حول النهايات	
حالة $\frac{\infty}{\infty}$	دائماً نأخذ المسيطر من البسط و المسيطر من المقام
	ترتيب المسيطر حسب القوة (عند +∞): $e^x > x^n > lnx$ المسيطر في الحد $\sqrt{x^2+3}$ هو $\sqrt{x^2}$ ثم $\|x\|$ ثم نفك القيمة المطلقة حسب السعي
أمثلة	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{\sqrt{x^2+5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+3x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{lnx}{e^x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}x}{x}=\sqrt{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$
حالة $\frac{0}{0}$	1- يوجد جذر : نضرب البسط و المقام بالمرافق 2- لا يوجد جذر : تحليل البسط و المقام إلى جداء أقواس
	أمثلة: $1)\ \lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1-1}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{2}$ $2)\ \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$
نظرية أوبيتال	في حالة $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ و عدم وجود قيمة مطلقة . يمكن التخلص من هذه الحالات باستخدام طريقة أوبيتال . (اشتقاق البسط و اشتقاق المقام) $1)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0$ $2)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=0$ $3)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^x+1}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}-e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}-e^x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=+\infty$ $4)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{lnx-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$
في حالة وجود قيمة مطلقة	من القيمة المطلقة حسب السعي

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
أمثلة:
1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-1|}{x+1}$
نلاحظ أنه عند $-\infty$ يكون المقدار x^2-1 موجباً و بالتالي قيمته المطلقة نفسه
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x+1}=-\infty$$
<hr>
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x+1|-|1-2x|}{x+3}$
نلاحظ أنه عند $+\infty$ يكون المقدار $x+1$ موجباً فقيمته المطلقة نفسه $x+1$
أما المقدار $1-2x$ سالباً فقيمته المطلقة عكسه $2x-1$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-(2x-1)}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+2}{x+3}=-1$$
<hr>
3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|4x-3|-|2x-1|}{x-1}$
نلاحظ أنه عند الواحد يكون $4x-3$ موجباً فقيمته المطلقة $4x-3$
أما $2x-1$ فيكون موجباً أيضاً فقيمته المطلقة نفسه $2x-1$
$$\lim_{x\to1}\frac{4x-3-(2x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{x-1}=2$$
<hr>
4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{|2x+3|-|x^2-18|}{x-3}$
نلاحظ أن $2x+3$ عند الـ3 موجب فقيمته المطلقة نفسه $2x+3$
و x^2-18 عند الـ3 سالب فقيمته المطلقة عكسه $18-x^2$
$$\lim_{x\to3}\frac{2x+3-(18-x^2)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+5)(x-3)}{x-3}=8$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>حالة $\infty-\infty$</td>
<td>
$\sqrt{x^2+3}-x$ نربع $\underset{\to}{}(x^2+3\ ,x^2)$ 😀
$\sqrt{4x^2+4}+2x$ نربع $\underset{\to}{}(4x^2+4\ ,4\,x^2)$ 😀
$\sqrt{x^2+x+1}-3x$ نربع $\underset{\to}{}(x^2+x+1\ ,9x^2)$ 😔
$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2x^2+3}$ نربع $\underset{\to}{}(x^2+x,2x^2+3)$ 😔
في حالة النهاية السعيدة: نضرب بالمرافق
في حالة النهاية الحزينة: نخرج أقوى درجة عامل مشترك من كل حد و نراعي السعي
</td>
</tr>
<tr>
<td>حالة $0.\infty$</td>
<td>
نهايات للحفظ:
$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$$
</td>
</tr>
</table>

في كل مما يلي احسب نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1- $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\ ;a=+\infty$:

a	$-\infty$	b	$+\infty$	c	0	d	1

2- $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\ ;a=-\infty$:

a	3	b	-1	c	$-\infty$	d	0

3- $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\ ;a=0$:

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	0	d	1

4- $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}\ ;a=+\infty$:

a	1	b	0	c	$\frac{9}{4}$	d	-1

5- $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}\ ;a=2$:

a	4	b	8	c	12	d	$+\infty$

6- $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}\ ;a=3$:

a	$+\infty$	b	1	c	$-\infty$	d	3

7- $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-3x\ ;a=+\infty$:

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

8- $f(x)=\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+2}\ ;a=+\infty$:

a	$+\infty$	b	0	c	$-\infty$	d	غير ذلك

9- $f(x)=\sqrt{5x+1}-x\ ;a=+\infty$:

a	$-\infty$	b	$+\infty$	c	1	d	$\sqrt{5}$

10- نهاية التابع $f(x)=\left[\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{5}{2}}-2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$ عند $+\infty$:

a	$\mathbf{4\sqrt{2}}$	b	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{2\sqrt{2}}$	d	$\mathbf{-2\sqrt{2}}$

11- عند دراسة نهاية التابع $f(x)=\frac{\sin|x|}{x}$ عند الصفر نجد أن نهايته :

a	$\mathbf{1}$	b	$\mathbf{-1}$	c	$\mathbf{0}$	d	غير موجودة

12- ليكن f المعرف على R^* وفق $f(x)=\frac{|2x-1|-|1-3x|}{x}$ عند دراسة نهاية f عند الصفر نجدها:

a	$+\infty$	b	$-\infty$	c	1	d	غير موجودة

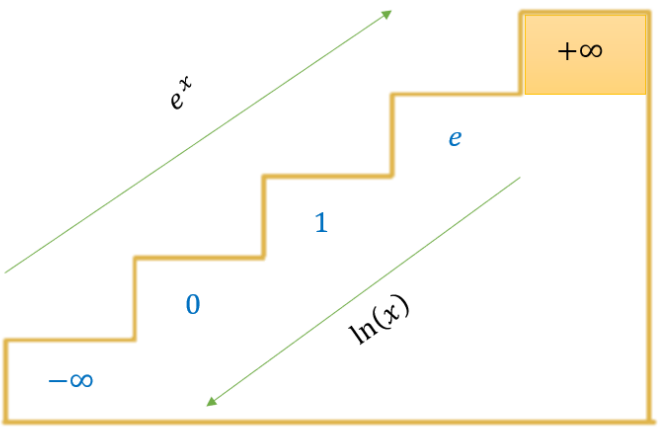
13- إذا علمت أن $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+a^2}-a}{x}=\frac{1}{4}$ و $a>0$ فإن قيمة الثابت a هي :

a	2	b	1	c	4	d	0

حول النهايات اللوغارتمية والأسية	
النهايات البسيطة	$\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ $\lim_{x\to0^+} lnx = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
نهايات حكم القوي على الضعيف	$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{lnx} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
عند الصفر	$\lim_{x\to0} xlnx = 0$ $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
عند الواحد	$\lim_{x\to1} \frac{lnx}{x-1} = 1$ $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{lnx} = 1$
عند $-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
جميع النهايات الكسرية السابقة يمكن حسابها على أوبيتال	

خواص التابع اللوغارتمي

1- درج السعادة



2- خواص اللوغارتم:

لوغارتم الجداء	$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$
لوغارتم القسمة	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
لوغارتم القوة	$\ln(a^n) = n\ln(a)$
لوغارتم الجذر	$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
لوغارتم المقلوب	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
خواص تقابلية	$\ln(e^x) = x$ $e^{\ln(x)} = x$

1- بفرض a, b, c, d أعداد حقيقية موجبة تماماً عندئذ المقدار $\ln\left(\frac{a^2\times b^3}{c\times d^6}\right)$ يساوي

a	$2lna + 3lnb - lnc + 6lnd$	b	$2\ln(a) + 3\ln(b) - \ln(c) - 6lnd$
c	$2lna \times 3lnb - lnc - 6lnd$	d	$6\ln(ab) - 6\ln(cd)$

2- إن قيمة المقدار $\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{600}{599}\right)$

a	$3\ln(2) + 2\ln(5) + ln3$	b	$3ln2 - 2ln5 - ln3$
c	$2ln2 + 2ln5 + ln3$	d	$3ln2 + 2ln5 - ln3$

3- إن $\ln(x^2)$ يساوي:

a	$2\ln\|x\|$	b	$2\ln(x)$	c	$(lnx)^2$	d	$2\ln(-x)$

4- إن مجموعة قيم العدد الطبيعي التي تحقق $2^n \leq 100$

a	$n \geq 4$	b	$n \leq 4$	c	$n \geq 5$	d	$n \geq 2$

5- إن مجموعة قيم العدد الطبيعي التي تحقق $\left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 10^{-2}$

a	$n \geq 4$	b	$n \geq 5$	c	$n \leq 4$	d	$n \geq 2$

6- إن مجموعة قيم العدد الطبيعي التي تحقق $0.2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

a	$n \leq 2$	b	$n \geq 2$	c	$n \leq 0$	d	$n \leq 1$

7- إن مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق الشرط $\ln(x) = \ln(y+1)$ (دوّن ملاحظة حول هذا السؤال)

a	نصف مستقيم	b	دائرة	c	قطع زائد	d	مستقيم

8- إن مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق الشرط $\ln(y) = 2\ln(x)$

a	جزء من دائرة	b	جزء من قطع مكافئ	c	جزء من قطع زائد	d	جزء من قطع ناقص

9- إن مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق الشرط $\ln(y) + \ln(x) = 0$

a	جزء من دائرة	b	جزء من قطع مكافئ	c	جزء من قطع زائد	d	جزء من قطع ناقص

10- نرمز بالرمز log للتابع اللوغارتمي الذي أساسه 10 (أي $\log(10) = 1$) عندئذٍ المقدار $\log(0.6)$ يساوي

(دوّن ملاحظتك حول هذا السؤال)

a	$\log(2) + \log(3) - 1$	b	$\log(2)\log(3)$	c	$\log(6)$	d	$\log(2) + \log(3) + 1$

11- بفرض $a > 1$. نرمز بالرمز $\log_a$ للوغارتم الذي أساسها a ($\log_a(a) = 1$) عندئذ:

المقدار $y = \log_a(x)$ يساوي:

a	$y = \frac{\ln(x)}{\log(a)}$	b	$y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$	c	$y = \frac{\ln(x)}{a}$	d	$y = \frac{\ln(a)}{\ln(x)}$

12- نهاية التابع $f(x) = x - lnx$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

13- نهاية التابع $f(x) = \frac{1-lnx}{x}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

14- نهاية التابع $f(x) = \frac{x-lnx}{x+lnx}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	1

15- نهاية التابع $f(x) = \frac{2lnx-3}{lnx+3}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	2

16- نهاية التابع $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

17- نهاية التابع $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

18- نهاية التابع $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

19- نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{x} - lnx$ عند 0^+ :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

20- نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{x} + lnx$ عند 0^+ هي :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

21- نهاية التابع $f(x) = x(3 - lnx)$ عند 0^+ :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

22- نهاية التابع $f(x) = xln^2(x)$ عند الصفر هي :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

23- نهاية التابع $f(x)=\frac{1}{x(1-lnx)}$ عند الصفر من اليمين :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

24- نهاية التابع $\mathrm{f(x)}=\ln(2x+1)-\ln(x-1)$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$\ln(2)$

25- نهاية التابع $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+sinx)}{x}$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	1

26- قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(sinx)}{x-\frac{\pi}{2}}$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

27- قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to 1}\frac{xln(\sqrt{x}+1)-\ln(\sqrt{2})}{x-1}$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$ln\sqrt{2}+\frac{1}{4}$

28- قيمة العدد λ حتى يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\lambda x+1)-\ln(2x+3)=1$

a	e	b	$2e$	c	$-e$	d	1

29- نهاية التابع $f(x)=e^x-lnx$ عند $+\infty$

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

30- نهاية التابع $f(x)=x^2-e^x$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

31- نهاية التابع $f(x)=x-\ln(e^x+1)$ عند $+\infty$

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	0

32- نهاية التابع $f(x)=\frac{1}{x}(e^x-1)$ عند 0

a	1	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

33- إذا علمت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-\ln(e^{\lambda x}+1)=+\infty$ فإن الشرط

a	$0<\lambda<2$	b	$\lambda>2$	c	$0<\lambda\leq 2$	d	$\lambda\geq 2$

34- إن نهاية التابع $f(x)=\frac{2e^x+1}{1+e^x}$ عند $+\infty$:

a	2	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

35- إن نهاية التابع $g(x)=\ln(x)-e^x$ عند $+\infty$:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

36- إن نهاية التابع $h(x)=e^x-x^2$ عند $+\infty$:

a	2	b	-1	c	$+\infty$	d	$-\infty$

37- إن نهاية التابع $f(x) = x - e^x$ عند $+\infty$:

$-\infty$	d	$+\infty$	c	1	b	2	a

38- إن النهاية $\lim_{t\to0} t\left(\frac{1}{e^t-1}\right)$ تساوي:

$-\infty$	d	$+\infty$	c	0	b	1	a

39- إن نهاية التابع $f(x) = \frac{3e^x}{4e^x-4}$ عند $+\infty$ هي:

-1	d	1	c	$\frac{3}{4}$	b	$\frac{4}{3}$	a

40- إن نهاية التابع $g(x) = (2-x)e^x$ عند $-\infty$:

$-\infty$	d	$+\infty$	c	0	b	1	a

41- إن نهاية التابع $k(x) = \frac{e^x-1}{x-1}$ عند $+\infty$:

$-\infty$	d	$+\infty$	c	0	b	1	a

42- إن نهاية التابع $\ln(e^x+2)$ عند $-\infty$:

$-\ln(2)$	d	$+\infty$	c	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	b	$\ln(2)$	a

43- إن نهاية التابع $f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$ عند $-\infty$:

$-\infty$	d	2	c	$+\infty$	b	1	a

44- إن نهاية التابع المعرف وفق $f(x) = \frac{1}{x}(e^x-1)$ عند $+\infty$:

$-\infty$	d	$+\infty$	c	0	b	1	a

حول تغيير المتحول

عندما يكون الصفر ناتج عن $\ln(1)$:

1- نفرض المضمون $1+t$
2- نعزل x بدلالة t
3- نغير السعي $t \to 0$
4- نعوض لنصل إلى المبرهنة $\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

1- بفرض $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{\lambda}{x}\right) = 2$ فإن قيمة λ تساوي:

غير ذلك	d	2	c	$+\infty$	b	0	a

2- نهاية التابع $f(x) = \frac{\ln(3-x)}{2x-4}$ عند $a = 2$

$-\frac{1}{2}$	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	$\frac{1}{2}$	a

3- نهاية التابع $f(x) = x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ عند $+\infty$:

-2	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	2	A

4- إن نهاية التابع $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$ عند $+\infty$:

$\sqrt{e}$	d	e	c	$e^{-\frac{1}{2}}$	b	e^{-1}	a

5- نهاية التابع $f(x)=(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ عند الواحد

$\sqrt{e}$	d	e	c	$e^{-\frac{1}{2}}$	b	e^{-1}	a

6- نهاية التابع $f(x)=(3-2x)^{\frac{1}{2x-1}}$ عند $a=\frac{1}{2}$

$e^{\frac{1}{2}}$	d	e	c	0	b	$+\infty$	a

7- نهاية المتتالية التي حدها العام $u_n=\frac{e^{2n}}{(1+n)^2}$:

2	d	$-\infty$	c	1	b	$+\infty$	a

8- نهاية المتتالية التي حدها العام $u_n=n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

$+\infty$	d	$-\infty$	c	0	b	1	a

9- نهاية المتتالية $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

e^{-2}	d	e^{-2}	c	e^{2}	b	e	a

حول النهايات المثلثية	
إحاطة	في حال مضمون المثلثي ∞
نسعى لاستخدام واحدة من المبرهنات $\lim\limits_{t\to 0}\frac{sint}{t}=1$ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{tant}{t}=1$	في حال مضمون المثلثي 0
$1-\cos^2\left(\text{زاوية}\right)=\sin^2(\text{الزاوية})$ $1-\cos\left(\text{الزاوية}\right)=2\sin^2\left(\text{نصفها}\right)$ $1-\cos\left(\text{الزاوية}\right)=\frac{\sin^2\left(\text{الزاوية}\right)}{1+\cos\left(\text{الزاوية}\right)}$ $\sin\left(\text{الزاوية}\right)=2\sin\left(\text{نصفها}\right)\cos\left(\text{نصفها}\right)$ $\cos\left(\text{الزاوية}\right)=\cos^2\left(\text{نصفها}\right)-\sin^2(\text{نصفها})$ $\cos(3x)=4\cos^3 x-3cosx$ $\cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	دساتير مفيدة لحالة $\frac{0}{0}$

في كل مما يلي احسب نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1- $f(x)=\frac{\sin x}{x}\ ;a=\pi$:

1	d	0	c	$+\infty$	b	0	a

2- : $f(x)=\frac{\sin(4x)}{x}\ ;a=0$

a	2	b	4	c	0	d	$+\infty$

3- : $f(x)=\frac{\sin(6x)}{2x}\ ;a=0$

a	-3	b	3	c	2	d	0

4- : $f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos(2x)}\ ;a=0$

a	$\frac{1}{4}$	b	4	c	2	d	$\frac{1}{2}$

5- : $f(x)=\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}\ ;a=0$

a	2	b	-1	c	0	d	1

6- : $f(x)=\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{x\sin x}\ ;a=0$

a	-4	b	4	c	2	d	1

7- : $f(x)=\frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 5x-\sin x}\ ;a=0$

a	1	b	$\frac{1}{4}$	c	0	d	$\frac{1}{2}$

8- : $f(x)=\frac{\tan(7x)}{x}\ ;a=0$

a	0	b	7	c	$-\infty$	d	0

9- : $f(x)=\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1}-1}\ ;a=0$

a	1	b	0	c	-1	d	4

10- : $f(x)=\sin x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ ;a=0^+$

a	0	b	1	c	-1	d	غير ذلك

11- : $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\le f(x)\le\frac{1-\cos(2x)}{x}\ ;a=0$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	1

12- : $f(x)=\frac{\sin x}{x+1}\ ;a=+\infty$

a	4	b	8	c	0	d	$+\infty$

13- : $f(x)=\frac{x-\sin(x)}{x+5}\ ;a=+\infty$

a	$+\infty$	b	-1	c	$-\infty$	d	1

14- : $f(x)=\frac{3x-\sin x}{\sqrt{1+x^2}}\ ;a=+\infty$

a	3	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

15- : $f(x)=x+\frac{2\sin^2 x}{5}\ ;a=+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

16- $\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)} \le f(x) \le \frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}$; $a=0$:

a	0	b	$+\infty$	c	1	d	$\sqrt{5}$

17- ليكن لدينا التابع المعرف وفق $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & ; x\neq 1\\ 0 & ; x=1\end{cases}$، إن نهاية التابع عند $a=1$ هي:

a	0	b	$+\infty$	c	1	d	$\sqrt{5}$

18- نهاية التابع $f(x)=\frac{\sin(ax)}{x}$ عند الصفر تساوي:

a	a	b	1	c	-1	d	0

19- نهاية التابع $f(x)=\frac{\sin(ax)}{bx}$ عند الصفر تساوي:

a	a	b	b	c	$\frac{b}{a}$	d	$\frac{a}{b}$

20- نهاية التابع $f(x)=\frac{\tan(ax)}{bx}$ عند الصفر تساوي:

a	a	b	b	c	$\frac{b}{a}$	d	$\frac{a}{b}$

21- نهاية التابع $f(x)=\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ عند الصفر تساوي:

a	a	b	b	c	$\frac{b}{a}$	d	$\frac{a}{b}$

22- نهاية التابع $f(x)=\frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}$ عند الصفر تساوي:

a	a	b	b	c	$\frac{b}{a}$	d	$\frac{a}{b}$

23- التابع $f(x)=x+2sinx$ خطه البياني محصور بين المستقيمين:

a	$d_1: y=x+2 \;\&\; d_2: y=x-2$	b	$d_1: y=x-4 \;, d_2: y=x+4$
c	$d_1: y=2x \;,\; d_2: y=-2x$	d	$d_1: y=x-1 \;,\; d_2: y=x+1$

24- إذا كان $|f(x)-3|\le g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ عندئذٍ واحد من التوابع الآتية ممكن أن يكون $g(x)$:

a	$g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$	b	$g(x)=\frac{3x+1}{x+1}$	c	$g(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	d	$g(x)=x\sqrt{x}$

25- ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

فأي من المتراجحات الآتية صحيحة:

a	$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\le f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$	b	$\frac{1}{\sqrt{x+1}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$
c	$\frac{1}{2\sqrt{x}}\le f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$	d	$\frac{1}{\sqrt{x}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sin^2 x+4sinx+6$

26- f يكتب بالشكل :

a	$(sinx-2)^2+2$	b	$(\sin x+2)^2+2$	c	$(sinx-2)^2+1$	d	$(sinx-1)^2+2$

27- واحدة من المتراجحات الآتية صحيحة . اخترها

$2 \le f(x) \le 9$	d	$1 \le f(x) \le 9$	c	$1 \le f(x) \le 3$	b	$3 \le f(x) \le 11$	a

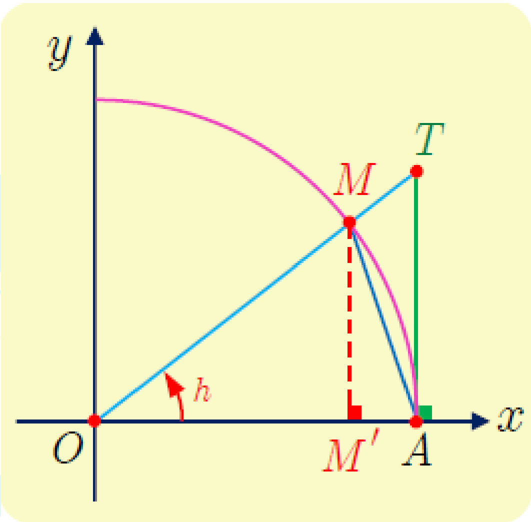
28- فإذا كان $g(x) = x^2 f(x)$ عندئذٍ نهاية التابع g(x) عند $+\infty$

11	d	0	c	$+\infty$	b	1	a

29- ليكن f و g التابعان المعرفان وفق $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sin x$ عندئذٍ يكون التركيب $(gof)(x)$ يساوي

$\sin(x^2) - 1$	d	$(\sin x - 1)^2$	c	$\sin^2 x - 1$	b	$\sin(x^2 - 1)$	a

- C الدائرة المثلثية التي مركزها المبدأ و لتكن M النقطة من C بحيث يكون h التعيين الأساسي بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$



30- مساحة المثلث OAM تساوي :

$\frac{1}{2}\coth$	d	$\frac{1}{2}\tanh$	c	$\frac{1}{2}\cosh$	b	$\frac{1}{2}\sinh$	a

31- مساحة المثلث OAT تساوي :

$\frac{1}{2}\coth$	d	$\frac{1}{2}\tanh$	c	$\frac{1}{2}\cosh$	b	$\frac{1}{2}\sinh$	a

32- إذا علمت أن $\sin h \le h \le \tan h$ فيمكن استنتاج أن :

$\frac{\cos h}{h} \le \sin h \le 1$	d	$\frac{\sin h}{h} \le 1 \le \cos h$	c	$\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le 1$	b	$\frac{\sin h}{h} \le \cos h \le 1$	a

33- واحدة من النهايات الآتية صحيحة

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} = 1$	d	$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$	c	$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$	b	$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{1}{4}$	a

<table>
<tr><th colspan="3">حول المقارب المائل</th></tr>
<tr><td>شرط وجوده</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$</td></tr>
<tr><td>نتيجة</td><td colspan="2">لا يجتمع مقارب أفقي ومائل في نفس الجوار</td></tr>
<tr><td>Hero’s idea</td><td colspan="2">نهاية تابع f عند $\pm\infty$ تساوي نهاية مقاربه المائل عند $\pm\infty$
ترجمة: أي يمكن استبدال التابع f بـ y_d</td></tr>
<tr><td>أمثلة</td><td colspan="2">من الواضح أن التابع $f(x)=-\frac{x}{2}+\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}$ يقبل المقارب المائل:
$y=-\frac{x}{2}$
وبالتالي إذا طلب نهاية f عند $\pm\infty$ نحسب نهاية y عند $\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)=\mp\infty$
(بالله مو هيك أسهل 😉)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">أساليب إيجاده</td><td>التابع من الشكل:
$y=ax+b+u(x)$</td><td>$y_d=ax+b+\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)$
بشرط $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)=\ell\neq\infty$</td></tr>
<tr><td>التابع من الشكل:
$\sqrt{ax^2+bx+c}$</td><td>1- نتمم المضمون إلى مربع كامل
$f(x)=\sqrt{a(x-x_0)^2+y_0}$
2- نهمل y_0 فنحصل على $y_d=\sqrt{a(x-x_0)^2}$
$y_d=\lvert a(x-x_0)\rvert=\begin{cases} a(x-x_0)\,;x\to+\infty \\ -a(x-x_0)\,;x\to-\infty\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>تابع كسري درجة بسطه أكبر من درجة مقامه بدرجة واحدة</td><td>نقسم البسط على المقام قسمة إقليدية فنحصل على:
$f(x)=ax+b+u(x)$
نعود للحالة الأولى.
ملاحظة: إذا كان المقام حد وحيد نستطيع الإستفادة من التفريق بدل القسمة</td></tr>
<tr><td>تابع لوغارتمي يحوي e^x بالحشوة</td><td>نخرج الأسي (المسيطر) عامل مشترك مثلاً:
$f(x)=\ln(e^x+a)=\ln\left(e^x\left(1+\frac{a}{e^x}\right)\right)$
$=\ln(e^x)+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)=x+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)$
ونعود للحالة الأولى.</td></tr>
<tr><td>الحالة العامة</td><td>بفرض $y_d=ax+b$:
$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\,;b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax$</td></tr>
<tr><td>أساليب دراسة الوضع النسبي</td><td colspan="2">1- نشكل الفرق $f(x)-y_d$
2- نعدم
3- نشكل جدول ونحدد إشاراته من خلال تعويض قيم تجريبية في $f(x)-y_d$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Hero's Idea's</th></tr>
<tr><td>إذا علمنا معادلة المقارب $y = ax + b$ فيمكن استخلاص المعلومات المجاورة</td><td>1- نهاية $\frac{f(x)}{x}$ تساوي a في جوار التقارب
2- نهاية $f(x) - ax$ تساوي b في جوار التقارب
3- استبدال التابع f بمقاربه عند حساب نهاية f في جوار التقارب
4- ميل المستقيم المقارب هو a</td></tr>
<tr><td colspan="2">في التوابع الكسرية القيمة التي تعدم المقام والتي لا تعدم البسط تعطي مقارباً شاقولياً ونهاية التابع عند اللانهاية تعطي مقارب افقي</td></tr>
</table>

1- معادلة المقارب المائل للخط C_f للتابع $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ عند $-\infty$ هي:

a	$x-3$	b	$x-1$	c	$2x-1$	d	$x-2$

2- قيمة العدد k ليكون المستقيم $y = 2x + 4$ مقارب مائل للتابع $f(x) = \sqrt{4x^2 + kx + 5}$:

a	16	b	5	c	0	d	1

3- قيمة العدد k ليكون المستقيم $y = 2x + 1$ مقارب مائل للتابع $f(x) = x + k + \frac{x^2+3}{x-1}$:

a	16	b	5	c	0	d	1

4- قيمة العدد k ليكون المستقيم $y = 2x + 1$ مقارب مائل للتابع $f(x) = x + \frac{x^2+kx}{x-1}$:

a	16	b	5	c	0	d	1

5- إذا علمت أن $y = 3x - 1$ مقارب مائل للتابع f عند $-\infty$ فإن نهاية f عند $-\infty$ تساوي:

a	$+\infty$	b	$-\infty$	c	0	d	1

6- إذا علمت أن $y = 4x - 5$ مقارب مائل للتابع f عند $+\infty$ فإن نهاية $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}(2x + 1)$ عند $+\infty$:

a	$+\infty$	b	8	c	0	d	1

7- إذا علمت أن f تابع فردي ويقبل المستقيم $y = x - 1$ مقارب مائل عند $+\infty$ فإن نهاية المقدار

$$\frac{f(x) + 1}{x + f(x) + f(-x)}$$

عند $+\infty$:

a	$+\infty$	b	$-\infty$	c	0	d	1

8- إذا علمت أن التابع f يقبل مقارباً مائلاً معادلته $y = 2x$ عند $+\infty$ وأن f تابع زوجي فإن معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ هي:

a	$y = -2x$	b	$y = 2x$	c	$y = 2x + 1$	d	$y - 2x + 1 = 0$

9- إذا علمت أن التابع f يقبل مقارباً مائلاً معادلته $y = 2x + 1$ عند $+\infty$ وأن f تابع فردي فإن معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ هي:

a	$y = 2x + 1$	b	$y = 2x - 1$	c	$y = -2x$	d	$y = 2x$

10- ليكن $y=3x-1$ مقارب مائل عند $-\infty$ لتابع f عندئذ واحدة من القضايا الآتية خاطئة. اخترها:

a	نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عند $-\infty$ تساوي 3	b	التابع f لا يملك مقاربات أفقية
c	التابع f لا يملك مقارب أفقي عند $-\infty$	d	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

11- ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ وفق $f(x)=-\frac{x}{3}+\ln\left(\left|\frac{x-1}{3x}\right|\right)$ فإن معادلة المقارب المائل:

a	$y=\frac{1}{3}x-\ln(3)$	b	$y=-\frac{1}{3}x-\ln(3)$	c	$y=\frac{1}{3}x+\ln(3)$	d	$y=-\frac{1}{3}x-\ln(3)$

12- قيمة العدد α ليكون المستقيم $y=2x$ مقارب مائل للتابع $f(x)=\ln(e^{\alpha x}+e^{x}+1)$ هي:

a	2	b	1	c	0	d	5

13- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=|3x-1|+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$ فإن المقاربين المائلين للخط c_f يتقاطعان في نقطة

إحداثيتاها هي:

a	$(0,0)$	b	$(1,1)$	c	$(2,0)$	d	$(1,0)$

14- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=5-4x+\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ عندئذ يكون c_f فوق مقاربه المائل على المجال:

a	$]1,+\infty[$	b	$]-\infty,4[$	c	$]4,+\infty[$	d	$]2,+\infty[$

15- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x)=-3x+\sqrt{4x^2-1}$ عندئذ نقاط تقاطع التابع f مع محور الفواصل:

a	$x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$	b	$x=\frac{1}{\sqrt{5}}$	c	$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$	d	$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

16- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x)=2x-1+|x-3|$ عندئذ نقاط تقاطع التابع f مع محور الفواصل:

a	$x=\frac{4}{3}, x=2$	b	$x=-\frac{4}{3}, x=-2$	c	$x=-\frac{4}{3}, x=2$	d	$x=\frac{4}{3}, x=-2$

17- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$ إن معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$ هي:

a	$y=-x$	b	$y=3x$	c	$y=3x-1$	d	$y=3x+1$

18- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$ إن معادلة المقارب المائل في جوار $-\infty$ هي:

a	$y=-x$	b	$y=3x$	c	$y=3x-1$	d	$y=3x+1$

19- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$ الذي يقبل المستقيم $y=3x$ مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$

عندئذ يكون c فوق مقاربه على المجال:

a	$\mathbb{R}$	b	$]-\infty,4[$	c	$]4,+\infty[$	d	$]2,+\infty[$

20- إذا علمت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x\right)=\frac{15}{8}$ فإن معادلة المقارب المائل للخط البياني للتابع في جوار $+\infty$:

a	$y=\sqrt{2}x+\frac{15}{8}$	b	$y=-\sqrt{2}x$	c	$y=\sqrt{2}x+\frac{4}{3}$	d	$y=x$

21- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}+2x$. الخط البياني لهذا التابع يقبل مقارباً مائلاً عند $-\infty$

معادلته

a	$\mathbf{y=2x+1}$	b	$\mathbf{y=2x}$	c	$\mathbf{y=2x-1}$	d	$\mathbf{y=-2x}$

22- كن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$ فإذا علمت ان $y=-x-1$ معادلة المقارب المائل للخط C_f عند $-\infty$ عندئذٍ قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

a	1	b	-1	c	2	d	-2

23- ليكن f التابع المعرف على R و المستقيم ان $y=-x-1$ معادلة المقارب المائل للخط C_f عند $-\infty$ عندئذٍ قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

a	1	b	-1	c	2	d	0

24- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$ فإذا علمت ان $y=-x+4$ معادلة المقارب المائل للخط C_f عند $-\infty$ عندئذٍ قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{3x^2+1}{x^3+x}\right)f(x)\right\}$

a	3	b	-3	c	0	d	المعطيات غير كافية

25- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=\frac{5-ax}{x-b}$. إذا علمت أن $x=2$, $y=3$ مستقيمين مقاربين للخط البياني للتابع f عندئذٍ الثنائية (a,b) هي :

a	$(2,-3)$	b	$(2,3)$	c	$(-2-3)$	d	$(2,5)$

26- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{2x^2-5x+4}{1-x}$ عندئذٍ أي من القضايا الآتية صحيحة

a	للخط C مقارب أفقي	b	$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$	c	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	d	$y=3-2x$ مقارب مائل لـ C

27- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2-2mx+4}$ خطه البياني C عندئذٍ قيمة m ليكون المستقيم $d: y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

a	2	b	1	c	0	d	-1

28- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}$ عندئذٍ معادلة المقارب المائل لخطه البياني:

a	$y=x$	b	$y=x-1$	c	$y=x+1$	d	$y=2x$

29- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2-3mx+1}{x-1}$ عندئذٍ قيمة m التي تجعل المستقيم $y=x-\frac{1}{2}$ مقارباً مائلاً لخطه البياني :

a	$\frac{1}{2}$	b	2	c	1	d	$\sqrt{2}$

30- ليكن f التابع المعرف وفق : $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}$ عندئذٍ معادلة المقارب المائل لخطه البياني :

a	$y=\frac{x}{2}+1$	b	$y=\frac{x}{2}$	c	$y=\frac{x}{2}+\frac{2}{3}$	d	$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}$

31- ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=2x-1+\sqrt{x^2+4x}$ عندئذٍ معادلة المقارب المائل لخطه البياني :

a	$y=2x-1$	b	$y=3x+1$	c	$y=3x$	d	$2x$

32- ليكن f التابع المعرف على R^* وفق $f(x)=5+\frac{1}{x(x^2+2)}$. خطه البياني يقبل مستقيماً مقارباً معادلته

a	$y=0$	b	$x=0$	c	$y=5x$	d	$x=-1$

33- ليكن C الخط البياني لتابع f معرف على R و يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ معادلته $y=3x-5$

عندئذٍ $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+f(x)}{x}$ تساوي

a	-3	b	-2	c	2	d	3

34- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{x+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$. و C يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=2$ عند $+\infty,-\infty$ و مقارب شاقولي $x=-1$ و أخيراً $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ عندئذٍ

$b+c+d$ يساوي

a	3	b	$\frac{5}{2}$	c	$\frac{3}{2}$	d	1

35- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $]0,+\infty[$ وفق العلاقة

$f(x)=x+1+\lambda x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. عندئذٍ قيمة العدد λ التي تجعل للخط C مستقيماً مقارباً مائلاً معادله $y=x-3$

a	4	b	-4	c	-3	d	3

36- ليكن f تابعاً خطه البياني يقبل المستقيم $y=-2x+4$ مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ عندئذٍ أي من القضايا الآتية صحيحة

a	$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$	b	$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=-4$	c	$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$	d	يمكن التأكيد على عدم وجود مقارب أفقي عند $+\infty$

حول الاستمرار وقابلية الاشتقاق	
شرط الاستمرار عند نقطة a	$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ النهاية تساوي الصورة
قانون قابلية الاشتقاق عند نقطة a	$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ **ملاحظة:** نسمي المقدار $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ معدل التغير
Hero's ideas	• إذا علمت $f'(a)$ فإنه يمكن حساب النهاية من الشكل: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ • يوجد صيغة أخرى لقانون معدل التغير: $t(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ولكن حصراً جهة السعي تكون $t\to 0$.
ملاحظة (1)	كل تابع اشتقاقي عند a مستمراً عندها

ملاحظة (2)	إذا علمنا أن تابعاً ذو فرعين اشتقاقي عند a عندئذ لا داعي لتعريف العدد المشتق وإنما نكتفي بأن: $f'(a^+) = f'(a^-)$
التفسيرات الهندسية لقابلية الاشتقاق	عندما تكون نهاية معدل التغير عدد حقيقي m فيكون: f قابل للاشتقاق عند a و m يمثل ميل المماس في النقطة التي فاصلتها a ونكتب $f'(a) = m$ معادلتها: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
	عندما تكون نهاية معدل التغير ∞ فيكون: f غير قابل للاشتقاق عند a و يقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = a$
	عندما تكون نهاية معدل التغير من اليمين لا تساوي نهاية معدل التغير من اليسار فيكون: f غير قابل للاشتقاق عند a ويقبل نصفي مماس قانون معادلتيهما: $y_{d_1} = f'(a^+)(x-a) + f(a)$ $y_{d_2} = f'(a^-)(x-a) + f(a)$

1- ليكن f التابع المعرف على $I = [0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{kx} & : 0 \le x \le 2 \\ x & : x > 2 \end{cases}$$

قيمة k التي تجعل التابع f مستمراً على I هي :

a	$\frac{1}{2}$	b	2	c	1	d	$\sqrt{2}$

2- ليكن f التابع المعرف على المجال $]-\pi, \pi[$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{sinx} & : x > 0 \\ 2x - m & : x \le 0 \end{cases}$$

إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر هي :

a	1	b	-1	c	2	d	-2

3- ليكن f التابع المعرف على مجال مناسب I فق :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(ax)}{xtan(ax)} & : x < 0 \\ \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{b + x} - \sqrt{b}\right) & : x > 0 \\ \dfrac{1}{6} & : x = 0 \end{cases}$$

عندئذٍ إذا علمت أن f مستمر عند الصفر فإن :

a	$\boldsymbol{a = b}$	b	$\boldsymbol{a = \frac{1}{b^2}}$	c	$\boldsymbol{b = a^2}$	d	$\boldsymbol{a = 2b}$

4- ليكن f التابع المعرف وفق على R وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{cosx - 1}{\sqrt{x^2+1} - 1} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$$

فإن قيمة m التي تجعل f مستمراً

a	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	b	$\boldsymbol{-1}$	c	$\boldsymbol{1}$	d	$\boldsymbol{0}$

