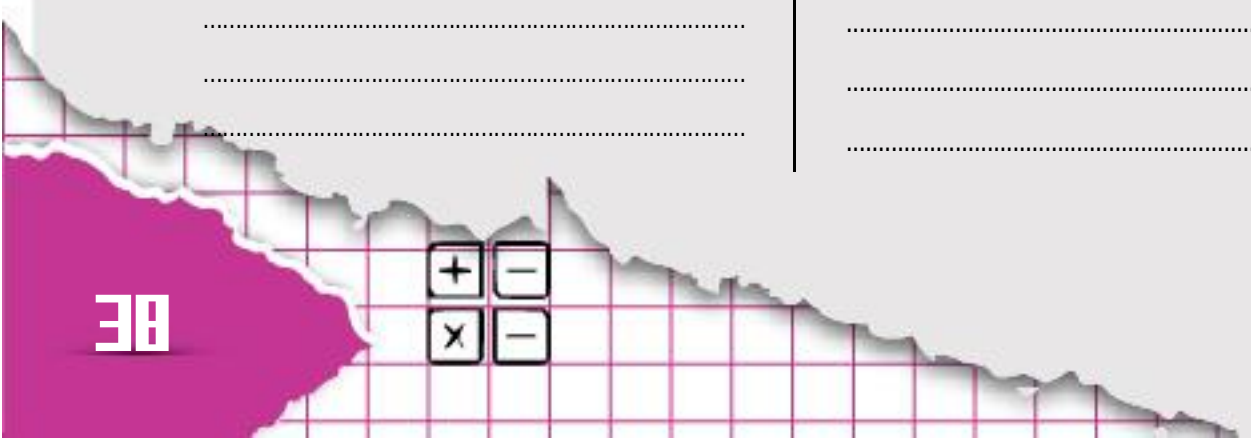
حل المعادلات الآتية:

① $Z^2 - 2(1+\sqrt{2})Z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

② $Z^2 - 2\cos\theta\, Z + 1 = 0$

③ $Z^2 - 2Z + 3 = 0$

④ $Z^2 - 5Z + 9 = 0$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

⑤ $2Z^2 - 6Z + 5 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (4)

احسب الجداء

$(Z^2 + 2Z - 3)(Z^2 + 2Z + 5)$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z - 15 = 0$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (5)

نتأمل كثير الحدود:

$$P(Z) = Z^4 - 19Z^2 + 52Z - 40$$

1. عين عددين حقيقيين a و b يحققان أن

$$P(Z) = (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + 4Z + 2a)$$

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$

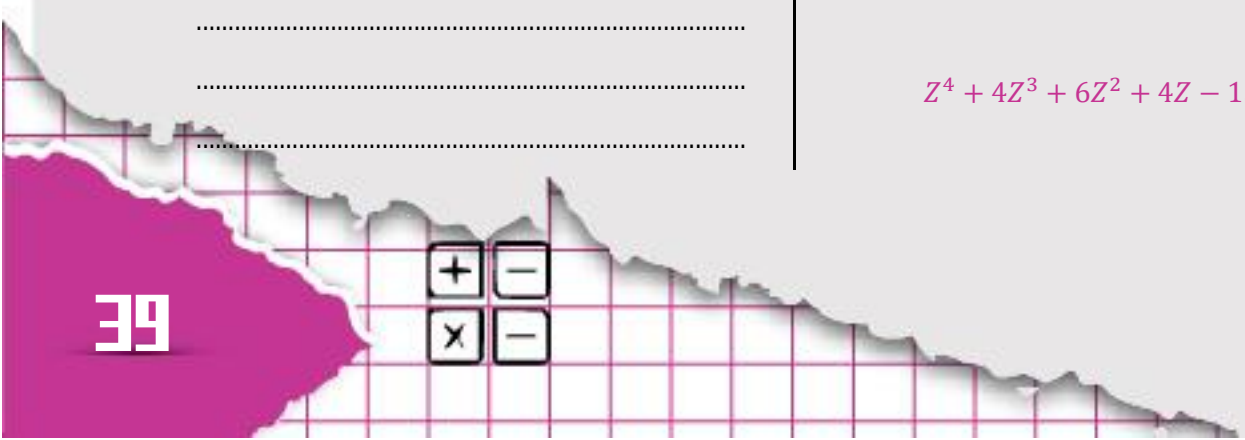
الحل

.....

.....

.....

.....



المعادلات من الدرجة الثالثة فما فوق

① نبحث عن حلول المعادلة بالتجريب أو من طلب سابق وليكن w

② نميز حالتين:

أ- إذا كان w حقيقي نقسم المعادلة على $Z-w$ فنحصب على معادلة من الشكل

$$\underbrace{(Z-w)}\quad \underbrace{Q(Z)}\quad =0$$

ناتج القسمة المقسوم عليه

ثم نستخدم خاصة الجداء الصفري

ب- إذا كان $Z = w$ تخيلي و **الأمثال حقيقية**

عندئذٍ $Z^2 = w^2$ نقسم على $Z^2 - w^2$

فنحصل على معادلة من الشكل:

$$(Z^2 - w^2)Q(Z)$$

ثم نستفيد من خاصة الجداء الصفري

مثال (1)

لتكن المعادلة:

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = 0$$

1. أثبت أن $Z = -1$ حل للمعادلة
2. اكتب المعادلة بالشكل:
$(Z + 1)Q(Z) = 0$
3. أوجد حلول هذه المعادلة

الحل

إضافي: لتكن A , B , C نقاط المستوى التي تمثل حلول المعادلة السابقة

أثبت أن ABC مثلث متساوي الأضلاع

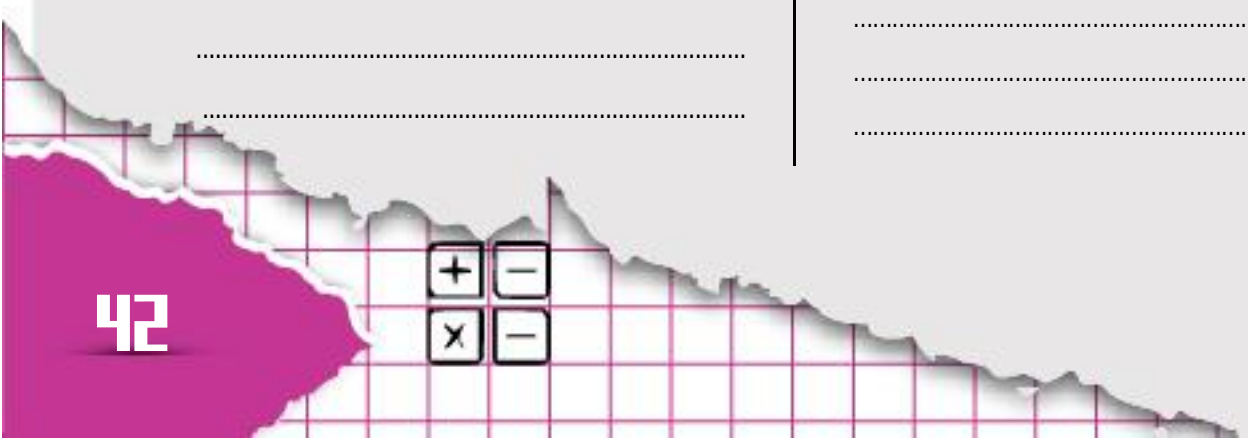
مثال (2)

$$Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63 = 0$$

1 أثبت أن $Z = i\sqrt{3}$ حل للمعادلة

2 أوجد الحلول الأربعة للمعادلة

الحل



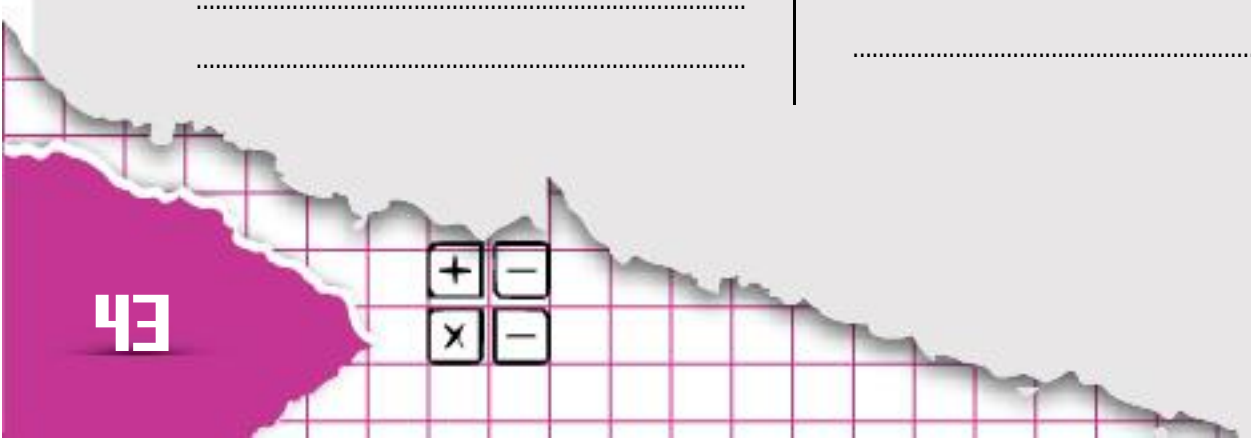
التمرين (1)

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$Z^3 - (3+4i)Z^2 - 6(3-2i)Z + 72i = 0$$

إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً

الحل



.....

