بنوك الشغف في التحليل

التمرين الأول

ليكن f التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{2lnx-3}{lnx+1}$$

1- احسب نهاية f عند $+\infty$

2- جد عدداً حقيقياً A يحقق أن $f(x)\in]1.99,2.01[$ عندما $x>A$

3- استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

التمرين الثاني

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}$$

1- احسب نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- اكتب المقدار $4x^2+4x+5$ بالشكل القانوني.

3- احسب نهاية التابع $f(x)-\sqrt{(2x+1)^2}$ عند $+\infty$ و $-\infty$.

4- استنتج معادلتي المقارب المائل للخط البياني للتابع f ثم ادرس الوضع النسبي.

5- جد $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع $g(x)=\sqrt{4\sin^2 x+4sinx+5}$

التمرين الثالث

ليكن التابع f المعرف على المجال $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x)=2^x$$

1- احسب $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$.

2- احسب النهاية $\lim_{x\to1}\frac{2^x-2}{x-1}$.

3- ليكن f التابع المعرف وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-2}{x-1} & ; \; x\neq1\\ \ln(m) & ; \; x=1\end{cases}$$

عين m ليكون f مستمراً عند $x=1$.

بنوك الشغف في التحليل

التمرين الرابع

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = \sin(3x)$:

1- احسب $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$ بدلالة تابع sin

2- أثبت أن $f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$

التمرين الخامس

احسب النهايات الآتية :

$$\lim_{x\to 4}(5-x)^{\frac{1}{x-4}} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln^2 x}$$

التمرين السادس

نفترض وجود عددين حقيقين موجبين تماماً a, b يحققان أنّ:

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{lna + lnb}{2}$$

احسب $\frac{a}{b}$

التمرين السابع

حل المتراجحة: $2\ln^2 x \geq \ln(x)^2$

التمرين الثامن

عين حل المعادلة $y' + 2y = 0$ علماً أن ميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$

التمرين التاسع

في كلٍ من الحالات الآتية أثبت أن F, G تابعان أصليان للتابع ذاته في الحالات الآتية

1	$F(x) = 601 - \cos^2 x \quad , \quad G(x) = \sin^2 x$	$I = R$
2	$F(x) = \tan^2 x \quad , \quad G(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

بنوك الشغف في التحليل

التمرين العاشر

نتأمل المتتاليتين :

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad , \quad y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

أثبت أن $(x_n), (y_n)$ متجاورتين

التمرين الحادي عشر

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{3^n - 2^n}{5^n + 2^n}$. احسب نهاية u_n

التمرين الثاني عشر

من أجل $a > b > 0$ نضع $u_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ و المطلوب :

1- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
2- بفرض $v_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$. أثبت أن $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$ ثم استنتج نهاية v_n

التمرين الثالث عشر

ليكن f التابع المعرف على المجال $[0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \sqrt{9x - 2}$

1- احسب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
2- أثبت وجود عدداً حقيقياً δ بحيث يتحقق الشرط : >> $|f(x) - 4| < 0.2$ مهما يكن $x \in D_f \cap]2 - \delta, 2 + \delta[$ <<

صياغة أخرى : عيّن مجالاً I مركزه 2 بحيث يحقق الشرط : " $f(x) \in]3.8, 4.2[$ مهما يكن $x \in I$ "

التمرين الرابع عشر

ليكن $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

1- أثبت أن $f(x) + f(-x) = 2$
2- استنتج أن $I(0,1)$ مركز تناظر للخط c_f
3- ادرس تغيرات f و اذكر ماله من مقاربات
4- اكتب معادلة المماس في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب ثم ادرس الوضع النسبي.
5- ارسم c_f و ناقش تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة $(3 - m)e^x - 1 - m = 0$
6- أثبت أن $\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$ ثم احسب مساحة السطح المحصور بين منحني التابع و محور الفواصل و المستقيمان $x = 0, x = ln2$

بنوك الشغف في التحليل

التمرين الخامس عشر

لنتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$:

1- تحقق أن f دوري دوره 2π ثم ادرس زوجية أو فردية التابع f.

2- استنتج إمكانية دراسة التابع f على المجال $[0,\pi]$.

3- أثبت أن $f'(x) = 2(2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$ مهما تكن x.

4- ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,\pi]$.