5- إذا علمت أن $f'(1) = 2\sqrt{3}$ فإن قيمة النهاية $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{\sqrt{x}-1}$ تساوي :

a	$4\sqrt{3}$	b	$\sqrt{3}$	c	$2\sqrt{3}$	d	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6- نهاية التابع $\frac{tanx-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

a	2	b	1	c	-1	d	0

7- ليكن f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق $\;f(0) = m\;$, $\;f(x) = \frac{x}{x-lnx}\;$ عندئذٍ قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر

a	$m = e$	b	$m = 1$	c	$m = 0$	d	$m = e^{-1}$

8- لنعرف التوابع f , h , g وفق: $g(x) = x\sqrt{x}$, $h(x) = x|x|$, $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$ عندئذ

a	f اشتقاقي عند الصفر	b	h, g اشتقاقيان عند الصفر	c	g غير اشتقاقي عند الصفر	d	f, g, h اشتقاقية عند الصفر

9- النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{cosx-1}{x}$ تساوي:

a	$-\infty$	b	-1	c	1	d	0

10- بفرض f تابعاً اشتقاقياً على I فإن:

a	f غير مستمر على I	b	f يملك مماساً شاقولياً
c	f يملك نصفي مماس	d	f يقبل مماس عند كل نقطة من نقاطه

11- ليكن التابع المعرف وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ 2 & ; x = 1 \end{cases}$ إن $f(2)$ تساوي:

a	2	b	5	c	1	d	غير ذلك

12- لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+4} - 6x & ; x \neq 0 \\ 2\sqrt{3} & ; x = 0 \end{cases}$ إن $f(0)$ يساوي:

a	$2\sqrt{3}$	b	$-2\sqrt{3}$	c	2	d	$\sqrt{5}$

13- إن التابع f المعرف وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & ; x \neq 2 \\ 4 & ; x = 2 \end{cases}$ هل التابع f مستمر عند $a = 2$؟

a	نعم	b	لا

14- إن التابع f المعرف وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x+2}{x-1} & ;x\neq 1\\ 5 & ;x=1\end{cases}$, هل التابع f مستمر عند $a=1$؟

a	نعم	b	لا

15- ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x} & ;x\neq 0\\ m-1 & ;x=0\end{cases}$, إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0 هي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	1	d	2

16- ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} & ;x\neq 0\\ m+1 & ;x=0\end{cases}$, إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0 هي:

a	$\frac{9}{8}$	b	$-\frac{1}{8}$	c	$-\frac{9}{8}$	d	غير ذلك

17- ليكن التابع المعطى بالعلاقة $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2} & ;x\neq 0\\ 2m-1 & ;x=0\end{cases}$, إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0

هي:

a	$-\frac{7}{16}$	b	$\frac{7}{16}$	c	$\frac{1}{2}$	d	غير ذلك

18- ليكن f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(0)=m$, $f(x)=\frac{x}{x-lnx}$ عندئذٍ قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر

a	$m=e$	b	$m=1$	c	$m=0$	d	$m=e^{-1}$

19- ليكن f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(0)=0$, $f(x)=\frac{x}{x-lnx}$ عندئذٍ $f'(0)$ تساوي

a	0	b	1	c	e	d	e^{-1}

20- ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sqrt{x-1} & :x>1\\ (1-x)\sqrt{1-x} & :x\leq 1\end{cases}$$

عندئذٍ التابع f اشتقاقي على :

a	$R\backslash\{1\}$	b	$R\backslash\{-1\}$	c	$R\backslash\{0\}$	d	R

حول تعريف النهايات بلغة المجالات	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$	$y=\ell$ مقارب افقي في جوار $+\infty$ الصفة المميزة للتعريف: عين عدداً حقيقياً $x > A$ ليكون f ينتمي لمجال الخطوات: 1- نحدد المركز $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{b+a}{2}$ 2- نحدد نصف القطر $\varepsilon = b - \ell$ 3- نعوض في القانون: $\lvert f(x) - \ell \rvert < \varepsilon$ 4- نصلح ثم ندخل القيمة المطلقة إلى البسط والمقام ثم نتخلص منها حسب السعي.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	لا يملك مقارباً أفقياً مع احتمال وجود مقارب مائل الصفة المميزة للتعريف: عين عدداً $x > A$ بحيث يكون $f(x) \in [M,+\infty[$ أو $f(x) > M$ الخطوات: 1- نضع $f(x) > M$ 2- نعزل x لنصل إلى $x > A$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$	الصفة المميزة: عين مجالاً I (أو عين عدداً α بحيث $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ ليكون $f(x) \in J$ الخطوات: 1- نضع $f(x) \in J$ أي أن $A < f(x) < B$ حيث $J =]A,B[$ 2- نعزل x لنصل لـ $a < x < b$ ويكون $x \in]a,b[$ 3- إذا كان المطلوب العدد α عندئذ $\alpha = \frac{b-a}{2}$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$x = x_0$ مقارب شاقولي نحو ∞ الصفة المميزة: عين مجالاً I (أو عين عدداً α بحيث $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ ليكون $f(x) > M$ الخطوات: 1- ننطلق من $f(x) > M$ 2- نستبدل البسط بـ A ((حيث A يساوي تقريباً نهاية البسط)) 3- نعزل المقام ونجذر للوصول إلى $\lvert x - x_0 \rvert < \alpha$ 4- في حال كان المطلوب α فـ مبرووك عليك! 5- في حال كان المطلوب مجال فنضع: $x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$

1- فرض أن C الخط البياني لتابع f معرف على المجال $]1,+\infty[$ وأن A عدد حقيقي مثبت وأنه من أجل كل $x > A$ يحقق أن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1{,}99{,}2{,}01[$ عندئذٍ

a	$x = 2$ مقارب شاولي للخط C نحو $+\infty$	b	$x = 2$ مقارب شاقولي للخط C نحو $-\infty$
c	$y = 2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$	d	$\boldsymbol{y = 2}$ مقارب أفقي للخط $\boldsymbol{C}$ في جوار $+\infty$

2- إذا كان f تابعاً يحقق أنه من أجل أي عدد حقيقي M يوجد عدد حقيقي A بحيث مهما يكن $x > A$ فإن $f(x) > M$ عندئذٍ:

a	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	b	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
c	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	d	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3- إذا كان $f(x) = \frac{2\ln x-1}{\ln x+1}$ فإن أصغر حقيقي A يحقق أنّ $f(x) \in]1.99,2.01[$ عندما $x > A$

a	2	b	7	c	5	d	$\ln(2)$

4- ليكن $f(x) = \frac{e^{x+1}-2}{e^{x}+e}$ فإن أصغر عدد حقيقي A يحقق أن $|f(x) - e| < 10^{-3}$ عندما $x > A$

a	2	b	7	c	5	d	$\ln(2)$

5- إذا كان $f(x) = \ln(e^{2x} + 3)$ فإن أصغر عدد حقيقي A يحقق أن $f(x) > 10\ln(10)$ عندما $x > A$

a	2	b	7	c	5	d	$\ln(2)$

6- ليكن f التابع المعرف على $]-\infty,1[$ وفق $f(x) = \frac{2x-3}{1-x}$. إن أكبر عدد حقيقي A يحقق الشرط : إذا كان $x < A$ كان $f(x) \in]-2.05,-1.95[$

a	$\boldsymbol{-21}$	b	$\boldsymbol{-20}$	c	$\boldsymbol{-19}$	d	**21**

7- ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ عندئذٍ أصغر قيمة للعدد الحقيقي A الذي يحقق أن $f(x) \in]0.9,1.1[$ أياً تكن $x > A$ هي :

a	**100**	b	**81**	c	**29**	d	**9**

8- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = \sqrt{5x^2-1} - x$ عندئذٍ C يتقاطع مع محور الفواصل في :

a	نقطة فاصلتها $\frac{1}{4}$	b	نقطة فاصلتها $\frac{1}{2}$	c	نقطة فاصلتها $-\frac{1}{2}$	d	نقطتين فاصلتيهما $\boldsymbol{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$

Hero’s ideas	
الملاحظة الأولى	إذا كانت $a \in D_f$ فنقول عن النهاية عند a إنها موجودة إذا كان $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ (يمينها ويسارها وعندها)
مثال	$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(5x)}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$ نلاحظ أن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار تساوي 5 ولكن لا تساوي الصورة: $f(0) = 1 \neq 5$ فالنهاية غير موجودة عند الصفر أما في حالة: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$ تصبح النهاية موجودة
الملاحظة الثانية	في حالة $a \notin D_f$ يكفي أن تكون النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لتكون النهاية موجودة
مثال	$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & ; x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & ; x > 0 \end{cases}$ نلاحظ أن: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ إذن النهاية موجودة.

حول الجزء الصحيح	
صورة ونهاية تابع الجزء الصحيح عند عدد	يرمز لتابع الجزء الصحيح $E(x)$ ومهمته هي تقريب الحشوة إلى **أصغر** عدد صحيح مثل: $E(2.1) = 2$ $E(3.7) = 3$ $E(\pi) = E(3.14) = 3$ $E(\sqrt{2}) = E(1.4) = 1$ ملاحظة: لحساب نهاية الجزء الصحيح عند عدد نعوض في الفرع ذو المجال المفتوح (الفرع سنتعلمه بعد قليل)
نهاية تابع الجزء الصحيح عند ∞	1- ننطلق من: $x - 1 \leq E(x) < x$ 2- نستعمل خطوات ومبرهنات الإحاطة
كتابة الجزء الصحيح بصيغة مستقلة	1- نجزء مجال الدراسة إلى عدة مجالات طولها 1. مثال: $I = [0,2[$ $I = \begin{cases} [0,1[\\ [1,2[\end{cases}$ 2- نعوض قيمة تابع الجزء الصحيح في المجال المرافق (دوماً ستكون القيمة التي المجال مغلق عندها) 3- مبرووك عليك! • ملاحظة: إذا كان المجال من الشكل $[a,b]$ فبعد تجزيئه لمجالات طولها واحد نضيف فرع في النهاية $x = b$.
استمرار الجزء الصحيح	ندرس استمرار التابع عند كل نقطة مكررة ونميز حالتين: 1- إذا كانت جميع النقاط المكررة محققة لشرط الاستمرار ⇐ التابع مستمر على مجاله 2- إذا كانت واحدة فقط من النقاط المكررة غير محققة لشرط الاستمرار ⇐ التابع غير مستمر على مجاله
رسم الجزء الصحيح	نرسم كل فرع على مجاله (اما سيكون مستقيم أو قطع مكافئ)

1- ليكن التابع f المعرف على $[1,3[$ وفق $f(x) = 2x - 3E(x)$, إن عبارة f بصيغة مستقلة عن $E(x)$ نعطى بالشكل:

a	$\begin{cases} 2x-3 \,;\, x \in [1,2[\\ 2x-6 \,;\, x \in [2,3[\end{cases}$	B	$\begin{cases} 1 \,;\, x \in [1,2[\\ 2 \,;\, x \in [2,3[\end{cases}$	c	$\begin{cases} 2x+3 \,;\, x \in [1,2[\\ 2x-6 \,;\, x \in [2,3[\end{cases}$	d	$\begin{cases} 2x-3 \,;\, x \in [1,2[\\ 2x+6 \,;\, x \in [2,3[\end{cases}$

2- نهاية المقدار $\frac{x+E(x^2)}{x^2+1}$ عند $+\infty$ تساوي:

a	2	b	1	c	0	d	3

3- نهاية المقدار $\frac{1+E(\ln(x))}{x}$ عند $+\infty$ تساوي:

a	2	b	1	c	0	d	3

4- ليكن $f(x) = 2x + E(x) - 3$ فإن المجال الذي يحصر القيمة $f(500)$ هو:

a	$\{1497\}$	b	$[1497,1500]$	c	$[1496.1499]$	d	غير ذلك

5- التابع $f(x) = \frac{x}{4} + \sqrt{2}E(\sqrt{x})$ معرف على R عندئذٍ يمكن القول إن $f(16)$:

a	تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $3\sqrt{2}$ أو $4\sqrt{2}$ زيادة	b	تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $3\sqrt{2}$ أو $4\sqrt{2}$ نقصان
c	تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $\sqrt{2}$ نقصان	c	تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $\sqrt{2}$ زيادة

6- ليكن f التابع المعرف على $I]-2,0[$ وفق $f(x) = (x + mE(x))^2$ حيث $m \in R^*$, فإن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند (-1) هي :

a	$-\frac{2}{3}$	b	$\frac{2}{3}$	c	$\frac{3}{2}$	d	$-\frac{3}{2}$

7- التابع $E(x)$:

a	متزايد	b	متزايد تماماً	c	متناقص	d	متناقص تماما

8- التابع f المعرف وفق $f(x) = E(x) - x$ محصور بين المستقيمين

a	$y = -1 \,, y = 0$	b	$y = -1 \,, y = x$	c	$y = 2 \,, y = 0$	d	$y = -1 \,, y = 1$

9- مجموعة تعريف التابع $f(x) = \frac{1}{1-E(x)}$

a	$\boldsymbol{R}\backslash\{\mathbf{1}\}$	b	$[\mathbf{1},\mathbf{2}[$	c	$\boldsymbol{R}\backslash[\mathbf{1},\mathbf{2}[$	d	$\boldsymbol{R}\backslash]\mathbf{1},\mathbf{2}[$

حول الصفات التناظرية للتوابع		
الزوجي	الفردي	مركز التناظر
الشرط الأول: $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ الشرط الثاني: $f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow f(-x) - f(x) = 0$	الشرط الأول: $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ الشرط الثاني: $f(-x) = -f(x)$ $\Rightarrow f(-x) + f(x) = 0$	الشرط الأول: $x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f$ الشرط الثاني: $f(x) + f(2a - x) = 2b$
الخطوات: 1- إثبات الشرط الأول: - ننطلق من $x \in D_f$ - نضرب الطرفين بناقص 2- إثبات الشرط الثاني: نأخذ $f(-x)$ ونصلح لنصل إلى $f(x)$	الخطوات: 1- إثبات الشرط الأول: - ننطلق من $x \in D_f$ - نضرب الطرفين بناقص 2- إثبات الشرط الثاني: نأخذ $f(-x)$ ونصلح لنصل إلى $-f(x)$	الخطوات: 1- إثبات الشرط الأول: - ننطلق من $x \in D_f$ - نضرب بناقص - نضيف $2a$ 2- إثبات الشرط الثاني: - ننطلق من طرف للوصول للآخر
Hero's idea	التابع x^2 زوجي على $\mathbb{R}$ ولكنه ليس زوجي وليس فردي على $[0, +\infty[$	

حول إيجاد مركز التناظر	
التابع يملك مقارب شاقولي $x = x_0$ ومقارب أفقي $y = y_0$ فقط	$I(x_0, y_0)$
التابع يملك مقارب شاقولي $x = x_0$ ومقارب مائل $y = ax + b$	فاصلة مركز التناظر هي x_0 تراتيب مركز التناظر هي y_0 الناتجة عن تعويض x_0 في معادلة المقارب المائل
التابع يقبل مقاربين شاقوليين $x = x_1 , x = x_2$	فاصلة مركز التناظر تساوي $\frac{x_1+x_2}{2}$ تراتيب مركز التناظر تساوي $f(x_0)$
التابع يقبل مقاربين أفقيين $y = y_1 , y = y_2$ ومقارب شاقولي $x = x_0$	فاصلة مركز التناظر x_0 تراتيب مركز التناظر $\frac{y_1+y_2}{2}$
التابع يقبل مقاربين شاقوليين $x = x_1 , x = x_2$ ومقارب مائل معادلته $y = ax + b$	فاصلة مركز التناظر تساوي $\frac{x_1+x_2}{2}$ تراتيب مركز التناظر هي y_0 الناتجة عن تعويض x_0 في معادلة المقارب المائل

1- ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ وفق $f(x) = x + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع f هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

2- ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

3- f تابع معرف على $\mathbb{R}^*$ ووفق $f(x)=\frac{e^x+3}{e^x-1}$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع f هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

4- ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ وفق $f(x)=\frac{\ln\lvert x-1\rvert}{x-1}$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

5- ليكن f تابعاً معرفاً على $]1,3[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$(2,0)$	d	$(1,2)$

6- ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R ويقبل المستقيم $y=2x-3$ مقارباً مائلاً عند $+\infty$ و يقبل النقطة $A(1,-1)$ مركز تناظر له عندئذٍ تكون $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-2x}{f(2-x)+f(x)}$ تساوي :

a	-2	b	$-\frac{3}{2}$	c	2	d	$\frac{3}{2}$

7- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}$ إن مركز تناظر خطه البياني هو النقطة :

a	$(1,1)$	b	$(1,0)$	c	$(0,0)$	d	$(0,1)$

8- تابع يحقق عند كل x من R المساواة $\frac{f(1-x)+f(x)}{3}=1$. الخط البياني له :

a	متناظر بالنسبة للمبدأ	b	متناظر بالنسبة للنقطة $(1,3)$	c	متناظر بالنسبة للنقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$	d	ليس متناظر

9- إذا كان $x\in R\backslash\{1,-1\}$ فالمقدار $2x-3$ ينتمي إلى :

a	$R\backslash\{5,1\}$	b	$R\backslash\{1,-1\}$	c	$R\backslash\{-5,-1\}$	d	$R\backslash\{5,-1\}$

10- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{2x^2+3x+9}{x+1}$ فإن $f(-2-x)+f(x)$ تساوي :

a	3	b	-2	c	$3(x+1)$	d	$3x$

11- إذا علمت أن النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر للتابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{2x^2x+7}{x+1}$ فإن قيمة المقدار $f(-2-x)+f(x)$ هي

a	3	b	-3	c	6	d	-6

حول التابع الدوري	
تعريفه	$f(x+T)=f(x)$ أي أن دور التابع f هو المقدار الذي إضافته إلى x لا تغير الصورة (يمكن إهماله)
توابع دورية شهيرة	$\sin(x)$ أصغر دور له 2π $\cos(x)$ أصغر دور له 2π $\tan(x)$ أصغر دور له π $\sin(wx)$ أصغر دور له $\frac{2\pi}{w}$ $\cos(wx)$ أصغر دور له $\frac{2\pi}{w}$ $\tan(wx)$ أصغر دور له $\frac{\pi}{w}$
Hero's ideas	• إذا كان T دور التابع f فإنه ضربه بأي عدد صحيح يعطي دوراً جديداً لـ f وبالتالي يجب الانتباه في حال كان السؤال عن **أصغر** دور للتابع f • إذا طلب أصغر مجال يكفي دراسة التابع عليه عندئذ: 1- إذا كان دورياً ودوره T نأخذ المجال $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ أو $]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[$. 2- إذا كان زوجياً أو فردياً ننصف المجال

1- واحدة من القضايا خاطئة بخصوص التابع $f(x)=\sqrt{3+\cos(2x)}$ المعرف على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$:

a	التابع f دوري دوره الأصغر π	b	التابع f زوجي	c	التابع f متناقص	d	$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{\pi x+1}{x+3}\right)=2$

2- أصغر مجال يكفي لدراسة التابع $f(x)=x^2-\tan(x)$ هو:

a	$]0,\frac{\pi}{2}[$	b	$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	c	$]-\pi,\pi[$	d	$]0,\pi[$

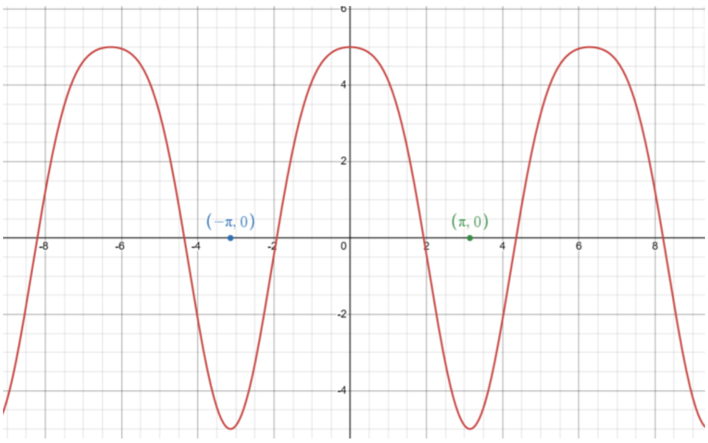
3- أصغر مجال يكفي لدراسة التابع $f(x)=4\cos^2(2x)+\sin^3(2x)$ هو:

a	$[0,\frac{\pi}{2}]$	b	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	c	$[-\pi,\pi]$	d	$[0,\pi]$

4- أصغر مجال يكفي لدراسة التابع $f(x)=5\cos^3(4x)+3\sin^2(2x)$ هو:

a	$[0,\frac{\pi}{4}]$	b	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	c	$[-\pi,\pi]$	d	$[0,\frac{\pi}{8}]$

5- في الشكل جانباً الخط البياني لتابع دوري f ونرمز لأصغر دور له T عندئذ قيمة T تساوي:



a	b	c	d
2π	$\frac{\pi}{2}$	4π	π

حول تعيين الثوابت

صيغ متكافئة	1- نعطى صيغتين إحداهما معلومة و الأخرى تشتمل على ثوابت يُطلب تعيينها 2- نصلح إحدى الصيغ (بنشرٍ أو قسمة اقليدية أو توحيد مقامات) و نطابق الصيغتين
الاستفادة من معلومات	معطيات عددها يساوي عدد المجاهيل و يوضح الجدول الآتي كيف نترجم كلاً من المعطيات إلى عبارة رياضية سيتم طرحها فيما يلي
المعطى	**العلاقة المكافئة**
الخط البياني للتابع يمر من نقطة $A(x_0, y_0)$ أو النقطة $A(x_0, y_0)$ تنتمي للخط البياني	بما ان النقطة تنتمي للخط البياني فإن : $f(x_0) = y_0$
الخط البياني يقبل مماساً ميله m في النقطة التي فاصلتها x_0	من عبارة الميل : $f'(x_0) = m$
الخط البياني للتابع يقبل مماساً ميله m في نقطة منه $A(x_0, y_0)$	هنا لدينا معلومتين : 1- النقطة A تنتمي للتابع إذن : $f(x_0) = y_0$ 2- الميل عند A هو m $f'(x_0) = m$ تذكر إذا ذكر أن المماس أفقي فإن $m = 0$
للتابع قيمة حدية عند x_0	بما أنها قيمة حدية فهي تعدم المشتق : $f'(x) = 0$
للتابع قيمة حدية عند x_0 مساوية لـ y_0	هنا لدينا معلومتين : $f'(x_0) = 0$ $f(x_0) = y_0$

للتابع مماساً معادلته $y = mx + p$ عند x_0	هنا نملك معلومتين: $f'(x_0) = m$ ويمكننا حساب تراتيب نقطة التماس من خلال تعويض x_0 في معادلة المماس فنحصل على y_0 ليكون: $f(x_0) = y_0$

1- ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{a\sqrt{x}}{x+b}$ حيث a, b عددين حقيقين مغايرين للصفر فإذا علمت أن الخط البياني لهذا التابع يقبل مماساً أفقياً معادلته $y = -1$ في النقطة التي فاصلتها $x = 1$ فإن :

a	$a = 1\ ,b = -2$	b	$a = -2\ ,b = 1$	c	$a = 0\ ,b = -1$	d	B, C صحيحتان

2- قيمة a التي تجعل التابع f المعرف وفق $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 3x$ يقبل قيمة حدية عند $x = 1$

a	-1	b	2	c	3	d	لا يمكن تعيينها

3- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$ فإن قيمتي a, b لكي يقبل التابع مماساً في النقطة $x = 0$ معادلته $y = 4x + 3$ هي :

a	$a = 3, b = 4$	b	$a = 4, b = 3$	c	$a = -4\ , b = 3$	d	$a = -3, b = 4$

4- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = sinx + ax$ عندئذٍ قيمة الثابت a التي تجعل له قيمة حدية عند $x = \frac{\pi}{3}$

a	$-\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{2}$	c	2	d	-2

5- ليكن f التابع المعرف على المجال$]0,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2x^2+ax+b}{x+1}$ (a وb عددان حقيقيان) عندئذٍ الثنائية المناسبة (a, b) لكي تكون $f(1) = 5$ قيمة حدية محلياً

a	$(1, -7)$	b	$(7,1)$	c	$(1,7)$	d	$(-1, -7)$

6- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{-1,2\}$ وفق $f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ عندئذٍ الثلاثية (a, b, c) التي تحقق أن : $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$ هي :

a	$(3, -1,8)$	b	$(3,1, -8)$	c	$(-3,1,8)$	d	$(3,1,8)$

7- ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = ax + bx\sqrt{x}$ عندئذٍ قيمة a, b ليكون للتابع قيمة حدية عند الواحد مساويةً لـ $g(-1)$

a	$a = -3, b = 2$	b	$a = -3, b = -2$	c	$a = 3, b = 2$	d	$a = 3, b = -2$

8- ليكن f التابع المعرف و الاشتقاقي على R وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b}$ حيث $a, b \in R$ عندئذٍ قيمة كلٍ من العددين a, b $f(-2) = 2$ قيمة حدية محلياً :

a	$a = 4\ , b = 1$	b	$a = -4\ , b = 8$	c	$a = 1\ , b = 8$	d	$a = 4\ , b = 8$

9- C_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عندئذ C_f يقبل مماساً أفقياً وحيداً إذا كان:

a	$b^2 - 5ac = 0$	b	$b^2 - 3ac = 0$	c	$b^2 - 4ac = 0$	d	$ac = b^2$

حول استنتاج الخطوط البيانية انطلاقاً من خط بياني معلوم	
الحالة	**النتيجة**
إذا كان $g(x) = f(-x)$	c_g ينتج عن c_f بتناظر بالنسبة لمحور التراتيب
إذا كان $g(x) = -f(x)$	c_g ينتج عن c_f بتناظر بالنسبة لمحور الفواصل
إذا كان $g(x) = -f(-x)$	c_g ينتج عن c_f بتناظر بالنسبة للمبدأ
إذا كان $g(x) = f(x+a)$	c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $-a\vec{i}$ (افقياً)
إذا كان $g(x) - f(x) = b$	c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $b\vec{j}$ (شاقولياً)
إذا كان $g(x) = \|f(x)\|$	c_g ينتج عن c_f باستبدال كل نقطة بنظيرتها بالنسبة لمحور الفواصل
إذا كان $g(x) = f(x)$ ولكن D_g محتواه في D_f (يعني مجموعة تعريف g شقفة من مجموعة تعريف f)	g مقصور التابع f على المجال D_g
إذا كان $g(x)$ تقابل عكسي لـ $f(x)$	c_g نظير c_f بالنسبة للمستقيم $y = x$
Hero's Lesson	

<table>
<tr><th colspan="2">حول دراسة تغيرات تابع</th></tr>
<tr><td>1</td><td>إيجاد مجموعة التعريف</td></tr>
<tr><td>2</td><td>حساب النهايات عند الأطراف المفتوحة والصور عند الأطراف المغلقة مع ذكر المقاربات إن وجدت</td></tr>
<tr><td>3</td><td>ذكر مجال اشتقاق التابع ثم حساب التابع المشتق</td></tr>
<tr><td>4</td><td>نعدم التابع المشتق</td></tr>
<tr><td>5</td><td>نصور القيم التي عدمت التابع المشتق</td></tr>
<tr><td>6</td><td>جدول التغيرات من الشكل:
<table>
<tr><td>x</td><td>مجموعة التعريف + القيم التي عدمت المشتق</td></tr>
<tr><td>f'</td><td>إشارات + أصفار + شلمونات</td></tr>
<tr><td>f</td><td>أسهم + شلمونات</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>ملاحظة</td><td>في حال أردت دراسة اطراد التابع فقط ستطبق نفس الخطوات السابقة ولكن بدون الرقم (2)</td></tr>
</table>

اطراد بعض التوابع المألوفة	
التابع	**اطراده**
$ax+b$	1- إذا كان $a<0$ فيكون متناقص على $\mathbb{R}$ 2- إذا كان $a>0$ فيكون متزايد على $\mathbb{R}$
x^2	- متناقص تماماً على المجال $]-\infty,0]$ - متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	- متناقص تماماً على $\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	- متزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$
$\ln(x)$	- متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$
e^x	- متزايد تماماً على $\mathbb{R}$
ولكن ستسأل نفسك... متى استخدم اطراد التوابع المألوفة؟	
حول مبرهنات اطراد التوابع المألوفة	
المبرهنة (1)	- مجموع تابعين متزايدين على I هو تابع متزايد على I - مجموع تابعين متناقصين على I هو تابع متناقص على I
المبرهنة (2)	- في حال ضُرب التابع f بعدد k: 1- إذا كان $k>0$ تبقى جهة اطراد f على حالها 2- إذا كان $k<0$ تُعكس جهة اطراد f
المبرهنة (3)	- تركيب تابعين متفقين بالاطراد هو تابع متزايد - تركيب تابعين مختلفين بالاطراد هو تابع متناقص
حول مبرهنة القيمة الوسطى	
مبرهنة الوجود ومبرهنة الوحدانية	شرط وجود حل على المجال $[a,b]$: 1- الاستمرار على المجال 2- $k\in f([a,b])$ شرط وجود حل وحيد على المجال $[a,b]$: 1- الاستمرار على المجال 2- الاطراد على المجال 3- $k\in f([a,b])$ **ملاحظة:** لتصوير مجال في تابع نميز الحالات: a- إذا كان التابع متزايد: $f([a,b])=[f(a),f(b)]$ b- إذا كان التابع متناقص: $f([a,b])=[f(b),f(a)]$ c- إذا كان التابع غير مطرد: من حقل f في جدول التغيرات
ما عدد حلول المعادلة $f(x)=k$	1- ندرس تغيرات التابع 2- نقوم بِعَدّ مرات مرور السهم من k
التأكد من وجود حل للمعادلة $f(x)=k$ على مجال	1- نوجد صورة المجال

	-2 نختبر إذا كانت k تنتمي لصورة المجال
التأكد من وجود حل للمعادلة $f(x) = 0$ على مجال	$f(a).f(b) < 0$
حصر حل المعادلة $f(x) = k$ ضمن مجال طوله 1	-1 نحدد من الرسم أو من جدول التغيرات مجالاً من النمط $[a, +\infty[$ أو من $]-\infty, a]$ بحيث ينتمي الحل له -2 نوجد $f(a), f(a+1)\,, f(a+2)\,, \dots$ حتى نحصل على صورتين تحصران k
حصر حل المعادلة $f(x) = 0$ ضمن مجال طوله 1	-1 نحدد من الرسم أو من جدول التغيرات مجالاً من النمط $[a, +\infty[$ أو من $]-\infty, a]$ بحيث ينتمي الحل له -2 نوجد $f(a), f(a+1)\,, f(a+2)\,, \dots$ حتى نحصل على تغير في الإشارة

-1 بفرض f تابع معرف على R^* و يحقق أنّ :

- $f(x) = f(-x)$
- عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على المجال $]0, +\infty[$ ثلاثة حلول مختلفة

عندئذٍ عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على R^*

a	3	b	4	c	5	d	6

-2 عدد حلول المعادلة $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$

a	0	b	1	c	2	d	5

-3 عدد حلول المعادلة $x(2x+1)^2 = 5$

a	0	b	1	c	2	d	3

-4 ن f تابع متزايد تماماً على المجال $\mathrm{I} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ و مستمراً عليه عندئذٍ الشرط اللازم و الكافي ليكون للمعادلة $\mathrm{f(x)} = 0$ حل وحيد في المجال I هو :

a	$f(a.b) < 0$	b	$f(a)f(b) < 0$	c	$f(a)f(b) > 0$	d	$f(a).f(b) = 0$

-5 ليكن التابع f المعرف على المجال $]1, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$ عندئذ عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

a	0	b	1	c	2	d	3

-6 عدد حلول المعادلة $3x + \cos(x) = 0$:

a	0	b	1	c	2	d	3

-7 عدد حلول المعادلة $x^3 - x - 1 = 0$:

a	0	b	1	c	2	d	3

-8 عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ علماً أنّ $I =]1\,, +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$:

a	0	b	1	c	2	d	3

9- عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ حيثُ $f(x)=x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$:

a	0	b	1	c	2	d	3

10- ليكن $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}$ فإنّ عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$:

a	0	b	1	c	2	d	3

11- ليكن $f(x)=5-2x+3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ المعرّف على المجال $]4,+\infty[$ فإذا علمت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّاً وحيداً α فإنّ هذا الحل ينتمي إلى المجال:

a	$]7,8[$	b	$]6,7[$	c	$]5,6[$	d	$]4,5[$

12- إذا علمت أنّ $f(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}$ يقبل مماساً عند الصفر معادلته $y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$ عندئذٍ:

a	C فوق T على $\mathbb{R}$	b	C تحت T على $\mathbb{R}$	c	C فوق T على $]0,+\infty[$	d	C تحت T على $]0,+\infty[$

13- أوسع مجال تكون عليه المتراجحة $\ln(x)\le\frac{x}{x+1}$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	b	$]-\infty,-1[$	c	$]-1,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

14- أوسع مجال تكون عليه المتراجحة $\ln(x+1)<\sqrt{x+1}$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	b	$]-\infty,-1[$	c	$]-1,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

15- أوسع مجال يكون عليه $e^x>x$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	b	$]-\infty,-1[$	c	$]-1,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

16- أوسع مجال يكون عليه $\ln(x)\le 2\sqrt{x}$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	b	$]-\infty,0[$	c	$]0,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

17- ليكن $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة:

a	$A(1,2)$ مركز تناظر.	b	C فوق مقاربه الأفقي على $]1,+\infty[$
c	C تحت مقاربه الأفقي على $]1,+\infty[$	d	f متناقص تماماً.

18- إذا كان $f(x)=(x+1)\ln(x)$ فإنّ إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة:

a	$g(x)=x\ln(x)+x+1$	b	$g(x)=\ln(x)+x+1$	c	$g(x)=x\ln(x)+x$	d	$g(x)=x^2\ln(x)+x+1$

19- إذا كان $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln(x)$ فإنّ إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة:

a	$g(x)=x^2\ln(x)+x^2-1$	b	$g(x)=x^2\ln(x)-1$	c	$g(x)=x^2\ln(x)$	d	$g(x)=x^2\ln(x)+x^2-2$

20- التابع $f(x)=(x+1)\ln(x)$:

a	يقبل قيمة حديّة عند $a=e^{-3}$	b	يقبل قيمة حديّة عند $a=e^{-\frac{3}{2}}$
c	يقبل قيمتان حديّتان.	d	مطّرد تماماً.

21- التابع $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln(x)$:

a	يقبل قيمة حديّة عند $a=1$	b	يقبل قيمة حديّة عند $a=0$
c	يقبل قيمتان حديّتان.	d	لا يقبل قيم حديّة.