.....

النوع الأخير: جملة معادلتين مجهولين:

مثال (1)

$$\begin{cases} 3Z + Z' = 5 + 2i \\ -Z + Z' = 1 - 2i \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

$$\begin{cases} 2iZ + Z' = 2i \\ 3Z - iZ' = 1 \end{cases}$$

ويتم الحل بالحذف بالجمع أو بالتعويض

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مسائل وتمرينات

❶ لتكن النقاط A و B و C و D نقاطاً تمثل الأعداد العقدية :

$a = 1$ و $b = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}$

① اكتب c بالشكل الأسي و d بالشكل الجبري

② وضع النقاط A و B و C و D في مستوٍ مزود بمعلم متجانس ثم أثبت أن $OABC$ معين

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

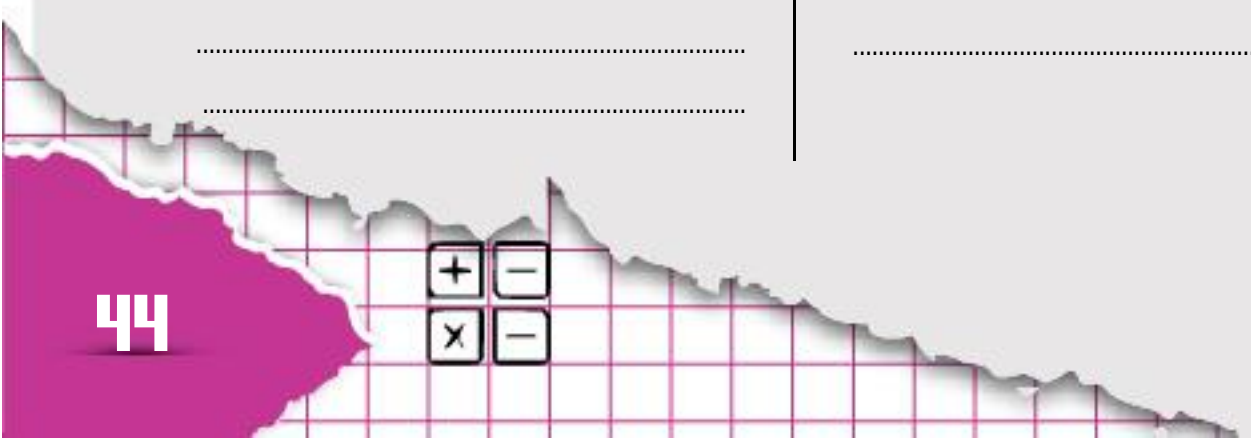
.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❷ ليكن Z و Z' عددين عقديين أثبت أ، :

$$|Z+Z'|^2+|Z-Z'|^2=2|Z|^2+2|Z'|^2$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❸ ليكن $\alpha=e^{2i\frac{\pi}{5}}$ نضع

$B=\alpha^2+\alpha^3$ $\quad$ $A=\alpha+\alpha^4$

① أثبت أن $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$

واستنتج أن A,B هما جذرا المعادلة x^2+x-

$1=0$ ... $(*)$

② عبر عن A بدلالة $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

③ حل المعادلة $(*)$ واستنتج قيمة $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

بنوك الأئمة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي , حل أو أحد حلول المعادلة في كل مما يلي هو:

-1 $3Z-2=6Z+1$

2	d	-1	c	3	b	1	a

-2 $2Z+i\bar{Z}=5+4i$

$2-i$	d	$2+i$	c	$3-i$	b	$3+i$	a

-3 $\frac{\bar{z}-3}{\bar{z}+3}=i$

$3i$	d	3	c	$-4i$	b	$-3i$	a

-4 $7Z^2=-3iZ$

$\begin{cases}0\\-\frac{7}{3}i\end{cases}$	d	$\begin{cases}0\\\frac{3}{7}i\end{cases}$	c	$\begin{cases}3\\-\frac{2}{7}i\end{cases}$	b	$\begin{cases}0\\-\frac{3}{7}i\end{cases}$	a

-5 $-7\bar{Z}=-7+7i$

$-1-i$	d	$1+i$	c	$1-i$	b	$7+7i$	a

-6 $4Z^2-100=0$

$\begin{cases}26\\-26\end{cases}$	d	$\begin{cases}5\\-5\end{cases}$	c	$\begin{cases}2\\-2\end{cases}$	b	$\begin{cases}25\\-25\end{cases}$	a

-7 $Z^2-5=12i$

$\begin{cases}-3-2i\\3-2i\end{cases}$	d	$\begin{cases}3+2i\\-3-2i\end{cases}$	c	$\begin{cases}3+2i\\3-2i\end{cases}$	b	$\begin{cases}-3+2i\\3+2i\end{cases}$	a

-8 $iZ^2+Z+3+i=0$

$\begin{cases}1-i\\-2+i\end{cases}$	d	$\begin{cases}-1-i\\1+2i\end{cases}$	c	$\begin{cases}-1-i\\2-i\end{cases}$	b	$\begin{cases}1-i\\1+2i\end{cases}$	a

-9 $Z^2-(1+\sqrt{3})Z+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}$	d	$1+\sqrt{3}$	c	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	b	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$	a

-10 $(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)=0$

$\begin{cases}1-i\\1-\sqrt{3}i\\1+\sqrt{3}i\end{cases}$	d	$\begin{cases}1+i\\1-\sqrt{3}i\\1+\sqrt{3}i\end{cases}$	c	$\begin{cases}1+i\\-1-\sqrt{3}i\\-1+\sqrt{3}i\end{cases}$	b	$\begin{cases}1+i\\-1-\sqrt{3}i\\1+\sqrt{3}i\end{cases}$	a

-11 $(2-Z-Z^2)^3=0$

$\begin{cases}-1\\-2\end{cases}$	d	$\begin{cases}1\\2\end{cases}$	c	$\begin{cases}1\\-2\end{cases}$	b	$\begin{cases}-2\\-3\end{cases}$	a

-12 $Z^3=27i$

$\begin{cases}3e^{i\frac{\pi}{6}}\\3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\\3e^{i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$	d	$\begin{cases}3e^{-i\frac{\pi}{6}}\\3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\\3e^{-i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$	c	$\begin{cases}3e^{i\frac{\pi}{6}}\\3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\\3e^{i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$	b	$\begin{cases}3e^{-i\frac{\pi}{6}}\\3e^{i\frac{5\pi}{6}}\\3e^{-i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$	a

-13 ليكن u عددا عقديا لا يساوي الواحد وطويلته تساوي الواحد ان العدد $W=\frac{Z-u\bar{Z}}{i-iu}$

غير ذلك	d	حقيقي بحت	c	تخيلي بحت	b	حقيقي	a

-14 ان المقدار $|Z-Z'|^2+Z'\bar{Z}+Z\,\bar{Z}'$

$\|Z\|^2+\|Z'\|^2$ $-Z'\bar{Z}$	d	$\|Z'\|^2-\|Z\|^2$	c	$\|Z\|^2+\|Z'\|^2$	b	$\|Z\|^2-\|Z'\|^2$	a

-15 ان طويلة العدد $Z=sin\,\theta+icos\,\theta$ يساوي

4	d	1	c	12	b	2	a

-16 ان زاوية العدد $Z=cos\frac{\pi}{3}+icos\frac{\pi}{3}$ تساوي

$\frac{\pi}{12}$	d	$\frac{\pi}{6}$	c	$\frac{\pi}{3}$	b	$\frac{\pi}{4}$	a

-17 ان طويلة العدد $Z=cos\frac{\pi}{3}+icos\frac{\pi}{3}$ تساوي

2	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	c	$\sqrt{2}$	b	1	a

-18 بفرض w,z عددين عقدين طويلة كل منهما تساوي الواحد ويحققان ان $z.w\neq-1$ فان:

$$Z=\frac{z+w}{zw+1}$$

فان Z :

غير ذلك	d	تخيلي بحت	c	تخيلي	b	حقيقي	a

-19 إن المقدر $P(z)=5z^3-3z^2-z-1=0$ يكتب بالشكل:

$P(z)=(z-1)(5z^2-2z+1)$	b	$P(z)=(z-1)(5z^2+2z+1)$	a
$P(z)=(z+1)(5z^2+2z+3)$	d	$P(z)=(z+1)(5z^2+2z+1)$	c

-20 إن حلول المعادلة $P(z)=0$ هي:

$\{1\}$	b	$\left\{1,-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i,-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i\right\}$	a
$\left\{1,\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i,-\frac{1}{10}+\frac{2}{5}i\right\}$	d	$\left\{1,-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i,-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right\}$	c

21-ليكن المقدار $P(z) = 2z^3 - 5z^2 + 3z - 2 = 0$, إن $P(2)$ يساوي:

0	d	1	c	i	b	$-2i$	a

22-إن $P(z)$ يكتب بالشكل:

$(z-2)(2z^2-z-1)$	b	$(z-2)(2z^2-z+1)$	a
$(z+2)(2z^2-z+1)$	d	$(z+2)(2z^2+z+1)$	c

23-إن عدد حلول المعادلة $P(z) = 0$ هو:

مستحيلة الحل	d	1	c	2	b	3	a

B	13	C	1
C	14	C	2
A	15	A	3
C	16	A	4
A	17	C	5
A	18	C	6
C	19	C	7
D	20	C	8
A	21	B	9
A	22	C	10
A	23	B	11
A	24	B	12

4

الدرس الرابع

تطبيقات الحتمية

درسنا سابقاً أن كل عدد عقدي $Z = x + iy$

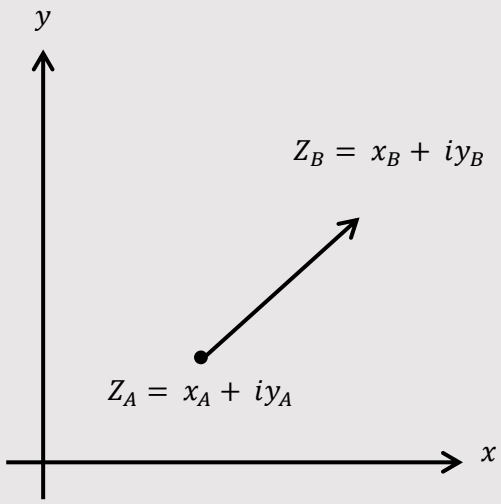
يمثل نقطة في المستوي $M(x\,,y)$

لذلك إذا كانت $A(x\,,y)$ نقطة فإننا نرمز للعدد العقدي الممثل لها

بأحد الرمزين:

$$a = x + iy \quad or \quad Z_A = x + iy$$

وعليه يمكن استخلاص التعاريف التالية:



- **العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$:**

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$$

أو $Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a$

- **العدد العقدي الممثل للنقطة I منتصف النقطة $[AB]$:**

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

أو $Z_I = \frac{a+b}{2}$

- **العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC :**

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

أو $Z_G = \frac{a+b+c}{3}$

- **المسافة بين نقطتين:**

$$AB = |Z_{\overrightarrow{AB}}| = |Z_B - Z_A|$$

- **شرط توازي شعاعين:**

يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متوازيان إذا تحقق أحد الشرطين:

① $Z_{\overrightarrow{AB}} = k.Z_{\overrightarrow{CD}}$

وهذا نفسه يكتب بالشكل:

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}} = k$$

وهذا نفسه يؤول إلى المساواة:

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C} = k$$

حيث $k \in \mathbb{R}$

② الزاوية بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ هي 0 أو π

ولكن كيف نحسب هذه الزاوية؟؟

- **الزوايا:**

نرمز للزاوية الموجهة التي تنقل حامل الشعاع $\vec{u}$

إلى حامل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بالرمز: $(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB})$

وهي تساوي:

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \underbrace{\arg(b-a)}$$

زاوية العدد العقدي

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a$$

تعميم:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$

التمرين (1)

نتأمل معلماً متجانساً $(o, \vec{u}, \vec{v})$ في المستوي العقدي :

والنقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$a = 6 - i$$

$$b = -6 + 3i$$

$$c = -18 + 7i$$

أثبت أن A و B و C على استقامة واحدة.

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

التمرين (2)

لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها

$$Z_A = -1 + i \ , Z_B = 2 + i \ , Z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

① وضع النقاط A و B و C في المستوي العقدي

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

② أوجد الأعداد العقدية الممثلة للأشعة $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

③ بين طبيعة المثلث ABC .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (3)

$$Z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$$

$$Z_B = 2(1 - i\sqrt{3})$$

① أثبت أن A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 4 .

② عين العدد العقدي الممثل للنقطة c التي تجعل 0 مركز ثقل المثلث ABC .

③ بين طبيعة المثلث ABC .

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

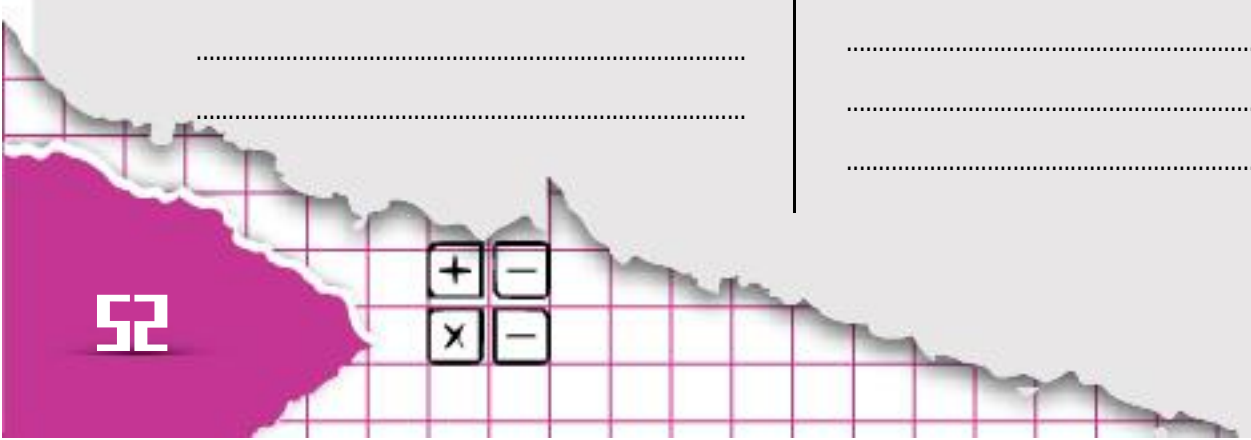
.....

.....

.....

.....

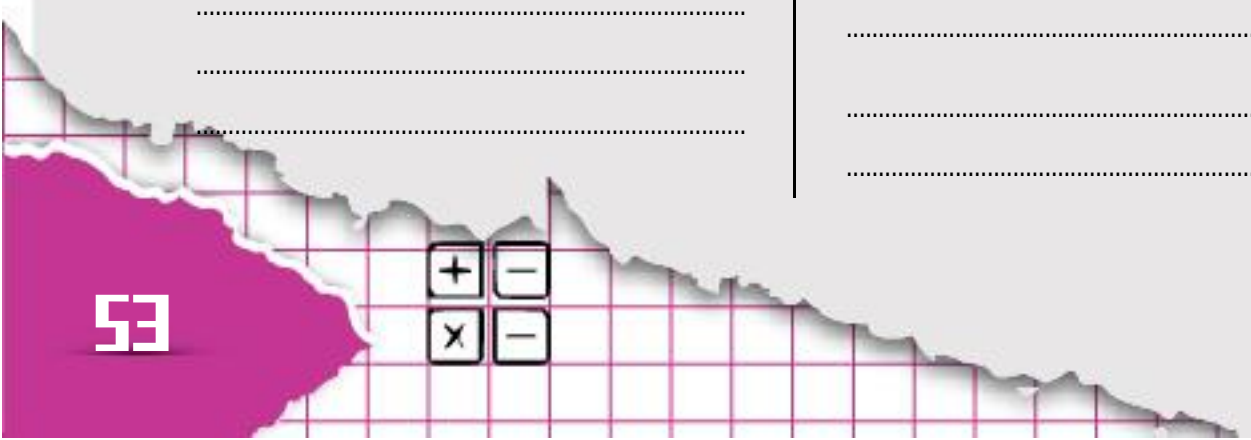
.....



مثال

ليكن A, B, C و M , P , N منتصفات

$[BC][AC][AB]$ أثبت للمثلثين مركز ثقل ذاته



التحويلات الهندسية للأعداد العقدية

أولاً: الانسحاب:

M' صورة النقطة M وفق انسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ ويكون قانونه:

$$z' = z + \alpha + i\beta$$

ثانياً: التناظر:

M' صورة النقطة M وفق تناظر مركزه $\Omega(w)$ ويكون قانونه:

$$z' - w = -(z - w)$$

ثالثاً: التحاكي:

M' صورة النقطة M وفق تحاكٍ مركزه $\Omega(w)$ ونسبته k فيكون قانونه:

$$z' - w = k(z - w)$$

ملاحظة: ماذا تستنتج بخصوص التناظر؟

رابعاً: الدوران:

M' صورة النقطة M وفق دوران مركزه $\Omega(w)$ وزاويته θ فيكون قانونه:

$$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$$

خامساً: التناظر المحوري الذي محوره ox:

M' نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل ويكون قانونه:

$$z' = \bar{z}$$

سادساً: التناظر المحوري الذي محوره oy:

M' نظيرة M بالنسبة لمحور التراتيب ويكون قانونه:

$$z' = -\bar{z}$$

مثال (1)

أوجد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة النقطة M وفق انسحاب T شعاعه $3\vec{u} - 4\vec{v}$ حيث $Z = 2 + 4i$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

ليكن $Z = 2 + 3i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M أوجد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر الذي مركزه $\Omega(5 - 2i)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3)

ليكن $Z = 3 + 5i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M , أوجد M' صورة النقطة M وفق التحاكي الذي مركزه $\Omega(3 - 2i)$ ونسبته -2

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (4)

ما هو التحويل الذي يقرن B بالنقطة A فيما يلي:

$$b - 1 = -3(a - 1)$$

B صورة A وفق تحاكٍ مركزه $\Omega(1)$ ونسبته $k = -3$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (5)

ليكن $Z = 3 + 5i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M , أوجد M' وفق الدوران الذي مركزه $\Omega(3 - 2i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{6}$

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (6)

ما هو التحويل الذي يقرن B بالنقطة A فيما يلي:

$$b - 1 = e^{\frac{i\pi}{2}}(a - 1)$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$b - 3 + 2i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(a - 3 + 2i)$$

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال (1)

لتكن النقطتان:

$$G(3-\sqrt{3}i)\ ,H(3+\sqrt{3}i)$$

وليكن R الدوران الذي مركزه O وتحقق $R(G)=H$

احسب $(\overrightarrow{OG}\ ,\overrightarrow{OH})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران .

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظات:

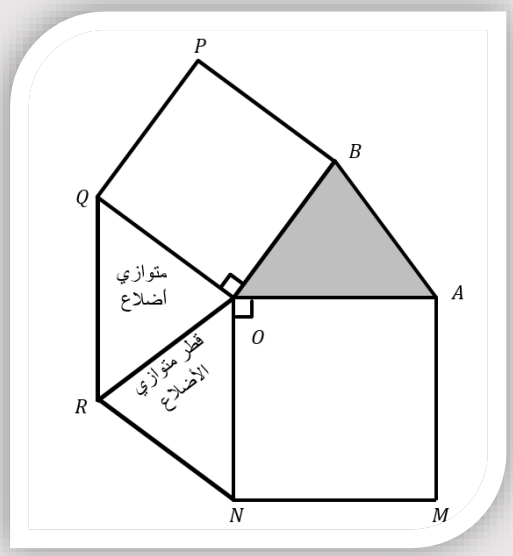
الدوران الموجب هو عكس عقارب الساعة.

الدوران السالب هو مع عقارب الساعة.

أي ضلعين متساويين بالطول ومشتركين بالرأس يشكلان دوران مركزه هذا الرأس.

المسألة (1)

نتأمل مثلثاً OAB , ننشئ خارج هذا المثلث المربعين $OBPQ\ ,OAMN$ و متوازي الأضلاع $NOQR$.نهدف في هذا التمرين إلى إثبات أن المستقيمين (OR) و (AB) متعامدان و أن $OR=AB$ و ذلك باستعمال الأعداد العقدية ' لنختر معلماً متجانساً مباشراً $(o,\vec{u},\vec{v})$ و ليكن a,b العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين A,B



$OR \perp AB$?

$OR = AB$?

① صورة النقطة N وفق دوران ربع دورة مباشرة حول O ؟

.....

.....

.....

.....

.....

☺صورة النقطة B وفق دوران ربع دورة مباشرة حول O ؟

.....

.....

.....

.....

.....

أثبت أن $\begin{cases} n = -ia \\ q = ib \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

② - عبر عن الشعاع $\overrightarrow{OR}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{ON}$ و $\overrightarrow{OQ}$:

.....

.....

.....

.....

.....

عبر عن العدد العقدي r بدلالة a و b :

.....

.....

.....

.....

.....

من هو العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

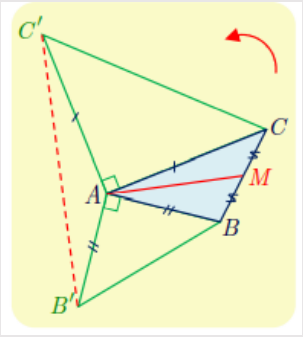
.....

.....

المسألة (2)

نتأمل في المستوي ABC مثلثاً مباشر التوجيه كيفياً و لتكن M منتصف $[AC]$ و ليكن $AB'B$ و ACC' مثلثين قائمين و متساويي الساقين مباشرين , أثبت أن المتوسط (AM) في المثلث ABC هو ارتفاع في المثلث $AB'B$ و أن $B'C' = 2AM$

الطلب: $AM \perp B'C'$ و $B'C' = 2AM$



.....

.....

.....

.....

.....

① عبر بدلالة b و c عن الأعداد b' و c' و m

c' هي صورة c وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

② احسب الزوية $(AM, B'C')$ واستنتج المطلوب:

.....

.....

.....

.....

.....

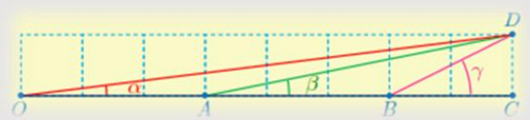
.....

.....

.....

المسألة (3)

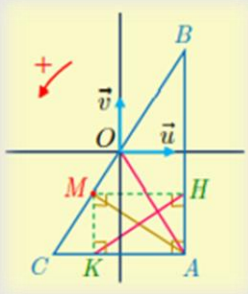
تأمل الشكل واحسب المجموع



$\alpha + \beta + \gamma$

الحل

المسألة (4) مسألة تعامد



تأمل في المستوي الموجه، مثلثاً مباشراً ABC قائماً في A. النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC). بالترتيب, Hو K هما المسقطان القائمان للنقطة M على (AB) و على (AC) بالترتيب.

نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (OA) و (HK).

نختار معلماً متجانساً مباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ بحيث O تقع في منتصف $[BC]$ ويكون $\vec{u}$ عمودياً على (AB) و $\vec{v}$ شعاعاً موجهاً للمستقيم (AB). ونرمز إلى الأعداد العقدية الممثلة a,b,c,h,k,m للنقاط A,B,C,H,K,M. والمطلوب:

1- علل ما يأتي: $a=\overline{b}$ و $a-m=\overline{h-k}$.

2- a- أثبت أنه إما $arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=+\frac{\pi}{2}$ أو $arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=-\frac{\pi}{2}$

b- استنتج أن $arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=-\frac{\pi}{2}$ أو $arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=+\frac{\pi}{2}$ ثم استنتج المطلوب.

الحل

....

....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تمرين دورة

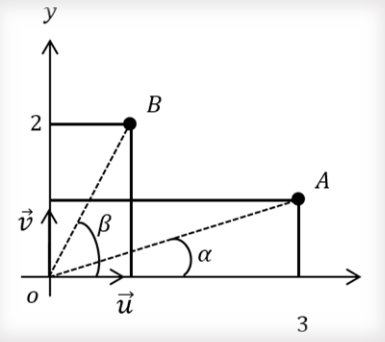
نتأمل في المستوي العقدي المزود

بالمعلم المتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$:

بفرض أن :

α القياس الأساسي للزاوية : $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$

و β القياس الأساسي للزاوية : $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$



المطلوب :

① اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين

Z_A و Z_B اللذين يمثلان النقطتين A و B

② اكتب العدد العقدي $\frac{Z_B}{Z_A}$ بالشكل الجبري

والشكل الأسي , ثم استنتج قيمة $\beta - \alpha$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المسألة (5)

نتأمل في المستوي الموجه الشكل المجاور.

المثلثات OAB و OCD و ADE مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة. النقاط I و J و K هي منتصفات أوتار هذه المثلثات. نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (AJ) و (IK). نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه O. ونرمز a و c إلى العددين العقديين الممثلين للنقطتين A و C.

1- a- عبر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثل النقاط B و D و E.

b- استنتج الأعداد العقدية z_I و z_J و z_K التي تمثل النقاط I و J و K.

2- أثبت أن $z_K - z_I = i(z_J - a)$ ثم استنتج الخواص المطلوبة.

5

الدرس الخامس

الكسر الذهبي

غالباً ما نستفيد من تشكيل الكسر الذهبي التالي:

$$Z = \frac{b-a}{c-a}$$

نحسب الكسر $\frac{b-a}{c-a}$ بالشكل الأسي ونميز الحالات الآتية:

1) إذا كان:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) إذا كان:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) إذا كان:

.....

.....

.....

.....

4) إذا كان:

.....

.....

.....

.....

5) إذا كان:

.....

.....

.....

.....

ملاحظة: غالباً نحسب arg من الشكل الأسي

حيث: $-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$ ، $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$

$-1 = e^{i\pi}$ ، $1 = e^{i0}$

التمرين (1)

$a = -2$ ، $b = 2$ ، $c = -1 + i$
، $d = 1 - 3i$

① أثبت أن BCD قائم وهل هو متساوي الساقين

② أعد الطلب من أجل ACD

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (2)

نتأمل معلماً متجانساً $(o, \vec{u}, \vec{v})$ في المستوي العقدي :

والنقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية :

$a = 6 - i$

$b = -6 + 3i$

$c = -18 + 7i$

أثبت أن A و B و C على استقامة واحدة .

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (3)

لتكن النقاط A, B, C, D التي تمثلها الأعداد :

$$a = 2 - 2i \, , b = -1 + 7i$$
$$c = 4 + 2i \, , d = -4 - 2i$$

1- لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد $w = -1 + 2i$ أثبت أن النقاط A, B, C, D تقع على دائرة واحدة مركزها Ω

2- ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$. احسب e ثم برهن أن $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

3- ماذا تستنتج .