التمرين السادس عشر

ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1- أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - ln2$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f ثم ادرس الوضع النسبي لهما

2- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

3- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $]1,2[$

4- ارسم d و ارسم الخط البياني للتابع f

التمرين السابع عشر

ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{lnx}{x}$

1- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

2- أثبت وجود عددين حقيقين a, b يحققان أن $\frac{a}{b} = \frac{lna}{lnb}$

3- استنتج جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 3}$ وفق $u_n = f(n)$

4- أثبت أن التابع g المعرف على المجال $I =]0,\frac{\pi}{2}[$ وفق $g(x) = f(cosx)$ اشتقاقي على I ثم أوجد $g'(x)$

5- استنتج الخط البياني للتابع h المعرف وفق $h(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

بنوك الشغف في التحليل

التمرين الثامن عشر

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x^2e^x$ والمطلوب:

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها , دل على كل قيمة حدية مبيناً نوعها.

2- ارسم C.

3- ليكن C_1 الجزء من الخط البياني C المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0 , x = 1$
وليكن S السطح المحصور بين C_1 ومحور الفواصل , احسب مساحة S.

4- عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد مجسماً دورانياً حجمه V.

a) جد كثير حدود P(x) من الدرجة الرابعة ليكون التابع $G(x) = P(x)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $f^2(x)$.

b) استنتج قيمة V.

5- لتكن المعادلة التفاضلية $E: y' - y = 2xe^x$:

a) أثبت أن التابع f حل للمعادلة التفاضلية E.

b) ليكن g تابعاً اشتقاقياً على $\mathbb{R}$, أثبت أن g حل للمعادلة التفاضلية E إذا وفقط إذا كان $g - f$ حلاً للمعادلة التفاضلية $E': y' - y = 0$.

c) حل المعادلة التفاضلية E' ثم استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية E.

6- أثبت وجود عددين حقيقيين α و β يحققان $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = e^{\beta-\alpha}$.

التمرين التاسع عشر

ليكن f التابع المعرف على $]1, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

2- استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً α ثم احصر هذا الحل في مجال طوله 1

3- ارسم C_f مستفيداً من α

التمرين العشرون

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1- أوجد ما للخط C من مقاربات

2- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ثم ارسم c_f

3- استنتج أن $\ln(x+1) > \ln x + \frac{1}{x+1}$ مهما يكن $x > 0$

بنوك الشغف في التحليل

التمرين الواحد والعشرون

لتكن المتتالية المعرفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$:

1- أثبت أن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

2- نضع من أجل $n \geq 1$:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

بسط عبارة v_n ثم احسب نهايتها

التمرين الثاني والعشرون

نضع $n \geq 1$: $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

1- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

2- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

3- استنتج أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

التمرين الثالث والعشرون

من أجل $n \geq 1$ نضع $u_n = \frac{1}{n^2+n}$:

1- جد عددين حقيقين a, b يحققان أن $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

2- بسط المجموع $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ ثم احسب نهايته

3- أثبت أن u_n محدودة

التمرين الرابع والعشرون

نتأمل المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$, المعرفتين تدريجياً بالشكل:

$$s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4} \ , s_0 = 12$$

$$t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3} \ , t_0 = 1$$

1- أثبت أن المتتالية $v_n = s_n - t_n$ هندسية، واحسب نهايتها.

2- أثبت ان المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

3- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = 3t_n + 8s_n$ ثابتة.

4- ماذا تستنتج بما يتعلق في المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$؟

بنوك الشغف في التحليل

التمرين الخامس والعشرون

لتكن لدينا المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases} , \quad \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = x_n + 2 \end{cases}$$

1- أثبت أن المتتالية x_n حسابية وعين أساسها وحدها العام.

2- ادرس اطراد المتتالية y_n.

3- أثبت أن:

$$y_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

4- استنتج عبارة y_n بدلالة n , هل المتتالية y_n متقاربة أم متباعدة؟ ولماذا؟

التمرين السادس والعشرون

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right) & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

1- احسب $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ و ماذا تستنتج ؟

2- اكتب معادلة المماس للخط C_f عند النقطة التي فاصلتها صفر

3- احسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

4- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

المسألة الأولى

ليكن التابع $\boldsymbol{f}$ المعرف على $]0, +\infty[$ بالشكل:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}}$$

1- ادرس تغيرات $\boldsymbol{f}$ ونظم جدولاً بها.