حول استنتاج إشارة تابع		
1	$\nearrow$ عدد سالب $\searrow$	$f(x)$
$f(x) \leq$ عدد سالب < 0		
2	$\nearrow$ 0 $\searrow$	$f(x)$
$f(x) \leq 0$		
3	$\searrow$ عدد موجب $\nearrow$	$f(x)$
$f(x) \geq$ عدد موجب > 0		
4	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$f(x)$
$f(x) \geq 0$		
5	سالب $\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$ سالب	$f(x)$
$f(x) \leq 0$		
6	موجب $\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow$ موجب	$f(x)$
$f(x) \geq 0$		
7	$\nearrow\nearrow$ 0 $\nearrow\nearrow$	$f(x)$
سالب على المجال اليساري وموجب على المجال اليميني		

متى نستخدم ما سبق؟	1- عندما يكون السؤال عن دراسة إشارة تابع 2- متراجحات مختلطة (تابع مساعد) 3- دراسة إشارة مشتق مختلط (تابع مساعد) 4- الوضع النسبي عندما يكون الفرق تابع مختلط (تابع مساعد)

حول الأوضاع النسبية		
الفرق تابع أولي (نوع واحد فقط)	الفرق تابع مختلط	الفرق من الشكل $f(x) - \ell$
1- ندرس إشارة الفرق (إما واضح أو نعدم ونشكل جدول)	1- نسمي الفرق تابعاً مساعداً 2- ندرس اطرادہ 3- نستنتج إشارته	1- ندرس تغيرات f 2- نضيف سطر $f(x) - \ell$ إلى جدول التغيرات **ملاحظة:** عند طرح عدد من $f(x)$ يطرح من صوره ونهاياته

حول التقابل والتقابل العكسي	
شرط أن يكون f تقابل	1- f مستمر على I 2- f مطرد على I
معنى أن يكون f تقابل	أي يوجد له تابع عكسي g ندعوه "التقابل العكسي" ونرمز له $f^{-1}(x)$ ويحقق: 1- $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ 2- c_f و c_g متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول والثالث $y = x$
إثبات أن f و g يمثلان تقابلاً وتقابله العكسي	1- نثبت أن كل من f و g يحقق شرط التقابل 2- نثبت أن $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

إيجاد التابع العكسي "التقابل العكسي"	1- $D_g = f(I)$ 2- نضع $y = f(x)$ 3- نبدل كل x بـ y وكل y بـ x أي $x = f(y)$ 4- نعزل y فنحصل على $y = g(x)$
حول مشتقات من مراتب عليا	
تمهيد	1- ترميز: $f''(x) = f^{(2)}(x)$ $f'''(x) = f^{(3)}(x)$ وهكذا يكون رمز المشتق من المرتبة n هو: $f^{(n)}(x)$ 2- إن: $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$ 3- أنصحك بحفظ أن المتتالية: $1,1,2,6,24 \ldots = 0!\,,1!\,,2!\,,3!\,,4! \ldots$ 4- إن التناوب بالإشارة يعبّر عنه بصيغتين: a- إذا كان أول حد موجباً $(-1)^{n+1}$ حيث $n \geq 1$ b- إذا كان أول حد سالباً $(-1)^{n}$ حيث $n \geq 1$ 5- في المشتقات من مراتب عليا نقبل أن: $[\sin(wx)]' = w\sin\left(wx + \frac{\pi}{2}\right)$ $[\cos(wx)]' = w\cos\left(wx + \frac{\pi}{2}\right)$ وعليه يكون: $[\sin(wx)]^{(n)} = w^n \sin\left(wx + n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $[\cos(wx)]^{(n)} = w^n \cos\left(wx + n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 6- إن: $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$
Hero's idea	**الطريقة الغشاشة:** 1- نوجد المشتقين من المرتبة 3 و 4 2- نعوض $n = 3$ و $n = 4$ في الخيارات ونقارن

1- المشتق من المرتبة الثالثة للتابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ يساوي :

a	$-\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$	b	$-\frac{3\sqrt{x}}{8x^4}$	c	$\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$	d	$\frac{3\sqrt{x}}{8x^4}$

2- مشتق التابع f المعرف على R وفق $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ يساوي :

a	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	b	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	c	$\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	d	0

3- ليكن $f(x) = 1 + x + 3x^2 + 4x^5 + 5x^6$ عندئذٍ المشتق من المرتبة السابع للتابع f :

a	0	b	720	c	$120x^5$	d	1

حول المماس المشترك	
شرطه	نقول عن f و g انهما يقبلا مماساً مشتركاً عند a إذا تحقق شرطان: 1- $f(a) = g(a)$ 2- $f'(a) = g'(a)$
حساب فاصلة المماس المشترك	1- نضع الشرطين فنحصل على جملة معادلتين بمجهول واحد 2- نحسبه من إحداهما ونتحقق في المعادلة الأخرى فإذا كانت محققة قبل التابعين مماساً مشتركاً.
مثال	معادلة المماس المشترك للتابعين $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ هي: نضع: $f(a) = g(a)$ $\ln(a+1) = \frac{a}{a+1}$ و أيضاً: $f'(a) = g'(a)$ $\frac{1}{a+1} = \frac{1}{(a+1)^2}$ من المعادلة الثانية: $a+1 = 1 \Rightarrow a = 0$ نتحقق في المعادلة الأولى: $\ln(0+1) = \frac{0}{0+1} \Rightarrow 0 = 0$ إذن يملكان مماساً مشتركاً عند $a = 0$: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ $y = x$

حول مقصور تابع
نقول عن التابع : $g: D_g \to R$ إنه مقصور للتابع : $f: D_f \to R$ إذا تحقق شرطان : $D_g \subseteq D_f$ $f(x) = g(x) \ ; \forall x \in D_g$ و عليه يكون منحني التابع g هو الجزء من منحني التابع f على المجموعة D_g

مسائل عامة

ضماناً لشمولية أفكار جميع المسائل سيتم في كل مسألة مما يلي تعريف التابع وبناء طلبات عليه بحيث يكون كل طلب مستقل عن الآخر فيأتي في الامتحان واحد من هذه الطلبات فقط على هذا التابع وليس المسألة كاملةً

1- ليكن f التابع المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق: $f(x) = \sqrt{x+1}$ عندئذٍ القيمة التقريبية للعدد f(3.1) هي

a	$\frac{81}{4}$	b	$\frac{81}{40}$	c	$\frac{4}{81}$	d	$\frac{40}{81}$

2- لنعرف التوابع f, h, g وفق: $g(x) = x\sqrt{x}$, $h(x) = x|x|$, $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$ عندئذ

a	f اشتقاقي عند الصفر	b	h, g اشتقاقيان عند الصفر	c	g غير اشتقاقي عند الصفر	d	f, g, h اشتقاقية عند الصفر

3- ليكن f التابع المعرف على $[0,1]$ وفق $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$ عندئذ الخط البياني للتابع f

a	له مماس أفقي عند الواحد	b	له مماس شاقولي عند الواحد	c	ليس له مماس عند الواحد	d	له مماس عند الواحد ميله 1

4- التابع f معرف على $I =]1,2[$ ومعطى بالعلاقة $f(x) = -2x^2 + 4x + \sqrt{-2x^2 + 4x} - \frac{1}{-2x^2+4x}$ هو تابع:

a	متناقص تماماً	b	متزايد تماماً	c	غير مطرد	d	فردي

5- ليكن f التابع المعرف على R^* الذي يحقق أن $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ فإذا علمت أن الشعاعين $\vec{u}(k, f'(x))$ و $\vec{v}(x, f(x))$ مرتبطان خطياً فإن قيمة العدد الحقيقي k

a	-2	b	-1	c	$\frac{1}{2}$	d	3

6- إذا كان التابع f المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{1 + \sin x + 3\cos^2 x} - 2$ كان $f'(x)$ يساوي:

a	0	b	1	c	$\frac{1}{4}$	d	$\frac{sinx + 6cosx}{2\sqrt{1 + sinx + 3\cos^2 x}}$

7- التابع f معرف وفق $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 2 : x < 1 \\ 8x + b \quad : x \geq 1 \end{cases}$ ويقبل الاشتقاق على R عندئذ:

a	$a = 3, b = -1$	b	$a = -3, b = 1$	c	$a = 1, b = 3$	d	$a = -3, b = -1$

8- نهاية $\lim_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x}$ تساوي:

a	$-\infty$	b	-1	c	1	d	0

9- إن مشتق التابع $f(x) = 4\sin^3(x) + 3cosx$:

a	$f'(x) = 3sinx(2sin2x - 1)$	b	$f'(x) = 3sinx(4cosx - 1)$
c	$f'(x) = 3sinx(4sinx - 1)$	d	$f'(x) = 4\cos^3 x - 3sinx$

10- إن نهاية التابع f(x) = tanx عندما $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ تساوي :

a	$+\infty$	b	$-\infty$	c	0	d	1

11- التابع sin (3x) دوري و اصغر دور له :

a	2π	b	$\frac{2\pi}{3}$	c	$\frac{3\pi}{2}$	d	3π

12- التابع $x \longmapsto tanx$ المعرف على $]0,\frac{\pi}{2}[$:

a	زوجي	b	متزايد تماماً	c	متناقص تماماً	d	دوري دوره $\frac{\pi}{2}$

المسألة الأولى

ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{\ln(x)+x^2+x}{2x}+3x$. أجب عن كل مما يلي:

1- واحدة من القضايا الآتية خاطئة. اخترها:

a	للتابع مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته $y=\frac{5}{2}x+1$	b	c_f يقع فوق مقاربه المائل على المجال $]1,+\infty[$
c	للتابع مقارب شاقولي وحيد	d	للتابع مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته $y=\frac{7}{2}x+1$

2- مشتق التابع f يعطى بالعلاقة:

a	$\frac{7x^2+1}{2x^2}$	b	$\frac{7x^2+1-\ln(x)}{2x^2}$	c	$\frac{7x^2+1+\ln(x)}{2x^2}$	d	$\frac{7x^2+1-\ln(x)}{x^2}$

المسألة الثانية

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$. أجب عن كل مما يلي:

1- اختر القضية الصحيحة بخصوص f:

a	للتابع f مقارب أفقي عند $+\infty$	b	للتابع f مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته $y=x-2$
c	للتابع f مقارب مائل عند $-\infty$ معادلته $y=x-1$	d	مشتق التابع f يعطى بالشكل $f'(x)=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$

2- عدد القيم الحدية للتابع f:

a	1	b	2	c	3	d	لا يوجد

3- إذا علمت أن $y=1$ هي معادلة المماس الأفقي للخط البياني للتابع f عندئذ يكون c_f فوق مقاربه على المجال:

a	$]0,+\infty[$	b	$]1,+\infty[$	c	$]-\infty,1[$	d	$]-\infty,0[$

المسألة الثالثة

ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{x}{e^x}$. أجب عن كل مما يلي:

1- نهاية f عند $+\infty$ تساوي:

a	0	b	1	c	$+\infty$	d	$-\infty$

2- نهاية f عند $-\infty$ تساوي:

a	0	b	1	c	$+\infty$	d	$-\infty$

3- عبارة المشتق النوني للتابع f هي:

a	$\frac{(-1)^{n+1}(x-n)}{e^x}$	b	$\frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}$	c	$\frac{(-1)^n(n-x)}{e^x}$	d	$\frac{(-1)^n(x-n)}{e^{nx}}$

4- مساحة السطح المحصور بين c_f ومحور الفواصل والمستقيمان $x=\ln(2)$ ، $x=-\ln(2)$ هي:

a	$2\ln(2)$	b	$2\ln(2)-1$	c	$\ln(2)-1$	d	$\ln(4)+2$

5- لنفرض وجود عددين a و b يحققان $ae^b=be^a$ عندئذ واحدة من العبارات الآتية صحيحة:

a	للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان عندما $m\in]1,\frac{1}{e}[$	b	$\frac{a}{b}=e^{b-a}$
c	المعادلة $f(x)=m$ مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$	d	$e^{b-a}=a.b$

المسألة الرابعة

ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{1}{x}+xln(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$.

1- إشارة المشتق f' هي من إشارة التابع:

a	$x^2\ln(x)-1$	b	$\ln(x)+x^2-1$	c	$x^2\ln(x)+x^2-1$	d	$x^2\ln(x)+x^2$

2- قيمة $f'(1)$:

a	0	b	1	c	2	d	$\ln(2)$

3- مساحة السطح المحصور بين المستقيمين $x=e$, $x=\frac{1}{e}$ ومحور الفواصل تساوي:

a	0	b	1	c	2	d	$\ln(2)$

4- معادلة المماس للخط البياني للتابع في النقطة التي فاصلتها $a=1$ هي:

a	$y=x+1$	b	$y=0$	c	$y=-x+1$	d	$y=1$

حول التوابع المركبة	
نهاية تابع مركب	إذا كان $f(x)=g(u(x))$ فلحساب نهاية $f(x)$ عند a نتبع الخطوات: 1- نحسب نهاية المضمون $u(x)$ عند a (ونفرض الجواب ℓ) 2- نحسب نهاية $g(x)$ عند ℓ 3- مبروك عليك!!!!
	إذا كان التابع من النمط $\frac{\sin(f(x)-2)}{f(x)-2}$ أو مثلاً $\left(\sqrt{2+\frac{1}{f(x)}}-\sqrt{2}\right)f(x)$ وعلمنا نهاية $f(x)$ فإننا: 1- نستبدل $f(x)$ بـ t

	2- نجعل t تسعى لنهاية $f(x)$ (للجواب تبع النهاية)
مشتق تابع مركب	القانون العام: $[f(u(x))]' = f'(u(x)).u'(x)$
Hero's ideas	• إذا كان $g'(x) = 0$ فإن $g(x)$ تابع ثابت • إذا كان $g(x)$ تابع ثابت فإن $g(x) = g\left(\text{أي عدد}\right)$ • نهاية التابع الثابت تساويه • إذا كان $g(x)$ تابع ثابت فإنه خطه البياني مستقيم أفقي معادلته الثابت $= y$

1- ليكن f التابع المعرف على $]3,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ عندئذٍ نهاية $f(f(x))$ عند 3 هي

a	$-\infty$	b	$+\infty$	c	3	d	غير موجودة

2- إذا كان $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ تساوي:

a	$\frac{5}{3}$	b	$\frac{2}{3}$	c	$\frac{3}{5}$	d	2

3- إذا كان $f(x) = \frac{x+2}{x}$ و $g(x) = \frac{2}{x-1}$ عندئذٍ $f(g(x))$ يساوي:

a	x	b	$\frac{1}{x}$	c	$-x$	d	$\frac{x+1}{x-1}$

4- ليكن f و g التابعان المعرفان وفق $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sin x$ عندئذٍ يكون التركيب $(gof)(x)$ يساوي

a	$\sin(x^2-1)$	b	$\sin^2 x - 1$	c	$(\sin x - 1)^2$	d	$\sin(x^2) - 1$

5- بفرض I مجالاً يحقق أن $0 \notin I$ و $g(x) \neq 0$ مهما كانت $x \in I$ و f و g اشتقاقي على I . فأذا علمت أن :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad (fog)(x) = x$$

فإن $g'(x)$ يساوي :

a	1	b	x	c	$f(x)$	d	$g(x)$

6- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ عندئذٍ $\sqrt{1+x^2}f'(x)$ يساوي

a	0	b	1	c	$f(x)$	d	$-f(x)$

7- ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ و ليكن $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ عندئذٍ

a	$g(x) = f(x)$	b	$g(x) = f(-x)$	c	$g(x) = -f(x)$	d	$g(x) = -f(-x)$

8- ليكن f تابعاً معرفاً على R يحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ولنضع $g(x) = f(x) + f(-x)$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة

a	C_g متناظر لمحور التراتيب	b	التابع g ثابت	c	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2f(0)$	d	التابع g غير محدود

9- ليكن f تابعاً معرفاً على R يحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ولنضع $g(x) = f(x) + f(\frac{1}{x})$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة

a	التابع g متزايد	b	التابع g ثابت
c	$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2f(1)$	d	مساحة السطح المحصور بين C_g و محوري الإحداثيات و المستقيم $x = \frac{1}{2}$ تساوي $f(1)$

10- ليكن f تابعاً معرفاً على R يحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ولنضع $g(x) = f(tanx) - x$ عندئذٍ $g'(x)$ يساوي :

a	0	b	$\frac{1}{1+\tan^2 x}$	c	$\tan^2 x$	d	$\frac{1}{1+\tan^2 x} - 1$

11- ليكن f التابع المعرف على $]-5,\infty[$ وفق $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ عندئذٍ $f(f(x))$ يُعطى بالقاعدة

a	$\frac{-x+6}{3x+11}$	b	$\frac{-x+9}{3x+11}$	c	$-\frac{x+9}{3x+11}$	d	$\frac{x+9}{3x+11}$

12- ليكن f تابع ليس زوجي و ليس فردي و معرف على R و g تابع معرف على R وفق

$g(x) = f(x) + f(-x)$ عندئذٍ يكون التابع g :

a	فردياً	b	دورياً	c	ليس ثابتاً	d	زوجياً

13- بفرض f تابع معرف على R ويحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ وليكن g معرف على R وفق:

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$

عندئذٍ مشتق التابع g يساوي:

a	$g'(x) = \frac{2}{1+x^2}$	b	$g'(x) = 0$	c	$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	d	$g'(x) = 1$

14- بفرض f تابع معرف على R ويحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ وليكن g معرف على R وفق:

$$g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

عندئذٍ مشتق التابع g يساوي:

a	$g'(x) = \frac{2}{1+x^2}$	b	$g'(x) = 0$	c	$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	d	$g'(x) = 1$

15- بفرض f تابع معرف على R ويحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ وليكن g معرف على R وفق:

$$g(x) = f(tanx) - x$$

عندئذٍ مشتق التابع g يساوي:

a	$g'(x) = \frac{2}{1+x^2}$	b	$g'(x) = 0$	c	$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	d	$g'(x) = 1$

16- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1,1\}$ وفق $f(x) = |x-1| + \frac{1}{x^2-1}$ إن معادلة المماس للخط C في النقطة منه التي فاصلتها صفر هي :

a	$y = x$	b	$y = -x$	c	$y = x - 1$	d	$y = -x + 1$

17- بفرض $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+x+3}$ عندئذٍ عدد المماسات للخط C_f المارة من المبدأ (وليس بالضرورة في المبدأ)

a	0	b	1	c	2	d	3

حول معادلة المماس	
ملاحظة	يجب التفريق دوماً بين معلومتين: 1- نقطة التماس: هي النقطة التي وقع فيها تماس بين مستقيم (المماس) والخط البياني للتابع 2- نقطة يمر منها المماس: هي عبارة عن نقطة تنتمي لمعادلة المماس فقط وليس من الضروري أن تكون تنتمي للخط البياني للتابع
قانون معادلة المماس	$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ حيث أن: a الفاصلة $f(a)$ الترتيب $f'(a)$ الميل
الحالة (1)	معادلة مماس عُلم فاصلة نقطة التماس a: 1- نحسب $f(a)$ و$f'(a)$ 2- نعوض في قانون معادلة المماس
الحالة (2)	معادلة مماس عُلم تراتيب نقطة التماس $f(a)$: 1- نضع $f(x) = f(a)$ 2- نعزل لنصل لـ $x = a$ 3- نحسب $f'(a)$ 4- نعوض في قانون معادلة المماس
الحالة (3)	معادلة مماس عُلم ميله $f'(a)$: 1- نضع $f'(x) = f'(a)$ 2- نعزل لنصل لـ $x = a$ 3- نحسب $f(a)$ 4- نعوض في قانون معادلة المماس
الحالة (4)	معادلة مماس عُلمت معادلة مستقيم موازي له $y = mx + p$: 1- نسرق الميل m 2- نضع $f'(x) = m$ 3- نعود للحالة (3)
الحالة (5)	معادلة مماس عُلمت معادلة مستقيم معامداً له $y = m'x + p$: 1- نحسب ميل المماس المطلوب من القانون $m = -\frac{1}{m'}$. 2- نضع $f'(x) = m$. 3- نعود للحالة (3)

الحالة (6)	معادلة مماس في النقطة التي فاصلتها تعدم المشتق الثاني: 1- نشتق مرتين لنصل لـ $f''(x)$ 2- نضع $f''(x) = 0$ 3- نعزل لنصل لـ $x = a$ 4- نحسب $f'(a)$ و $f(a)$ 5- نعوض في قانون معادلة المماس
الحالة (7)	معادلة المماس في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: 1- نضع $x = 0$ 2- نعود للحالة (1)
الحالة (8)	معادلة المماس في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل: 1- نضع $f(x) = 0$ 2- نعزل لنصل لـ $x = a$ 3- نعود للحالة (2)
الحالة (9)	معادلة المماس الأفقي للتابع: 1- نضع $f'(x) = 0$ 2- نعود للحالة (3)
الحالة (10)	معادلة المماس الشاقولي للتابع: تكون فقط عندما تكون نهاية معدل التغير لانهائية: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$ وتكون معادلة المماس الشاقولي هي x = a
الحالة (11)	معادلة نصف المماس اليميني واليساري: $y_1 = f'(a^+)(x-a) + f(a)$ $y_2 = f'(a^-)(x-a) + f(a)$ ويكونان فقط عندما يكون المشتق من اليمين عند a لا يساوي المشتق من اليسار عند a

حول قابلية الاشتقاق عند نقطة

إذا كان التابع جذري أو قيمة مطلقة ينعدم مضمونه عند x_1 و x_2 فإن المضمون يكتب بالشكل:

$$(x - x_1)(x - x_2)$$

فإذا كان أحد هذه الأقواس مضروب بالجذر أو القيمة المطلقة يكون التابع اشتقاقياً عند القيمة التي تعدمه (قد يكون كليهما أو ولا نقطة منهما)

التكامل

إثبات أن F تابع أصلي	إثبات أن F و G تابعان أصليان
-1 F اشتقاقي على I. -2 $F'(x) = f(x)$	نثبت أن: $F(x) - G(x) = \underbrace{k}_{\text{ثابت}}$

إيجاد التوابع الأصلية لتوابع بسيطة

$f(x)$		$f(ax+b)$	
$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x^n\ ; n \neq -1$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$(ax+b)^n\ ; n \neq -1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\pm e^{\pm x}$	$e^{\pm x}$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	e^{ax+b}
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{a}\ln\|ax+b\|$	$\frac{1}{ax+b}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$	$1+\tan^2 ax+b$
$-\cot(x)$	$1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$	$1+\cot^2 ax+b$
إضافات من نوطة			

ملاحظات هامة:

-1 التكامل يحترم الجمع والطرح والأمثال لا تكامل.

-2 بعد كل تكامل نضع $+k$.

-3 تذكر أن: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ وأن $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

أي قوة أو جذر في المقام يرفع إلى البسط مع تغيير إشارة الأس.

إيجاد تابع أصلي لتابع جداء

تغيير المتحول	بسيط × بسيط (اختلاف بالنوع)
-1 نفرض مضمون المركب H. -2 نوجد H'. -3 نظهر H' في عبارة $f(x)$. -4 نحذف المشتق ونكامل. -5 نعوض قيمة H. حالة خاصة: $\frac{1}{x}\times\underbrace{(\text{لوغارتمي})^{n}}_{H^n}$	-1 أسي × صحيح -2 مثلثي × صحيح -3 لوغارتمي × صحيح -4 لوغارتمي × $\frac{1}{x^n}$ و $n \neq 1$. -5 اسي × مثلثي التكامل بالتجزئة: $\int_a^t u.v'dx = [u.v]_a^t - \int_a^t u'.v\,dx$
لتوضيح أكثر:	
$u(x).e^H$ $u(x)\cos(H)$ $u(x)\sin(H)$ $u(x)H^n$ $u(x)f(H)$	

التكاملات الكسرية

البسط مشتق المقام	درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام	درجة البسط أصغر تماماً من درجة المقام (تحليل المقام)	
$\ln\lvert \text{المقام} \rvert + k$ **ملاحظة:** للتخلص من القيمة المطلقة: 1- المضمون مثلثي (دائرة) 2- المضمون ليس مثلثي (قيمة تجريبية)	1- قسمة البسط على المقام قسمة إقليدية 2- نكتب التابع بالشكل: $f(x) = \text{الناتج} + \dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$	المقام مطابقة: نرفع المقام للبسط ونغير إشارة الأس	المقام قوسين مختلفين: تفريق كسور

التكاملات المشابهة للصيغة $\frac{1}{e^x+1}$ نضرب البسط والمقام بـ e^{-x} والعكس بالعكس

أمثلة

$f(x) = \dfrac{3}{5x-4}$ .... $f(x) = \tan(x)$ .... $f(x) = \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$ .... $f(x) = \dfrac{1}{\sin(2x)}$ .... $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ .... $f(x) = \dfrac{2x^2+x+7}{x+1}$ .... $f(x) = \dfrac{2x^3+3x+1}{6x}$	$f(x) = \dfrac{1}{1-2x+x^2}$ .... $f(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)^3(x^2+2x-3)}$ ....

التكاملات المثلثية		
جميع الأسس زوجية	يوجد أس فردي	جداء تابعين مثلثيين
$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$ $\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$	$\cos^{2k+1} x =$ $\cos^{2k}(x).\cos(x) =$ $(\cos^2 x)^k.\cos(x) =$ $(1-\sin^2 x)^k \cos(x)$ ثم ننشر المطابقة ونفرض $\sin(x) =$ H فيكون $H' = \cos(x)$ انتبه!! تكامل H' لحالو هو H	$\cos(a).\cos(b) =$ $\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$ $\sin(a).\sin(b) =$ $-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$ $\sin(a).\cos(b) =$ $\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

كيف نكامل القيمة المطلقة؟!

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

1- نعدم $f(x)$ أي نضع $f(x) = 0$

2- نحل المعادلة فنجد أن $x = c$

3- نجزء التكامل:

$$\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|\,dx$$

4- على المجال الذي يكون عليه $f(x)$ سالباً نضع $|f(x)| = -f(x)$
وعلى المجال الذي يكون عليه $f(x)$ موجباً نضع $|f(x)| = f(x)$
ثم نكامل.

كيف نكامل $min - max$؟!

لإيجاد $\min(f(x), g(x))$:

1- نضع $f(x) = g(x)$.

2- نحل المعادلة.

3- ننظم الجدول:

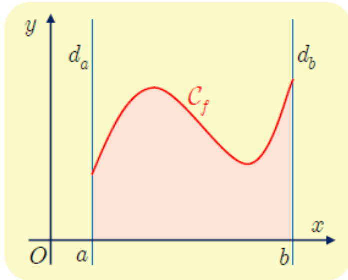
x	a	x_0	b
$\min(f(x), g(x))$	نجرب قيمة في التابعين ونختار التابع الذي يعطي القيمة الأصغر	|	نجرب قيمة في التابعين ونختار التابع الذي يعطي القيمة الأصغر

مساحة لخط بياني وحيد

التابع فوق الأرض

المساحة المحصورة بين الخط البياني ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a_1 , x = a_2$:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

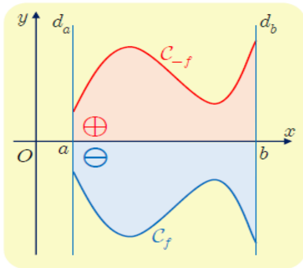


التابع تحت الأرض

المساحة المحصورة بين الخط البياني ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a_1 , x = a_2$:

$$-\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

$$= \int_{a_2}^{a_1} f(x)\,dx$$



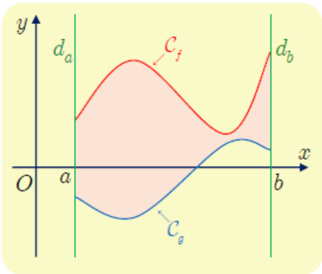
مساحة بين خطين

دائماً سيكون الشرط:

$$\int_{a_1}^{a_2} \text{الأعلى} - \text{الأدنى} \; dx$$

ملاحظة:

من الممكن أن يكون المساحة المطلوبة بين خطين بيانيين **أو** خط بياني ومستقيم مائل.



الحجوم

حجم كرة انطلاقاً من مساحة مقطع

1- نحسب مساحة مقطع من هذا المجسم بدلالة متحول واحد ونرمز لها A (متحول).

2- نكامل تابع المساحة A على الحدود المناسبة.

حجم مجسم ناتج عن دوران منحنى لتابع

نستعمل القانون:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

أتمتة أسئلة الوحدة في التكامل

حساب تكاملين معاً

نعطى تكاملين محددين لهما نفس الحدود I و J ولكن!! أحدهما لسنا قادرين على حسابه عندئذ بحساب أحدهما و $I \pm J$ أو بحساب $I + J$ و $I - J$ يمكن استنتاج قيمة كل منهما

إيجاد تابع أصلي بالاستفادة من معادلة تفاضلية

إذا استطعنا الوصول إلى معادلة تفاضلية خطية من الشكل $f(x) = af'(x) + bf''(x)$ عندئذ بمكاملة الطرفين نصل إلى $F(x) = af(x) + bf'(x)$

حيث $\int f(x) = F(x)$, $\int f'(x) = f(x)$, $\int f''(x) = f'(x)$

المتراجحات والتأطير

مبرهنة: إذا كان F و G تابعان أصليان للتابعين f و g على الترتيب على I ويتحقق أن:

$$\forall x \in I \, ; f(x) \le g(x) \Rightarrow F(x) \le G(x)$$

1- ليكن لدينا التابعان $F(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+1}$ و $G(x) = \frac{2x^2+\lambda x+5}{2x+2}$ قيمة λ ليكون التابعين تابعين أصليين للتابع ذاته هي:

a	9	b	2	c	3	d	

2- ليكن لدينا التابعان $F(x) = \lambda - 2\cos^2(x)$ و $G(x) = -2\cos^2(x)$ قيمة λ ليكون التابعين تابعين أصليين للتابع ذاته هي:

a	2	b	1	c	5	d	$\lambda \in \mathbb{R}$

3- قيمة التكامل $\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2+x}\,dx$ تساوي:

$\frac{1}{2}$	d	$\frac{3}{2}$	c	$-\frac{10}{24}$	b	$\frac{e-1}{2}$	a

4- التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ تساوي:

$2\sqrt{x^2+3}$	d	$2\sqrt{x^2-9}$	c	$\sqrt{x^2-9}$	b	$\sqrt{x^2+3}$	a

5- قيمة التكامل $\int_1^0 x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\,dx$ تساوي:

$\frac{1}{2}$	d	$\frac{3}{2}$	c	$-\frac{10}{24}$	b	$\frac{e-1}{2}$	a

6- قيمة التكامل $\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\,dx$ تساوي:

$\frac{1}{2}$	d	$\frac{3}{2}$	c	$-\frac{10}{24}$	b	$\frac{e-1}{2}$	a

7- قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}\right)dx$ تساوي:

$\frac{1}{2}$	d	$\frac{3}{2}$	c	$-\frac{10}{24}$	b	$\frac{e-1}{2}$	a

8- قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{\ln^2 x+2\ln(x)+2}{x}\right)dx$ تساوي:

4	d	$\frac{4-\pi}{4}$	c	2	b	$\frac{10}{3}$	a

9- قيمة التكامل $\int_{e^2}^{e^3} \left(\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)-1}}\right)dx$ تساوي:

4	d	$\frac{4-\pi}{4}$	c	2	b	$\frac{10}{3}$	a

10- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x)\,dx$ تساوي:

4	d	$\frac{4-\pi}{4}$	c	2	b	$\frac{10}{3}$	a

11- قيمة العدد k التي تحقق $\int_0^k (x^2+x)dx=\frac{5}{6}$ هي:

$k=4$	d	$k=2$	c	$k=1$	b	$k=\frac{1}{2}$	a

12- إذا علمت أن $x\in[0,a]$ فواحدة من المتراجحات الآتية صحيحة:

$\frac{1}{a+1}\le\frac{\ln(a+1)}{a}\le 0$	b	$\frac{1}{a+2}\le\frac{\ln(a+1)}{a}\le 1$	a
$\frac{1}{a+1}>\frac{\ln(a+1)}{a}>1$	d	$\frac{1}{a+1}\le\frac{\ln(a+1)}{a}\le 1$	c

13- قيمة التكامل $\int_1^0 \frac{x}{e^x}dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

14- قيمة التكامل $\int_0^{\pi}(2x+1)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

15- قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{1+\ln(x)}{x^2}\right)\, dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

16- قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{1}{x^2}-\frac{3\ln(x)}{x^2}\right)\, dx$ تساوي:

e	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\frac{2-e}{e}$	b	$\frac{1}{e}$	a

17- قيمة التكامل $\int_0^1 (x^2e^x)\, dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

18- قيمة التكامل $\int_0^1 (x^2+x+1)e^{2x}\, dx$

الطريقة اليمانية في تكامل: مثلثي ضرب صحيح أو أسي ضرب صحيح: نأخذ التابع الصحيح ونشتقه إلى أن ينعدم , ونأخذ التابع الآخر (الأسي أو المثلثي) ونكامله إلى أن نصل لنفس مستوى التابع الصحيح ثم **نقاطع بتناوب:**

x^2+x+1	e^{2x}
$2x+1$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
2	$\frac{1}{4}e^{2x}$
0	$\frac{1}{8}e^{2x}$

والآن نأخذ تقاطع بتناوب وهو عبارة عن أخذهم بشكل قطري مع تناوب الإشارات:

$$\left[+(x^2+x+1)\frac{1}{2}e^{2x}-(2x+1)\frac{1}{4}e^{2x}+2\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right)\right]_0^1$$

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$e-\frac{1}{2}$	a

19- قيمة التكامل $\int_1^{e^2} \left(\frac{1}{x(\ln(x)-1)}\right)\, dx$ تساوي:

2	d	-1	c	1	b	0	a

20- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,.\sin(2x)\, dx$ تساوي:

1	d	$\frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$	c	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	b	$\frac{4}{3}$	a

21- قيمة التكامل $\int_0^{\pi} \sin^3(x)\, dx$ تساوي:

1	d	$\frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$	c	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	b	$\frac{4}{3}$	a

22- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\, dx$ تساوي:

4	d	1	c	2	b	$\frac{1}{3}$	a

23- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\cos^2(x)}\ dx$ تساوي:

a	-2	b	2	c	1	d	4

24- قيمة التكامل $\int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos(x)}\ dx$ تساوي:

a	$\frac{8}{15}$	b	2	c	1	d	4

25- قيمة التكامل $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(2x)}\ dx$ تساوي:

a	$\frac{4}{3}$	b	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	c	$\frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$	d	1

26- قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ dx$ تساوي:

a	$\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$	b	$\ln\left(2e+\frac{2}{e}\right)$	c	3	d	5

27- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\ dx$ تساوي:

a	0	b	$\ln\left(2e+\frac{2}{e}\right)$	c	3	d	5

28- قيمة الثنائية (a,b) حتى يكون التابع $F(x)=(ax+b)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)=\frac{5x-4}{e^x}$ هي:

a	$(-5,-1)$	B	$(5,1)$	c	$(5,-1)$	d	$(-5,1)$

29- إذا علمت أن التابع $F(x)=P(x)e^{2x}$ تابع أصلي للتابع $f(x)=x^3e^{2x}$ علماً أن $P(x)$ كثير حدود فإن $Deg(P)$ تساوي:

a	3	b	4	c	2	d	1

30- قيمة التكامل $\int_1^3 |2x-4|dx$ تساوي

a	2	b	-2	c	1	d	0

31- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(\cos(x), \sin(x))\ dx$ تساوي:

a	$\sqrt{2}$	b	$2\sqrt{2}$	c	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	d	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

32- قيمة التكامل $\int_0^1 \min(x^2, x)\ dx$ تساوي:

a	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{13}{3}$	c	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	d	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

33- ليكن $f(x)=e^x.\cos(x)$ فإن قيمة الزوج (a,b) التي تحقق $f(x)=af'+bf''$ هي:

a	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	b	$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$	c	$\left(-\frac{1}{2},2\right)$	d	$\left(\frac{1}{2},1\right)$

34- ليكن $f(x)=e^x.\sin(2x)$ فإذا علمت أنه يوجد عددين a و b يحققان أن $f''(x)=af'+bf$ فإن التابع الأصلي للتابع f هو:

a	$-\frac{1}{5}f'(x)+\frac{2}{5}f(x)$	b	$f'(x)-f(x)$	c	$\frac{1}{5}f(x)+2f'(x)$	d	$f(x)-2f'(x)$

35- بفرض $g(x)=\frac{3tanx-1}{tanx+1}$ المعرف على $[0,\frac{\pi}{2}[$ فإن المشتق $g'(x)$ يساوي :

$\frac{4\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^2}$	d	$\frac{4+4\tan^2 x}{(1+tanx)^2}$	c	$\frac{4}{(1+\tan^2 x)^2}$	b	$\frac{tanx}{1+\tan^2 x}$	a

36- بفرض $g(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ عندئذٍ $g'(x)$ يساوي :

$2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$	d	$2\left(x+\frac{1}{x}\right)$	c	$\frac{2(x^2-1)}{x^3}$	b	$\frac{2(x^4-1)}{x^3}$	a

37- اذا علمت $1-\frac{x^2}{2}\le cosx\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ فأي من المتراجحات الآتية صحيحة :

غير ذلك	d	$x-x^3\le sinx\le x$	c	$x-\frac{x^3}{3}\le sinx\le x$	b	$x-\frac{x^3}{6}\le sinx\le x$	a

متتاليات

أشكال التعبير عن المتتالية		
المجاميع	المتتالية التدريجية	الحد العام
$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$	u_{n+1} بدلالة u_n أو $u_{n+1}=f(u_n)$	u_n بدلالة n أو $u_n=f(n)$

أولاً: متتاليات الحد الصريح:

أنواع المتتاليات		
unknown	هندسية	حسابية
مافي شي ثابت	كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد q يسمى أساس المتتالية	كل حد ينتج عن سابقه بجمع بعدد r يسمى أساس المتتالية

قوانين للمتتالية الحسابية والهندسية		
نوع المتتالية	الحسابية	الهندسية
معيار الكشف عنها	$u_{n+1}-u_n=r$	$\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$
قانون الحدين	$u_n=u_m+r(n-m)$	$u_n=u_m.q^{n-m}$
العدد α الذي يجعل المتتالية $v_n=u_n+\alpha$ هندسية	إذا كانت $u_{n+1}=au_n+b\,;a\ne 1$ فإن المتتالية المعرفة وفق: $v_n=u_n+\frac{b}{a-1}$ هندسية أساسها a ثم نقارن	
تخمين الحد العام	إذا كانت $u_{n+1}=au_n+b\,;a\ne 1$ فإن المتتالية المعرفة وفق: $u_n=\left(u_0+\frac{b}{a-1}\right).a^n-\frac{b}{a-1}$	
نهاية المتتالية	$\lim_{n\to\infty}u_n=\pm\infty$ دوماً متباعدة.	$\lim_{n\to\infty}u_n=\begin{cases}+\infty\,;q>1\\ u_0\,;q=1\\ 0\,;-1<q<1\\ \text{غير موجودة}\,;q<-1\end{cases}$

1- نهاية المتتالية $u_n=\frac{10^{n+1}+1}{10^n+1}$:

10^{-1}	d	1	c	0	b	10	a

2- نهاية المتتالية $u_n=10^{-2n}-2^{-2n}+ne^n$:

$-\infty$	d	1	c	0	b	$+\infty$	a

3- بفرض v_n المتتالية المعرفة بالشكل $v_n = \frac{\pi^{n+1}}{3\pi^n+3}$ ولتكن $u_n = \cos(n)$ عندئذ نهاية المتتالية $w_n = u_{v_n}$ هي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	c	0	d	1

ثلاث حدود متعاقبة	
حسابية	هندسية
إذا ذكر الأساس: الثاني يساوي الأول + الأساس الثالث يساوي الثاني + الأساس الثالث يساوي الأول + 2 (الأساس)	إذا ذكر الأساس: الثاني يساوي الأول ضرب الأساس الثالث يساوي الثاني ضرب الأساس الثالث يساوي الأول ضرب الأساس مربع
إذا لم يذكر الأساس: ضعف الثاني يساوي الأول + الثالث مجموع الحدود الثلاثة يساوي ثلاث أضعاف الثاني	إذا لم يذكر الأساس: مربع الثاني يساوي الأول ضرب الثالث جداء الحدود الثلاثة يساوي مكعب الثاني

1- بفرض a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية تحقق أن:

$$a + b + 2c = 27$$

فإن المقدار $3b + c$ يساوي:

a	10	b	20	c	27	d	24

2- بفرض $2a$ و b و $3c$ ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية متزايدة أساسها 2 تحقق:

$$2a + b + 3c = 14$$

فإن a و b و c تساوي:

a	$a = 2 , b = 4 , c = 8$	b	$a = 1 , b = 4 , c = \frac{8}{3}$
c	$a = 3 , b = 4 , c = \frac{8}{3}$	d	$a = 1 , b = 4 , c = 9$

3- الأعداد $1 , k , k - \frac{2}{9}$ تمثل ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية . فإن قيمة k هي:

a	$\frac{1}{3}$	b	$-\frac{1}{3}$	c	$\frac{1}{9}$	d	3

4- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية تحقق أن $u_3 + u_{11} = 60$ عندئذٍ قيمة المجموع:

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_{10} + u_{11} + u_{12}$$

a	180	b	120	c	183	d	المعطيات غير كافية

5- إذا كان a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية و كان $abc = 216$ فإن قيمة b

a	8	b	6	c	4	d	3

6- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r فإذا علمت أن $u_0 + u_3 = 18$ و $u_2 + u_5 = 34$ فالحد العام لها

a	$3n + 4$	b	$4n - 3$	c	$4n + 3$	d	$-4n + 3$

7- لدينا a, b, c ثلاثة حدود متوالية غير معدومة من متتالية هندسية أساسها q كما لدينا $12a$ و $5b$ و $2c$ ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية فان q تساوي:

a	$\begin{cases} q=-2 \\ q=3 \end{cases}$	b	$\begin{cases} q=-3 \\ q=2 \end{cases}$	c	$\begin{cases} q=-3 \\ q=-2 \end{cases}$	d	$\begin{cases} q=2 \\ q=3 \end{cases}$

8- a , b , c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية، حيث: $a < b < c$ و $a+b+c=21$ و $abc=216$ عندئذ قيمة $a+c$ هو:

a	27	b	21	c	6	d	15

9- لدينا a , b , c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r موجب تماماً وتحقق $b^2=1+ac$ عندئذٍ r :

A	-1	B	8	C	2	D	1

10- ليكن a عدداً حقيقياً ونفترض أن a^2-4 و $2a+1$ و $a+2$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية متناقصة عندئذ قيمة a هي:

a	$a=3$	b	$a=-1$	c	$a=2$	d	$a=4$

11- $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فيها $u_1+u_2+u_3=9$ و $u_{10}+u_{11}=40$ عندئذ قيمة الأساس r هي:

a	$r=2$	b	$r=3$	c	$r=1$	d	$r=4$

12- ليكن λ عدداً حقيقياً و لنفترض أن λ^2-4 , $2\lambda+1$, $\lambda+2$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية متناقصة .