الحل

التمرين (4)

لتكن النقاط A,B,C نقاط المستوي التي تمثل الاعداد العقدية:

$$a = 2 \quad , \quad b = 1 + i\sqrt{3}$$
$$c = -1 + i\sqrt{3}$$

أثبت أن $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (5)

نتأمل النقاط A,B,C التي تمثلها الأعداد

$$a = -1 \, , b = 2 + i\sqrt{3}$$
$$c = \bar{b} \quad , d = 3$$

و المطلوب :

1- ارسم النقاط A,B,C,D ثم احسب AB,AC,BC و استنتج طبيعة المثلث ABC

2- عين $arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)$ و استنتج طبيعة المثلث ACD

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المجموعات النقطية

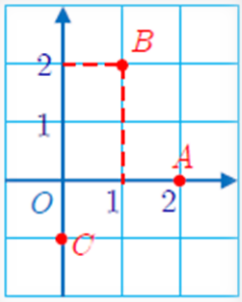
بنوك الأسئلة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

1- إذا كان $z = a + ib$ فإن الشكل الجبري للعدد $\frac{1}{z}$ هو:

a	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}i$	b	$\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{b}{a^2+b^2}$
c	$\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$	d	$\frac{a}{a^2-b^2}-i\frac{b}{a^2-b^2}$

- ليكن x عدداً عقدياً تمثله النقطة M في المستوي وليكن $z = 2 + x(1 + i)$



أجب عن الأسئلة:

2- إن الشكل الجبري للعدد z في حالة $M = A$ يساوي:

a	$z = 3$	b	$z = 2$	c	$z = 6 + i$	d	$z = 2 - i$

3- إن الشكل الجبري للعدد z في حالة $M = B$ يساوي:

a	$z = 3 + 2i$	b	$z = -3 - 2i$	c	$z = -3 + 2i$	d	$z = 3 - 2i$

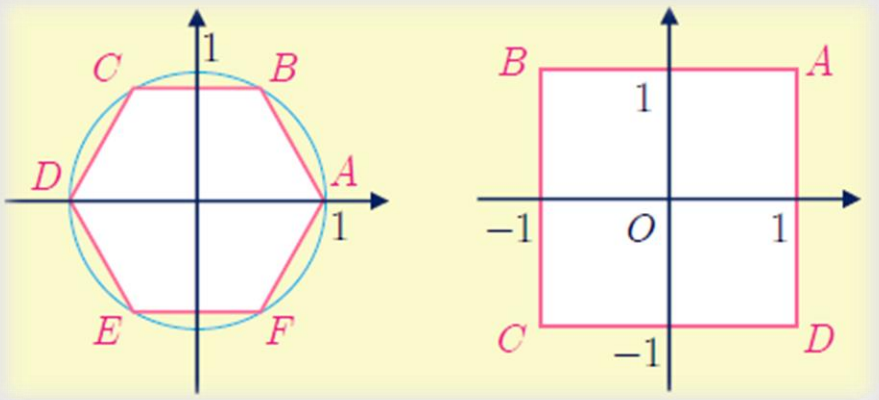
4- إن الشكل الجبري للعدد z في حالة $M = C$ يساوي:

a	$z = 1 + i$	b	$z = -3 - 2i$	c	$z = 6 + i$	d	$z = 1 - i$

5- الشكل الجبري للعدد $Z = \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$ هو:

$z = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$	d	$z = \frac{2}{3}i$	c	$z = \frac{2}{3}$	b	$z = \frac{2}{3} - 3i$	a

- في الشكل المجاور $ABCD$ مربع و $ABCDEF$ مسدس منتظم تمر من رؤوسه دائرة نصف قطرها 1



والمطلوب:

6- العدد العقدي الممثل للنقطة A في المربع

$Z_A = i$	d	$Z_A = 1 - i$	c	$Z_A = 1 + i$	b	$Z_A = 1$	a

7- العدد العقدي الممثل للنقطة B في المربع

$Z_B = 1 - i$	d	$Z_B = -1 + i$	c	$Z_B = 1 + i$	b	$Z_B = -1 - i$	a

8- العدد العقدي الممثل للنقطة C في المربع

$Z_C = -1 + i$	d	$Z_C = 1 - i$	c	$Z_C = 1$	b	$Z_C = -1 - i$	a

9- العدد العقدي الممثل للنقطة D في المربع

$Z_D = 1 - i$	d	$Z_D = 1 + i$	c	$Z_D = i$	b	$Z_D = 1$	a

10-العدد العقدي الممثل للنقطة A في المسدس

$Z_A = 1 - i$	d	$Z_A = 1 + i$	c	$Z_A = 1$	b	$Z_A = -1$	a

11-العدد العقدي الممثل للنقطة B في المسدس

$Z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}$	d	$Z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$	c	$Z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}$	b	$Z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$	a

12-العدد العقدي الممثل للنقطة C في المسدس

$Z_C = e^{i\frac{4\pi}{3}}$	d	$Z_C = e^{i2\pi}$	c	$Z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}$	b	$Z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}$	a

13-العدد العقدي الممثل للنقطة D في المسدس

a	$Z_D = e^{i\frac{\pi}{4}}$	b	$Z_D = e^{i\frac{\pi}{3}}$	c	$Z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}$	d	$Z_D = e^{i\pi}$

14-العدد العقدي الممثل للنقطة E في المسدس

a	$Z_E = e^{i\frac{8\pi}{3}}$	b	$Z_E = e^{i\frac{2\pi}{3}}$	c	$Z_E = e^{i\frac{4\pi}{3}}$	d	$Z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}$

15-مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $\arg(-iz) = -\frac{\pi}{3}$:

a	تمثل دائرة	b	تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل محذوف منه المبدأ	c	تمثل مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل	d	تمثل مستوي محوري لقطعة مستقيمة

16-مجموعة النقاط M(z) المحققة للشرط $|2z-4| = |2z-4+6i|$:

a	تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل محذوف منه المبدأ	b	تمثل محور لقطعة مستقيمة	c	تمثل مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل	d	تمثل دائرة

17-مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $\mathrm{Re}(2+\mathrm{i}+z) = 4$ تمثل

a	نقطة إحداثياتها $(1,4)$	b	المستقيم $x = 2$ الشاقولي	c	المستقيم $y = 2$ الأفقي	d	دائرة نصف قطرها 4

18-أي من الزوايا الآتية يكافئ الزاوية $-\frac{25\pi}{14}$

a	$\frac{4\pi}{14}$	b	$\frac{5\pi}{14}$	c	$\frac{3\pi}{14}$	d	$\frac{10\pi}{14}$

19-أي من الزوايا الآتية يكافئ الزاوية $\frac{7\pi}{6}$

a	$\frac{4\pi}{6}$	b	$-\frac{5\pi}{6}$	c	$\frac{5\pi}{6}$	d	$\frac{\pi}{6}$

20-العدد $(1+i)^{2016}$

a	طويلته تساوي $\sqrt{2}$	b	طويلته تساوي الواحد	c	تخيلي بحت	d	حقيقي

21-إن $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$ تساوي:

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$	d	$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB})$	c	$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$	b	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$	a

22-إذا كان $Z=\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}$ فأي من الخواص الآتية صحيحة

$Z=e^{\frac{i13\pi}{12}}$	d	$Z=e^{-\frac{\pi}{12}i}$	c	$Z=\bar{Z}$	b	$\|Z\|=\sqrt{2}$	a

23-بفرض $Z'=e^{ib}$, $Z=e^{ia}$ بكتابة الجداء ZZ′ بطريقتين مختلفتين يمكن استنتاج أن:

$Cos(a+b)=cosa\,cosb-sina\,sinb$	b	$\cos(a+b)=cosa\,sinb+cosb\,sina$	a
$\cos(a+b)=sina\,sinb+sina\,sinb$	d	$\cos(a+b)=cosa\,cosb+sina\,sinb$	c

24-العدد $Z=\frac{1+cosx-isinx}{1+cosx+isinx}$ يساوي:

e^{ix}	d	e^{-ix}	c	$\frac{1}{1+e^{ix}}$	b	$\frac{1}{1+e^{-ix}}$	a

25-ليكن $a=\alpha+i\beta$ عدداً عقدياً معطى وليكن $z=x+iy$ عدداً عقدياً يحقق أن:

$$z^2-a^2=\bar{z}^2-\bar{a}^2$$

عندئذٍ قيمة x.y تساوي:

$\frac{\beta}{\alpha}$	d	$\frac{\alpha}{\beta}$	c	$\alpha\beta$	b	$\alpha+\beta$	a

26-بفرض $t=\frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}$ عندئذٍ t تساوي:

i cotθ	d	tanθ	c	i tanθ	b	cotθ	a

27-بفرض z_1,z_2 الجذرين التربيعين للعدد $w=-3+4i$ عندئذٍ z_1+z_2 يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

28-بفرض z_1,z_2,z_3 الجذور التربيعية للعدد $z=4i$ عندئذٍ قيمة المجموع $z_1+z_2+z_3$ يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

29-بفرض $z_1,z_2z_3,z_4,\dots,z_n$ الجذور من المرتبة n لعدد z طويلته 1 عندئذٍ $z_1+z_2+z_3+,,,+z_n$يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

30-بفرض $z=e^{\frac{i2\pi}{11}}$ فإن قيمة المجموع: $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{10}$ يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

31-ليكن MPN مثلثاً ما والنقاط A, B, C منتصفات الأضلاع $[NP], [PM], [MN]$ على الترتيب