عندئذٍ قيمة λ هي :

a	1	b	-1	c	4	d	-4

13- a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$ نعلم أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية غير ثابتة نرمز إلى أساسها q كما نعلم أن $4a$ و $3b$ و $2c$ هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية فإن قيمة الأساس q:

a	$q=1$	b	$q=2$	c	$q=-1$	d	$q=3$

14- لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية حسابية فيها:

$$u_3-3u_5=-42 \quad \text{و} \quad u_2=5$$

عندئذٍ قيمة r هي:

a	2	b	4	c	6	d	8

اطراد متتالية صريحة	
حالة وجود a^n أو $n!$	معيار النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثم نقارن مع الواحد شرط التطبيق: $u_n>0$

	حالة خاصة: المتتالية التي تحوي $(-1)^n$ لا يصح تطبيق معيار النسبة عليها وهي مباشرة غير مطردة (متناوبة في الاطراد)
باقي الحالات	معيار الاشتقاق: 1- نعرف تابعاً f على المجال المعطى 2- نشتق التابع 3- نقارن مع الصفر
محدودية متتالية صريحة	
1- نعرف تابعاً f على المجال المعطى 2- ندرس تغيرات التابع 3- نستنتج من جدول التغيرات المطلوب (من حقل f)	
Hero's ideas	
ملاحظة (1)	إذا كانت المتتالية متزايدة ونهايتها $+\infty$ فهي محدودة من الأدنى بحدها الأول وغير محدودة من الأعلى
ملاحظة (2)	إذا كانت المتتالية متناقصة ونهايتها $-\infty$ فهي محدودة من الأعلى بحدها الأول وغير محدودة من الأدنى
الملاحظة (3)	يوجد بعض المتتاليات التي يمكن الحكم على محدوديتها مباشرة مثل: $\sin(n)$ $\cos(n)$ $(-1)^n$ $\frac{n}{n+1}$ $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
تقارب المتتالية الصريحة وحساب نهايتها	
نحسب النهاية بشكل مباشر بالاستفادة من حالات عدم التعيين الموجودة سابقاً	1- تكون المتتالية متقاربة إذا كانت نهايتها عدد ℓ ونقول أنها متقاربة من ℓ 2- تكون المتتالية متباعدة إذا كانت نهايتها لا نهائية (جوابها ∞) ونقول أنها متباعدة
$n! \geq a^n \geq n \geq \ln(n)$ "حكم القوي عالضعيف" تذكرتوها مو؟	
Hero's idea	
يمكن تطبيق ما تعلمناه حول مفهوم النهاية بلغة المجالات في بحث النهايات على المتتاليات الصريحة	
المتتاليات المعرفة بالتدريج	
اطرادها	
غالباً ما يكون من السهل دراسة اطرادها من حساب بعض الحدود الأولى.	

المتتالية $u_{n+1} = u_n^2 - au_n + b$ المزودة بمتراجحة مساعدة $m \le u_n \le M$ يمكن دراسة اطرادها من خلال معيار الفرق $u_{n+1} - u_n$ ثم التحليل المباشر والاستفادة من المتراجحة لتحديد إشارات الأقواس.. مثال:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$$
$$u_0 = \frac{5}{2}$$

المحققة للمتراجحة $2 \le u_n \le 3$ عندئذ المتتالية u_n:

أ- ثابتة

ب- غير مطردة

ت- متزايدة

ث- متناقصة

محدوديتها	
من خلال إثبات متراجحة مطلوبة بالتدريج	
بعض المنسيات:	
شرط تزايد متتالية	$u_{n+1} \ge u_n$
شرط تناقص متتالية	$u_{n+1} \le u_n$
شرط ثبات متتالية	$u_{n+1} = u_n$
تقاربها	
مبرهنات التقارب:	
كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة	كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة
نهايتها	
حل المعادلة $f(x) = x$ ثم نقبل ونرفض حسب اطراد المتتالية	

1- المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية وفق:

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2} \,;\, u_0 = 1$$

بفرض $E(n): 0 < u_n < 2$ إذا علمت أن $E(n_0)$ محققة وبفرض $E(n)$ صحيحة من أجل عدد معين n_0 فإن:

a	$E(n)$ صحيحة من أجل بعض قيم n	b	$E(n+1)$ غير صحيحة
c	$E(n)$ صحيحة من أجل n	d	$E(n+1)$ صحيحة فقط

2- نعرف المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ بالشكل $v_n = u_n^2 - 4$, فإن المتتالية v_n هندسية أساسها:

a	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{2}$	c	1	d	2

3- الحد الأول للمتتالية v_n يساوي:

a	-3	b	-2	c	4	d	21

4- عبارة v_n بدلالة n هي:

a	$-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$	b	$4(1)^n$	c	$-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$	d	$21(2)^n$

5- عبارة u_n بدلالة n هي:

a	$\sqrt{4-2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$	b	0	c	$\sqrt{4-3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$	d	$\sqrt{4+21(2)^n}$

لتكن المتتاليتان u_n و v_n المعرفتان وفق:

$$v_{n+1} = 3av_n + (1-3a)u_n \,;\, v_0 = 3$$

$$u_{n+1} = 3au_n + (1-3a)v_n \,;\, u_0 = -1$$

حيث أن a عدد حقيقي.

6- تأمل المتتالية $w_n = v_n - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$, إن قيمة w_0 تساوي:

a	4	b	2	c	3	d	0

7- المتتالية w_n:

a	هندسية أساسها $2a-1$	b	هندسية أساسها $1-6a$	c	هندسية أساسها $6a-2$	d	هندسية أساسها $3a-1$

8- w_n بدلالة n و a تعطى بالشكل:

a	$4(1-6a)^n$	b	$2(2a-1)^n$	c	$3(1-3a)^n$	d	$2(3a-1)^n$

9- بفرض u_n متتالية معرفة بالتدريج وفق:

$$u_{n+1} = 2u_n - 4 \,;\, u_0 = 1$$

ونعرف المتتالية $x_n = u_n - 4$ فإن المتتالية x_n:

a	حسابية أساسها 2.	b	هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.	c	هندسية أساسها 2.	d	حسابية أساسها $\frac{1}{2}$.

10- الحد العام لـ x_n يعطى بالشكل:

a	$x_n = -3\,.\,2^n$	b	$x_n = -3\,.\,2^{n+1}$	c	$x_n = -2^n$	d	$x_n = 2^n$

11- الحد العام لـ u_n يعطى بالشكل:

a	$u_n = 2 - 3.2^n$	b	$u_n = 4 + 3.2^n$	c	$u_n = 4 - 3.2^{n+1}$	d	$u_n = 4 + 2^n$

12- بفرض u_n متتالية معرفة وفق:

$$u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n \,;\, u_0 = 2 \,,\, u_1 = 5$$

نعرف المتتالية $v_n = u_{n+1} - 4u_n$ فإن v_n:

a	هندسية أساسها 3	b	هندسية أساسها 5	c	هندسية أساسها $\sqrt{3}$	d	ليست هندسية

13- نعرف المتتالية $y_n = u_{n+1} - 3u_n$ فإن y_n:

a	هندسية أساسها 4	b	هندسية أساسها 2	c	هندسية أساسها $\sqrt{2}$	d	ليست هندسية

14- الحد العام للمتتالية u_n يساوي:

a	$4^n + 3^{n+1}$	b	$-4^n + 3^{n+1}$	c	$-4^n - 3^{n+1}$	d	$4^n - 3^{n+1}$

15- قيمة المجموع $S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 1024 + 2000 + 1024 + 512 + \cdots + 4 + 2 + 1$ تساوي:

a	6094	b	3047	c	2048	d	1024

16- بفرض $(y_n)_{n\geq 0}$, $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad , x_0 = 1 , y_0 = 3$$

و لنضع $t_n = x_n y_n$ من أجل كل $n \geq 0$ عندئذٍ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$

a	متزايدة	b	متناقصة	c	ثابتة	d	غيرمطردة

17- بفرض $(y_n)_{n\geq 0}$, $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad , x_0 = 1 , y_0 = 3$$

فإذا علمت أن $x_n > y_n > 0$ مهما تكن n فالمتتالية

a	(x_n) متزايدة (y_n) متناقصة	b	(x_n) متناقصة (y_n) متزايدة	c	$(x_n), (y_n)$ متناقصتان معاً	d	$(x_n), (y_n)$ متزايدتان معاً

18- الحد العام للمتتالية المعرفة بالتدريج وفق $u_0 = 7$, $u_{n+1} = 10u_n - 18$ هو :

a	$u_n = 10^n + 2$	b	$u_n = 5 \times 10^n - 2$	c	$u_n = 5 \times 10^{n-2}$	d	$u_n = 5 \times 10^n + 2$

19- الحد العام للمتتالية المعرفة بالتدريج وفق : $u_{n+1} = 3u_n - 4 , u_0 = 0$

a	$u_n = 2(1 - 3^n)$	b	$u_n = 2 + 2 \times 3^n$	c	$u_n = -3^n$	d	$u_n = -3^n + 2$

20- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق $u_{n+1} = 2u_n + 3 , u_0 = 1$ فإن قيمة α التي تجعل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق

$v_n = u_n + \alpha$ هي :

a	3	b	-3	c	2	d	$\frac{3}{2}$

21- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 1 , u_0 = 1$ فإن قيمة α التي تجعل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق

$v_n = u_n - \alpha$ هي :

a	$\frac{9}{4}$	b	$-\frac{9}{4}$	c	$\frac{4}{9}$	d	$-\frac{4}{9}$

22- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{nu_n+4}{n+1}$ و لنضع $v_n = nu_n$ عندئذٍ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$

a	هندسية أساسها 4	b	حسابية أساسها 4	c	هندسية أساسها 2	d	حسابية أساسها 2

23- بفرض $(y_n)_{n\geq 0}$, $(x_n)_{n\geq 0}$ وفق :

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(y_n + 2x_n) \quad , x_0 = 1$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n + 5y_n) \quad , y_0 = 2$$

عندئذ المتتالية المعرفة بالشكل $w_n = x_n + 2y_n$

a	متزايدة تماماً	b	متناقصة تماماً	c	ثابتة	d	غير مطردة

24- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالشكل $u_{n+1} = (\alpha - 2)u_n + 5$ فإن قيمة α التي تجعلها حسابية أساسها غير معدوم

a	3	b	2	c	0	d	1

25- بفرض $u_{n+1} = \frac{3}{2}au_n + \frac{a+1}{3}$ و $u_0 = 2$ فإن قيمة a التي تجعل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ثابتة

a	$\frac{1}{2}$	b	2	c	$\frac{2}{3}$	d	1

26- كن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $\left(u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+1} \quad , \quad u_0 = 1\right)$. من أجل كل $n \in N$ نضع $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ عندئذٍ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$:

a	هندسية أساسها $\frac{1}{2}$	b	هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	c	حسابية أساسها $\frac{1}{3}$	d	حسابية أساسها $\frac{1}{2}$

27- $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ متتاليتان معرفتان وفق:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 3} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = 3u_n + 5t_n} \end{cases} , \quad \begin{cases} \boldsymbol{t_0 = 2} \\ \boldsymbol{t_{n+1} = u_n + 7t_n} \end{cases}$$

عندئذٍ المتتالية $(u_n + 5t_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها:

a	4	b	8	c	16	d	32

28- متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{3}{6}u_n + 3 \quad , \quad u_0 = 6$$

a	متزايدة تماماً	b	متناقصة تماماً	c	ثابتة	d	ليست مطردة

29- $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ متتاليتان معرفتان وفق:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 1} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = \frac{2u_n + t_n}{3}} \end{cases} , \quad \begin{cases} \boldsymbol{t_0 = 4} \\ \boldsymbol{t_{n+1} = \frac{u_n + 2t_n}{3}} \end{cases}$$

عندئذٍ المتتالية $(t_n - u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها:

A	$\frac{1}{3}$	B	$-\frac{1}{3}$	C	3	D	1

30- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ \ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \end{cases}$$

عندئذٍ المتتالية $v_n = u_{n+1} - 2u_n$:

A	هندسية أساسها 3	B	هندسية أساسها 2	C	حسابية أساسها 3	D	حسابية أساسها 2

31- بفرض $\theta \in]\pi/2 , \pi]$ و لنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ عندئذٍ u_1 يساوي :

a	$2cos\theta$	b	$-2\cos\theta$	c	$2\sin\theta$	d	$-2sin\theta$

32- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$ و $u_0 = 1 , u_1 = 3$ و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ عندئذٍ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$

a	هندسية و $v_n = 2(3^n)$	b	هندسية و $v_n = 2(1^n)$	c	هندسية و $v_n = (1)^n$	d	حسابية و $v_n = 1 + n$

33- المتتالية $u_n = \ln((n+1)^{n+1})$. أي من القضايا الآتية صحيحة:

a	محدودة من الأعلى	b	محدودة من الأدنى	c	محدودة	d	غير محدودة

<table>
<tr><th colspan="2">المجاميع</th></tr>
<tr><th>البسيطة</th><th>المعقدة</th></tr>
<tr><td>
المجموع الحسابي:
$S = \frac{a+\ell}{2}(n)$
المجموع الحسابي مع قفزات:
$\text{عدد الحدود الجديد} = \frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}} + 1$
$r' = \text{طول القفزة} \times r$
ونعود للقانون السابق.
المجموع الهندسي:
$S = a\frac{1-q^n}{1-q}$
المجموع الهندسي مع قفزات:
$\text{عدد الحدود الجديد} = \frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}} + 1$
$q' = q^{\text{طول القفزة}}$
ونعود للقانون السابق.
</td><td>
$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Hero's idea
$(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$
إذا كان:
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
فإن:
$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$
</td></tr>
<tr><th colspan="2">اطرادها</th></tr>
<tr><td>معيار الفرق</td><td>$u_{n+1} - u_n$
ثم نقارن مع الصفر</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Hero's idea</th></tr>
<tr><td colspan="2">انتبه! في حال كان المجموع حده الأول يحوي n فإن تشكيل الفرق يحتاج إلى تفصيل</td></tr>
<tr><td colspan="2">محدوديتها</td></tr>
<tr><td>الحالة (1)</td><td>مجموع متتالية حسابية محدود من الأدنى بـ S_0 وغير محدود من الأعلى</td></tr>
<tr><td>الحالة (2)</td><td>مجموع متتالية هندسية:
1- حالة $|q| > 1$ غير محدودة
2- حالة $0 < q < 1$ محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{a}{1-a}$ ومن الأدنى بـ S_0
3- حالة $-1 < q < 0$ محدودة من الأعلى بـ S_0 ومن الأدنى بـ $\frac{a}{1-a}$
4- حالة $q = 1$ متتالية ثابتة مجموعها يساوي $n.u_0$ غير محدودة من الأعلى ومحدودة من الأدنى بـ u_0</td></tr>
<tr><td>الحالة (3)</td><td>- شكلها: غالباً يكون $u_n = \sum\left(\frac{n}{a^n}\right)$ or $\sum\left(\frac{1}{n!}\right)$
- نستفيد من إحدى المتراجحات المساعدة الآتية:
$n \leq 2^n \quad , \quad n! \geq 2^{n-1}$
- نجد أن $S_n \leq q^1 + q^2 + \cdots + q^n$ ثم نعود لمحدودية الهندسية.</td></tr>
<tr><td>الحالة (4)</td><td>المجموع المباشر:
أي مجموع حدوده موجبة في كوكب الأرض يمكن حصره بين أصغرهم مضروباً بعدد الحدود وأكبرهم مضروباً بعدد الحدود مثل:
$3\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 3(1)$</td></tr>
<tr><td>الحالة (5)</td><td>التشطيب:
1- المتتالية كسرية مقامها جداء قوسين من الدرجة الأولى.
أ- نفرق الكسر إلى كسور جزئية كما تعلمنا في التكامل
ب- نشكل المجموع ونقوم بالتشطيب بعد كتابة حدود المجموع بشكل عمودي.
2- صيغتين متكافئتين إحداهما تحوي طرحاً
أ- نشكل المجموع باستخدام الصيغة التي تحوي طرح ثم نحصل على تشطيب.</td></tr>
</table>

1- قيمة المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ هي :

a	$\frac{n(n+1)}{4}$	b	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	c	$\frac{n(n+1)}{2}$	d	n^2

2- قيمة النهاية $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2+1}$

1	d	$\frac{1}{2}$	c	$\frac{1}{4}$	b	0	a

3- قيمة المجموع $2+4+6+\cdots+2n$ هي :

$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	d	n^2	c	n^2+n	b	$\frac{n(n+1)}{2}$	a

4- قيمة المجموع $1+2+3+\cdots+100$

5000	d	5005	c	5050	b	550	a

5- قيمة المجموع $2+3+4+\cdots+15$

111	d	121	c	120	b	119	a

6- قيمة المجموع $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ هي :

n^2	d	$\frac{n(n+1)}{2}$	c	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	b	$\frac{n(n+1)}{4}$	a

7- قيمة النهاية $\lim_{n\to+\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{2n^3+1}$

$\frac{1}{8}$	d	$\frac{1}{2}$	c	$\frac{1}{4}$	b	$+\infty$	a

8- قيمة المجموع $1+8+27+..+125$

10044	d	1440	c	14040	b	14400	a

9- إذا علمت أن $(1\times 2)+(2\times 3)+(3\times 4)+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

فإن قيمة المجموع $(1\times 2)+(2\times 3)+(3\times 4)+\cdots+(10\times 11)$

404	d	540	c	440	b	572	a

10- واحدة من المتتاليات الآتية متناقصة تماماً :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$ $u_0=-1$	d	$u_{n+1}=2u_n$ $u_0=2$	c	$u_n=3\left(\frac{2}{5}\right)^n$	b	$u_n=\frac{4n+1}{n+2}$	a

11- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_{11}=3k$, $u_2=6$ فإن قيمة k التي تجعل :

$u_2+u_3+u_4+\cdots+u_{11}=255$

26	d	13	c	39	b	36	a

12- قيمة المجموع $S=-3-\frac{3}{4}-\frac{3}{16}-\frac{3}{64}-\cdots-\frac{3}{4^n}$

$\frac{1}{2^{2n}}-4$	d	$\frac{1}{2^{2n}}+4$	c	$\frac{1}{2^n}+4$	b	$-\frac{1}{2^{2n}}-4$	a

13- قيمة المجموع $S=1-\frac{1}{9}-\frac{1}{9^2}-\frac{1}{9^3}-\cdots-\frac{1}{9^n}$

$S=-\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n$	d	$S=\frac{7}{8}+\left(\frac{1}{9}\right)^n$	c	$S=\frac{7}{8}+\frac{1}{8.9^n}$	b	$S=\frac{7}{8}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n$	a

14- قيمة المجموع $S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}$

A	$3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$	b	$u_n\frac{1}{3}(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$	c	$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$	d	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

15- العدد 4^n+2 مضاعف للعدد :

a	3	b	4	c	5	d	7

16- إحدى الصيغ الآتية تعطي مُضاعفاً للعدد 7 مهما يكن العدد الطبيعي n

a	$3^{2n}-2^n$	b	3^n-2^n	c	7^n-2^n	d	9^n-2^{2n}

17- العدد $5^{22}-2^{55}$ مضاعف للعدد

a	3	b	4	c	5	d	7

18- العدد $2\times5^{33}-2^{23}$

a	فردي و مضاعف للعدد 11	b	زوجي و مضاعف للعدد 11	c	مضاعف للعدد 120	d	مضاعف للعدد 7

19- قيمة المجموع $S=1-2+3-4+5-\cdots+99-100$

a	-50	b	50	c	52	d	-52

20- نرمز بالرمز E(x) للجزء الصحيح للعدد x عندئذٍ:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{E(x)+E(2x)+E(3x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$$

a	1	b	0	c	x	d	$+\infty$

21- إن أصغر عدد طبيعي غير معدوم يحقق المتراجحة $3^n\ge\frac{1}{3}(2^{n+1})+\frac{5}{3}(n+1)^2$

a	5	b	4	c	3	d	6

22- عند إثبات صحة متراجحة برنولي بالتدريج $(1+x)^n\ge1+nx$ من أجل $x>-1$ نجد أن

$(1+x)(1+nx)=1+(n+1)x+nx^2$ العلاقة الصحيحة للوصول الى المطلوب هي:

a	$(1+x)^{n+1}\ge1+(n+1)x$	b	$(1+x)^n\ge1+(n+1)x$	c	$(1+nx)\ge1+(n+1)x$	d	$(1+x)^{n+1}\le1+nx$

23- نعرّف القضية $E(n)$ التي تدّعي أن العدد 9 يقسِمُ العدد 10^n+1 . فإذا افترضنا أن القضية صحيحة من أجل عددٍ طبيعي مثبت n عندئذٍ

a	E(n + 1) غير صحيحة	b	$E(n+1)$صحيحة	c	$E(n)$ صحيح أياً كان n ∈ N	d	$E(n)$صحيحة من أجل القيم الفردية لـ n

24- نرمز إلى القضية $n+1>n$ بالرمز $E(n)$ أياً كانت $n\in N$ إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n كانت:

a	E(n + 1) غير صحيحة	b	$E(n+1)$صحيحة	c	$E(n)$ صحيح أياً كان n ∈ N	d	$E(n)$صحيحة من أجل القيم الفردية لـ n

25- في المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ لدينا $u_{30} = 20$, $u_{15} = -10$ إن قيمة المجموع:

$S = u_8 + u_9 + u_{10} + u_{20} + u_{21} + u_{22}$ يساوي:

a	-60	b	-40	c	-30	d	60

26- ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي P النقطة $M'(9x+10y, 3x+5y)$ أي, $f(M) = M'$. لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(0,1)$ عندئذ: $f(S_0)$ هي:

a	$(9,3)$	b	$(10,5)$	c	$(5,10)$	d	$(19,8)$

27- قيمة المجموع $S = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^5$ هي:

a	999999	b	11111	c	11110	d	111111

28- لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ عندئذٍ

a	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1}$ و المتتالية متزايدة تماماً	b	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n}$ و المتتالية متناقصة تماماً	c	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n(2n+1)}$ و المتتالية متناقصة تماماً	d	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n(2n+1)}$ و المتتالية متزايدة تماماً

29- بفرض $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $v_{n+1} = 4v_n + 3$ و $v_0 = 14$ و لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية <u>هندسية</u> أساسها $q =$ 4 و تحقق أن $u_n - v_n = 1$ ليكن $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots . + u_n^2$ عندئذٍ S_n بدلالة n

a	$4^{n+1} - 1$	b	$15(16^{n+1} - 1)$	c	$15(16^{2n+1} - 1)$	d	$15(4^n - 1)$

30- قيمة المجموع: $S = 1 + 3 + 9 + \cdots + 243$

A	360	B	362	C	363	D	364

31- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها وحدها الأول $u_0 = 1$, $q = 2$

إذا علمت أن: $u_3 + u_4 + \cdots + u_n = 248$ فإن قيمة n تساوي:

A	5	B	6	C	7	D	8

32- نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ عندئذٍ قيمة المقدار $u_{2n} - u_n$:

a	$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$	b	$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$
c	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$	d	$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$

33- إذا كانت $u_{n+1} = 10u_n - 18$ و $u_0 = 7$, عندئذٍ بحساب u_1, u_2, u_3 يمكن ملاحظة أن عدد الأصفار في u_k هو :

a	$k+1$	b	k	c	$k-1$	d	$2k$

34- المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$ هي متتالية:

a	ثابتة	b	متناوبة	c	متناقصة	d	متزايدة

35- المتتالية $(u_n)_{\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$ و $u_0 = 8$

a	ثابتة	b	متناوبة	c	متناقصة	d	متزايدة

36- إذا كانت a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية عندئذٍ المقدار $(a+b+c)(a-b+c)$ يساوي :

a	$a^2+b^2+c^2$	b	$a^2-b^2+c^2$	c	a^2+b^2+2ac	d	$3b^2$

37- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $\left(u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \,;\, u_1 = 2 \,, u_0 = 1\right)$ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$v_n = u_{n+1} - u_n$:

a	هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	b	هندسية أساسها 3	c	حسابية أساسها $\frac{1}{3}$	d	حسابية أساسها $\frac{4}{3}$

38- قيمة المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \cdots + \frac{19}{2} + 20 + \frac{19}{2} + 9 + \cdots + 1 + \frac{1}{2}$ تساوي:

a	210	b	420	c	820	d	105

39- فرض $u_{n+1} = 2u_n + n - 1$ و $u_0 = 3$ و $t_{n+1} = 2t_n + n - 1$ و $t_0 = 1$ و لنضع $v_n = u_n - t_n$

عندئذٍ v_n بدلالة n

a	2^n	b	2^{n+1}	c	$2n+1$	d	$2n-1$

40- نرمز بالرمز i للوحدة التخيلية التي تحقق أن $i^2 = -1$ عندئذٍ قيمة المجموع :

$s = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{600}$

a	0	b	1	c	-1	d	i

41- قيمة المجموع $S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \cdots + 40 + \frac{39}{4} + \frac{17}{2} + \frac{37}{4} + \cdots + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

a	819	b	409.5	c	1638	d	409

42- قيمة المجموع $S = 1 + 8 + 27 + 64 + \cdots + 1000$ هي :

a	3025	b	500500	c	2002	d	1512

المتتاليتان المتجاورتان	
الشرط الأول	واحدة متناقصة وواحدة متزايدة
الشرط الثاني	نهاية الفرق تساوي الصفر

Hero's ideas
المتتاليتان المتجاورتان متقاربتان معاً من نفس العدد (أي لهم نهاية مشتركة)
إذا تم الربط بين المتجاورتين بمتتالية ثابتة أمكن حساب النهاية المشتركة وذلك بملاحظة أن المتتالية الثابتة تساوي حدها الأول

التمثيل البياني لحدود متتالية

ليكن c الخط البياني للتابع f المستمر ونفترض المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

عندئذ يمكن تمثيل حدود المتتالية u_n على محور الفواصل من خلال الخطوات الآتية:

1- إيجاد نقطة التقاطع c و منصف الربع الأول والثالث $y = x$ من خلال حل المعادلة $f(x) = x$ (وهذا يعطي تأويلاً هندسياً لنهاية المتتالية)

2- نرسم المستقيم $y = x$ منصف الربع الأول والثالث ونرسم c موضحين نقطة التقاطع

3- نحدد u_0 على محور الفواصل

4- خطة Smash Hit

....

....

....

....

....

....

تفيد الخطة السابقة في استنتاج معلومات حول اطراد ومحدودية وتقارب ونهاية المتتالية

1- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \quad , u_0 = \frac{3}{2}$$

فإذا علمت أن $1 \leq u_n \leq 2$ مهما يكن $n \geq 0$ عندئذ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

a	متناقصة	b	متزايدة
c	ثابتة	d	غير مطردة

2- نفترض أن $(l_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $l_0 = 10$, $l_{n+1} = \sqrt{1 + (l_n - 1)^2}$ و أن $1 \leq l_{n+1} \leq l_n$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة :

a	المتتالية متناقصة	b	المتتالية محدودة من الأدنى
c	المتتالية متقاربة من الصفر	d	المتتالية متقاربة من الواحد

3- بفرض $u_n = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{3}{\pi^3} + \frac{4}{\pi^4} + \cdots + \frac{n}{\pi^n}$ عندئذ أي من الأعداد الآتية لا يمثل حداً راجحاً على $(u_n)_{n\geq 1}$:

a	$M = \frac{2}{\pi - 2}$	b	$M = \frac{2}{\pi}$
c	$M = \pi$	d	$M = \frac{2}{\pi - 3}$

4- نتأمل المتتاليتين :

$$x_{n+1} = x_n + 2 \quad , x_0 = 3$$
$$y_{n+1} = x_n + y_n \quad , y_0 = 0$$

عندئذٍ قيمة المجموع :

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots x_n$$

a	y_{n-1}	b	y_{2n}
c	y_{n+1}	d	y_n

5- بفرض $x_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ و يفرض $x_n \leq y_n$ عندئذٍ أي من الصيغ الآتية تصلح أن تكون y_n:

a	$y_n = \frac{3}{n^2}$	b	$y_n = 3 + \frac{3}{n^2}$
c	$y_n = 3$	d	$y_n = \frac{3}{n}$

6- نهاية المتتالية $v_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$:

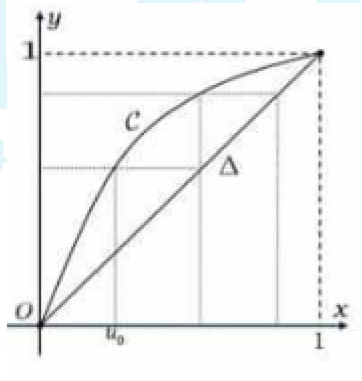
a	0	b	1
c	$+\infty$	d	$-\infty$

7- لتكن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ و لنضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ عندئذٍ أبسط عبارة لـ s_n:

a	$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	b	$\sqrt{n-1}$
c	$\sqrt{n+1}$	d	$\sqrt{n}$

- تأمل الشكل المجاور C الخط البياني لتابع f و Δ منصف الربعين الأول و الثالث

ولتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = f(u_n)$,$0 < u_0 < 1$



8- عدد حلول المعادلة $f(x) = x$:

a	0	b	1
c	2	d	3

9- جهة اطراد المتتالية (u_n):

a	متزايدة	b	متناقصة
c	ثابتة	d	غير مطردة

10- واحد من القضايا الآتية خاطئة :

a	المتتالية محدودة من الأدنى فقط	b	المتتالية محدودة
c	المتتالية محدودة من الأعلى فقط	d	النهاية المحتملة للمتتالية 1

- بفرض $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

11- أي من القضايا الآتية صحيحة:

a	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}$ و المتتالية متزايدة	b	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1}$ و المتتالية متناقصة
c	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$ و المتتالية متناقصة	d	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n}$ و المتتالية متناقصة

12- نضع $x_n = u_{2n} - u_n$ عندئذٍ:

a	$x_n \geq \frac{n+1}{2}$	b	$x_n \geq \frac{n}{2}$
c	$x_n \leq \frac{n}{2}$	d	$x_n \geq \frac{1}{2}$

13- واحدة من المتراجحات الآتية صحيحة:

a	$x_n \geq \frac{n+1}{2}$	b	$x_n \leq \frac{n}{2}$
c	$x_n \geq \frac{n}{2}$	d	$x_n \geq \frac{1}{2}$

14- واحدة من المتراجحات الآتية صحيحة:

a	$u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$	b	$u_{2^n} \geq \frac{1}{2}$
c	$u_{2^n} \leq \frac{n}{2}$	d	$u_{2^n} \geq \frac{n+1}{2}$

جداء السلمي		
$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$	$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$	$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\alpha$

طلبات مميزة:

1- أثبت أن النقطة J هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC:
نثبت أن $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$ و $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AC} = 0$.

2- حساب $\cos\alpha$ عن طريق القانون الأول في الجداء السلمي.

3- اثبات أن شعاعين متساويين بالطول.

مبرهنة المسقط القائم:

بفرض $\overrightarrow{C'D'}$ مسقط الشعاع $\overrightarrow{CD}$ على حامل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ عندئذ يمكن كتابة:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$$

رسمة مثلث قائم

أي لجداء ضلع قائمة بالوتر نحسب جداء الضلع القائمة بنفسها:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$

الشعاع الناظم على مستوي هو الشعاع العمودي على شعاعي توجيه فيه

$$\vec{n}.\vec{u} = 0 \;, \qquad \vec{n}.\vec{v} = 0$$

ويمكن استبدالها بالطريقة الغشاشة 😉:

....

....

....

....

معادلات المستوي

الحالة	النقطة	الناظم	ملاحظة
علم ناظم ونقطة	من النص	من النص	-
علم مستوي موازي	من النص	ناظم المستوي المعطى	-
المستوي المحوري	منتصف القطعة المستقيمة	شعاع القطعة المستقيمة	أسلوب آخر: مجموعة النقاط المحققة للعلاقة: $MA = MB$
علم شعاعي توجيه	من النص	الجداء الخارجي لشعاعي التوجيه	-
علم ثلاث نقاط	إحدى هذه النقاط	الجداء الخارجي لشعاعين من النقاط الثلاثة	إذا كانت النقاط من الشكل: $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ فتكون معادلة المستوي: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

علم مستويين معامدين	من النص	الجداء الخارجي لناظمي المستويين	-
علم مستوي معامد ونقطتين	إحدى النقطتين	الجداء الخارجي لناظم المستوي المعامد الشعاع المكون من النقطتين	-
مستوي معين بتقاطع مستقيمين	نقطة تقاطع المستقيمين	الجداء الخارجي لشعاعي توجيه المستقيمين	تعين نقطة التقاطع من خلال الحل المشترك لتمثيل المستقيمين

التمثيل الوسيطي لمستقيم

الحالة	النقطة	شعاع التوجيه	الملاحظة
علم شعاع توجيه ونقطة	من النص	من النص	-
علم نقطتين	إحدى النقطتين	شعاع النقطتين	-
علم مستوي معامد	من النص	ناظم المستوي	-
الفصل المشترك	-	-	حل مشترك لمعادلتي المستوي وفرض أحد المجاهيل قيمة تحوي t

بعد نقطة عن مستوي

القانون	$dis(A,P)=\dfrac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

الكرة

علم مركز ونصف قطر	علم قطر	علم مركز ونقطة تمر منها
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ حيث: المركز $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ نصف القطر r	1- نوجد المركز وهو منتصف القطر. 2- نوجد نصف القطر. 3- نعوض في القانون السابق	1- نوجد نصف القطر وهو عبارة عن المسافة بين المركز والنقطة التي تمر منها الكرة. 2- نعوض في القانون

كرة تمس مستوي

1- المركز معلوم
2- نصف القطر هو $dis(\Omega,P)$ بعد مركز الكرة عن المستوي.
3- نعوض في القانون.

الأسطوانة

أسطوانة محورها يوازي oz	أسطوانة محورها oy	أسطوانة محورها ox
بفرض إحداثيات مركز القاعدة $A(x_1,y_1,z_1)$ و أن ارتفاع هذه	$\begin{cases}(x-x_1)^2+(z-z_1)^2=r^2\\ y_1\le y\le y_1+h\end{cases}$	$\begin{cases}(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2\\ x_1\le x\le x_1+h\end{cases}$

الأسطوانة h و نصف قطر قاعدتها r فإن هذه الأسطوانة تُعرّف بالشكل : $\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2\\ z_1\le z\le z_1+h\end{cases}$ وبوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\ 0\le z\le h\end{cases}$	و بوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases}x^2+z^2=r^2\\ 0\le y\le h\end{cases}$	و بوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases}y^2+z^2=r^2\\ 0\le x\le h\end{cases}$
المخروط		
محوره يوازي oz	محوره يوازي oy	محوره يوازي ox
$\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(z-\\ z_1\le z\le z_1+h\end{cases}$ و إذا كان الرأس هو المبدأ : $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{r^2}{h^2}z^2\\ 0\le z\le h\end{cases}$	$\begin{cases}(x-x_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(y-y\\ y_1\le y\le y_1+h\end{cases}$ و إذا كان الرأس هو المبدأ: $\begin{cases}x^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}y^2\\ 0\le y\le h\end{cases}$	$\begin{cases}(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(x-\\ x_1\le x\le x_1+h\end{cases}$ و إذا كان الرأس هو المبدأ: $\begin{cases}y^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}x^2\\ 0\le x\le h\end{cases}$
الوضع النسبي لمستوي مع مستوي		
شرط التوازي: ارتباط النواظم وإذا كان: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ كان المستويين منطبقين.	شرط التقاطع: عدم ارتباط النواظم	شرط التعامد: جداء النواظم معدوم.
الوضع النسبي لمستوي مع مستقيم		
نعوض المستقيم في المستوي ونميز الحالات الآتية:		
$0=0$ المستقيم محتوى في المستوي	$0=1$ المستقيم يوازي المستوي	$t=$ عدد المستقيم والمستوي متقاطعان في نقطة. لإيجاد احداثياتها نعوض t في المستقيم.

وضع نسبي لثلاث مستويات

طريقة التجميع	طريقة غاوس
1- إيجاد فصل مشترك d لمستويين من الثلاثة 2- دراسة وضع نسبي للمستوي المتبقي مع الفصل المشترك d ونميز الحالات: أ- الفصل المشترك يوازي المستوي: المستويات الثلاثة لا تشترك بأي نقطة	شبابيك القصف العشوائي تذكر الحذف بالتعويض 😉

ب- الفصل المشترك محتوى في المستوي: المستويات الثلاثة متقاطعة بهذا الفصل المشترك ت- الفصل المشترك يقطع المستوي: المستويات الثلاثة تتقاطع بنقطة.	