وبفرض g العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC و g' العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث MNP عندئذٍ:

a	$g' = g$	b	$g' = \bar{g}$	c	$g' = ig$	d	$g = i\,g'$

32-بفرض a, b, c. d, e الأعداد العقدية الممثلة للنقاط A, B, C, D, E فإذا كان:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

عندئذٍ يمكن استنتاج أن:

a	المستقيم (EA) منصف للزاوية $\widehat{DEC}$	b	المستقيم (EA) منصف للزاوية $\widehat{CAD}$
c	المستقيم (CA) منصف للزاوية $\widehat{ECD}$	d	المستقيم (DA) منصف للزاوية $\widehat{CDE}$

33-إذا كان العددان a, b العددان العقديان الممثلان للنقطتين A, B وكان $a - 1 = 2b - 2$

عندئذٍ التحويل الذي يقرن النقطة B بالنقطة A هو:

a	تحاكٍ نسبته 2	b	انسحاب شعاعه $-2\vec{j}$	c	تحاكٍ نسبته -2	d	تحاكٍ نسبته 1

34-إن الشكل المثلثي للعدد العقدي $w = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - isin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]^5$ هو:

a	$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$	b	$2(\cos(0) + isin(0))$	c	$2[\cos(\pi) + isin(\pi)]$	d	$-2[\cos(\pi) + isin(\pi)]$

35-إذا كان $z = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + icos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$ فإن $\arg(\bar{z})$:

a	$\frac{3\pi}{14}$	b	$-\frac{5\pi}{14}$	c	$\frac{2\pi}{3}$	d	$\frac{5\pi}{6}$

36-إذا كان $z = 1 + i$ فإن $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$:

a	-1	b	$-\frac{1}{2}$	c	1	d	$\frac{1}{2}$

37-الشكل الأسي للعدد العقدي $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ هو:

a	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$	b	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$	c	$2e^{i\frac{\pi}{12}}$	d	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

38-إذا كان $\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ فإن $z = \alpha + \alpha^4$ هو:

a	$2i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	b	$-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	c	$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	d	$-2i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

39-إذا كان $z = \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^4}$ فإن $|\bar{z}|$ تساوي

a	2	b	4	c	$6 + i$	d	$,4 + 3i$

40-إن العدد العقدي z الذي يحقق المعادلة $2iz + \bar{z} = 3 + 3i$ هو:

a	$= 1 - 2i$	b	$1 + 2i$	c	$1 + i$	d	$1 - i$

41-إذا كان العددين العقديين $1 + i$ و $1 - 2i$ جذرين المعادلة $z^2 + pz + q = 0$ فإن:

a	$p = i - 2$ $q = 3 + i$	b	$p = i - 2$ $q = 3 - i$	c	$p = i + 2$ $q = 3 - i$	d	$p = i + 2$ $q = 3 + i$

42-إذا كانت الأعداد العقدية b, c, d تمثل النقاط B, C, D وكان $\frac{d-b}{c-b} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ فإن المثلث BCD

a	متساوي الساقين	b	قائم في B ومتساوي الساقين	c	قائم في B فقط	d	متساوي الأضلاع

43-إن مجموعة نقاط المستوي العقدي $M(z)$ حيث $|z - 2 + 5i| = |z - 3 + 2i|$ تمثل:

a	دائرة	b	مستوري محوري لقطعة مستقيمة	c	محور لقطعة مستقيمة	d	مستقيم أفقي محذوف منه نقطة

44-يرتبط العددان العقديان a, b الممثلان لنقطتان A, B بالعلاقة $b = ia$ فإن التحويل الهندسي الذي

يقرن النقطة B بالنقطة A هو:

a	تحاكي	b	دوران	c	انسحاب	d	تناظر

45-إن طويلة العدد العقدي $\alpha = sinx + icosx$ تساوي:

a	e	b	$\sin^2 x$	c	1	d	$2\cos(x)$

46-إذا كان e^{ix}, e^{-ix} جذور المعادلة $z^2 + pz + q = 0$ عندئذٍ:

a	$p = -2\cos(x)$ $q = 1$	b	$p = 2$ $q = 3$	c	$p = \sin(x)$ $q = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$	d	$p = \frac{\cos(3x)}{2}$ $q = 2$

- ليكن العدد الحقيقي $\boldsymbol{\beta}$ وليكن $\boldsymbol{w} = \frac{\sqrt{3}+i\beta}{\beta - i\sqrt{3}}$ والمطلوب:

47-إن طويلة w تساوي:

a	4	b	2	c	1	d	5

48-العدد $Z = \frac{z - w\bar{z}}{1 - w}$.

a	تخيلي	b	حقيقي	c	معدوم	d	لا يساوي الصفر

49-بالشكل الجبري للعدد w هو:

a	$1 + i$	b	$1 - i$	c	i	d	$-i$

50- إن w^{12} يساوي:

i^{12}	d	i^4	c	1	b	i^2	a

51- $arg\ (z_1.z_2)$ يساوي:

$\arg(z_1+z_2)$	d	$\arg(z_1)-\arg z_2$	c	$\arg z_1+\arg z_2$	b	$\arg z_1 \times \arg z_2$	a

52- بفرض ليكن z عدداً عقدياً يحقق:

$$\bar{z}=\frac{9}{z}\ ,\arg(iz)=\frac{\pi}{3}$$

الشكل الأسي للعدد z هو:

$3e^{i\frac{\pi}{2}}$	d	$e^{i\frac{\pi}{6}}$	c	$3e^{i\frac{\pi}{3}}$	b	$3e^{i\frac{\pi}{6}}$	a

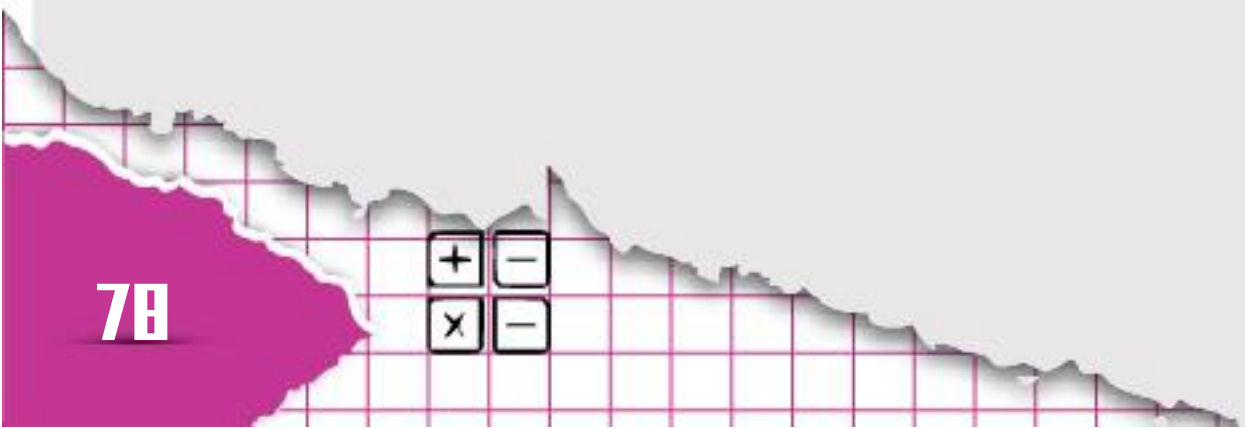
53- بالاستفادة من علاقات أويلر يمكن برهان أن $\cos^3 x$ يساوي:

$\frac{3\cos(x)+\cos(3x)}{2}$	d	$\frac{3\cos(x)+\cos(3x)}{4}$	c	$\frac{\cos(3x)-3\cos(x)}{4}$	b	$\frac{3\cos(x)-\cos(3x)}{4}$	a

54- قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cos3x}{cosx}$ تساوي

3	d	-3	c	$+\infty$	b	0	a

B	41	D	21	C	1
B	42	A	22	B	2
C	43	B	23	A	3
B	44	D	24	D	4
C	45	A	25	B	5
A	46	C	26	B	6
C	47	C	27	C	7
B	48	C	28	A	8
C	49	C	29	D	9
B	50	C	30	B	10
A	51	D	31	C	11
A	52	A	32	A	12
C	53	B	33	D	13
D	54	C	34	C	14
-	55	B	35	B	15
-	56	D	36	B	16
-	57	B	37	B	17
-	58	C	38	C	18
-	59	A	39	B	19
-	60	B	40	A	20



6

الملف الأخير

مسألة الوحدة

في هذا
الملف سيكون
قسمان من
تتمات مسائل
الوحدة
الرابعة
والخامسة من
كتاب الجزء
الثاني

السؤال الأول

لتكن النقاط A و B و C و D نقاطاً تمثل بالترتيب الأعداد العقدية $a = 1$ و $b = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

1- اكتب c بالشكل الأسي ، واكتب d بالشكل الجبري .

2-

a- وضّع النقاط A و B و C و D في مستوٍ مزوّد بمعلم متجانس .