الوضع النسبي لكرة مع مستقيم

نعوض المستقيم في الكرة فنحصل على معادلة درجة ثانية ونميز الحالات:

لها حلان فيتقاطعان بنقطتان	لها حل وحيد فيتقاطعان بنقطة	مستحيلة الحل فلا يشتركان بأي نقطة

الوضع النسبي لكرة مع مستوي

نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي ونميز الحالات الآتية:

$dis < r$	$dis = r$	$dis > r$
المستوي يقطع الكرة في دائرة	المستوي يمس الكرة	المستوي لا يشترك مع الكرة بأي نقطة.
يطلب حساب نصف قطر دائرة المقطع باستخدام القانون: $r_c = \sqrt{r^2 - dis^2}$	**Nothing…keep going forward**	

الوضع النسبي لمستقيم مع مستقيم

ندرس ارتباط اشعة التوجيه ونميز حالتين:

اشعة التوجيه مرتبطة: المستقيمان متوازيان **لدراسة التطابق:** نفرض قيمة للوسيط t بأحد التمثيلين فنحصل على نقطة (x_0, y_0, z_0) تنتمي للمستقيم الأول ثم نختبر انتماءها للمستقيم الثاني وذلك من خلال تعويضها بالتمثيل الوسيطي فيجب الحصول على قيمة ذاتها للوسيط من المعادلات الثلاثة	الأشعة غير مرتبطة: المستقيمان غير متوازيان , ندرس التقاطع: $x_t = x_s$ $y_t = y_s$ $z_t = z_s$

ملاحظات:

1- لإثبات أن مستقيم يعامد مستوي نثبت أن الناظم و شعاع التوجيه مرتبطان
2- لإثبات أن شعاعاً معطى هو ناظم على مستوٍ معلوم يوجد اسلوبين :
   أ- الأسلوب الأول : الشعاع عمودي على شعاعين في المستوي
   ب- الأسلوب الثاني: الشعاع المعطى مرتبط مع ناظم المستوي

طلبات مميزة في الكرة

حساب نصف قطر دائرة المقطع	$R^2 = dis^2 + r^2$
إيجاد مركز دائرة المقطع	مسقط مركز الكرة على المستوي القاطع
إيجاد نقطة تماس مستوي مع كرة	مسقط المركز على المستوي المماس
إيجاد نقطة تماس مستقيم مع كرة (لا تشغل مخك مابدا مسقط قائم)	عوض قيمة t بالتمثيل الوسيطي

المجموعات النقطية	
$\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM}\right\|$ أو $AM = BM$	تمثل مستوي محوري للقطعة $[AB]$
$\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = const$ أو $AM = const$	تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $const$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$	تمثل كرة التي قطرها $[AB]$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$	تمثل المستوي الذي يمر من النقطة A ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له
معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$	نتمم إلى مربع كامل لنصل إلى الشكل $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$ ونميز الحالات: 1- $k < 0$ فتكون معادلة تمثل المجموعة الخالية Φ. 2- $k = 0$ فتكون معادلة تمثل نقطة التي إحداثياتها $A(x_0, y_0, z_0)$. 3- $k > 0$ فتكون المعادلة تمثل كرة التي نصف قطرها k ومركزها $A(x_0, y_0, z_0)$.
في باقي الحالات	1- نفرض $M(x, y, z)$ 2- نعوض في المعادلة 3- نصلح ثم نقارن شكل المعادلة المختزل مع الاشكال السابقة
لا ننسا الشكل العام لمعادلة المخروط والاسطوانة	
المساقط القائمة (تلت سطور وسطر والسر أن $\vec{u} = \vec{n}$)	
على مستوي:	على مستقيم:
1- نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من D وشعاع توجيهه هو ناظم المستوي $\vec{n}$ P 2- نوجد تقاطع هذا المستقيم مع المستوي فنحصل على D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي P	1- نوجد معادلة المستوي P المعامد للمستقيم d والمار من النقطة D. 2- نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P ولتكن D' فتكون المسقط القائم للنقطة D على المستقيم d.
ملاحظة: إن DD' تمثل بعد النقطة D عن المستوي.	**ملاحظة:** إن DD' تمثل بعد النقطة D عن المستقيم.
يمكن حساب بعد نقطة عن مستوي بشكل مباشر: $\boldsymbol{dis(D, P) = \frac{\|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$	لا يوجد طريقة أخرى لحساب بعد نقطة ما عن المستقيم **الا المسقط القائم**
Hero's idea	
حالة خاصة جداً	نعرف بعد نقطة عن مستقيم بأنها طول أصغر قطعة مستقيمة واصلة بين النقطة وهذا المستقيم وبالتالي إذا كانت M نقطة دارجة المستقيم واستطعنا كتابة AM بالشكل $\sqrt{\lambda^2 + \text{عدد موجب}}$ فإننا: - يكون AM أصغر ما يمكن عندما $\lambda = 0$

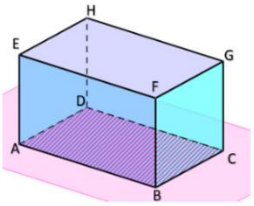
	- يكون بعد النقطة A عن المستقيم هي جذر العدد الموجب
فوائد واستخدامات dis	
حساب المسافة بين مستويين متوازيين	1- نثبت أن المستويين متوازيين (من خلال إثبات أن النواظم مرتبطة خطياً) 2- نأخذ نقطة كيفية A من المستوي الأول و ذلك بوضع $x = 0, y = 0$ في معادلة المستوي الأول و حساب z 3- نحسب بعد النقطة A عن المستوي الثاني فنحصل على المسافة بين المسستويين
بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويين متعامدين	إذا كان لدينا مستويين متعامدين وطُلب منا حساب بعد نقطة ما عن الفصل المشترك لهما فإننا نتبع الخطوات التالية: 1- نحسب h_1 بعد النقطة عن المستوي الأول 2- نحسب h_2 بعد النقطة عن المستوي الثاني 3- فحسب مبرهنة فيثاغورث يكون بعد النقطة عن الفصل المشترك هي $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$
الحجوم: القاعدة موجودة في مستوٍ كيفي	بعد رأس المجسم عن مستوي القاعدة
حجوم المجسمات الفراغية	
المجسم له قاعدتين	المجسم له قاعدة واحدة
$V = S \times h$	$V = \frac{1}{3} S \times h$
حيث أن S مساحة القاعدة , h الارتفاع	
ملاحظة نذيرية: بعد حساب الحجم يمكن استنتاج مساحة قاعدة أخرى له أو ارتفاع اخر له ويتم ذلك بحساب الحجم من منظور آخر (بدلالة القاعدة أو الارتفاع حسب الطلب)	

بنوك الأتمتة للأشعة التحليلية

1- ليكن لديك الاشعة $\vec{v}=\sqrt{2}\vec{\imath}+\sqrt{6}\vec{\jmath}-\vec{k}$, عندئذٍ $||\vec{v}||$ يساوي :

10	d	7	c	9	b	3	a

2- في الشكل المجاور نتأمل متوازي مستطيلات ABCDEFGH النقطة P النقطة المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ تنطبق على مركز الوجه



$BCGF$	d	$ADHE$	c	$EFGH$	b	$ABCD$	a

3- لدينا المعلم الكيفي $(F;\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FD})$ عندئذٍ إحداثيات N التي تحقق: $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NB}$ هي:

$N\left(\frac{1}{2},2,0\right)$	D	$N\left(1,\frac{1}{2},0\right)$	C	$N\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$	B	$N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$	A

4- لتكن النقاط $A(1,2,-1),B(2,1,0)$ و C نظيرة A بالنسبة للمبدأ . أي من المعادلات الآتية تمثل معادلة للمستوي (ABC)

$x-3y-2z=0$	d	$x-2y-3z+1=0$	c	$x-2y-3=0$	b	$x-2y-3z=0$	a

5- لتكن النقاط $A(1,3,-1),B(2,5,2),C(3,4,\alpha)$ أحد قيم العدد α التي تجعل المثلث ABC مثلثاً متساوي الساقين رأسه B

2	d	3	c	1	b	-3	a

6- معادلة المستوي المار من النقطة $A(3,-2,2)$ و شعاعا توجيهه $\vec{u}(1,1,0),\vec{v}(-1,1,1)$

$-x+y+1=0$	d	$x-y+2z=-5$	c	$x-y+2z-9=0$	b	$3x-y+2z=9$	a

7- المستوي المحدد بالنقاط $(2,0,0),(0,3,0),(0,0,5)$ له المعادلة :

$x+y+z=30$	d	$15x+10y+6z=1$	c	$x+y+z=1$	b	$15x+10y+6z=30$	a

8- في معلمٍ متجانس نتأمل الشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ و لنعرف الشعاعين :

$\overrightarrow{w_1}=2\vec{u}-\vec{v}$, $\overrightarrow{w_2}=2\vec{u}+\vec{v}$

فإذا علمت أن $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}$ متعامدان يمكن إثبات أن :

$\|\|\vec{u}\|\|=\frac{1}{2}\|\|\vec{v}\|\|$	d	$\|\|\vec{u}\|\|=2\|\|\vec{v}\|\|$	c	$\vec{u},\vec{v}$ مرتبطان خطياً	b	$\vec{u},\vec{v}$ لهما الطول ذاته	a

9- لتكن لدينا النقاط $A(1,2,-3),B(-1,3,3)\,,C(4,-1,2)$ فإن إحداثيات D التي تجعل ABCD متوازي الأضلاع هي :

$D(6,-2,-4)$	d	$D(-2,0,-8)$	c	$D(2,0,8)$	b	$D(6,-2,4)$	a

10- بفرض A,M نقطتان من الفراغ ويحققان أن $AM^2=3+(x+1)^2$ عندئذٍ أصغر قيمة لـ AM

$\sqrt{3}$	d	3	c	-1	b	1	a

11- قيمة العدد الحقيقي m التي تجعل الأشعة $\vec{v}(-1,2,0)\,,\vec{u}(1,0,2)\,,\vec{w}(-4,m,-2)$ مرتبطة خطياً

1	d	-3	c	6	b	3	a

12- معادلة المستوي P المار من النقطة $A(0,1,0)$ و يقبل $\vec{v}(0,3,-1)$, $\vec{u}(0,1,2)$ شعاعي توجيه :

a	$x=0$	b	$z=2$	c	$y=1$	d	$y-z+1=0$

13- قيمة العدد الحقيقي λ التي تجعل المستويان :

$$P:\quad x+2y-\lambda z+1=0$$
$$Q:\quad (3\lambda-7)x+4y-6z+5=0$$

a	3	b	-3	c	2	d	لا يمكن تعيينها

14- قيمة العدد λ الذي يجعل المستويين الآتيين متعامدين :

$$2x+3y-4z+1=0$$
$$\lambda x+2y+\frac{\lambda}{2}z-3=0$$

a	3	b	-3	c	2	d	غير موجودة

15- إذا علمت ان نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وان $\vec{u}.\vec{v}=-4$ المقدار $2\vec{u}(2\vec{v}+3\vec{u})$ يساوي:

a	134	b	140	c	-166	d	143

16- P مار من $A(2,5,-2)$ وعمودي على كل من Q وR وحيث:

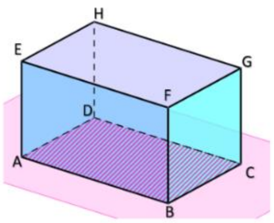
$$\begin{cases} Q: x-2y+3z-5=0 \\ R: x+y+z+1=0 \end{cases}$$

a	$P: -10x+4y+6z+12=0$	b	$P: -10x-y-z-2=0$
c	$P: 10x+4y-6z+12=0$	d	$P: x+y+z+1=0$

17- في الشكل المجاور . متوازي مستطيلات ABCDEFGH فيه

AB = 4 , BC = CG = 2 و بفرض J منتصف $[CG]$ عندئذٍ قيمة الجداء

$\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JH}$ هي :



a	16	b	15	c	12	d	3

18- نفترض أن $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ و النقاط B,C,D ليست على استقامة واحدة عندئذٍ يمكن التأكيد على أنّ

a	النقاط A,M,B على استقامة واحدة	b	المستقيم (AM) يوازي المستوي (BCD)
c	المستقيم (AM) يوازي أحد المستقيمين (BC) , (BD)	d	$P: x+y+z+1=0$

19- نفترض أن $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=1$ و نفترض أن I منتصف $[AB]$ عندئذٍ أي من العلاقات الآتية صحيحة

a	$IM^2=1+IA^2$	b	$IA^2=1+IM^2$	c	$IA^2=IM^2$	d	$IA^2=\frac{1}{2}IM^2$

20- أكمل العبارة الآتية : أعان الله المدرسين الذين ...

a	لا يملكون أقلاماً ملونة	b	يمسحون السبورة بأنفسهم
c	لا يملكون طلاب مثلكم	d	يدرسوننا

21- في معلم متجانس . نتأمل النقطة $A(3,4,1)$ و لتكن B مسقط A على المستوي xoz و النقطة C مسقط B على محور الرواقم . عندئذٍ طول القطعة المستقيمة [AC]

$\sqrt{3}$	d	2	c	$\sqrt{5}$	b	5	a

22- إذا كان d هو الفصل المشترك للمستويين :

$$P: x-2y+3z=5 \quad , \quad Q: x+y+z=-1$$

عندئذٍ d هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$

$\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,3z\right)$	d	$(-5z+1,\frac{2}{3}z-2,z)$	c	$(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z)$	b	$\left(-5z+\frac{1}{3},2z-\frac{2}{3},3z\right)$	a

23- المستويان $2x+2y+2z=0 , x+y-4z=0$

متقاطعان دون تعامد	d	متقاطعان و متعامدان	c	طبوقان	b	متوازيان دون تطابق	a

24- في معلم متجانس لتكن النقطتان $A(1,2,-1), B(3,0,1)$. النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [AB] إذا وفقط إذا كان $x+my+nz-1=0$ عندئذٍ

$m=1$ $n=-1$	d	$m=n=1$	c	$m=0$ $n=-1$	b	$m=-1$ $n=1$	a

25- الكرة S مركزها A و نصف قطرها 3 . و المستوي P يقطعها في دائرة نصف قطرها $\sqrt{2}$. قيمة $\text{dis}(A,P)$ يساوي

2	d	$\sqrt{2}$	c	$\sqrt{11}$	b	$\sqrt{7}$	a

26- في معلم متجانس . لتكن النقاط $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), E(1,1,1)$ و النقطة M منتصف [BA] عندئذٍ قيمة $\text{Cos}(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})$ ي

0	d	-1	c	1	b	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	a

27- لدينا ABCD رباعي وجوه . M تنتمي إلى الحرف [AB] و N تنتمي إلى الحرف [AC] . G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,1),(C,1),(D,1)$ و بنفس الوقت G مركز ثقل المثلث DMN عندئذٍ قيمة العدد α

3	d	2	c	1	b	$\frac{3}{2}$	a

28- نتأمل النقطتين $A(-1,2,3), B(1,4,-5)$. معادلة الكرة التي مركزها A و تمس المستوي المحوري للقطعة [AB]

$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$	b	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=72$	a
$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$	d	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$	c

29- ليكن d المستقيم الذي يُعطى وسيطياً بالمعادلات $x=t+1, y=t-2, z=3t$ حيث $t\in R$. و المستوي $P: 2x+ay-z+b=0$ فإذا علمت أن المستقيم d محتوى في المستوي P فإن قيمة الثنائية (a,b)

$(1,0)$	d	$(-1,-4)$	c	$(-1,4)$	b	$(0,1)$	a

30- في معلمٍ متجانس لديك النقاط $A(3,2,1), B(1,2,0), C(3,1,-2)$. العلاقة بين x, y لتكون النقاط $A, B, C, D(x, y, 3)$ في مستوٍ واحد

a	$x+6y-19=0$	b	$x+6y-11=0$	c	$x+6y+5=0$	d	$-x+6y-13=0$

31- بفرض G مركز ثقل المثلث ABC . إن مجموعة النقاط M(x, y, z) التي تحقق :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = 6\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

a	كرة مركزها G طول نصف قطرها AB	b	كرة مركزها G و نصف قطرها 6
c	المستوي المحوري للقطعة [AB]	d	غير ذلك

32- رباعي وجوه ABCD فيه G مركز ثقل المثلث(ABC) مجموعة النقاط M(x, y, z) التي تحقق

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

a	كرة مركزها G طول نصف قطرها AB	b	كرة مركزها G و نصف قطرها DG
c	المستوي المحوري للقطعة [AB]	d	غير ذلك

33- مجموعة النقاط M(x, y, z) المحققة للشروط :

$$x^2+z^2-\frac{9}{4}y^2=0 \quad ,0\le y\le 4$$

a	أسطوانة محورها محور التراتيب	b	مخروط دوراني محوره محور التراتيب ونصف قطر قاعدته 6
c	مخروط دوراني محوره محور الفواصل و نصف قطر قاعدتها 3	d	مخروط دوراني محور محور التراتيب و نصف قطر قاعدته 3

34- في معلم متجانس $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ إن معادلة المستوي (ABC)

a	$x+y+z-1=0$	b	$x+y+z=0$
c	$x+y+z+1=0$	d	$x-y-z=0$

35- المستويان $P_1: 2x+y-z+2=0 \quad , P_2: x+2y-z+1=0$ متقاطعان بمستقيم تمثله مجموعة الحلول :

a	$(5,2z,z): z\in R$	b	$(x,3x,x-1): x\in R$
c	$(y+1,y,5y) \ : y\in R$	d	$(y-1,y,3y) \ : y\in R$

36- لتكن النقطتان $A(-1,2,3)$ و $B(1,2,-1)$ و المستوي $x+y+z=1$ فإن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي P

a	$I(3,-2,2)$	b	$I(3,2,2)$	c	$I(-2,-2,3)$	d	$I(2,2,-3)$

37- في معلم متجانس نتأمل النقطة $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ فإن قيمة $\cos(\widehat{BAC})$

a	$\frac{4}{5}$	b	$-\frac{4}{5}$	c	$\frac{2}{5}$	d	$-\frac{2}{5}$

38- مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2-2y-8=0$ تمثل

a	نقطة وحيدة	b	المجموعة الخالية	c	كرة نصف قطرها 3	d	كرة نصف قطرها 9

39- لدينا ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين . طول كل من ساقيه $\sqrt{2}$ قيمة الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

تساوي

a	-2	b	2	c	$-\sqrt{2}$	d	$\sqrt{2}$

40- $ABCDEFGH$ مكعب . I منتصف [FG] عندئذٍ يساوي الشعاع

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HJ}$

يساوي

a	$\overrightarrow{AD}$	b	$(AH)^{\rightarrow}$	c	$\overrightarrow{AG}$	d	$\overrightarrow{AJ}$

41- معادلة المستوي المعامد لمستقيم d معادلاته الوسيطية

$x=0\,,y=-t\,,z=-t+1$

a	$z+y-3=0$	b	$y-z-3=0$	c	$x+y+3=0$	d	$y-z+3=0$

42- المستقيم d المعرف وسيطياً وفق :

$$d:\begin{cases}x=at-1\\ y=3t+2\\ z=2t\end{cases}$$

قيمة العدد a لتنتمي النقطة $A(-2,5,2)$ للمستقيم d

a	0	b	-2	c	-1	d	1

43- في معلم متجانس :

$$d:\begin{cases}x=3t+1\\ y=2t\\ z=-t+1\end{cases};t\in R\quad,\Delta:\begin{cases}x=s+2\\ y=1\\ z=3s+1\end{cases};s\in R$$

a	منطبقان	b	متقاطعان دون تعامد	c	متوازيان دون انطباق	d	متخالفان و متعامدان

44- لدينا النقاط $A(1,2,0)$, $B(0,0,1)$, $C(1,5,5)$. إن إحداثيات النقطة D′ مسقط $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC)

a	$(-2,-4,1)$	b	$(-4,2,1)$	c	$(1,2,4)$	d	$(2,4,-1$

45- إحداثيات النقطة E من محور التراتيب و متساوية البعد عن النقطتين $A(2,0,2)$, $B(2,1,0)$ هي :

a	$(0,2,0)$	b	$(0,-2,0)$	c	$\left(0,\frac{3}{2},0\right)$	d	$\left(0,-\frac{3}{2},0\right)$

46- في معلم متجانس لدينا النقاط $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$. بعد المبدأ عن المستوي (ABC) يساوي

a	$\frac{7}{6}$	b	$\frac{6}{7}$	c	$\frac{1}{36}$	d	$\frac{36}{49}$

47- ليكن المستوي $P: 2x-2y+az+3=0$

و ليكن المستقيم :

$x=1+t\quad,y=2-t\quad,z=3+2t$

قيمة الثابت a الذي يجعل المستقيم السابق يوازي المستوي P

a	-4	b	-1	c	-2	d	2

48- في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط $M(3,3,3)$ و المستويان :

$$P: 2x+y+2z-6=0$$
$$Q: 2x-2y-z+6=0$$

متعامدان . بعد النقطة M عن الفصل المشترك لهما يساوي

a	2	b	$\sqrt{10}$	c	$2\sqrt{5}$	d	$\sqrt{5}$

49- $ABCD$ رباعي وجوه، و M نقطة تحقق :

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DB}\right)$$

a	M منطبقة على A	b	Mمنطبقة على C	c	M منطبقة على منتصف [AB]	d	M منطبقة على [AC]

50- إن قيمة العددين x,y المحققان للعلاقة $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3),(B,1),(C,2)$

a	$x=\frac{1}{6},y=-\frac{1}{3}$	b	$x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{6}$	c	$y=\frac{1}{3},x=\frac{1}{6}$	d	$x=-\frac{2}{3},y=-\frac{2}{3}$

51- ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و ليكن I مركز ثقل المثلث BCD. و النقطة K نظيرة A بالنسبة لـ I . فإن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

a	$(A,-3)$ $(B,2)$ $(D,2)$ $(C,-2)$	b	$(A,-3)$ $(B,-2)$ $(D,2)$ $(C,2)$	c	$(A,-3)$ $(B,2)$ $(D,2)$ $(C,2)$	d	$(A,-3)$ $(B,-2)$ $(D,-2)$ $(C,-2)$

52- $ABCD$ رباعي وجوه I مركز ثقل المثلث ABC، H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,\alpha),(C,1),(B,1),(A,1)$

قيمة α التي تجعل H منتصف $[DI]$ هي:

a	1	b	2	c	3	d	-2

53- المستويان P، Q معادلتاهما $P: x+2y=4$ ، $Q: x-y=1$ عندئذ التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لهما:

a	$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=0\end{cases}$	B	$\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\end{cases}\{t\in\mathbb{R}\}$	C	$\begin{cases}x=1\\y=2\\z=t\end{cases}\{t\in\mathbb{R}\}$	d	$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=t\end{cases}\{t\in\mathbb{R}\}$

54- المعادلات الثلاث $P_1: x+2y+z=5$ ، $P_2; 2x-y=1$ ، $P_3: 3x+y=4$ تمثل ثلاثة مستويات:

a	متوازية	b	متقاطعة بنقطة واحدة	c	متقاطعة بفصل مشترك	d	متعامدة

55- A و B نقطتان مختلفتان في الفراغ، عندئذ مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $MA=4MB$ هي:

a	نقطة وحيدة	c	المستوي المحوري لـ $[AB]$	d	مستقيم	e	كرة

56- $P: x+y-z+2=0$ معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ حيث $I(2,0,1)$، عندئذ إحداثيات J هي:

a	$(0,2,-1)$	b	$(0,-2,3)$	c	$(1,2,3)$	d	$(1,1,2)$	e	$(3,4,1)$

57- نتأمل ثلاث نقاط A, B, C من الفراغ وعددا حقيقيا α من المجال $[-1, +1]$ نرمز بالرمز G_α الى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, \alpha), (B, 1+\alpha^2), (C, -\alpha)$, إن $\overrightarrow{BG_\alpha}$ تساوي:

a		b		c		d		e	
a	$-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	b	$\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	c	$\frac{1-\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	d	$\frac{\alpha-1}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	e	$\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\overrightarrow{AC}$

58- ليكن لدينا الكرة S التي مركزها $(1,0,1)$ ونصف قطرها R والمستوي $P: 2x + y - 2x = 12$.

إذا كان تقاطع S و P هو دائرة نصف قطرها $r = 3$, إن R يساوي:

a	$2\sqrt{3}$	b	5	c	3	d	$3\sqrt{2}$

59- المستقيمان L و L' معرفان وسيطياً وفق الآتي $L\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$, $L'\begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$,

إن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين L , L' هي:

a	$(2,-1,1)$	b	$(1,1,2)$	c	$(-1,-1,2)$	d	$(2,1,1)$

60- $ABCM$ متوازي أضلاع عندئذ M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

A	$(A;1),(B;1)$ $,(C;-1)$	B	$(A;-1),(B;1)$ $,(C;1)$	C	$(A;1),(B;-1)$ $,(C;1)$	d	$(A;-1),(B;1)$ $(C;2)$

61- في معلم متجانس للفراغ، لتكن $A(1,2,1)$ والمستقيم (d) الممثل وسيطياً وفق:
$x = 0 , y = -t , z = -t + 1 : t \in \mathbb{R}$ عندئذ معادلة المستوي المار بالنقطة A ويعامد (d) هي:

a	$z + y - 3 = 0$	b	$y - z - 3 = 0$	c	$x + y + 3 = 0$	d	$y - z + 3 = 0$	e	$x + 3 = 0$

62- في معلم متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. معادلات ثلاثة مستويات، بحل الجملة الخطية الموافقة فإن هذه المستويات:

$$P_1: x + y + z = 1$$
$$P_2: -2y + z = 1$$
$$P_3: -4y + 14z = -2$$

a	متوازية	b	تشترك بمستقيم	c	لا تشترك بأية نقطة	d	تشترك بنقطة	e	متعامدة

63- نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, المستويين P و Q : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ فإن التمثيلات الوسيطية لفصلهما المشترك بدلالة $t \in \mathbb{R}$ هو:

a	$\begin{cases} x = -t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$	b	$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$	c	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$	d	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$	e	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$

64- إذا علمت أن نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأن $\vec{u}.\vec{v} = -5$ فإن $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - 3\vec{v})$ يساوي:

a	4	b	8	c	2	d	5	e	3

65- ABCDEFGH مكعب طول حرفه 2 نعرف عليه معلماً $\left(D; \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\right)$. عندئذٍ معادلة مجموعة نقطة الفراغ التي تنتج عن دوران الضلع [BF] من المستطيل $BFHD$ حول (DH)

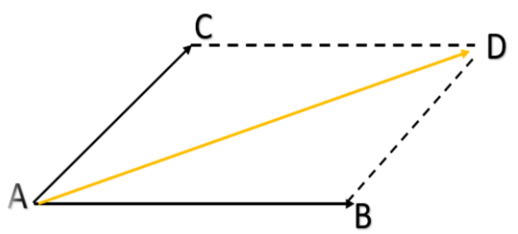
a	$x^2 + y^2 = 8 \quad ,0 \le z \le 2$	b	$x^2 + y^2 = 2 \quad , \quad 0 \le z \le 2$
c	$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \quad , \quad 0 \le z \le 2$	d	$x^2 + y^2 = 2 \quad ,0 \le z \le 1$

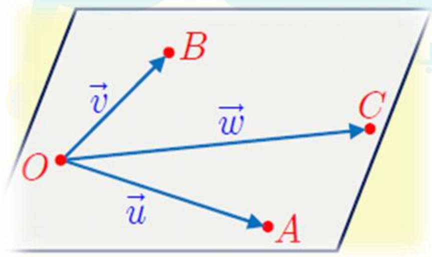
66- بفرض A, B نقطتان متمايزتان في الفراغ , في الخيارات الآتية نضع توصيفاً لمجموعة النقاط M المحققة للشرط المذكور

a	$MA = MB$ المستوي المحوري للقطعة $[AB]$	b	$MB = AB$ كرة مركزها B و نصف قطرها AB
c	$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ تمثل نقطة وحيدة هي منتصف القطعة $[AB]$	d	$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ نقطة وحيدة $M = A$

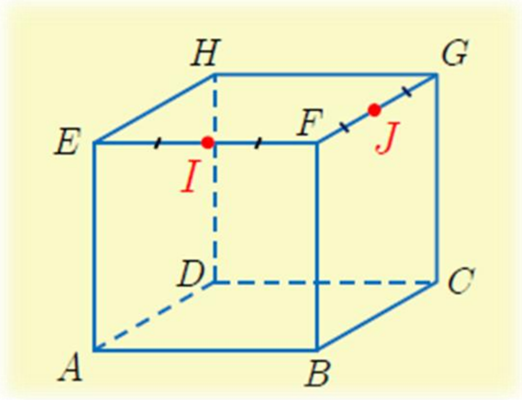
67- أكمل العبارة الآتية : أعان الله المدرسين الذين ...

a	لا يملكون أقلاماً ملونة	b	يمسحون السبورة بأنفسهم
c	لا يملكون طلاب مثلكم	d	يدرسوننا

الأشعة شعاعياً	
تساوي شعاعين	هو مفهوم هام حيث لا يشترط الانطباق بين الشعاعين وإنما فقط تساوي المنحنيين والجهتين والطويلتين
الشعاعان المتعاكسان	هما شعاعين لهما نفس المنحى و الطويلة ولكن بجهتين متعاكستين وفي هذه الحالة ندعو أحد الشعاعين نظير الآخر والنتيجة: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
جمع الأشعة شعاعياً	
قاعدة شال (لا تحتاج للرسم)	تستخدم قاعدة شال لجمع الأشعة المتعاقبة (نهاية الشعاع الأول تنطبق على بداية الشعاع الثاني) مثلاً $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ عندئذٍ يكون: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ويمكن تعميمها: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$
قاعدة متوازي الأضلاع (تحتاج للرسم)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ حيث D النقطة التي تجعل $ABDC$ متوازي أضلاع ($\overrightarrow{AD}$ هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين). 

<table>
<tr><th colspan="2">الارتباط الخطي شعاعياً</th></tr>
<tr><td>التعريف</td><td>نقول عن الشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ إنهما مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان أحدهما ينتج عن الآخر بضربه بعدد ثابت غير معدوم k أي:
$\vec{u} = k\,\vec{v}$</td></tr>
<tr><td>التفسير الهندسي</td><td>قولنا إن الشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطان خطياً. هذا يعني أن لهما نفس المنحى
أي: الارتباط الخطي يعني توازي.</td></tr>
<tr><td>ملاحظة</td><td>إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً قلنا أن النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.
أي إذا كان الشعاعان المرتبطان مشتركان بنقطة أي النقاط الثلاثة تقع على استقامة واحدة</td></tr>
<tr><th colspan="2">الارتباط الخطي لثلاثة اشعة شعاعياً</th></tr>
<tr><td>نقول عن الأشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ إنها ثلاث أشعة مرتبطة خطياً إذا تحقق الشرطان:</td><td>1- $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً
2- يوجد عددان حقيقيان α,β يحققان:
$\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$</td></tr>
<tr><td>التفسير الهندسي</td><td>إذا كان $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ثلاث أشعة مرتبطة خطياً بحيث:
$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\,\vec{v}$
عندئذٍ يوجد نقطة O في الفراغ تجعل النقاط O,A,B,C في مستوٍ واحد بحيث:
$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

</td></tr>
<tr><td>فوائد هامة</td><td>1- إثبات وقوع 4 نقاط في مستوٍ واحد:
• نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ غير مرتبطين
• نثبت وجود عددين حقيقين α,β بحيث :
$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$
2- إثبات أن المستقيم (ED) يوازي المستوى (ABC):
(i) نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً
(ii) نثبت وجود عددين حقيقين α,β يحققان:
$\overrightarrow{ED} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$</td></tr>
</table>

1- في الشكل المجاور مكعب



النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}$ تنطبق على النقطة:

a	F	b	B	c	C	d	H

2- النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ تنطبق على النقطة:

a	F	b	E	c	C	d	H

3- النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DG}$ تنطبق على النقطة:

a	F	b	B	c	C	d	E

4- النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}$ تنطبق على النقطة:

a	F	b	B	c	C	d	خارج المكعب

5- النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB})$ تنطبق على النقطة:

a	F	b	B	c	I	d	H

6- موضع النقطة N المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FJ}$:

a	F	b	J	c	C	d	H

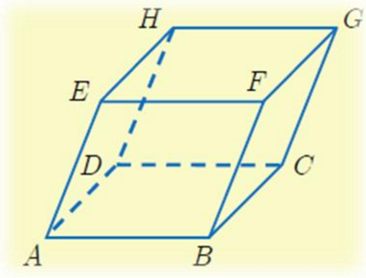
7- موضع النقطة N المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HJ}$:

a	F	b	J	c	C	d	H

8- موضع النقطة N المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI}$:

a	F	b	B	c	I	d	H

9- في الشكل المجاور متوازي سطوح



موضع النقطة P المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$:

a	خارج المكعب	b	مركز $ADHE$	c	مركز $ABFE$	d	مركز $BFGC$

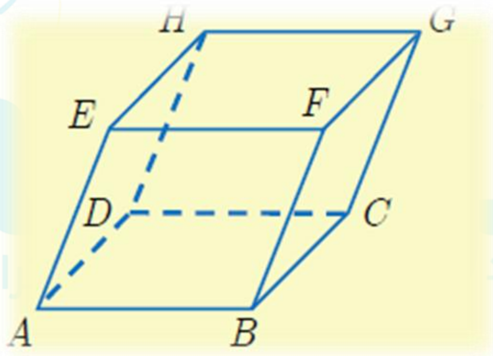
10- موضع النقطة Q المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$:

a	مركز $DAEH$	b	مركز $ADHE$	c	مركز $EFGH$	d	مركز $BFGC$

11- موضع النقطة R المحققة للعلاقة $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$:

a	خارج المكعب	b	مركز $ADHE$	c	مركز $ABFE$	d	مركز $BFGC$

12- في الشكل المجاور متوازي سطوح



الشعاع الذي يساوي المقدار $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$ هو:

a	$\overrightarrow{HA}$	b	$\overrightarrow{AH}$	c	$\overrightarrow{GB}$	d	$\overrightarrow{GD}$

13- علاقة الشعاع السابق بالشعاع $\overrightarrow{AH}$ هي:

a	عدم توازي	b	تعامد	c	توازي	d	غير ذلك

علاقة وجود مركز الأبعاد المتناسبة	
لنقطتين	$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
لثلاث نقاط	$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
لأربعة نقاط	$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
استخدامها	لتعيين قيمة كل من التثقيلات
الخطوات	1- نصلح شكل العلاقة لجعل الطرف الثاني $\vec{0}$ ونجعل البدايات كلها م أ م. 2- نقارن مع القانون 3- نختبر الشرط $(\alpha+\beta+\cdots\neq 0)$
ملاحظة	1- G مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين من تثقيلتين مختلفتين بالإشارة فإن G تقع خارج القطعة وبالعكس 2- لا تنسا خاصة التجانس: عند ضرب العلاقة الأم بـ عدد $k\neq 0$ تبقى صحيحة ومحققة.

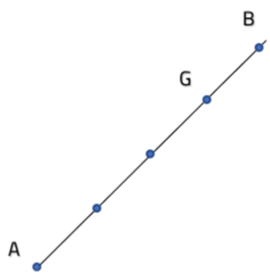
1- العددين α و β المحققان لأن يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) المحققة للعلاقة $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$:

a	$\alpha=2,\beta=1$	b	$\alpha=-2,\beta=1$	c	$\alpha=3,\beta=1$	d	$\alpha=2,\beta=2$

2- الأعداد α و β و γ لتكون النقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$:

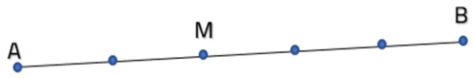
a	$\alpha=1,\beta=2,\gamma=3$	b	$\alpha=1,\beta=4,\gamma=3$	c	$\alpha=4,\beta=2,\gamma=3$	d	$\alpha=-7,\beta=8,\gamma=3$

3- تأمل الشكل , إن قيمة كل من α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



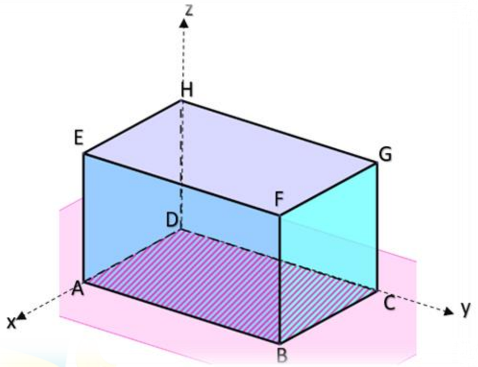
a	$\alpha=2,\beta=1$	b	$\alpha=-2,\beta=1$	c	$\alpha=1,\beta=3$	d	$\alpha=2,\beta=2$

4- تأمل الشكل , إن قيمة كل من α و β ليكون M م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



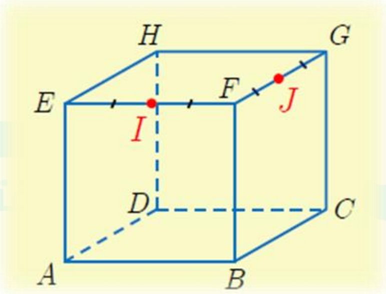
$\alpha = 2 , \beta = 2$	d	$\alpha = 3 , \beta = 2$	c	$\alpha = -2 , \beta = 1$	b	$\alpha = 2 , \beta = 1$	a

5- نتأمل في الشكل المجاور متوازي مستطيلات $ABCDEFGH$ فإن قيمة كل من α و β و γ ليكون D م أ م للنقاط $(A,\alpha) , (B,\beta) , (C,\gamma)$ هي:



$\alpha = -7, \beta = 8, \gamma = 3$	d	$\alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 3$	c	$\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$	b	$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$	a

6- في الشكل المجاور مكعباً.



إن قيمة كل من α و β و γ ليكون I م أ م للنقاط $(A,\alpha), (F,\beta), (E,\gamma)$ هي:

$\alpha = -7, \beta = 8, \gamma = 3$	d	$\alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 3$	c	$\alpha = 1, \beta = 4, \gamma = 3$	b	$\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1$	a

انشاء مركز الأبعاد المتناسبة (تحديد موضع مركز الأبعاد)	
لنقطتين	$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
لأكثر من نقطتين	1- الخاصة التجميعية: هي عبارة عن فرض مركز ابعاد متناسب لنقطتين باختيارك ثم وضعهم ضمن مركز مثل: $(A,1)\ (B,2)\ (C,-1)$ بفرض K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A و B فإن: $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ فيكون ثقل 3 (المقام) وبالتالي يمكن كتابة: $(A,1)\ (B,2)\ (C,-1)$ $(K,3)\ (C,-1)$ 2- ثم نستخدم علاقة الانشاء للنقطتين الباقيتين في النهاية, في مثالنا السابق تبقى: $(K,3)\ ,(C,-1)$ نطبق علاقة الانشاء , بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين C , K: $\overrightarrow{KG} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{KC}$ وبالتالي ثقل G هو 2. شو ستفدنا؟! G مركز أبعاد للنقطتين K و C وبالتالي G مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و B و C.
حالات خاصة	• G م أ م لنقطتين لهما نفس الثقل عندئذ G في منتصف القطعة المستقيمة. • G م أ م لثلاثة نقاط لهما نفس الثقل عندئذ G مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات).
ملاحظات	1- لإثبات أن ثلاثة نقاط تقع على استقامة واحدة يكفي أن نثبت أن واحدة منهم مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المتبقيتين 2- لإثبات أن أربعة نقاط تقع في مستو واحد يكفي اثبات أن أحدهم مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاثة المتبقية.

إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة	بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ فإن إحداثيات G: $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_c}{\alpha+\beta+\gamma}$

1- ثقل مركز الأبعاد للنقطتين $(A,1),(B,3)$ يساوي:

a	4	b	2	c	1	d	3

2- مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)\ (B,2)(C,2)$ يقع:

a	نقطة تلاقي المتوسطات	b	نقطة تلاقي المتوسطات	c	نقطة تلاقي المتوسطات	d	نقطة تلاقي المتوسطات

3- مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,0)\ (B,3)$ يقع:

a	على B	b	على A	c	خارج $[AB]$	d	منتصف $[AB]$

4- مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,10),(B,10)$ يقع:

a	على B	b	على A	c	خارج $[AB]$	d	منتصف $[AB]$

خاصة الاختزال في مركز الأبعاد المتناسبة	
القانون	$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$
شرط التطبيق	$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
شرط الحذف والإصلاح	$\alpha+\beta+\gamma=0$
ملاحظة: تستخدم علاقة الاختزال في السؤال عن المجموعات النقطية:	
المجموعات النقطية	
$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=\left\|\overrightarrow{BM}\right\|$ أو $AM=BM$	$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=\left\|\overrightarrow{BM}\right\|$ أو $AM=BM$
$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=const$ أو $AM=const$	$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=const$ أو $AM=const$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$	$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$	$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$
معادلة من الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$	معادلة من الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$
في باقي الحالات	في باقي الحالات
لا ننسا الشكل العام لمعادلة المخروط والاسطوانة	

مسائل وتمرينات عامة

نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ و E و F تحققان:

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

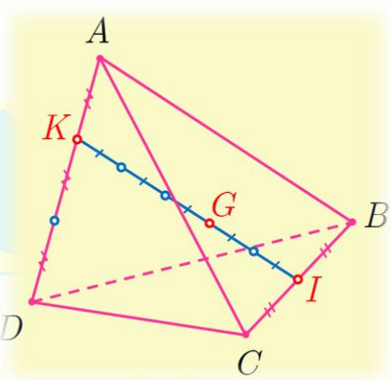
أثبت أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$$

يقع على $[EF]$ ثم عين G.

تدرّب ① ص 31

بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور.



عيّن a و b و c و d ما يأتي:

1. K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(A,a)\,,(D,d)$$

2. I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

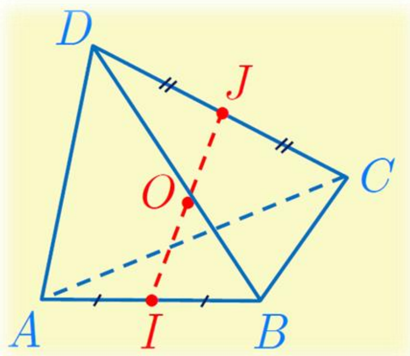
$$(C,c)\,,(B,b)$$

3. G مركز الأبعاد الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة:

$$(A,a)\,,(B,b)\,,(C,c)\,,(D,d)$$

السؤال الأول ص 35

$ABCD$رباعي وجوه. فيه I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ و O منتصف $[IJ]$.



1- املأ الفراغ:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\cdots+\overrightarrow{CD}$$

و استنتج أنَّ:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

2- بسّط كلّاً من $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$ و $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$.

و استنتج أنَّ:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$$

3- لماذا $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$؟

استنتج أنَّ:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

4- لتكن K منتصف $[AD]$, و L منتصف $[BC]$.أثبت أنَّ: $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, و استنتج أنَّ: $IKJL$ متوازي أضلاع.

السؤال الثاني ص 35

$ABCD$ رباعي وجوه. وضِّع على شكل النقاط الآتية:

1. I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(A,1)\ ,(B,2)$$

2. J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(D,1)\ ,(C,2)$$

3. K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(D,1)\,,(C,2)\,,(B,2)\,,(A,1)$$

4. L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(B,-2)\,,(A,1)$$

5. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(C,-1)\,,(B,-2)\,,(A,1)$$

6. N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(D,1)\,,(C,-1)\,,(B,-2)\,,(A,1)$$

السؤال 25 ص 44

نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$, و النقاط I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ بالترتيب. و النقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A,1)\,,(B,1)\,,(G,1)\,,(E,1)$$

1. أثبت أنَّ M تنتمي إلى $[IJ]$ و عيّن موضعها على هذه القطعة.
2. أثبت أنَّ M تنتمي إلى $[KL]$ و عيّن موضعها على هذه القطعة.
3. استنتج أنَّ I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد و عيّن طبيعة الرباعي $ILJK$.

السؤال الأول ص 94

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. و ليكن α عدداً حقيقيّاً, و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. النقطتان E و F معرّفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$.

و أخيراً H هي منتصف $[EF]$. المطلوب:

1. تحقق أنّ E هي مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (D,α), و كذلك أنّ النقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$(B,1-\alpha)$ و (C,α).

2. a. أثبت أنّ النقطة H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,1-\alpha),(B,1-\alpha),(C,\alpha),(D,\alpha)$$

b. استنتج وقوع النقاط I و J و H على استقامة واحدة.

السؤال الثاني ص 94

$ABCD$ رباعي وجوه. أثبت في كل من الحالتين الآتيتين أنّ النقاط M و B و C و D تقع في مستوٍ واحد, ثمّ وضّع النقطة M.

1. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$
2. $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

السؤال السابع ص 96

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. K نقطة من $[AB]$ تُحقق $AK=\frac{1}{3}AB$, و L نقطة من القطعَة المستقيمة $[CD]$ تُحَقق $CL=\frac{2}{3}CD$, و أخيراً I هي منتصف $[AD]$, و J هي منتصف $[BC]$.

نعرّف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,2),(B,1),(C,1),(D,2)$$

1. a. أثبت أنّ النقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.

b. أثبت أنّ النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

2. استنتج وقوع النقاط I و J و K و L في مستوٍ واحد.

تدرّب ص 81 + 80

السؤال الأوّل

النقطتان A و B نقطتان مختلفتان. في الحالات الآتية عيّن t التي تحقق $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$.

1. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(B,1),(A,-2)$$

2. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(A,2),(B,3)$$

السؤال الثاني

أعطِ في الحالات الآتية α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(A,\alpha),(B,\beta)$$

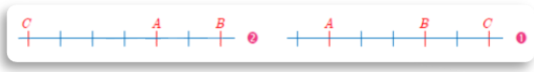
1. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$

2. $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

3. $\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

السؤال الثالث

في الشكل الآتي التدريجات متساوية. عبّر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين.



السؤال الرابع

نتأمّل مثلثاً ABC. في كل حالة مما يأتي, جد عددين x و y بحيثُ: $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

1. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,-1)\,,(B,1)\,,(C,1)$$

2. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,3)\,,(B,1)\,,(C,2)$$

السؤال الخامس

نتأمل مثلثاً ABC.في كل حالة مما يأتي, جد الأعداد α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:
$(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$.

1. $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

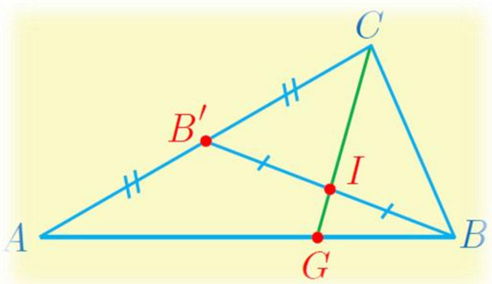
2. $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$

3. $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

4. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

السؤال السادس

انطلاقاً من الشكل المجاور.

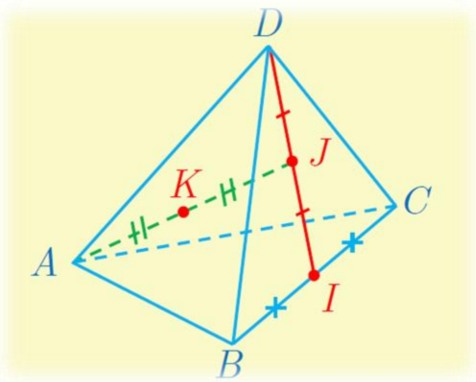


جد الأمثال α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$. و استنتج λ التي تحقق:

$$\overrightarrow{GA}+\lambda\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

السؤال السابع

انطلاقاً من الشكل المجاور.



جد الأمثال α و β و γ و δ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)\,,(D,\delta)$.

السؤال الثامن

$ABCD$ رباعي وجوه. استعمل الخاصة التجميعية لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:

1. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,1)\;,(B,1)\,,(C,1)\,,(D,3)$$

2. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,-1)\;,(B,2)\,,(C,-1)\,,(D,-2)$$

3. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,1)\;,(B,2)\,,(C,3)\,,(D,6)$$

حول أشكال العدد العقدي			
الشكل	الجبري	المثلثي	الأسي
صيغته	$z = a + ib$	$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$	$z = re^{i\theta}$
كيفية كتابته	في حال كان يوجد i في المقام نضرب بالمرافق	1- نحسب $r = \sqrt{a^2+b^2}$ 2- نحسب cos و sin من القوانين: $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r}$ 3- نحدد الزاوية حسب إشارات cos و sin 4- نعوض في القانون	1- نحسب $r = \sqrt{a^2+b^2}$ 2- نحسب cos و sin من القوانين: $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r}$ 3- نحدد الزاوية حسب إشارات cos و sin 4- نعوض في القانون
الجمع	نجمع بشكل مباشر ونختزل	-	-
الطرح	نطرح بشكل مباشر ونختزل	-	-
الضرب	ننشر	ضرب الطويلات وجمع الزوايا	ضرب الطويلات وجمع الزوايا
القسمة	نضرب بمرافق المقسوم عليه	قسمة الطويلات وطرح الزوايا	قسمة الطويلات وطرح الزوايا
القوة	مطابقات شهيرة أو تفريق ثم نشر	قوة للطويلة وأمثالاً للزاوية	قوة للطويلة وأمثالاً للزاوية
المرافق	نعكس إشارة i	نعكس إشارة الزاوية	نعكس إشارة الزاوية
المقلوب	$\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$	نقلب الطويلة ونعكس الزاوية	نقلب الطويلة ونعكس الزاوية

اليكم بعض التمارين البسيطة للتدريب على كل مما سبق:

1- ليكن لدينا الاعداد العقدية: $z_1 = 2+4i$, $z_2 = 3-i$, $z_3 = -\frac{5}{2}i$ ان مرافق z_1 :

a	$2+4i$	b	$-2-4i$	c	$-2+4i$	d	$2-4i$

2- مرافق $\overline{Z_3}$ هو:

a	$\frac{2}{5}i$	b	$\frac{5}{2}i$	c	$-\frac{5}{2}i$	d	$-\frac{2}{5}i$

3- المجموع $z_1 + z_3$ يساوي:

a	$5+3i$	b	$-5-3i$	c	$-5+3i$	d	$5-3i$

4- المقدار $z_3 - z_1$ يساوي:

a	$-2-\frac{13}{2}i$	b	$-2+\frac{13}{2}i$	c	$2-\frac{13}{2}i$	d	$2+\frac{13}{2}i$

5- المقدار $z_1.z_2$ يساوي:

$-10-10i$	d	$10+10i$	c	$10-10i$	b	$-10+10i$	a

6- إن $Re(z_3)$:

$-\frac{5}{2}$	d	1	c	0	b	$-\frac{2}{5}$	a

7- إن $Im(z_2)$:

1	d	3	c	-1	b	-3	a

8- العدد z_1^2 يساوي:

$12+8i$	d	$12-16i$	c	$-12+8i$	b	$-12+16i$	a

ليكن لدينا العددان العقديان: $Z_1=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $Z_2=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ اوجد:

9- طويلة العدد Z_1:

غير ذلك	d	$\lvert Z_1\rvert=1$	c	$\lvert Z_1\rvert=0$	b	$\lvert Z_1\rvert=2$	a

10- طويل العدد Z_2:

$\lvert Z_2\rvert=2$	d	$\lvert Z_2\rvert=3$	c	$\lvert Z_2\rvert=-3$	b	$\lvert Z_2\rvert=1$	a

11- مرافق Z_1 هو:

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	d	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	c	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	b	$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	a

12- مرافق Z_2 هو:

غير ذلك	d	$3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	c	$3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	b	$-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	a

13- إن $\arg(Z_2)$ تساوي:

$\frac{3\pi}{4}$	d	$-\frac{\pi}{4}$	c	$\frac{\pi}{4}$	b	$-\frac{3\pi}{4}$	a

14- العدد Z_1^7 يساوي:

$\cos\left(\frac{\pi}{21}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{21}\right)$	d	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$	c	$7(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right))$	b	$\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$	a

15- العدد Z_2^2 يساوي:

$27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{12}\right)\right)$	b	$27\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	a
$27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	d	$9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	c

16- إن المقدار $Z_1.Z_2$:

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$	b	$3\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$	a
$3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$	d	$3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	c

17- إن المقدار $\frac{z_1}{z_2}$:

a	$-\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+isin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	b	$\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+isin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$
c	$-\frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	d	$\frac{1}{3}(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right))$

18- إن المقدار $\frac{z_2}{z_1}$:

a	$-3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	b	$3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+isin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$
c	$3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	d	$-3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

خواص المرافق والطويلة

العملية	المرافق	الطويلة
الجمع	$z+\bar{z}=2Re(z)$	-
الطرح	$z-\bar{z}=2iIm(z)$	-
الضرب	$z.\bar{z}=\lvert z\rvert^2$	$\lvert z_1\rvert.\lvert z_2\rvert=\lvert z_1.z_2\rvert$
القسمة	-	$\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}=\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert$
ملاحظات إضافية	$\bar{\bar{z}}=z$	

حول طويلة عدد عقدي

اثبات أن Z حقيقي	اثبات أن Z تخيلي	اثبات صحة علاقة تحوي $\lvert z\rvert^2$
1- نأخذ المرافق $\bar{Z}$ 2- نستفيد من كل عدد w طويلته $\lvert w\rvert$بأنه يحقق أن $\bar{w}=\frac{\lvert w\rvert^2}{w}$ 3- نصلح ونحاول اظهار أن: $\bar{Z}=Z$ عندئذٍ Z حقيقي	1- نأخذ المرافق $\bar{Z}$ 2- نستفيد من كل عدد w طويلته $\lvert w\rvert$ بأنه يحقق أن $\bar{w}=\frac{\lvert w\rvert^2}{w}$ 3- نصلح ونحاول اظهار أن: $\bar{Z}=-Z$ عندئذٍ Z تخيلي	ننطلق من طرف لنصل للطرف الآخر وذلك باستخدام العلاقة: $\lvert z\rvert^2=z.\bar{z}$

Hero's ideas

Rockets

$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$	$-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$-1=e^{i\pi}$	$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

اشكال مثلثية ناقصة

$\cos(\theta)-isin(\theta)$	$-\cos(\theta)+i\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)-i\sin(\theta)$	$\sin(\theta)+icos(\theta)$
نستبدل θ بـ $-\theta$.	نستبدل θ بـ $\pi-\theta$.	نستبدل θ بـ $\pi+\theta$.	نستبدل θ بـ $\frac{\pi}{2}-\theta$.
$\cos(-\theta)+isin(-\theta)$	$\cos(\pi-\theta)+isin(\pi-\theta)$	$\cos(\pi+\theta)+isin(\pi+\theta)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

19- الشكل الجبري للعدد $Z=\frac{1}{2-i}$

a	$-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$	b	$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$	c	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$	d	$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

20- الشكل الجبري للعدد $Z=(1+i)e^{i\frac{\pi}{4}}$

a	$2+2i$	b	$\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	c	$\sqrt{2}i$	d	$2-2i$

21- الشكل المثلثي للعدد $Z=\sqrt{3}-3$

غير ذلك	d	$(3-\sqrt{3})(\cos\pi + i\sin\pi)$	c	$\sqrt{3}\cos(\pi) + i\sin(\pi)$	b	$3\cos(\pi)+i\sin(\pi)$	a

22- الشكل المثلثي للعدد $Z=-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$	b	$2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$	a
$2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	d	$2\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$	c

23- الشكل المثلثي للعدد $Z=\left(\frac{3i-1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right)$

$\cos(3\pi)+i\sin(3\pi)$	b	$\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$	a
$(a\ ,C)$	d	$\cos(\pi)+i\sin(\pi)$	c

24- الشكل الأسي للعدد $Z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$(\sqrt{2}-\sqrt{3})e^{i\frac{4\pi}{3}}$	b	$(\sqrt{2}-1)e^{i\frac{4\pi}{3}}$	a
$(\sqrt{2}+1)e^{i\frac{4\pi}{3}}$	d	$(1-\sqrt{2})e^{i\frac{4\pi}{3}}$	c

25- الشكل الأسي للعدد $Z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$

$32e^{i\frac{6\pi}{4}}$	d	$32e^{i\frac{5\pi}{3}}$	c	$32e^{i\frac{4\pi}{3}}$	b	$32e^{-i\frac{4\pi}{3}}$	a

26- الشكل الأسي للعدد $Z=(1+\sqrt{3}i)^4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$(a\ ,b)$	d	$16e^{i\frac{5\pi}{3}}$	c	$16e^{i\frac{8\pi}{3}}$	b	$16e^{i\frac{2\pi}{3}}$	a

27- الشكل الجبري للعدد $Z=(1+i)^{2016}$

$(a\ ,b)$	d	$Z=2^{1008}$	c	$Z=2i^{1008}$	b	$Z=-2^{1008}$	a

28- الشكل المثلثي للعدد $Z=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	b	$12\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	a
$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	d	$2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$	c

29- بفرض ليكن z عدداً عقدياً يحقق:

$$\bar{z}=\frac{9}{z}\ ,\arg(iz)=\frac{\pi}{3}$$

الشكل الأسي للعدد z هو:

$3e^{i\frac{\pi}{2}}$	d	$e^{i\frac{\pi}{6}}$	c	$3e^{i\frac{\pi}{3}}$	b	$3e^{-i\frac{\pi}{6}}$	a

30- إن طويلة العدد العقدي $\alpha=sinx+icosx$ تساوي:

$2\cos(x)$	d	1	c	$\sin^2 x$	b	e	a

31- إن الشكل المثلثي للعدد العقدي $w=2\left[cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-isin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]^5$ هو:

$-2[\cos(\pi)+i\sin(\pi)]$	d	$2[\cos(\pi)+i\sin(\pi)]$	c	$2(\cos(0)+i\sin(0))$	b	$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$	a

32- إذا كان $z = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$ فإن $\arg(\bar{z})$:

a	$\frac{3\pi}{14}$	b	$-\frac{5\pi}{14}$	c	$\frac{2\pi}{3}$	d	$\frac{5\pi}{6}$

33- إذا كان $z = 1 + i$ فإن $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$:

a	-1	b	$-\frac{1}{2}$	c	1	d	$\frac{1}{2}$

34- الشكل الأسي للعدد العقدي $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ هو:

a	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$	b	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$	c	$2e^{i\frac{\pi}{12}}$	d	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

35- إذا كان $\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ فإن $z = \alpha + \alpha^4$ هو:

a	$2i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	b	$-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	c	$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	d	$-2i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

36- إذا كان $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^4}$ فإن $|\bar{z}|$ تساوي

a	2	b	4	c	$6 + i$	d	,$4 + 3i$

37- إذا كان z = a + ib فإن الشكل الجبري للعدد $\frac{1}{z}$ هو:

a	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}i$	b	$\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$
c	$\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$	d	$\frac{a}{a^2-b^2} - i\frac{b}{a^2-b^2}$

<table>
<tr><th colspan="2">الانتقال بين الأشكال</th></tr>
<tr><th>من جبري إلى مثلثي أو أسي</th><th>من مثلثي أو أسي إلى جبري</th></tr>
<tr><td>1- نحدد x, y
2- نحسب $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
3- نحسب النسب المثلثية :
$\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$
4- نستنتج الزاوية (القيمة و الربع المناسب)
نعوض في الشكل الأسي أو المثلثي حسب الطلب.</td><td>1- نحدد r, θ
2- نحسب النسب المثلثية للزاوية θ
3- نضع $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$
4- نعوض في الشكل الجبري
$z = x + iy$
ملاحظة : قد نحتاج إلى إرجاع الزاوية إلى الربع الأول من خلال الخطوات :
1- نكتب البسط بدلالة مضاعف للمقام
2- نفرق
3- نميز حالتين :
أ- إذا وجدنا عدد زوجي مضروب بـ π نحذف الحد كاملاً
ب- إذا وجدنا عدد فردي مضروب بـ π نستبدله بـ π
نحدد الإشارات حسب الربع الموافق</td></tr>
<tr><th colspan="2">علاقات أولر eular</th></tr>
<tr><td>$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin(\theta)$</td><td>$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$</td></tr>
<tr><td>$2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$</td><td>$2i\sin(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$</td></tr>
</table>

الصيغ العقدية للتحويلات الهندسية

الانسحاب	التحاكي	الدوران
$\underbrace{z}_{\text{صورة}}{}' = \underbrace{z}_{\text{أصل}} + Z_{\vec{w}}$	$\underbrace{z}_{\text{صورة}}{}' - \underbrace{w}_{\text{مركز}} = \underbrace{k}_{\text{نسبة تحاكي}}\left(\underbrace{z}_{\text{اصل}} - w\right)$	$\underbrace{z}_{\text{صورة}}{}' - \underbrace{w}_{\text{مركز}} = \underbrace{e}_{\text{زاوية}}{}^{i\theta}(\underbrace{z}_{\text{اصل}} - w)$
التناظر المركزي	**تناظر محوره ox**	**تناظر محوره oy**
$\underbrace{z}_{\text{صورة}}{}' - \underbrace{w}_{\text{مركز}} = -(\underbrace{z}_{\text{اصل}} - w)$	$\underbrace{z}_{\text{صورة}}{}' = \bar{z}$	$\underbrace{z}_{\text{صورة}}{}' = -\bar{z}$

الكسر الذهبي $\frac{b-a}{c-d}$

1- نعوض الأعداد ونبسط.

2- نكتب الكسر بالشكل الأسي.

3- نحدد الطويلة والزاوية ونميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى:	الحالة الثانية:	الحالة الثالثة:
$\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ يكون (AB) و (CD) متعامدين	$\left\lvert\frac{d-c}{b-a}\right\rvert = 1$ يكون $AB = CD$	اجتماع الحالتين: $\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3}$ & $\left\lvert\frac{d-a}{b-a}\right\rvert = 1$ عندئذٍ يكون المثلث ABD متساوي الأضلاع

الحالة الرابعة :	الحالة الخامسة:
$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) \in \{0, \pi\}$ النقاط A, B, D على استقامة واحدة **أو**: $\frac{d-a}{b-a} = k \in R$ الشعاعان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ مرتبطان خطياً.	$\arg\left(\frac{d-e}{b-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{d-e}\right)$ المستقيم (DE) منصف للزاوية BEC

الحالة السادسة:

$$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) > \frac{\pi}{2}$$

المثلث ABD منفرج الزاوية A.

Hero's ideas

1- أي معلومة عن ضلعين مشتركين بالرأس متساويين بالطول فأحدهما دوران للآخر (مربع، مثلث متساوي الساقين , … etc) وهذا الدوران مركزه الرأس المشترك و زاويته زاوية هذا الرأس

2- عندما يذكر (مثلثاً مباشر التوجيه): عميل حالك اعمى.

3- الدوران المباشر عكس عقارب الساعة

4- ربع الدورة يساوي $\frac{\pi}{2}$

5- يُفضل عند تطبيق دوران ما: جعل الصورة هي النقطة المراد حسابها و الأصل هي النقطة التي نريد الكتابة بدلالتها

6- حالة خاصة: بعض المسائل لا تحوي أي اضلاع متساوية لذلك نفرض احداثيات النقاط ونوجد علاقات بينها.

7- انتبه قد يكون المطلوب المركز أو الزاوية فنضع القانون و نعزل العنصر المطلوب

خواص الـ arg
مشان ما نطول عليكون بعرف تعبانين..   نفس خواص اللوغارتم 😉 والمرافق يغير الإشارة

1- بفرض a, b, c. d, e الأعداد العقدية الممثلة للنقاط A, B, C, D, E فإذا كان:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

عندئذٍ يمكن استنتاج أن:

a	المستقيم (EA) منصف للزاوية $\widehat{DEC}$	b	المستقيم (EA) منصف للزاوية $\widehat{CAD}$
c	المستقيم (CA) منصف للزاوية $\widehat{ECD}$	d	المستقيم (DA) منصف للزاوية $\widehat{CDE}$

2- إذا كانت الأعداد العقدية b, c, d تمثل النقاط B, C, D وكان $\frac{d-b}{c-b} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ فإن المثلث BCD

a	متساوي الساقين	b	قائم في B ومتساوي الساقين	c	قائم في B فقط	d	متساوي الأضلاع

3- يرتبط العددان العقديان a, b الممثلان لنقطتان A, B بالعلاقة $b = ia$ فإن التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A هو:

a	تحاكي	b	دوران	c	انسحاب	d	تناظر

4- $\arg(z_1.z_2)$ يساوي:

a	$\arg z_1 \times \arg z_2$	b	$\arg z_1 + \arg z_2$	c	$\arg(z_1) - \arg z_2$	d	$\arg(z_1 + z_2)$

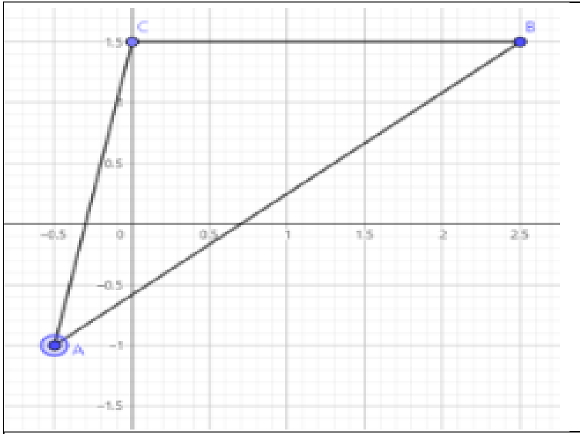
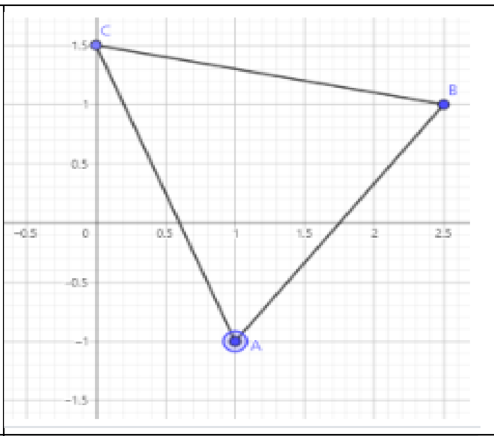
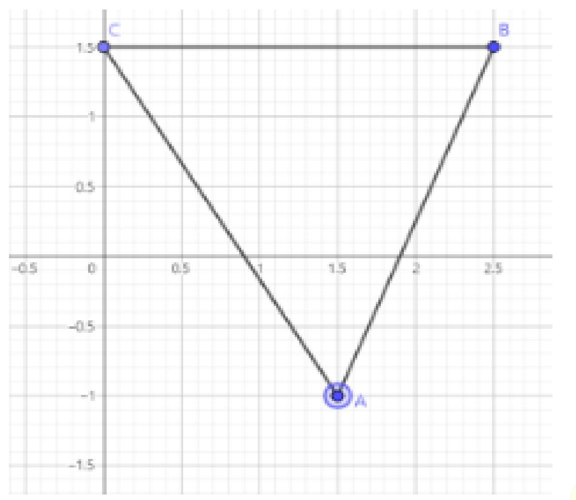
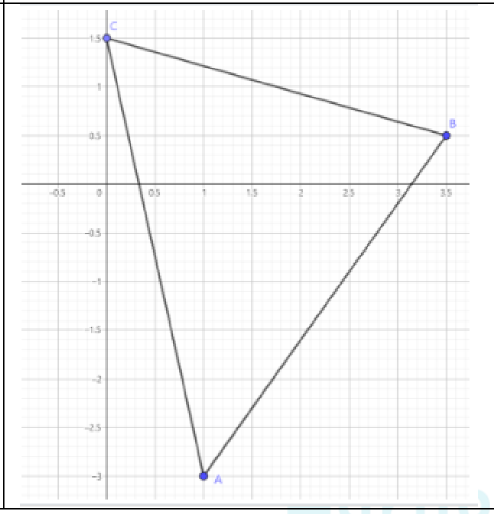
5- إذا كان العددان a, b العددان العقديان الممثلان للنقطتين A, B وكان $a - 1 = 2b - 2$

عندئذٍ التحويل الذي يقرن النقطة B بالنقطة A هو:

a	تحاكٍ نسبته 2	b	انسحاب شعاعه $-2\vec{j}$	c	تحاكٍ نسبته -2	d	تحاكٍ نسبته 1

6- لتكن لدينا النقاط A, B, C تمثلها الاعداد العقدية $c = \frac{3}{2}i \, , b = \frac{7}{2} + i \, , a = 1 - 3i$

وضع النقاط A , B , C في شكل:

	b		a
	d		c

7- ان الاعداد العقدية التي تمثل الاشعة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$:

$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{2} + 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = 1 - \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$	d	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{2} + 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = 1 - \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$	c	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{2} + 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = -1 + \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$	b	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{3} - 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = -1 + \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$	A

8- ان اطوال اضلاع المثلث ABC :

$\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{89}}{2} \\ AC = \frac{\sqrt{82}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{55}}{2} \end{cases}$	d	$\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{80}}{3} \\ AC = \frac{\sqrt{84}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{51}}{2} \end{cases}$	c	$\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{89}}{2} \\ AC = \frac{\sqrt{85}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{50}}{2} \end{cases}$	b	$\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{80}}{3} \\ AC = \frac{\sqrt{85}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{50}}{2} \end{cases}$	a

9- ان نوع المثلث ABC هو:

مختلف الاضلاع	d	متساوي الاضلاع	c	متساوي الساقين وقائم في A	b	مختلف الاضلاع وقائم في A	a

10- ان العدد العقدي Z_1 الممثل للنقطة I منتصف $[AB]$ هو:

$Z_1 = -\frac{9}{4} - i$	d	$Z_1 = -\frac{9}{4} + i$	c	$Z_1 = \frac{4}{9} - i$	b	$Z_1 = \frac{9}{4} - i$	a

11- ان العدد العقدي Z_G الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC:

$g = \frac{3}{2} - \frac{2}{6}i$	d	$g = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}i$	c	$g = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i$	b	$g = 1 - \frac{1}{6}i$	a

12- اوجد العدد العقدي Z_M الممثل للنقطة M مركز الابعاد المتناسبة لـ $(C,-1),(B,1),(A,2)$

a	$Z_M=\frac{4}{11}-\frac{4}{13}i$	b	$Z_M=-\frac{11}{4}+\frac{13}{4}i$	c	$Z_M=-\frac{11}{4}-\frac{13}{4}i$	d	$Z_M=\frac{11}{4}-\frac{13}{4}i$

13- هل النقطة C تنتمي الى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r=\frac{3}{2}$

a	نعم	b	لا

14- هل النقطة B تنتمي الى الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها $r=\frac{5}{\sqrt{2}}$

a	نعم	b	لا

15- لتكن لدينا النقاط D ,C ,B ,A تمثلها الاعداد العقدية:

$$Z_A=-2\,,\quad Z_B=2\,,\quad Z_C=-1+i\,,\quad Z_D=1-3i$$

ان المثلث ACD:

a	متساوي الساقين وقائم	b	مختلف الاضلاع وقائم	c	متساوي الاضلاع	d	مختلف الاضلاع

16- ان المثلث BCD

a	متساوي الساقين وقائم	b	مختلف الاضلاع وقائم	c	متساوي الاضلاع	d	مختلف الاضلاع

17- ان العدد العقدي Z_E الممثل للنقطة E التي تجعل الرباعي $BCED$ مربع:

a	$Z_E=2+2i$	b	$Z_E=-2+2i$	c	$Z_E=2-2i$	d	$Z_E=-2-2i$

18- ان المستقيمان $(ED),(BC)$:

a	متوازيان	b	متعامدان	c	متقاطعان	d	متخالفان

19- ان المستقيمان $(CD),(BE)$:

a	متوازيان	b	متعامدان	c	متقاطعان	d	متخالفان

20- ان العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$

a	$Z_I=1-2i$	b	$Z_I=i$	c	$Z_I=-i$	d	$Z_I=1+2i$

21- ان النقاط E ,I ,B:

a	تقع على استقامة واحدة	b	لا تقع على استقامة واحدة	c	$Z_I=1+2i$	d	غير ذلك

22- لتكن النقاط A,B,C,D التي تمثلها الاعداد:

$$a=2-2i\ ,b=-1+7i\ ,c=4+2i\ ,d=-4-2i$$

ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$ ان العدد e:

a	$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$	b	$-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$	c	$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$	d	$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

23- برهن ان $\frac{c-e}{a-e}=\frac{a-e}{d-e}$ ماذا تستنتج بخصوص المستقيم (EA) ؟

a	المستقيم محور في المثلث ACD	b	المستقيم متوسط في المثلث ACD	c	المستقيم منصف في المثلث ACD	d	غير ذلك

24- لتكن النقاط A, B, C نقاط المستوي التي تمثل الاعداد العقدية:

$$a = 2 \quad , b = 1 + \sqrt{3}i \quad , c = -1 + i\sqrt{3}$$

ان $\frac{a-b}{c-b}$ يساوي:

a	$e^{\frac{\pi}{3}i}$	b	$e^{\frac{2\pi}{3}i}$	c	$e^{\frac{\pi}{6}i}$	d	$e^{i\frac{4\pi}{3}}$

25- في المستوي العقدي المنسوب الى معلم متجانس نتأمل النقاط A, B, C التي تمثل الاعداد

$$a = 8 \, , b = -4 + 4i \, , c = -4i$$

ان $\frac{b-c}{a-c}$ يساوي:

a	$-8 - 4i$	b	$8 + 4i$	c	$-i$	d	i

26- ان المثلث ABC:

a	قائم ومتساوي الساقين	b	قائم فقط	c	متساوي الساقين فقط	d	متساوي الاضلاع

27- نتأمل في المستوي العقدي المنسوب الى معلم متجانس النقاط A, B, C التي تمثلها الاعداد

$$a = 6 - i \ , b = -6 + 3i \ \ , c = -18 + 7i$$

ان العدد $\frac{b-a}{c-a}$:

a	$\frac{1}{2}$	b	1	c	i	d	$-i$

28- ماذا تستنتج؟

a	النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة	b	المستقيمان $(AC), (AB)$ غير مرتبطين خطيا	c	النقاط A, B, C تعين مستويا	d	المثلث ABC متساوي الاضلاع

29- بفرض $d = 1 + 6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ ان الزاوية θ :

a	$\frac{\pi}{3}$	b	$\frac{\pi}{2}$	c	$\frac{\pi}{4}$	d	$\frac{\pi}{6}$

30- نتأمل النقاط A, B, C, D التي تمثل الاعداد

$$a = -1 \ , b = 2 + i\sqrt{3} \ , c = \bar{b} \ , d = 3$$

ان العدد $\frac{a-c}{d-c}$ يساوي:

a	$\frac{\sqrt{3}}{2}i$	b	$-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	c	i	d	$-i$

31- ان $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)$:

a	$-\frac{\pi}{2}$	b	$\frac{\pi}{2}$	c	$-\pi$	d	π

32- ان المثلث ACD :

a	متساوي الاضلاع	b	متساوي الساقين فقط	c	قائم ومتساوي الساقين	d	قائم الزاوية

33- أولا: لتكن لدينا النقطة A التي يمثلها العدد العقدي $a = 1 + i$ والمطلوب:

ان العدد العقدي b الممثل للنقطة B صورة A وفق الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$

a	$b = 3 - 2i$	b	$b = 3 + 2i$	c	$b = -3 + 2i$	d	$b = -3 - 2i$

34- ان العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة A وفق تحاك مركزه $\Omega(2 + 2i)$ ونسبته $k = 2$

a	$c = 2 + 2i$	b	$c = 2 - 2i$	c	$c = -2 - 2i$	d	$c = 0$

35- ان العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة A وفق تحاك مركزه المبدأ ونسبته $k = 2$

a	$d = 2 - 2i$	b	$d = 2 + 2i$	c	$d = -2 + 2i$	d	$d = -2 - 2i$

36- ان العدد العقدي e الممثل للنقطة E صورة A وفق دوران مركزه $\Omega(3 - i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

a	$e = 1 - 3i$	b	$e = 1 + 3i$	c	$e = -1 - 3i$	d	$e = -1 + 3i$

37- ان العدد العقدي m الممثل للنقطة M صورة A وفق دوران مركزه المبدأ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

a	$m = 2i$	b	$m = 2\sqrt{2}i$	c	$m = \sqrt{2}i$	d	$m = \frac{1}{\sqrt{2}}i$

38- ثانيا: لتكن لدينا النقطة A يمثلها العدد العقدي $a = 1 - 3i$ والمطلوب:

ان العدد العقدي b الممثل للنقطة B صورة A وفق التناظر المحوري الذي محوره (ox)

a	$b = 1 - 3i$	b	$b = -1 + 3i$	c	$b = -1 - 3i$	d	$b = 1 + 3i$

39- ان العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة A وفق التناظر المحوري الذي محوره (oy)

a	$c = 1 + 3i$	b	$c = -1 - 3i$	c	$c = -1 + 3i$	d	$c = 1 - 3i$

40- ان العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه المبدأ

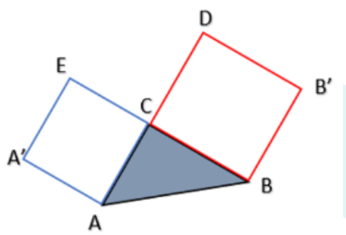
a	$d = 1 - 3i$	b	$d = -1 - 3i$	c	$d = -1 + 3i$	d	$d = 1 + 3i$

41- ان العدد العقدي e الممثل للنقطة E صورة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه $\Omega(2 - 5i)$

a	$e = 3 - 7i$	b	$e = 3 + 7i$	c	$e = -3 + 7i$	d	$e = -3 - 7i$

ليكن المثلث ABC في المستوي

ننشئ على ضلعيه $[BC], [AC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$, $CBB'D$ كما في الشكل المجاور تمثل الاعداد a, b, c, a', b' للنقاط A, B, C, A', B'



42- B' صورة C وفق دوران مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ فان b' :

a	$c - b - ib$	b	$b + i(b - c)$	c	$b - c + ib$	d	$b - i(b - c$

43- ان العلاقات الاتية صحيحة:

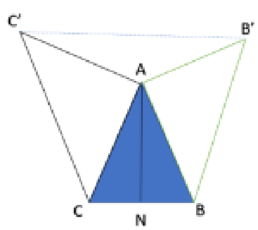
a	$a' = i(c - a) + a$	b	$a' = i(c + a) + a$	c	$a' = i(c + a) - a$	d	جميع الإجابات خاطئة

44- ان M منتصف $[A'B']$ تعطى بالعلاقة:

a	$(b + a) + i(b - a)$	b	$(b - a) + i(b + a)$	c	$\frac{(b + a) + i(b + a)}{2}$	d	$\frac{(b + a) + i(b - a)}{2}$

في الشكل المجاور نتأمل مثلثا ABC متساوي الساقين رأسه A وننشئ على ضلعيه مثلثين قائمين ومتساويي الساقين ABB', ACC' والنقطة N منتصف CB

وبفرض a, b, c, b', c', n الاعداد العقدية التي تمثلها النقاط A, B, C, B', C', N



45- ان الاعداد b', c', n تساوي:

a	$\begin{cases} n = \dfrac{b+c}{2} \\ b' = ib \\ c' = -ic \end{cases}$	b	$\begin{cases} n = \dfrac{b-c}{2} \\ b' = -ib \\ c' = -ic \end{cases}$	c	$\begin{cases} n = \dfrac{b+c}{2} \\ b' = -ib \\ c' = ic \end{cases}$	d	$\begin{cases} n = \dfrac{b+c}{2} \\ b' = ib \\ c' = ic \end{cases}$

46- ان العدد $\frac{c'-b}{c-b'}$ بالشكل الجبري يساوي:

a	i	b	$-i$	c	$-2i$	d	$2i$

47- ان العدد $\frac{c'-b}{c-b'}$ بالشكل الاسي يساوي:

a	$2e^{-i\frac{\pi}{2}}$	b	$2e^{i\frac{\pi}{2}}$	c	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	d	$e^{-i\frac{\pi}{2}}$

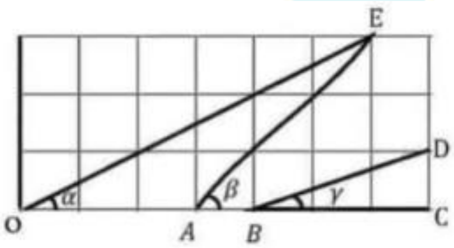
48- ان المستقيمان $(BC'), (B'C)$:

a	متعامدان	b	متعامدان ومتساويان	c	متوازيان	d	غير ذلك

في معلم متجانس: α, β, γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}), (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ على الترتيب

والمطلوب:

49- ان الاعداد e, d, c, b, a :



a	$a = 3, b = 4$ $c = 7, d = 7 + i$ $e = 6 + 3i$	b	$a = -3, b = 4$ $c = -7, d = 7 + i$ $e = 6 - 3i$	c	$a = 3, b = -4$ $c = 7, d = 7 + i$ $e = -6 + 3i$	d	$a = -3, b = 4$ $c = -7, d = 7 - i$ $e = 6 + 3i$

50- ان كلا من $Z_{\overrightarrow{BD}}, Z_{\overrightarrow{AE}}, Z_{\overrightarrow{OE}}$ بالشكل الجبري:

a	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}} = 3 + i \\ Z_{\overrightarrow{AE}} = 3 - 3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}} = 6 + 3i \end{cases}$	b	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}} = 3 - i \\ Z_{\overrightarrow{AE}} = 3 - 3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}} = 6 + 3i \end{cases}$	c	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}} = 3 - i \\ Z_{\overrightarrow{AE}} = 3 - 3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}} = 6 - 3i \end{cases}$	d	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}} = 3 + i \\ Z_{\overrightarrow{AE}} = 3 + 3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}} = 6 + 3i \end{cases}$

51- ان $Z_{\overrightarrow{BD}}, Z_{\overrightarrow{AE}}, Z_{\overrightarrow{OE}}$ بالشكل الجبري:

a	$90i$	b	i	c	$-90i$	d	$-i$

52- ان $Z_{\overrightarrow{BD}}, Z_{\overrightarrow{AE}}, Z_{\overrightarrow{OE}}$ بالشكل الاسي:

a	$90e^{-i\frac{\pi}{2}}$	b	$e^{-i\frac{\pi}{2}}$	c	$90e^{i\frac{\pi}{2}}$	d	$e^{i\frac{\pi}{2}}$

53- ان قياس الزاوية $\alpha + \beta + \gamma$:

a	$\frac{\pi}{3}$	b	$\frac{\pi}{2}$	c	$\frac{\pi}{6}$	d	$\frac{\pi}{12}$

المعادلات العقدية

أولاً: معادلات الدرجة الأولى:

معادلة تحوي z	معادلة تحوي $\bar{z}$	معادلة تحوي z و $\bar{z}$
نعزل z	نأخذ المرافق ثم نعزل z	1- نفرض $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$ 2- نعوض ونصلح. 3- نقارن الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

ثانياً: معادلات الدرجة الثانية:

$z^2 = -k^2$	$z^2 = a + ib$	$az^2 + bz + c = 0$
نضع $-1 = i^2$ ثم نجذر	نفرض الجذر المطلوب $z = x + iy$ فيكون : $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{r+a}{2}}$ $y_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{r-a}{2}}$ ثم ننظر في إشارة b إذا كانت $b > 0$ يكون x, y من نفس الإشارة إذا كانت $b < 0$ يكون x, y من عكس الإشارة **صيغة يمكن تجي مو اكيد:** جد الجذور التربيعية للعدد العقدي $a + ib$.	أ- حالة $\Delta > 0$: للمعادلة حلان $Z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $Z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ب- حالة $\Delta = 0$: للمعادلة حل وحيد : $Z = -\dfrac{b}{2a}$ ت- حالة $\Delta < 0$: أي $\Delta = -k^2$ عندها للمعادلة حلان عقديان $Z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $Z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ث- حالة $\Delta = a + ib$ (عدد عقدي): عندئذٍ نفرض $w = x + iy$ هو الجذر التربيعي لـΔ عندها $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ $x^2 - y^2 = a$ $2xy = b$ ونوجد الحلول فنحصل على جذري المميز Δ : w_1 , w_2 $Z_1 = \dfrac{-b + w_1}{2a}$ $Z_2 = \dfrac{-b + w_2}{2a}$

ثالثاً: معادلات من الدرجة الثالثة فما فوق:

الحل المعلوم حقيقي أو تخيلي	الحل تخيلي والمعاملات حقيقية	يوجد صيغ متكافئة لتعيين الثوابت
نقسم على ($z -$ الحل)	نقسم على $\left(z^2 - \text{الحل}\right)^2$	ننشر ونطابق

نمط مميز: أوجد حلول المعادلة إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً:

1- نفرض الحل $z = bi$ ونعوض ونصلح فنحصل على المعادلة (1).

- نأخذ مرافق طرفي المعادلة (1) فنحصل على المعادلة (2).

- نجمع (1) و (2) ونحسب b.
- نقسم على $z-bi$.

مبرووووك عليك!

طريقة 2 :

نفرض $z = bi$ ثم نعوض في المعادلة

نضع الحقيقي الناتج و التخيلي الناتج معدومين

الجذور التكعيبية لعدد عقدي $z^3 = a + ib$	**خواص حلول معادلة من الدرجة الثانية**
1- نكتب $w = a + ib$ بالشكل الأسي: $w = m\,e^{i\alpha}$ 2- نفرض $z = re^{i\theta}$ ونعوض. 3- $r^3e^{i3\theta} = m\,e^{i\alpha}$ بالمقارنة نجد: $r = \sqrt[3]{m}\,,\theta = \dfrac{\alpha + 2\pi k}{3}\;; k \in \{0,1,2\}$	$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ و $z_1.z_2 = \dfrac{c}{a}$ 1- الحلان معلومان والمطلوب هو التحقق أنهما حلول 2- حل معلوم و مطلوب حساب الآخر 3- الحلان معلومان و مطلوب حساب a, b, c

1- حل المعادلة $3Z - 2 = 6Z + 1$هو:

a	1	b	3	c	-1	d	2

2- حل المعادلة $2Z + i\bar{Z} = 5 + 4i$هو:

a	$3+i$	b	$3-i$	c	$2+i$	d	$2-i$

3- حل المعادلة $\frac{\bar{z}-3}{\bar{z}+3} = i$هو:

a	$-3i$	b	$-4i$	c	3	d	$3i$

4- حلول المعادلة $7Z^2 = -3iZ$هو:

a	$\begin{cases} 0 \\ -\frac{3}{7}i \end{cases}$	b	$\begin{cases} 3 \\ -\frac{2}{7}i \end{cases}$	c	$\begin{cases} 0 \\ \frac{3}{7}i \end{cases}$	d	$\begin{cases} 0 \\ -\frac{7}{3}i \end{cases}$

5- حل المعادلة $-7\bar{Z} = -7 + 7i$هو:

a	$7+7i$	b	$1-i$	c	$1+i$	d	$-1-i$

6- حلول المعادلة $4Z^2 - 100 = 0$هو:

a	$\begin{cases} 25 \\ -25 \end{cases}$	b	$\begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$	c	$\begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases}$	d	$\begin{cases} 26 \\ -26 \end{cases}$

7- حلول المعادلة $Z^2 - 5 = 12i$هو:

a	$\begin{cases} -3+2i \\ 3+2i \end{cases}$	b	$\begin{cases} 3+2i \\ 3-2i \end{cases}$	c	$\begin{cases} 3+2i \\ -3-2i \end{cases}$	d	$\begin{cases} -3-2i \\ 3-2i \end{cases}$

8- حلول المعادلة $iZ^2 + Z + 3 + i = 0$هو:

a	$\begin{cases} 1-i \\ 1+2i \end{cases}$	b	$\begin{cases} -1-i \\ 2-i \end{cases}$	c	$\begin{cases} -1-i \\ 1+2i \end{cases}$	d	$\begin{cases} 1-i \\ -2+i \end{cases}$

9- حل المعادلة $Z^2 - (1+\sqrt{3})Z + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$هو:

a	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$	b	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	c	$1+\sqrt{3}$	d	$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}$

10- حلول المعادلة $(Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4) = 0$ هو:

a	$\begin{cases} 1+i \\ -1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i \end{cases}$	b	$\begin{cases} 1+i \\ -1-\sqrt{3}i \\ -1+\sqrt{3}i \end{cases}$	c	$\begin{cases} 1+i \\ 1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i \end{cases}$	d	$\begin{cases} 1-i \\ 1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i \end{cases}$

11- حلول المعادلة$(2 - Z - Z^2)^3 = 0$هو:

a	$\begin{cases}-2\\-3\end{cases}$	b	$\begin{cases}1\\-2\end{cases}$	c	$\begin{cases}1\\2\end{cases}$	d	$\begin{cases}-1\\-2\end{cases}$

12- حلول المعادلة $Z^3 = 27i$هو:

a	$\begin{cases}3e^{-i\frac{\pi}{6}}\\3e^{i\frac{5\pi}{6}}\\3e^{-i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$	b	$\begin{cases}3e^{i\frac{\pi}{6}}\\3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\\3e^{i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$	c	$\begin{cases}3e^{-i\frac{\pi}{6}}\\3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\\3e^{-i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$	d	$\begin{cases}3e^{i\frac{\pi}{6}}\\3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\\3e^{i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$

13- ليكن u عددا عقديا لا يساوي الواحد وطويلته تساوي الواحد ان العدد $W = \frac{Z-u\bar{Z}}{i-iu}$

a	حقيقي	b	تخيلي بحت	c	حقيقي بحت	d	غير ذلك

14- ان المقدار $|Z - Z'|^2 + Z'\bar{Z} + Z\,\bar{Z}'$ يساوي

a	$\|Z\|^2 - \|Z'\|^2$	b	$\|Z\|^2 + \|Z'\|^2$	c	$\|Z'\|^2 - \|Z\|^2$	d	$\|Z\|^2 + \|Z'\|^2 - Z'\bar{Z}$

15- ان طويلة العدد $Z = \sin\theta + i\cos\theta$ يساوي

a	2	b	12	c	1	d	4

16- ان زاوية العدد $Z = \cos\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي

a	$\frac{\pi}{4}$	b	$\frac{\pi}{3}$	c	$\frac{\pi}{6}$	d	$\frac{\pi}{12}$

17- ان طويلة العدد $Z = \cos\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي

a	1	b	$\sqrt{2}$	c	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	d	2

18- بفرض w, z عددين عقدين طويلة كل منهما تساوي الواحد ويحققان ان $z.w \neq -1$ فان:

$$Z = \frac{z+w}{zw+1}$$

فان Z :

a	حقيقي	b	تخيلي	c	تخيلي بحت	d	غير ذلك

19- إن المقدار $P(z) = 5z^3 - 3z^2 - z - 1 = 0$ يكتب بالشكل:

a	$P(z) = (z-1)(5z^2 + 2z + 1)$	b	$P(z) = (z-1)(5z^2 - 2z + 1)$
c	$P(z) = (z+1)(5z^2 + 2z + 1)$	d	$P(z) = (z+1)(5z^2 + 2z + 3)$

20- إن حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي:

a	$\left\{1, -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right\}$	b	$\{1\}$
c	$\left\{1, -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right\}$	d	$\left\{1, \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, -\frac{1}{10} + \frac{2}{5}i\right\}$

21- ليكن المقدار $P(z) = 2z^3 - 5z^2 + 3z - 2 = 0$, إن $P(2)$ يساوي:

a	$-2i$	b	i	c	1	d	0

22- إن $P(z)$ يكتب بالشكل:

a	$(z-2)(2z^2 - z + 1)$	b	$(z-2)(2z^2 - z - 1)$
c	$(z+2)(2z^2 + z + 1)$	d	$(z+2)(2z^2 - z + 1)$

23- إن عدد حلول المعادلة $P(z) = 0$ هو:

a	3	b	2	c	1	d	مستحيلة الحل

24- إن العدد العقدي z الذي يحقق المعادلة $2iz+\bar{z}=3+3i$ هو:

a	$=1-2i$	b	$1+2i$	c	$1+i$	d	$1-i$

25- إذا كان العددين العقديين $1+i$ و $1-2i$ جذرين المعادلة $z^2+pz+q=0$ فإن:

a	$p=i-2$ $q=3+i$	b	$p=i-2$ $q=3-i$	c	$p=i+2$ $q=3-i$	d	$p=i+2$ $q=3+i$

26- إذا كان e^{ix}, e^{-ix} جذور المعادلة $z^2+pz+q=0$ عندئذٍ:

a	$p=-2\cos(x)$ $q=1$	b	$p=2$ $q=3$	c	$p=\sin(x)$ $q=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$	d	$p=\frac{\cos(3x)}{2}$ $q=2$

المجموعات النقطية		
$\lvert z-a\rvert=r$ الدائرة التي مركزها $A(a)$ ونصف قطرها r		
في باقي الحالات نضع $z=x+iy$ ونعزل ونستنتج المعادلة انتبه!! إذا كانت المعادلة بدلالة arg نضع $z=re^{i\theta}$ ونطبق خواص الـ arg.	$argz=\theta$ نصف المستقيم الذي يصنع زاوية θ مع محور الفواصل دون المبدأ	$\lvert z-a\rvert=\lvert z-b\rvert$ محور القطعة المستقيمة $[AB]$ $A(a), B(b)$

مجموعات نقطية شهيرة	
مستقيم أفقي	$y=b$
مستقيم شاقولي	$x=a$
دائرة	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$
مستقيم مائل	$y=ax+b$
قطع زائد	$xy=c$
المستقيم (AB) محذوف منه النقطتين A, B	$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)=0\ or\ \pi$
دائرة قطرها $[AB]$	$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$
نوصف الشكل مع حذف النقطة التي تعدم المقام	في حال كنا أمام مجموعة نقطية ناتجة عن فرض $z=x+iy$

1- جموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $\arg(-iz)=-\frac{\pi}{3}$:

a	تمثل دائرة	b	تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل محذوف منه المبدأ	c	تمثل مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل	d	تمثل مستوي محوري لقطعة مستقيمة

2- مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $|2z-4|=|2z-4+6i|$:

a	تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل محذوف منه المبدأ	b	تمثل محور لقطعة مستقيمة	c	تمثل مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل	d	تمثل دائرة

3- مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $Re(2+i+z)=4$ تمثل

a	نقطة إحداثياتها $(1,4)$	b	المستقيم $x=2$ الشاقولي	c	المستقيم $y=2$ الأفقي	d	دائرة نصف قطرها 4

4- أي من الزوايا الآتية يكافئ الزاوية $-\frac{25\pi}{14}$

a	$\frac{4\pi}{14}$	b	$\frac{5\pi}{14}$	c	$\frac{3\pi}{14}$	d	$\frac{10\pi}{14}$

5- أي من الزوايا الآتية يكافئ الزاوية $\frac{7\pi}{6}$

a	$\frac{4\pi}{6}$	b	$-\frac{5\pi}{6}$	c	$\frac{5\pi}{6}$	d	$\frac{\pi}{6}$

6- ن $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$ تساوي:

a	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$	b	$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$	c	$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB})$	d	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

7- إذا كان $Z=\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}$ فأي من الخواص الآتية صحيحة

a	$\|Z\|=\sqrt{2}$	b	$Z=\bar{Z}$	c	$Z=e^{-\frac{\pi}{12}i}$	d	$Z=e^{\frac{i13\pi}{12}}$

8- بفرض $Z=e^{ia}$ ، $Z'=e^{ib}$ بكتابة الجداء ZZ' بطريقتين مختلفتين يمكن استنتاج أن:

a	$\cos(a+b)=cosa\ sinb+cosb\ sina$	b	$Cos(a+b)=cosa\ cosb-sina\ sinb$
c	$\cos(a+b)=cosa\ cosb+sina\ sinb$	d	$\cos(a+b)=sina\ sinb+sina\ sinb$

9- العدد $Z=\frac{1+cosx-isinx}{1+cosx+isinx}$ يساوي:

a	$\frac{1}{1+e^{-ix}}$	b	$\frac{1}{1+e^{ix}}$	c	e^{-ix}	d	e^{ix}

10- ليكن $a=\alpha+i\beta$ عدداً عقدياً معطى وليكن $z=x+iy$ عدداً عقدياً يحقق أن:

$$z^2-a^2=\bar{z}^2-\bar{a}^2$$

عندئذٍ قيمة $x.y$ تساوي:

a	$\alpha+\beta$	b	$\alpha\beta$	c	$\frac{\alpha}{\beta}$	d	$\frac{\beta}{\alpha}$

11- بفرض $t=\frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}$ عندئذٍ t تساوي:

a	cotθ	b	i tanθ	c	tanθ	d	i cotθ

12- بفرض z_1, z_2 الجذرين التربيعين للعدد $w = -3 + 4i$ عندئذٍ $z_1 + z_2$ يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

13- بفرض z_1, z_2, z_3 الجذور التربيعية للعدد $z = 4i$ عندئذٍ قيمة المجموع $z_1 + z_2 + z_3$ يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

14- بفرض $z_1, z_2 z_{,3}, z_4, \dots, z_n$ الجذور من المرتبة n لعدد z طويلته 1 عندئذٍ $z_1 + z_2 + z_3 +,,, + z_n$ يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

15- بفرض $z = e^{\frac{i2\pi}{11}}$ فإن قيمة المجموع: $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{10}$ يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

16- ليكن MPN مثلثاً ما والنقاط A, B, C منتصفات الأضلاع $[MN], [PM], [NP]$ على الترتيب

وبفرض g العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC و g' العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث MNP عندئذٍ:

$g = i\, g'$	d	$g' = ig$	c	$g' = \bar{g}$	b	$g' = g$	a

17- إن مجموعة نقاط المستوي العقدي $M(z)$ حيث $|z - 2 + 5i| = |z - 3 + 2i|$ تمثل:

مستقيم أفقي محذوف منه نقطة	d	محور لقطعة مستقيمة	c	مستوري محوري لقطعة مستقيمة	b	دائرة	a

Now you see me.. Now you don't

التحليل التوافقي والاحتمالات

حول أساسيات الحساب				
اسم القانون	طريقة حسابه	قيم مميزة	خواصه	طريقة غشاشة
العاملي	$n! = n(n-1)\ldots 2 \times 1$ $4! = 4.3.2.1$ $3! = 3.2.1$ $5! = 5.4.3.2.1$	$0! = 1$ $1! = 1$	خاصة الـ stop: $n! = n(n-1)!$ $n! = n.(n-1)(n-2)!$	None
التراتيب	$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ الكبير عاملي على طرحون عاملي	$P_n^0 = 1$ $P_n^1 = n$ $P_n^n = n!$	None	"الرجوع من n , r خطوة" $P_{\text{الانطلاق}}^{\text{عدد الخطوات}}$ $P_5^2 = 5.4$ $P_6^3 = 6.5.4$
التوافيق	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ الكبير عاملي على الصغير عاملي بطرحهم عاملي	$\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{n} = 1$	المتمم: $\binom{n}{r} = \binom{n}{\text{كمالتو}}$ $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$ $\binom{100}{99} = \binom{100}{1}$	نفس التراتيب بس منزوع من البسط ومن المقام $\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1}$ $\binom{10}{4} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1}$

1- قيمة المقدار $(3!)^2$ تساوي:

a	$9!$	b	36	c	$3!$

2- قيمة المقدار P_9^3 تساوي:

a	P_9^6	b	$9!$	c	504

3- قيمة المقدار $\binom{10}{8}$ تساوي:

a	80	b	90	c	45

4- قيمة المقدار $P_4^3 \times 4!$ تساوي:

a	48	b	576	c	$P_4^! \times 4!$

5- قيمة المقدار $7 \times 3!$ تساوي:

a	42	b	$21!$	c	$10!$

6- قيمة n التي تحقق المعادلة $P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1$ هي:

a	3	b	2	c	-2

7- قيمة n التي تحقق المعادلة $14\binom{n}{2} = 3\binom{n}{4}$ هي:

a	-5	b	5	c	10

8- قيمة n التي تحقق المعادلة $\binom{10}{n+2} = \binom{10}{3n}$ هي:

a	1	b	2	c	$(a \text{ و } b)$

9- قيمة n التي تحقق المعادلة $\binom{10}{n+1} = \binom{10}{2n}$ هي:

a	(1)و(2)	b	(1)و(3)	c	(2)و(3)

<table>
<tr><th colspan="3">مسائل التوافيق</th></tr>
<tr><td>مسائل المصافحات</td><td colspan="2">عدد المصافحات = $\binom{\text{عدد الاشخاص}}{2} - \binom{\text{المتخاصمين}}{2}$
ملاحظة: قد يكون المجهول عدد الأشخاص وليس عدد المصافحات</td></tr>
<tr><td rowspan="7">مسائل الرؤوس</td><td colspan="2">عدد المثلثات: $\binom{n}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">عدد الرباعيات:
$\binom{n}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\binom{n+1}{3} - \frac{n}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">عدد المستطيلات:
$\binom{n/2}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">عدد المثلثات القائمة:
$\frac{n(n-2)}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">عدد أقطار مضلع محدب
$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>**ملاحظة**</td><td colspan="2">• نقصد بقطر مضلع محدب أي قطعة مستقيمة واصلة بين رأسين غير متتاليين وليس بشرط المرور من المركز على خلاف قطر الدائرة الذي يشترط المرور من المركز</td></tr>
<tr><td>Hero’s ideas</td><td colspan="2">• **عدد المثلثات المنفرجة:**
1- نثبت أحد الرؤوس
2- نحاول تشكيل زاوية من هذا الرأس بحيث تصل بين رأسين أحدهما على الأقل فوق القطر
3- نضرب بعدد الرؤوس الكلي ويمكن حفظ أنه في المسدس عددها 6 وفي المثمن عددها 24
• **عدد المثلثات الحادة:**
الكلي ناقص القائمة ناقص المنفرجة
• **عدد نقاط تقاطع أقطار مضلع:**
$\binom{n}{4} + n$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">مسائل الأضلاع</td><td colspan="2">نعلم أن أي مضلع يمكن تحديده لعدد من المستقيمات الشاقولية والأفقية وعليه:</td></tr>
<tr><td>**عدد الرباعيات**</td><td>$\binom{\text{الأفقيات}}{2}\binom{\text{الشاقوليات}}{2}$</td></tr>
<tr><td>**عدد المثلثات**</td><td>$\binom{\text{الأفقيات}}{1}\binom{\text{الشاقوليات}}{2}$</td></tr>
<tr><td>**عدد متوازيات الأضلاع**</td><td>$\binom{\text{الأفقيات المتوازية}}{2}\binom{\text{الشاقوليات المتوازية}}{2}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">مسائل الهدايا (n عدد الأشخاص)</td><td>عدد الهدايا أكثر من عدد الأشخاص بواحد</td><td>عدد الهدايا يساوي عدد الأشخاص</td><td>عدد الهدايا أصغر من عدد الأشخاص</td></tr>
<tr><td>$\binom{n+1}{2}.n!$</td><td>$n!$</td><td>$P_n^{\text{هدايا}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">مسائل اللجان</td><td>لجان مع مناصب</td><td colspan="2">لجان بلا مناصب</td></tr>
<tr><td>$P_{\text{عندي}}^{\text{بدي}}$</td><td colspan="2">$\binom{\text{عندي}}{\text{بدي}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">مسائل الكرات</td><td>تتالي دون إعادة</td><td>تتالي مع إعادة</td><td>معاً</td></tr>
<tr><td colspan="3">نترجم الشروط إلى رموز مثل (RBW)</td></tr>
<tr><td>$P_n^r.\frac{(\text{عددهم})!}{(\text{التكرار})!}$</td><td>$n^r.\frac{(\text{عددهم})!}{(\text{التكرار})!}$</td><td>$\binom{n}{r}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">مسائل الخانات</td><td>ملء خانات (كلمة سر)</td><td colspan="2">تشكيل اعداد</td></tr>
<tr><td>• نستخدم المبدأ الأساسي في العد
• نبدأ بملء الخانات المشروطة</td><td colspan="2">• نستخدم المبدأ الأساسي في العد
• نبدأ بملء الخانات المشروطة
• يوجد شرط ضمني: الصفر لا يوضع بالخانة اليسرى
• يوجد شرط ضمني آخر: العدد الزوجي هو الذي آحاده زوجية فقط.
• يوجد شرط ضمني آخر: مضاعف العدد 5 أي آحاده 0 أو 5.</td></tr>
<tr><td>Hero’s ideas</td><td colspan="3">1- عندما يقول (ما عدد النتائج المختلفة) فالمقصود عدد النتائج
2- عدد النتائج التي أرقامها مختلفة مثنى مثنى أي أن التكرار ممنوع.
3- عند كتابة عدد طرق ملء خانة معينة فإن العدد الكلي ينقص عنصر واحد</td></tr>
<tr><td rowspan="2">مسائل الشروط المتقاطعة</td><td colspan="3">يكون المطلوب هنا ملء الخانات (دون تكرار)
ويوجد بعض الخانات التي تشترك بالشروط</td></tr>
<tr><td colspan="3">1- نضع الشروط تحت خاناتها
2- نناقش إحدى هذه الخانات ونميز حالتين
a- إذا أخذنا من العناصر المشتركة:
فإن عدد الإمكانات في الخانة الأخرى ينقص عنصراً
b- إذا أخذنا من العناصر غير المشتركة:
فإن عدد الإمكانات بالخانة الأخرى لا يتأثر
3- نملئ باقي الخانات وفق المبدأ الأساسي
4- نجمع النتيجتين</td></tr>
<tr><td>ترتيب الكتب على رفوف</td><td colspan="3">مبدأ أساسي في العد</td></tr>
</table>

لجنة تحوي مناصب وبعض عناصرها متخاصمة	1- تمييز حالات: ....

يلتقي عشرة أصدقاءفي حفل , يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط

1- عدد المصافات التي جرتفي الحفل هو:

a	36	b	45	c	50	d	100

2- عدد المصافحات إذا علمت أنفي الحفل شخصين متخاصمين هو:

a	36	b	45	c	50	d	44

3- عدد المصافحات إذا علمت أنفي الحفل أربعة أشخاص هو:

a	36	b	45	c	6	d	100

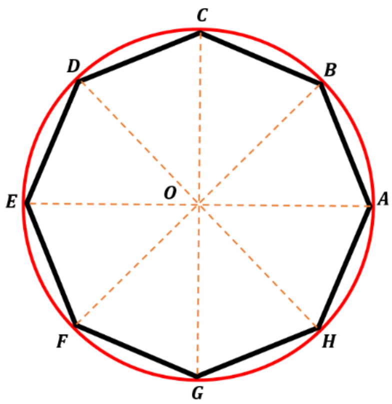
4- إذا علمت أنفي الحفل تمت 66 مصافحة فإن عدد الأشخاصفي الحفل هو:

a	66	b	12	c	50	d	100

- نتأمل في معلم متجانس $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$ في المستوي الشكل المرسوم جانباً.

لدينا ثمان نقاط A,B,C,D,E,F,G,H موزعة على دائرة نصف قطرها 1 . g التي تمثل رؤوس مثمن منتظم

أجب عن الأسئلة الآتية



5- الشكل الجبري للعدد b

a	$\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	b	$1+i$	c	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$	d	$\sqrt{3}+i$

6- الشكل الجبري للعدد d :

a	$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$	b	$1+i$	c	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}$	d	$-\sqrt{3}+i$

7- الشكل الجبري للعدد c :

a	1	b	i	c	$-i$	d	-1

8- الشكل الجبري للعدد a :

a	1	b	i	c	$-i$	d	-1

9- ليكن I منتصف $[AD]$ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})$:

a	$\frac{\pi}{8}$	b	$\frac{3\pi}{8}$	c	$-\frac{\pi}{8}$	d	$\frac{5\pi}{8}$

10- الشكل الجبري للعدد Z_1 هو :

a	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}$	b	$\frac{2-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{4}$	c	$\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{i\sqrt{2}}{4}$	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{4}$

11- عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن:

a	72	b	36	c	63	d	57

12- عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من النقاط $A, B, C, D, E, F, G, H, O$ تساوي:

a	84	b	81	c	80	d	79

13- عدد المثلثات القائمة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن:

a	16	b	8	c	4	d	32

14- عدد الرباعيات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن:

a	70	b	80	c	199	d	100

15- عدد المستطيلات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن:

a	6	b	5	c	4	d	3

16- عدد المثلثات المنفرجة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن:

a	20	b	50	c	24	d	12

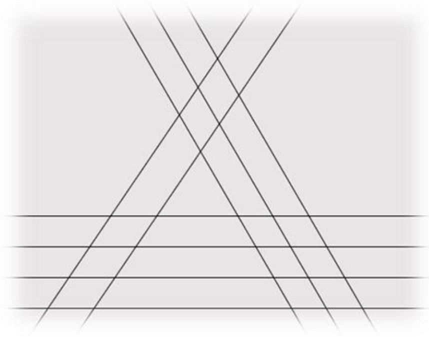
17- عدد اقطار المثمن:

a	20	b	10	c	30	d	5

18- ان عدد متوازيات الاضلاع في الشبكة المجاورة هو:

a	40	b	60	c	20	d	12

19-في الشكل المجاور، نتأمل ثلاث مجموعات من المستقيمات المتوازية. فإن عدد متوازيات الأضلاع الموجودة بالشكل هي:



84	d	132	c	42	b	27	a

20- يريد نذير توزيع 5 قالب من الحلوى على 4 طالباتفي الصف فإن عدد الطرائق الممكنة ليتم فيها التوزيع:

84	d	10	c	240	b	80	a

21- تريد المصممة أن توزع ستة إعلانات رقميةفي 7 مجموعات على منصات التواصل الاجتماعي فيكون عدد الطرائق الممكنة للقيام بالعملية السابقة يساوي:

84	d	5040	c	42	b	80	a

22-في صف يتكون من عشرة طلاب بين ذكور واناث إذا أردنا تشكيل لجنة لحماية البيئة مؤلفة من 4 طلاب فإن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو:

84	d	210	c	42	b	80	a

23-في شركة "توليدو" يجري اختيار مدير عام وأمين سر للشركة من 15 موظفاً فإن عدد الطرائق الممكنة لاختيارهم تساوي:

300	d	500	c	310	b	210	a

24- مغلف يحوي بطاقات تحمل الأرقام {0,0,2,2,2,3,3,3,3} نسحب ثلاث بطاقات على التتالي بدون إعادة فيكون عدد النتائج المختلفة للسحب هو:

27	c	504	b	84	a

25- بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموع أرقامها أصغر تماما من 4 :

264	c	42	b	24	a

26- بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموع ارقامها أكبر تماما من7:

132	c	14	b	12	a

27- لدينا الصندوق يحوي 5 كرات بيضاء وكرة واحدة صفراء, ان نتيجة سحب ثلاث كرات من الصندوق معا يساوي:

24	d	64	c	80	b	84	a

28- ان نتيجة سحب ثلاث كرات بدون إعادة علما ان السحبة تشتمل على كرتين بيضاء على الأكثر:

a	316	b	489	c	498	d	298

29- ان نتيجة سحب ثلاث مع إعادة علما ان السحبة تشتمل على كرتين فقط من نفس اللون هو:

a	286	b	486	c	386	d	586

30- ان نتيجة سحب ثلاث كرات مختلفة الألوان بدون إعادة هو:

a	90	b	30	c	60	d	120

31- ان نتيجة سحب ثلاث كرات من الصندوق على التتالي مع إعادة هو:

a	529	b	629	c	829	d	729

32- ان نتيجة سحب ثلاث كرات من الصندوق على التتالي دون إعادة هو:

a	504	b	405	c	604	d	406

33- لتكن المجموعة $S = \{0,1,2,3,4,5\}$ فإن عدد الطرائق الممكنة لتشكيل عدد زوجي مؤلف من ثلاث خانات هو:

a	108	b	200	c	350	d	90

34- لتكن المجموعة $S = \{7,1,2,3,4,5\}$ فإن عدد الطرائق الممكنة لتشكيل عدد فردي من مضاعفات الـ 5 ومؤلف من 3 خانات هو:

a	36	b	60	c	50	d	30

35- لتكن المجموعة $S = \{0,1,9,3,4,5\}$ فإن عدد الطرائق الممكنة لتشكيل عدد زوجي مؤلف من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى هو:

a	16	b	35	c	36	d	50

36- وصل منذ أيام طرداً لفريق شغف الرياضيات يحتوي على خمسة نوطات و أربعة مكثفات ورقية نريد أن نرتبهم على رف خشبي فإذا علمت أن أول ثلاثة ستكون نوطات فإن عدد الطرائق الممكنة لترتيب الورقيات هو:

a	$6!$	b	$5!$	c	$6!\,.\,P_5^3$	d	$5!\,.\,P_5^3$

37- نريد توزيع ثلاثة مناصب إدارية في المعهد (مدير – موجه – محاسب) على 7 موظفين فإذا علمت أن هناك اثنان من الموظفين لا يجتمعان معاً في ذات المكتب فإن عدد الطرائق الممكنة لاختيار الكادر الإداري هو:

a	180	b	200	c	160	d	120

حول منشور ثنائي الحد	
القانون	$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ طريقة المرجوحة
قانون الحد T_r	$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$
الخطوات	1- نعوض المعطيات 2- نصلح القانون لتجميع المجاهيل المتماثلة 3- نضع شرطاً على الأس 4- نعزل r 5- نعوض في آخر صيغة لـ T_r
ملاحظة	1- إذا كان السؤال يطلب المنشور كاملاً نستعمل قانون المنشور 2- إذا كان السؤال يطلب حداً معيّناً نستعمل قانون الحد T_r 3- إذا كان يطلب شرطاً ليحوي المنشور على حد معين نطبق نفس الخطوات ونعزل r ثم نضع شرطاً على n لجعل r عدد طبيعي. 4- إذا كان السؤال (أيمكن أن يحوي المنشور على حد معين) نطبق قانون الحد فإذا كانت r عدد كسري فإنه لا يمكن 5- قد يكون السؤال عن أمثال حد ما فنختار الأمثال فقط في النهاية
Hero's ideas	• لإيجاد قيمة مجموع يحوي توافيق فإننا نلاحظ أن أول حد سيكون من الشكل $\binom{n}{0} a^n$ وآخر حد $\binom{n}{n} b^n$ فتكون قيمة المجموع: $(a+b)^n$. • إذا كان السؤال عن آحاد وعشرات ومئات .... عدد مرفوق لأس فإننا نكتب الأساس بالشكل $(\alpha+10)$ ثم: 1- الآحاد نحسب T_0 2- العشرات نحسب T_0+T_1 3- المئات نحسب $T_0+T_1+T_2$ • راجع سؤال مجموعة قيم المجموع $(a+b)$ في منشور $(1+ax)^5+(1+bx)^4$
اكتب $\sin^n\theta$ أو $\cos^n\theta$ على شكل عبارة خطية لنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية	1- نستفيد من دستوري أولر: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

2- نطبق منشور ثنائي الحد 3- نجمع القوة التي أسسها متعاكسة 4- نعيد تطبيق قانون أولر بشكل عكسي: $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ $2isin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ **ملاحظة:** يمكن أن نستفيد من الحالة السابقة لإزالة حالة عدم تعيين أو حساب تكامل	

1- إن قيمة المجموع:

$$S = 3^n\binom{n}{0} + 3^{n-1}\binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

a	3^n	b	5^n	c	2^n	d	4^n

2- إن قيمة المجموع:

$$S = 3^n\binom{n}{0} + 2\times 3^{n-1}\binom{n}{1} + 4\times 3^{n-2}\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$$

a	2^n	b	5^n	c	3^n	d	4^n

3- إن آحاد وعشرات ومئات العدد 11^{11}:

a	661	b	601	c	111	d	611

4- قيمة المجموع

$$5^{n-1}\times 2\times\binom{n}{1} + 5^{n-2}\times 4\times\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\times\binom{n}{n}$$

a	7^n	b	$7^n - 1$	c	$7^n - 5^n$	d	$7^n - 5$

5- قيمة المجموع

$$2^5\binom{6}{1} + 2^4\binom{6}{2} + \cdots + \binom{6}{0}$$

a	243	b	81	c	179	d	24

6- يكتب التابع $f(x) = \cos^3 x$ بعبارة خطية للنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية بالشكل:

a	$\frac{3}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(3x)$	b	$\frac{3}{4}\cos(x) + \cos(3x)$	c	$\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$	d	$\frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(x)$