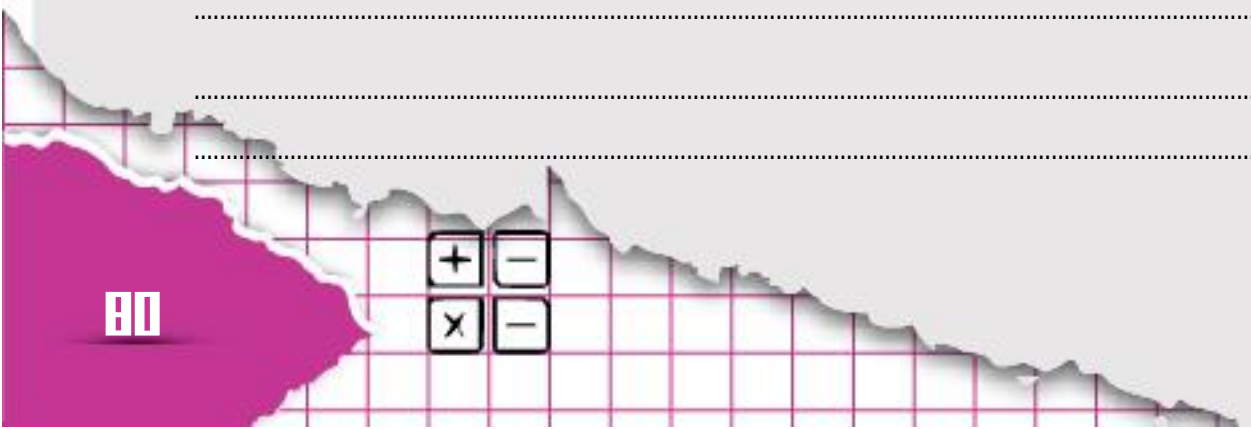
b- أثبت أن الرباعي $OACB$ معيّن .

السؤال الثاني

اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة :

$$(z^2 + 3\sqrt{3}z + 9)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9) = 0 \qquad (1)$$

1- أثبت أن النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل .



السؤال الثالث

بسّط كتابة العدد العقدي

$$Z = \frac{1 + \cos x - i \sin x}{1 + \cos x + i \sin x}$$

موضحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الرابع

1- ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد .
أثبت أن $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عددٌ حقيقي .

2- نفترض أن $u \neq 1$ وأن $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي أثبت أنه إما أن يكون z حقيقياً أو أن يكون $|u| = 1$.

.....

.....

السؤال الخامس

اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين :

$$z_1 = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} \quad \text{g} \quad z_2 = (3+i)^4$$

السؤال السادس

ليكن z و z' عددين عقديين أثبت أن :

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2|z|^2+2|z'|^2$$

.....

.....

السؤال السابع

ليكن المثلث ABC . أثبت تكافؤ الخاصتين الآتيتين:

1- المثلث متساوي الساقين ورأسه A .

2- $2\sin\hat{B}\cos\hat{C} = \sin\hat{A}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثامن تعيين مجموعة

ليكن a عدداً عقدياً معطى . لتكن ε مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق :

$$z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$$

عيّن المجموعة ε ومثّلها في مستوٍ مزوّد بمعلم .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثالث عشر

ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]-\pi,\pi[$. نعرّف $t=\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}$.

1- احسب المقادير $\frac{2t}{1+t^2}$ و $\frac{2t}{1-t^2}$ و $\frac{1+t^2}{1-t^2}$ بدلالة النسب المثلثية للعدد θ .

2- أثبت صحة العلاقات :

$$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\theta} \quad g \quad \cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \quad g \quad \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

.....

.....

.....

.....

السؤال الرابع عشر

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلات $z^2 = w$ في الحالات الآتية :

$w = -3 + 4i$ -a

$w = -21 - 20i$ -b

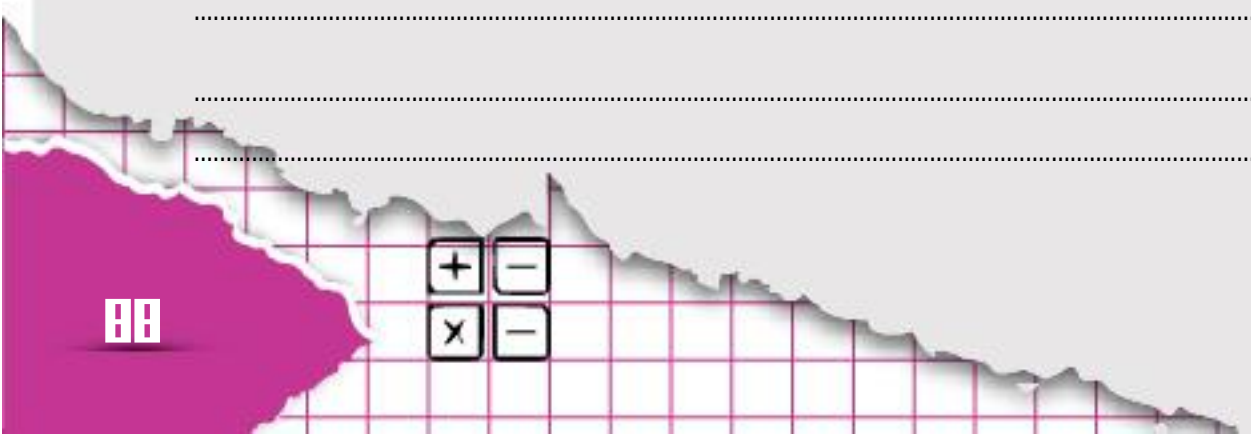
$w = -7 + 24i$ -c

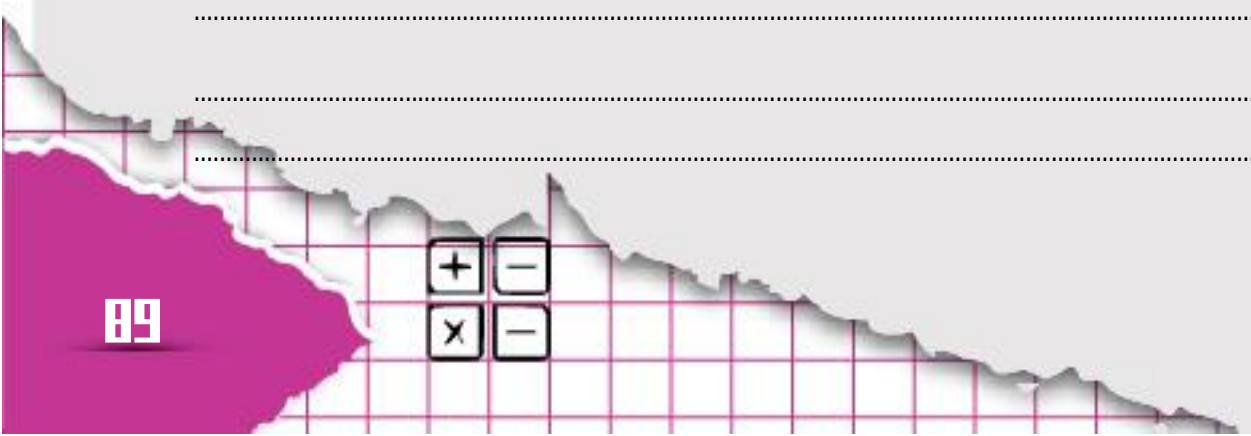
2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية :

$z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0$ -a

$2iz^2 + (3 + 7i)z + 4 + 2i = 0$ -b

$z^2 + (1 + 8i)z - 17 + i = 0$ -c





السؤال الخامس عشر

في حالة عدد عقدي $z \neq 1$ نضع $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ ونفترض أن $z = x + iy$ و $Z = X + iY$ حيث x و y و X و Y هي أعداد حقيقية .

1- احسب X و Y بدلالة العددين x و y .

2- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة .

3- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة .

السؤال السادس عشر

عيّن في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق الشرط المعطى .

1- المقدار $(z+1)(\bar{z}-2)$ حقيقي .

2- العدد z مختلف عن $4i$ و $\frac{z+2i}{z-4i}$ عدد حقيقي .

.....

.....

.....

.....

من التطبيقات العقدية

السؤال الأول

نتأمل النقاط A و B و C التي توافق بالترتيب الأ'داد العقدية $S = a$ و $b = -4 + 4i$ و $c = -4i$.

1-

a- تحقق أن $b - c = i(a - c)$.

b- استنتج أن المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين .

2- نقرن بكل نقطة $M(z)$ النقطة M' الموفقة للعدد العقدي $z' = e^{\frac{i\pi}{3}}z$.

a- ما التحويل الهندسي الموافق ؟

b- احسب الأعداد العقدية a' و b' و c' الموافقة للنقاط A' و B' و C' صور A و B و C وفق هذا التحويل .

3- لتكن P و Q و R منتصفات القطع المستقيمة $[A'B]$ و $[B'C]$ و $[C'A]$ ، ولتكن p و q و r الأ'داد العقدية التي توافقها .

a- احسب p و q و r .

b- تحقق أن $r - p = e^{\frac{i\pi}{3}}(q - p)$.

c- استنتج أن المثلث PQR متساوي الأضلاع .

.....

.....

.....