7- يكتب التابع $f(x) = sin^3 x$ بعبارة خطية للنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية بالشكل:

a	$-\frac{1}{4}\sin(5x) + \frac{3}{4}\sin(x)$	b	$-\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$	c	$-\frac{1}{4}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x)$	d	$\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$

8- إذا علمت أن $(e^{ix} + e^{-ix})^3 = e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}$ فإن $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$ تساوي:

a	-3	b	3	c	1	d	-1

9- الحد الذي يحوي x^2 في منشور $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ هو

a	$210x^2$	b	210	c	$70x^2$	d	70

10- الشرط الذي يجب أن يحققه العدد الطبيعي n حتى يحوي المنشور $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n}$ حداً ثابتاً هو

a	من مضاعفات 2	b	عدد كسري	c	من مضاعفات 3	d	عدد زوجي

11- آحاد وعشرات العدد 12^{12} هي

a	56	b	65	c	96	d	36

12- القيم المحتملة للمجموع $(a+b)$ إذا علمت أن أمثال x في منشور $(1+ax)^5(1+bx)^4$ هي 62:

a	$\{3,4,15\}$	b	$\{13,14,15\}$	c	$\{13,0,15\}$	d	$\{13,14,1\}$

13- يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنتان تحملان الرقم1 , واثنتان تحملان الرقم 2 , واحدة تحمل الرقم 3 , نسحب من المغلف بطاقتين على التالي دون إعادة , عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما 4 هو:

a	4	b	5	c	6	d	12

14- يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنتان تحملان الرقم1 , واثنتان تحملان الرقم 2 , واحدة تحمل الرقم 3 , نسحب من المغلف بطاقتين على التالي دون إعادة , عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين بطاقتين بطاقتين مجموعهما 2 أو 5 هو:

a	4	b	5	c	6	d	12

15- يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنتان تحملان الرقم1 , واثنتان تحملان الرقم 2 , واحدة تحمل الرقم 3 , نسحب من المغلف بطاقتين على التالي دون إعادة , عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما عدد فردي هو:

a	4	b	5	c	6	d	12

16- رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كتب للمؤلف A و 4 كتب للمؤلف B , عدد الطرائق الممكنة لترتيب الكتب على الرفوف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B:

a	$4!$	b	$5!$	c	$4!\,.\,P_4^3$	d	$5!\,.\,P_4^3$

17- رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كتب للمؤلف A و 4 كتب للمؤلف B , عدد الطرائق الممكنة لترتيب الكتب على الرفوف إذا كان كتاباً ما للمؤلف Bفي البداية هو:

a	$6!\ .4$	b	$6!$	c	$6!\,.\,8$	d	2800

18- قيمة r التي تحقق $\frac{1}{\binom{6}{r}}+\frac{1}{\binom{5}{r}}=\frac{1}{\binom{4}{r}}$ هي:

a	2	b	15	c	15 , 2	d	0

19- لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,6,7,9\}$, عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة و أرقامها مأخوذة من S و كل عدد منها من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500 يساوي:

a	8	b	10	c	18	d	20

20- التقى عشرة أصدقاءفي حفل, عدد المصافحات التي ممكن ان تتم بينهم إذا علمت أنفي الحفل ثلاثة اشخاص متخاصمين هو:

a	42	b	45	c	3	d	50

مقدمة في الاحتمالات

الحدث	هو أي مجموعة جزئية من المجموعة التي تحوي جميع العناصر (Ω)
الحدث البسيط	هو الحدث الذي يحوي عنصر وحيد.
الحدث المستحيل	هو الحدث الذي لا يحوي أي عناصر (المجموعة الخالية ϕ)
الحدث الأكيد	هو الحدث الذي يحوي جميع العناصر (المجموعة Ω)
التقاطع (AgB)	هي العناصر المشتركة بين الحدثين
الاجتماع (AgأB)	هي العناصر المشتركة وغير المشتركة بين A و B
المعاكس A'	هي العناصر غير الموجودة في A
الحدثان المتنافيان	هما الحدثان اللذان لا يقعان معاً (لا يوجد بينهما عناصر مشتركة) أي: $A \cap B = \phi$

تجربة الولادات

- ولادة واحدة:

$\Omega = \{B, G\}$

- ولادتين:

$\Omega = \{BB, BG, GB, GG\}$

- 3 ولادات:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} BBB \\ BBG.BGB.GBB \\ GGB.GBG.BGG \\ GGG \end{matrix}\right\}$$

- 4 ولادات:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} BBBB \\ BBBG, BBGB, BGBB, GBBB \\ GGGB, GGBG, GBGG, BGGG \\ BGBG, GBGB, BBGG, GGBB \\ BGGB, GBBG \\ GGGG \end{matrix}\right\}$$

تجربة حجر النرد

- مرة واحدة (حجر واحد):

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- مرتين (أو حجرين):

جدول:

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

تجربة قطعة النقود

- رمي مرة واحدة (أو قطعة واحدة)

$\Omega = \{H, T\}$

- رمي مرتين (أو قطعتين):

$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

- رمي 3 مرات (أو 3 قطع نقود):

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} HHH \\ HHT, HTH, THH \\ TTH, THT, HTT \\ TTT \end{matrix}\right\}$$

قوانين هامة:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{عدد الحالات الممكنة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

كحالة خاصة: إذا كان A و B متنافيان فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{0}_{\text{لأنهم متنافيان}}$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

سنسرد الآن تمارين مؤتمتة بطلبات مترابطة علماً أنه امتحانياً تأتي المسألة مزودة بطلب واحد فقط من ضمن الطلبات:

التمرين (1)

نلقي حجر نرد وليكن A الحدث الدال على ظهور عدد فردي و B الحدث الدال على ظهور عدد أولي و C الحد الدال على ظهور عدد أكبر تماماً من 3

1- احتمال الحدث A يساوي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{3}$	d	$\frac{5}{6}$

2- احتمال الحدث B يساوي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{3}$	d	$\frac{5}{6}$

3- احتمال الحدث C يساوي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{3}$	d	$\frac{5}{6}$

4- احتمال الحدث $C \cup B$:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{3}$	d	$\frac{5}{6}$

5- احتمال الحدث $A \cup B$:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{2}{3}$	d	$\frac{5}{6}$

6- احتمال الحدث $B \cap C$:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{3}$	d	$\frac{1}{6}$

7- احتمال الحدث $A \cap C$:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{3}$	d	$\frac{1}{6}$

8- احتمال الحدث A':

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{3}$	d	$\frac{1}{6}$

التمرين (2)

في مدرستنا 30% من الطلاب يدرسون اللغة الفرنسية و 40% يدرسون الروسية و 60% يدرسون إحدى اللغتين على الأقل . فإن احتمال أن يكون طالباً مختاراً بشكل عشوائي ممن يدرسون اللغتين في آنٍ معاً:

a	10%	b	20%	c	40%	d	5%

شرط الاستقلال الاحتمالي	
شرطه	$\boldsymbol{P(A).P(B) = P(A \cap B)}$
خطواته	1- نحسب احتمال A 2- نحسب احتمال B 3- نحسب احتمال $A \cap B$ 4- نختبر الشرط
الاحتمال الشرطي	
رمزه	$A\|B$
أساليب التعبير عنه	1- A علماً أن B قد وقع 2- A بشرط B 3- A بعد B
قانونه	$P(A\|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ **"احتمال التقاطع على احتمال الذي وقع"**

التمرين (1)

في تجربة مراقبة جنس المولود في عائلة مكونة من 4 ولادات :نعرف الأحداث الآتية :

A : الأطفال الأربعة من نفس الجنس

B : لدى العائلة طفلان وطفلتان

C : المولود الثالث أنثى:

1- احتمال الحدث C:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{8}$	c	$\frac{1}{16}$	d	$\frac{6}{16}$

2- احتمال الحدث A:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{8}$	c	$\frac{1}{16}$	d	$\frac{6}{16}$

3- احتمال الحدث B:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{8}$	c	$\frac{1}{16}$	d	$\frac{6}{16}$

4- احتمال الحدث $A|C$:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{8}$	c	$\frac{1}{16}$	d	$\frac{6}{16}$

5- احتمال الحدث $B|C$:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{3}{8}$	c	$\frac{1}{16}$	d	$\frac{6}{16}$

6- الحدثان A و C:

a	متتامان	b	مستقلان	c	غير مستقلان	d	مستحيلان

7- ليكن X المتغير العشوائي الدال على عدد الاناث في العائلة, فإن قيم X تساوي:

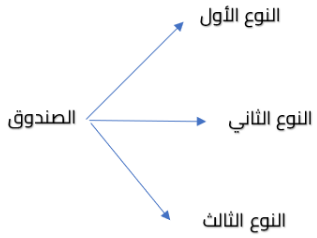
a	$\{0,1,2,3,4\}$	b	$\{0,1,8,3,4\}$	c	$\{1,2,3,4\}$	d	$\{0,1,2,,4\}$

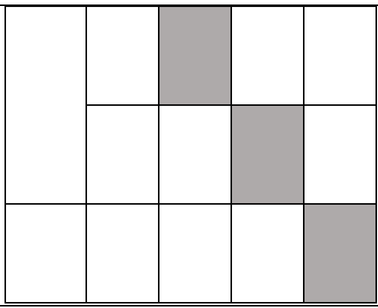
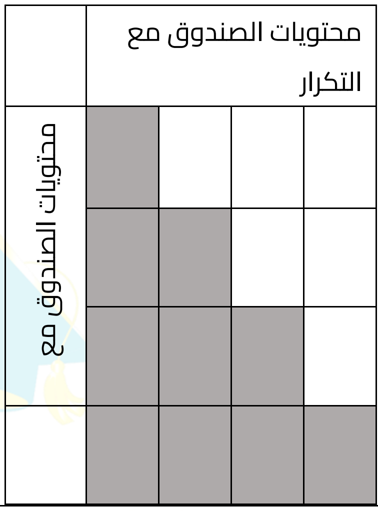
8- احتمال $X = 4$:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{3}{8}$	c	$\frac{1}{16}$	d	$\frac{6}{16}$

9- احتمال $X = 1$:

a	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{8}$	c	$\frac{1}{16}$	d	$\frac{6}{16}$

<table>
<tr><th>سحب أو اختيار عنصر واحد</th><th>سحب أو اختيار عنصرين</th><th>سحب أو اختيار 3 عناصر</th></tr>
<tr>
<td>مخطط شجري

</td>
<td>جدول:
نضع في السطر الأول
والعمود الأول
محتويات الصندوق كاملة
مع ذكر التكرار مثلاً
$R \quad R \quad R \quad B \quad W \quad W$</td>
<td>قوانين</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>السحب على التالي مع إعادة:
نضع الجدول كاملاً
<table><tr><td></td><td colspan="4">محتويات الصندوق مع التكرار</td></tr><tr><td rowspan="3">محتويات الصندوق مع</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td>السحب على التالي مع إعادة
القانون n^r
$P(A) = \frac{\text{التباديل} \times \text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>السحب على التالي دون إعادة :
نحذف القطر الرئيسي:
<table><tr><td></td><td colspan="4">محتويات الصندوق مع التكرار</td></tr><tr><td>محتو</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td>السحب على التالي دون إعادة:
القانون P_n^r
$P(A) = \frac{\text{التباديل} \times \text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$</td>
</tr>
</table>

		
	السحب معاً : نحذف القطر الرئيسي و ما تحته : 	السحب معاً : القانون $\binom{n}{r}$ $P(A)=\frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$
نضع الاحتمالات على الشجرة : $\frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$	القانون دائماً : $P(A)=\frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$ و نعد الحالات عداً مباشراً	في كل الحالات : نحسب الحالات الكلية $n(\Omega)$ من القانون و نثبت المقام على كامل المسألة عند حساب $n(\Omega)$ لانضرب بالتباديل عدد التباديل : $\frac{(\text{عدد الكرات المسحوبة})!}{(\text{التكرار})!}$

المسألة (1)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء و كرتين سوداوين : نسحب من الصندوق كرة و نسجل لونها ثم نعيدها و نضاعف الكرات من لونها ثم نسحب كرة أخرى و المطلوب:

1- احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء

a	$\frac{87}{140}$	b	$\frac{95}{140}$	c	$\frac{2}{5}$	d	$\frac{45}{140}$

2- احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون

a	$\frac{87}{140}$	b	$\frac{95}{140}$	c	$\frac{2}{5}$	d	$\frac{45}{140}$

3- احتمال أن تكون الأولى سوداء

a	$\frac{87}{140}$	b	$\frac{95}{140}$	c	$\frac{2}{5}$	d	$\frac{45}{140}$

4- احتمال أن تكون الكرات متمايزة في اللون

a	$\frac{87}{140}$	b	$\frac{95}{140}$	c	$\frac{2}{5}$	d	$\frac{45}{140}$

5- دمج مع متحول عشوائي: ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات الحمراء المسحوبة, فإن قيم X:

a	$\{1,2,3\}$	b	$\{0,2,3\}$	c	$\{0,1,2\}$	d	$\{1,5,3\}$

6- التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X يساوي:

a	$\frac{108}{140}$	b	$\frac{1080}{3}$	c	$\frac{18}{40}$	d	$\frac{1}{3}$

المسألة (2)

مغلف يحوي بطاقتين حمراوين تحملان الأرقام 0,1 و بطاقتين زرقاوين تحملان الرقمين 1,2 و بطاقة بيضاء تحمل الرقم 1, نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع إعادة و المطلوب :

1- احتمال أن تكون الكرتين من نفس اللون

a	$\frac{9}{25}$	b	$\frac{16}{25}$	c	$\frac{12}{25}$	d	$\frac{3}{25}$

2- احتمال أن تكون الكرتين من لونين مختلفين

a	$\frac{9}{25}$	b	$\frac{16}{25}$	c	$\frac{12}{25}$	d	$\frac{3}{25}$

3- احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 2

a	$\frac{9}{25}$	b	$\frac{16}{25}$	c	$\frac{12}{25}$	d	$\frac{3}{25}$

4- احتمال أن يكون مجموع الرقمين عدد فردي

a	$\frac{9}{25}$	b	$\frac{16}{25}$	c	$\frac{12}{25}$	d	$\frac{3}{25}$

5- احتمال أن تكون الكرات من نفس اللون ومجموعها مساوي للعدد 2

a	$\frac{9}{25}$	b	$\frac{12}{25}$	c	$\frac{11}{25}$	d	$\frac{3}{25}$

6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع الرقمين الظاهرين , فإن قيم X:

a	$\{0,1,2,3,4\}$	b	$\{2,3,4\}$	c	$\{1,2,3,4\}$	d	$\{0,1,2,3\}$

المسألة (3)

مغلف يحوي بطاقتين حمراوين تحملان الأرقام 0,1 و بطاقتين زرقاوين تحملان الرقمين 1,2 و بطاقة بيضاء تحمل الرقم 1, نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة و المطلوب :

1- احتمال أن تكون الكرتين من نفس اللون

a	$\frac{4}{20}$	b	$\frac{16}{20}$	c	$\frac{8}{20}$	d	$\frac{12}{20}$

2- احتمال أن تكون الكرتين من لونين مختلفين

a	$\frac{4}{20}$	b	$\frac{16}{20}$	c	$\frac{8}{20}$	d	$\frac{12}{20}$

3- احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 2

a	$\frac{4}{20}$	b	$\frac{16}{20}$	c	$\frac{8}{20}$	d	$\frac{12}{20}$

4- احتمال أن يكون مجموع الرقمين عدد فردي

a	$\frac{4}{20}$	b	$\frac{16}{20}$	c	$\frac{8}{20}$	d	$\frac{12}{20}$

5- احتمال أن تكون الكرات من نفس اللون ومجموعها مساوي للعدد 2

a	$\frac{4}{20}$	b	$\frac{16}{20}$	c	$\frac{8}{20}$	d	*impossible*

6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع الرقمين الظاهرين , فإن قيم X:

a	$\{1,2,3\}$	b	$\{0,2,3\}$	c	$\{0,1,2\}$	d	$\{1,5,3\}$

7- التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X يساوي:

a	2	b	$\frac{16}{20}$	c	$\frac{4}{20}$	d	$\frac{1}{2}$

8- التباين للمتحول العشوائي X يساوي:

a	$\frac{20}{100}$	b	$\frac{40}{90}$	c	$\frac{52}{90}$	d	$\frac{90}{20}$

9- الانحراف المعياري للمتحول العشوائي X يساوي:

a	$\sqrt{\frac{20}{100}}$	b	$\sqrt{\frac{40}{90}}$	c	$\sqrt{\frac{52}{90}}$	d	$\sqrt{\frac{90}{20}}$

المسألة (4)

مغلف يحوي بطاقتين حمراوين تحملان الأرقام 0,1 و بطاقتين زرقاوين تحملان الرقمين 1,2 و بطاقة بيضاء تحمل الرقم 1, نسحب من المغلف بطاقتين معاً و المطلوب :

1- احتمال أن تكون الكرتين من نفس اللون

a	$\frac{18}{120}$	b	$\frac{60}{120}$	c	$\frac{21}{120}$	d	$\frac{116}{120}$

2- احتمال أن تكون الكرتين من لونين مختلفين

a	$\frac{18}{120}$	b	$\frac{60}{120}$	c	$\frac{21}{120}$	d	$\frac{116}{120}$

3- احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 2

a	$\frac{18}{120}$	b	$\frac{60}{120}$	c	$\frac{21}{120}$	d	$\frac{116}{120}$

4- احتمال أن يكون مجموع الرقمين عدد فردي

a	$\frac{18}{120}$	b	$\frac{60}{120}$	c	$\frac{21}{120}$	d	$\frac{116}{120}$

5- احتمال أن تكون الكرات من نفس اللون ومجموعها مساوي للعدد 2

a	$\frac{18}{120}$	b	$\frac{60}{120}$	c	0	d	$\frac{116}{120}$

6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع الرقمين الظاهرين , فإن قيم X:

a	$\{1,2,3\}$	b	$\{0,2,3\}$	c	$\{0,1,2\}$	d	$\{1,5,3\}$

7- التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X يساوي:

a	2.1	b	0.69	c	$\frac{\sqrt{69}}{100}$	d	46.59

8- التباين للمتحول العشوائي X يساوي:

a	2.1	b	0.69	c	$\frac{\sqrt{69}}{100}$	d	46.59

9- الانحراف المعياري للمتحول العشوائي X يساوي:

a	2.1	b	0.69	c	$\frac{\sqrt{69}}{100}$	d	46.59

المسألة (5)

صندوق يحوي 10 كرات ستة منها حمراء و ثلاثة بيضاء و واحدة سوداء نسحب من الصندوق 3 كراتٍ معاً

1- احتمال ظهور كرات من نفس اللون

a	$\frac{18}{120}$	b	$\frac{60}{120}$	c	$\frac{21}{120}$	d	$\frac{116}{120}$

2- احتمال ظهور كرتين حمراوين فقط

a	$\frac{18}{120}$	b	$\frac{60}{120}$	c	$\frac{21}{120}$	d	$\frac{116}{120}$

3- احتمال ظهور كرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى

a	$\frac{18}{120}$	b	$\frac{60}{120}$	c	$\frac{21}{120}$	d	$\frac{116}{120}$

4- احتمال ظهور كرة حمراء واحدة على الأقل

a	$\frac{18}{120}$	b	$\frac{60}{120}$	c	$\frac{21}{120}$	d	$\frac{116}{120}$

5- احتمال ظهور كرة سوداء واحدة على الأقل

a	$\frac{18}{120}$	b	$\frac{36}{120}$	c	$\frac{21}{120}$	d	$\frac{116}{120}$

المسألة (6)

صندوق يحوي 10 كرات ستة منها حمراء و ثلاثة بيضاء و واحدة سوداء نسحب من الصندوق 3 كراتٌ علىالتالي دون اعادة

1- احتمال ظهور كرات من نفس اللون

a	$\frac{126}{720}$	b	$\frac{360}{720}$	c	$\frac{144}{720}$	d	$\frac{706}{720}$

2- احتمال ظهور كرتين حمراوين فقط

a	$\frac{126}{720}$	b	$\frac{360}{720}$	c	$\frac{144}{720}$	d	$\frac{706}{720}$

3- احتمال ظهور كرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى

a	$\frac{126}{720}$	b	$\frac{360}{720}$	c	$\frac{144}{720}$	d	$\frac{706}{720}$

4- احتمال ظهور كرة حمراء واحد على الأقل

a	$\frac{126}{720}$	b	$\frac{360}{720}$	c	$\frac{144}{720}$	d	$\frac{706}{720}$

5- احتمال ظهور كرة سوداء واحدة على الأقل

a	$\frac{126}{720}$	b	$\frac{360}{720}$	c	$\frac{144}{720}$	d	$\frac{216}{720}$

6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات السوداء , فإن قيم X:

a		b		c		d	

المسألة (7)

صندوق يحوي 10 كرات ستة منها حمراء و ثلاثة بيضاء و واحدة سوداء نسحب من الصندوق 3 كراتٌ على التالي مع اعادة

1- احتمال ظهور كرات من نفس اللون

a	$\frac{244}{1000}$	b	$\frac{432}{1000}$	c	$\frac{108}{1000}$	d	$\frac{936}{1000}$

2- احتمال ظهور كرتين حمراوين فقط

a	$\frac{244}{1000}$	b	$\frac{432}{1000}$	c	$\frac{108}{1000}$	d	$\frac{936}{1000}$

3- احتمال ظهور كرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى

a	$\frac{244}{1000}$	b	$\frac{432}{1000}$	c	$\frac{108}{1000}$	d	$\frac{936}{1000}$

4- احتمال ظهور كرة حمراء واحد على الأقل

a	$\frac{244}{1000}$	b	$\frac{432}{1000}$	c	$\frac{108}{1000}$	d	$\frac{936}{1000}$

5- احتمال ظهور كرة سوداء واحدة على الأقل

a	$\frac{244}{1000}$	b	$\frac{432}{1000}$	c	$\frac{271}{1000}$	d	$\frac{936}{1000}$

6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات السوداء , فإن قيم X:

a	$\{0,1,2,3,4\}$	b	$\{2,3,4\}$	c	$\{1,2,3,4\}$	d	$\{0,1,2,3\}$

المسألة (8)

يحتوي صندوق على 5 كرات. ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2.

نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق والمطلوب:

1- احتمال الحدث A "الكرتين المسحوبتين من اللون ذاته" يساوي:

a	$\frac{5}{10}$	b	$\frac{4}{10}$	c	$\frac{1}{5}$	d	$\frac{16}{10}$

2- احتمال الحدث B "مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3" يساوي:

a	$\frac{5}{10}$	b	$\frac{4}{10}$	c	$\frac{1}{5}$	d	$\frac{16}{10}$

3- احتمال الحدث B علماً أن A قد وقع هو:

a	$\frac{5}{10}$	b	$\frac{4}{10}$	c	$\frac{1}{5}$	d	$\frac{16}{10}$

4- ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الألوان المختلفة الظاهرة , فإن قيم X:

a	$\{1,2\}$	b	$\{0,1,2\}$	c	$\{0,1\}$	d	$\{1,2,3\}$

5- التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X يساوي:

a	$\frac{5}{10}$	b	$\frac{4}{10}$	c	$\frac{1}{5}$	d	$\frac{16}{10}$

6- التباين للمتحول العشوائي X يساوي:

a	$\frac{5}{10}$	b	$\frac{4}{100}$	c	$\frac{1}{5}$	d	$\frac{16}{10}$

7- الانحراف المعياري للمتحول العشوائي X يساوي:

a	0.5	b	$\frac{4}{10}$	c	0.2	d	$\frac{16}{10}$

المسألة (9)

1- يحتوي صندوق على 5 كرات , اثنتان تحملان الرقم , واثنتان تحملان الرقم , واحدة تحمل الرقم , نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة , نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع رقمي الوجهين الظاهرين فإن قيم X تساوي:

a	$\{2,3,4,5\}$	b	$\{1,2,3\}$	c	$\{0,2,1\}$	d	$\{3,6,9\}$

2- التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X يساوي:

a	$\frac{72}{20}$	b	$\frac{336}{400}$	c	$\frac{\sqrt{336}}{20}$	d	$\frac{1}{20}$

3- التباين للمتحول العشوائي X يساوي:

a	$\frac{72}{20}$	b	$\frac{336}{400}$	c	$\frac{\sqrt{336}}{20}$	d	$\frac{1}{20}$

4- الانحراف المعياري للمتحول العشوائي X يساوي:

a	$\frac{72}{20}$	b	$\frac{336}{400}$	c	$\frac{\sqrt{336}}{20}$	d	$\frac{1}{20}$

المسألة (10)

نتأمل التجربة الآتية:

صندوق يحوي ثلاث كرات : واحدة حمراء تحمل الرقم 1 اثنتان زرقاوان تحملان ارقم 2 و 3 نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي مع إعادة ولتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة :

- نعرف على Ω المتحول العشوائي X الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الكرات الزرقاوات المسحوبة
- ونعرف على Ω المتحول العشوائي Y الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموعة رقمي الكرتين المسحوبين

1- قيم X هي:

a	$\{0,1,2\}$	b	$\{2\}$	c	$\{3,1,2\}$	d	$\{0,1\}$

2- قيم Y هي:

a	$\{2,3,4,5,6\}$	b	$\{2,3\}$	c	$\{4,5,6\}$	d	$\{2,3,5,6\}$

3- احتمال $X = 0$ يساوي:

a	$\frac{1}{9}$	b	$\frac{2}{3}$	c	$\frac{4}{9}$	d	$\frac{3}{9}$

4- احتمال $Y = 2$ يساوي:

a	$\frac{1}{9}$	b	$\frac{2}{3}$	c	$\frac{4}{9}$	d	$\frac{3}{9}$

5- احتمال $(X = 0 \cap Y = 2)$ هو:

a	b	c	d
$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$

6- إن المتحولين X و Y:

a	b	c	d
مستقلان	غير مستقلان	متكاملان	غير ذلك

المسألة (11)

نلقي حجري نرد متوازنين نرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها وليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2 و Y الذي يمثل باقي قسمة S على 4 والمطلوب:

1- احتمال $X = 0$ يساوي:

a	b	c	d
$\frac{18}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{36}$

1- احتمال $Y = 2$ يساوي:

a	b	c	d
$\frac{18}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{36}$

2- المتحولان X و Y :

a	b	c	d
مستقلان	غير مستقلان	متكاملان	غير ذلك

المسألة (12)

يتطلب انجاز منهاج الرياضياتفي جلسة شغف الرياضيات الامتحانية مرحلتين المرحلة A شرح الأفكار النظرية والمرحلة B حل مسائل وتمارين شاملة تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يعطى قانون احتمالها بالجدول الآتي:

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

وتستغرف المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان X_B و X_A مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز E للحدث "تستغرق انجاز المنهاج ثلاثة أيام أو أقل". إن احتمال الحدث E:

a	b	c	d
0.2	0.5	0.1	0.8

المسألة (13)

لدينا الجدول الآتي إذا علمت أن X و Y مستقلان احتمالياً:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	x_2			0.4
1			0.04	x_1
2	x_5			0.4
قانون Y	0.3	x_4	x_3	

1- قيمة x_1:

a	0.2	b	0.12	c	0.5	d	0.4

2- قيمة x_2:

a	0.2	b	0.12	c	0.5	d	0.4

3- قيمة x_3:

a	0.2	b	0.12	c	0.5	d	0.4

4- قيمة x_4:

a	0.2	b	0.12	c	0.5	d	0.4

5- قيمة x_5:

a	0.2	b	0.12	c	0.5	d	0.4

قواعد استخدام التمثيل الشجري

- توافق كل عقدة حالة من حالات التجربة
- قانون العقد: مجموع جميع الاحتمالات المكتوبة على الفروع الصادرة من العقد يساوي 1
- يمثل مسار تام بدءاً من جذر الشجرة إلى نهاية طرف نهائي فيها الحدث الموافق لتقاطع جميع الأحداث التي يمر بها المسار
- إن احتمال مسار يساوي جداء ضرب الاحتمالات المسجلة على الفروع التي تكوّن هذا المسار
- احتمال الحدث D يساوي مجموع احتمالات المسارات المؤدية إلى D

المسألة (1)

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية , عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح , صنعت الورشة A منها 1200 مصباح وصنعت البقية الورشة B , هناك نسبة 4% من المصابيح التي من صناعة الورشة A معطوبة ,في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة , نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب , نرمز بالرمز A إلى الحدث " المصباح مصنوعفي الورشة A " وبالرمز B إلى الحدث " المصباح مصنوعفي الورشة B " وبالرمز D إلى الحدث " المصباح معطوب " , المطلوب :

1- احتمال أن يكون المصباح معطوب هو:

$\frac{4}{1200}$	d	$\frac{6}{1200}$	c	$\frac{72}{1000}$	b	$\frac{36}{1000}$	a

2- إذا كان المصباح معطوباً فإن احتمال أن يكون مصنوعافي الورشة A هو:

$\frac{1}{2}$	d	$\frac{3}{4}$	c	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{2}{3}$	a

المسألة (2)

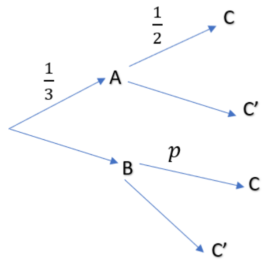
في مدرستنا يمارس **30%** من الطلاب لعبة كرة المضرب , ونعلم أن مدرستنا تضم **60%** ذكور وأن **55%** من هؤلاء لا يلعبون كرة المضرب ٬ فإن احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين الطالبات لا تمارس كرة المضرب هو:

0.94	d	$\frac{40}{37}$	c	$\frac{3}{40}$	b	$\frac{37}{40}$	a

المسألة (3)

نتأمل في الشكل المجاور تمثيلاً شجرياً لتجربة عشوائية

قيمة p ليكون الحدثان A, C مستقلان احتمالياً هي:



$\frac{1}{3}$	d	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{6}$	a

المسألة (4)

صندوق يحوي ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين نسحب من الصندوق كرة تلو الأخرى حتى لا يتبقى في الصندوق الا كرات من اللون ذاته، وليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد مرات السحب اللازمة،

1- فإن قيم X تساوي:

{2,3,6}	d	{2,3}	c	{1,3,4}	b	{2,3,4}	a

2- التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X يساوي:

0.035	d	35	c	0.35	b	3.5	a

المسألة (5)

نتأمل صندوقاً يحوي على 3 كرات سوداء و أربع كرات حمراء. نسحب من عشوائياً كرة من الصندوق و نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونهافي الصندوق ثم نحسب مجدداً كرة من الصندوق . لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث (الكرة المحسوبةفي المرة الثانية حمراء اللون)

و ليكن R_1 الحدث (الكرة المسحوبةفي المرة الأولى حمراء اللون)

1- إن احتمال R_2 يساوي:

a	$\frac{791}{1349}$	b	$\frac{12}{70}$	c	$\frac{32}{77}$	d	$\frac{8}{11}$

2- إذا كانت الكرة المسحوبةفي المرة الثانية حمراء اللون فإن احتمال أن تكون الكرة الأولىفي المرة الأولى سوداء اللون هو:

a	$\frac{791}{1349}$	b	$\frac{12}{70}$	c	$\frac{12}{70}\times\frac{1349}{791}$	d	$\frac{8}{11}$

المسألة (6)

تحاول سعاد إدخال الوتدفي حلقات تلقيها, تكرر سعاد التجربة عدداً من المرات عندما تنجح سعادفي ادخال الحلقة فإن احتمال نجاحهافي ادخال الحلقة اللاحقة هو $\frac{1}{3}$ وعندما تفشلفي ادخال الحلقة يصبح احتمال فشلهافي ادخال اللاحقة $\frac{4}{5}$ نفترض أن احتمال نجاح سعادفي ادخال الحلقةفي المرة الأولى يساوي احتمال فشلها, نتأمل أيا كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n الحدثين الآتيين:

A_n : نجحت سعادفي ادخال الحلقة عند المرة n.

B_n: فشلت سعادفي ادخال الحلقة عند المرة n.

ونعرف $p_n = P(A_n)$:

1- قيمة p_1 تساوي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{2}{15}$	c	$\frac{4}{15}$	d	$\frac{1}{5}$

2- قيمة p_2 تساوي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{2}{15}$	c	$\frac{4}{15}$	d	$\frac{1}{5}$

3- قيمة p_nفي حالة $n \geq 2$ تساوي:

a	$\frac{2}{15}p_{n-1}+\frac{1}{5}$	b	$\frac{1}{15}p_{n-1}+\frac{1}{5}$	c	$\frac{2}{15}p_n+\frac{1}{5}$	d	$\frac{2}{15}p_{n-1}-\frac{1}{5}$

4- نعرف المتتالية u_nفي حالة $n \geq 1$ المقدار u_n بالعلاقة $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ فإن المتتالية u_n:

a	هندسية أساسها $\frac{2}{15}$	b	هندسية أساسها $\frac{1}{2}$	c	هندسية أساسها $\frac{4}{3}$	d	حسابية أساسها $\frac{2}{15}$

5- قيمة u_n بدلالة n هي:

a	$\frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$	b	$\frac{7}{23}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$	c	$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$	d	$\frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n}$

6- قيمة p_n بدلالة n هي:

a	$\frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}+\frac{3}{13}$	b	$\frac{7}{23}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}+\frac{3}{13}$	c	$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}+\frac{3}{13}$	d	$\frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n}+\frac{3}{13}$

7- نهاية p_n تساوي:

a	$\frac{3}{13}$	b	0	c	1	d	$\frac{1}{2}$

المسألة (7)

لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء و كرة واحدة حمراء . و كل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين و كرة واحدة حمراء .

نسحب كرة من الصندوق الأول u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 و نضعها في الصندوق u_3 و هكذا ... , حتى نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} و نضعها في الصندوق u_n .

يرمز بالرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1- قيمة $P(R_1)$ تساوي :

a	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{2}{5}$	c	$\frac{1}{4}$	d	$\frac{3}{4}$

2- يكون $P(R_2)$ مساوياً لـ :

a	$\frac{1}{4}P(R_1)-\frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{4}P(R_1)+\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{4}P(R_1)+\frac{1}{4}$	d	$\frac{1}{4}P(R_1)+\frac{3}{4}$

3- في حالة $2 \le k \le n$ يكون $P(R_k)$ مساوياً لـ :

a	$\frac{1}{4}P(R_{k-1})-\frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{4}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}$	d	$\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{3}{4}$

4- نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{3}$ عندئذٍ تكون المتتالية $(x_k)_{k\ge1}$:

a	هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	b	هندسية أساسها $-\frac{1}{4}$	c	هندسية أساسها $\frac{1}{4}$	d	ليست هندسية

5- عبارة x_k بدلالة k :

a	$\left(\frac{1}{4}\right)^k$	b	$\left(-\frac{1}{4}\right)^k$	c	$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k$	d	$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k$

6- عبارة $P(R_k)$ بدلالة k :

a	$\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$	b	$\left(-\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$	c	$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$	d	$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$

الأجوبة : كلن ^C_^

التجربة البرنولية	
متى نستخدمها	تستخدم في حال عدد مرات التكرار كان أكبر من 3 أو حجم فضاء العينة مجهول و السحب على التالي مع إعادة أو قطعة نقود غير متجانسة
وسطائه	1- نرمز لاحتمال النجاح في المرة الواحدة p و احتمال الفشل $q = 1 - p$ 2- عدد مرات تكرار التجربة n
خواص المتحول الحداني (العشوائي الحداني)	1- مجموعة قيم المتحول الحداني : $X = \{0,1,2,3, \dots , n\}$ 2- القانون الاحتمالي : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ 3- التوقع $E(x) = np$ 4- التباين $V(x) = npq$ 5- الانحراف المعياري $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

التمرين (1)

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود و ووجهان ملونان بالأحمر . نلقي هذا الحجر خمس مرات متتالية و نعرف المتحول العشوائي X الذي يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها :

1- قيم المتحول X هي:

a	b	c	d
$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{1,2,3,4,5\}$

2- احتمال $X = 0$ يساوي:

a	b	c	d
$\frac{32}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{9}$

3- التوقع الرياضي للمتحول العشوائي يساوي:

a	b	c	d
$\frac{32}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{9}$

4- التباين للمتحول العشوائي X يساوي:

a	b	c	d
$\frac{32}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{9}$

التمرين (2)

1- قطعة نقود غير متجانسة فيها احتمال ظهور صورة يساوي مثلي احتمال ظهور كتابة نلقي هذه القطعة ثلاثة مرات وليكن X املتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور كتابة فإن قيم المتحول X:

a	b	c	d
$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{1,2,3,4,5\}$

2- التوقع الرياضي للمتحول X هو:

a	1	b	$\frac{2}{3}$	c	$\frac{1}{3}$	d	$\frac{1}{9}$

3- التباين للمتحول X يساوي:

a	1	b	$\frac{2}{3}$	c	$\frac{1}{3}$	d	$\frac{1}{9}$

التمرين (3)

يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء ، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء

1- نسحب عشوائياً كرة ، فإن احتمال أن تكون حمراء اللون هو:

a	$\frac{3}{4}$	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{2}{3}$	d	$\frac{1}{3}$

2- نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التالي و مع إعادة و نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عملية السحب ، فإن قيم المتحول العشوائي X تساوي:

a	$\{0,1,2,3\}$	b	$\{1,2,3\}$	c	$\{0,1,2\}$	d	$\{1,2\}$

3- احتمال $X = 2$ هو:

a	$\frac{1}{64}$	b	$\frac{9}{64}$	c	$\frac{27}{64}$	d	$\frac{3}{64}$

التمرين (4)

نتأمل في الجدول الآتي تجربة برنولية

k	0	1	2	3
P_k				$\frac{1}{27}$

1- قيمة n تساوي:

a	3	b	$\frac{1}{3}$	c	$\frac{1}{27}$	d	$\frac{2}{3}$

2- قيمة p تساوي:

a	3	b	$\frac{1}{3}$	c	$\frac{1}{27}$	d	$\frac{2}{3}$

3- قيمة q تساوي:

a	3	b	$\frac{1}{3}$	c	$\frac{1}{27}$	d	$\frac{2}{3}$

4- قيمة $P(X = 0)$ تساوي:

a	$\frac{8}{27}$	b	$\frac{1}{3}$	c	$\frac{1}{27}$	d	$\frac{2}{3}$