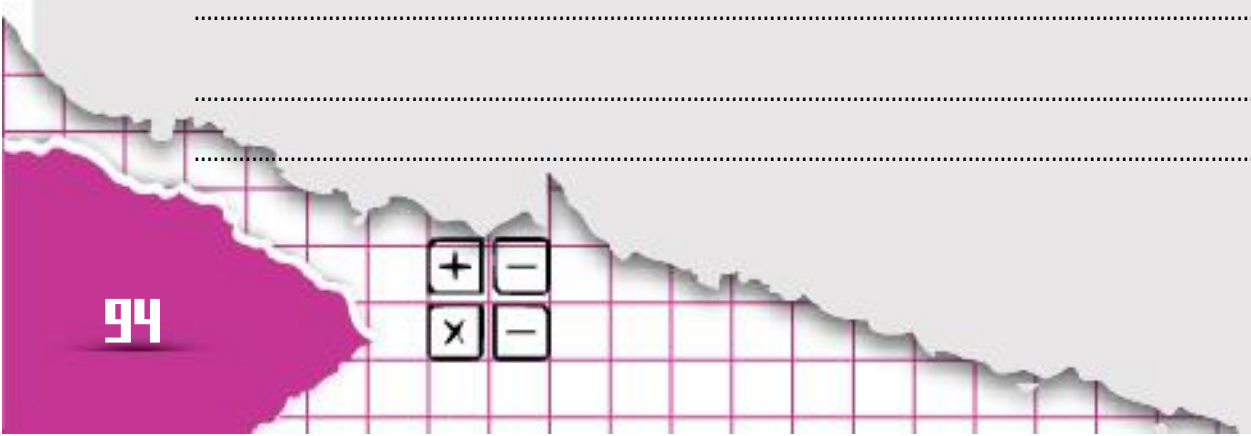
.....

.....

.....

.....

.....



السؤال الثاني — البحث عن المجموعة

نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. نقرن كل نقطة $M(z)$ حيث $z \neq i$ بالنقطة $M(z')$ حيث $z' = \frac{z+2}{z-i}$.

- عيّن Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً حقيقياً .
- عيّن Γ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً تخيلياً بحتاً .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثالث **خاصة مميزة لمتوازي الأضلاع**

تمثل الأعداد العقدية a و b و c و d أربع نقاط A و B و C و D . أثبت أن الرباعي $ABCD$ يكون متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $a + c = b + d$.

.....

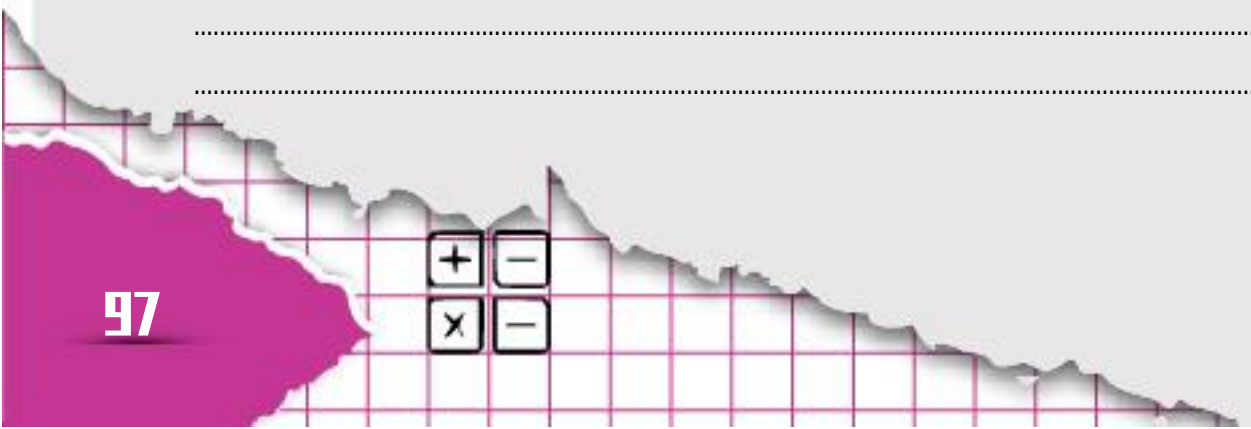
.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الرابع

نقرن بكل نقطة $M(z)$ من المستوي حيث $z \neq -\frac{1}{2}i$ النقطة M' التي يمثلها العدد العقدي $z' = \frac{z+2i}{1-2iz}$

لتكن Γ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 . أثبت أنه إذا انتمت M إلى Γ انتمت M' إلى Γ أيضاً .

أيكون العكس صحيحاً ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

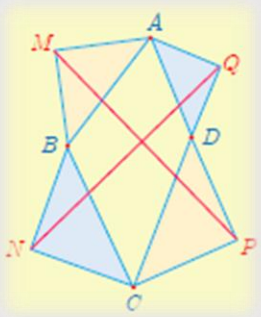
.....

.....

.....

.....

السؤال الخامس



نتأمل في المستوي الموجّه رباعياً محدباً مباشراً $ABCD$. نُنشئ خارجه النقاط M و N و P و Q التي تجعل المثلثات MBA و NCB و PDC و DQA قائمة في M و N و P و Q بالترتيب ومتساوية الساقين ومباشرة .

أثبت باستعمال الأعداد العقدية أن $MP = NQ$ وأن المستقيمين (MP) و (NQ) متعامدان .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال السادس

نتأمل في المستوي الموجّه مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً ABC مركزه النقطة I . D نقطة من داخل القطعة المستقيمة $[BC]$. نُنشئ مثلثين متساويي الأضلاع مباشرين BED و DFC .

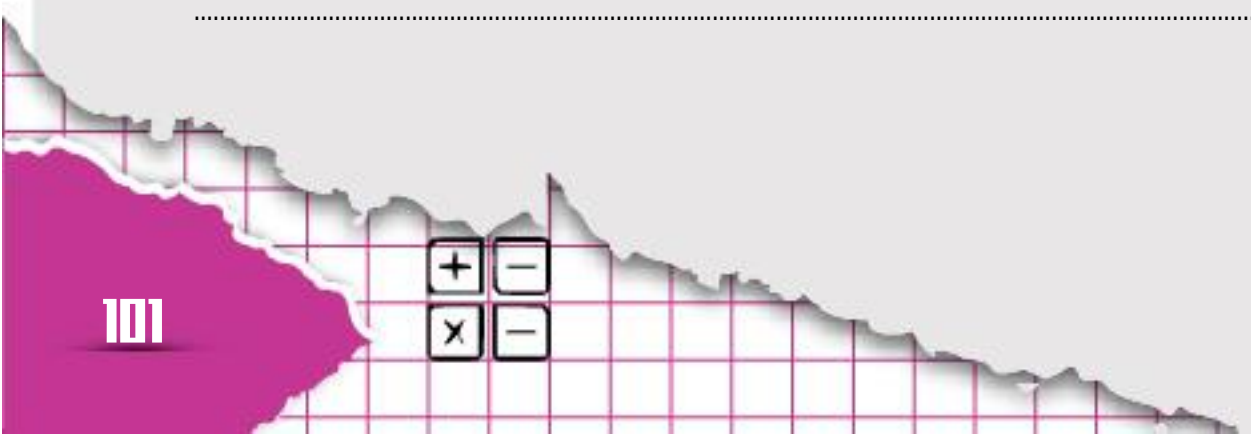
ونعرّف J و K مركزي المثلثين BED و DFC . نهدف إلى إثبات أن المثلث IJK متساوي الأضلاع .

نختار معلماً متجانساً مباشراً $(B,\vec{u},\vec{v})$ بحيث $\overrightarrow{BC}=a\vec{u}$ حيث $a=BC$.

1- احسب ، بدلالة a ، العددين العقديين z_A و z_I اللذين يمثلان A و I بالترتيب .

2- نفترض أن $\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}$ حيث $t\in]0,1[$. احسب بدلالة a و t ، العددين العقديين z_J و z_K اللذين يمثلان J و K بالترتيب .

3- تحقق أن $z_K-z_I=e^{\frac{i\pi}{3}}(z_J-z_I)$ ، واستنتج الخاصة المرجوّة .



السؤال السابع

نزوّد المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقاط A و A' و B و B' هي النقاط الموافقة للأعداد العقدية 1 و 1− و i و $-i$ بالترتيب .

نقرن كل نقطة $M(z)$ مختلفة عن النقاط O و A و A' و B و B' النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث يكون المثلثان BMM_1 و AMM_2 قائمين ومتساويي الساقين بحيث

$$(\overrightarrow{M_1B},\overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$$

1- ارسم شكلاً مناسباً .

2-

a- علل صحة المساواتين $z - z_1 = i(i - z_1)$ و $1 - z_2 = i(z - z_2)$.

b- عبّر عن z_1 و z_2 بدلالة z .

3- نهدف إلى تعيين النقاط M التي تجعل المثلث OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع .

a- أثبت أن الشرط $OM_1 = OM_2$ يكافئ $|z + i| = |z + 1|$ واستنتج Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1 = OM_2$ ، وارسم Δ على الشكل نفسه .

b- أثبت أن الشرط $OM_1 = M_1M_2$ يكافئ $|z + 1|^2 = 2|z|^2$.

c- استنتج Γ مجموعة النقاط M التي تحقق $OM_1 = M_1M_2$ ، وارسم Γ على الشكل نفسه .

d- استنتج مما سبق النقاط M التي تجعل OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع . وحددها على الشكل.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....