2- اوجد معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي

3- جد نقطة تقاطع c_f مع المستقيم الذي معادلته $y = x$

4- ارسم المقارب المائل و ارسم المستقيم $y = x$ وارسم $\boldsymbol{c_f}$

5- بفرض $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}}$ و $\boldsymbol{u_0 = 2}$

أ- مثل الحدود الثلاثة الأولى على محور الفواصل

ب- أثبت بالتدريج $\boldsymbol{\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n}$

ت- استنتج أن المتتالية متقاربة و عين نهايتها

بنوك الشغف في التحليل

<u>نحو فهم أعمق :</u> قل إن كنت موافقاً أم غير موافق عن كل قضية من القضايا الآتية مع تعليل صحة اختيارك

القضية	أوافق	لا أوافق	التعليل
إذا كانت u_n متتالية متقاربة من العدد l و كانت v_n ليس لها نهاية حقيقية **عندئذٍ ليس للمتتالية $u_n + v_n$ نهاية حقيقية**	😊		لو فرضنا جدلاً أن $\lim_{n\to+\infty} v_n + u_n = l'$ و أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ و بملاحظة أنّ : $v_n = v_n + \boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u_n}$ **عندها** $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}[(v_n + u_n) - u_n] = l' - l \in R$ و هذا مستحيل . إذن من المستحيل أن تكون $\lim_{n\to+\infty} v_n + u_n$ نهاية حقيقية (l')
إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من العدد الحقيقة l و كانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية **عندئذٍ ليس للمتتالية $(u_n v_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية**		☹	لنضع مثلاً $u_n = \frac{1}{n+1}$ و $v_n = (-1)^n$. لاحظ أن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \in R$ و v_n ليس لها نهاية حقيقية لكن : $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0 \in R$
إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = l \in R$ و كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **عندئذٍ $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$**	😊		$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(v_n u_n \frac{1}{u_n}\right) = l \, . \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$
إذا وجد للمتتالية عنصر قاصر عنها **عندئذٍ يوجد عنصر راجح عليها**		☹	خذ مثلاً : $u_n = n$ فتلاحظ أن الصفر عنصر قاصر عنها لكن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فهي غير محدودة من الأعلى
إذا كان f مستمراً على I فهو تقابل عليه		☹	الاستمرار شرط غير كافٍ . يجب أن يكون مطرداً تماماً على I (نقول عن التابع $f: I \to J$ إنه تقابلٌ على I إذا وفقط إذا كان مستمراً على I و مطرد تماماً عليه)
كل متتالية محدودة متقاربة		☹	لو وضعنا $u_n = (-1)^n$ محدودة ($-1 \leq u_n \leq 1$) لكنها غير متقاربة
التابعان $f:]0,+\infty[\to R$ $f(x) = \ln(x+1)$ $g: R \to]0,+\infty[$ $g(x) = e^x - 1$ يمثلان تقابلاً و تقابله العكسي	😊		$f(g(x)) = \ln(e^x - 1 + 1) = \ln(e^x) = x$ $g(f(x)) = e^{\ln(x+1)} - 1 = x + 1 - 1 = x$
ميل المستقيم المعامد للمستقيم $y = -\frac{x}{2} + 1$ يساوي 2	😊		لأنه إذا كان m' ميل المستقيم المعامد لمستقيم ميله m عندئذٍ يتحقق أن $m' = -\frac{1}{m}$

بنوك الشغف في التحليل

			وهنا هذا محقق ذلك أن : $m' = 2 \quad , \quad m = -\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2 = m'$
إذا كان f غير اشتقاقي عند النقطة a **عندئذٍ $f(a)$ ليست قيمة حدية للتابع f**		☹	في حالة وجود نصفي مماسين عند aيكون التابع f غير اشتقاقي عند النقطة a إلا أنه قد تكون $f(a)$ حدية خذ مثلاً $f(x) = \|x\| \quad , a = 0$

جدول استنتاج الخطوط البيانية

الحالة	الحل
إذا كان $g(x) = f(-x)$	c_g ينتج عن c_f بتناظر بالنسبة لمحور التراتيب
إذا كان $g(x) = -f(x)$	c_g ينتج عن c_f بتناظر بالنسبة لمحور الفواصل
إذا كان $g(x) = -f(-x)$	c_g ينتج عن c_f بتناظر بالنسبة للمبدأ
إذا كان $g(x) = f(x+a)$	c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $-a\vec{i}$ (افقياً)
إذا كان $g(x) - f(x) = b$	c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $b\vec{j}$ (شاقولياً)
إذا كان $g(x) = \|f(x)\|$	c_g ينتج عن c_f باستبدال كل نقطة بنظيرتها بالنسبة لمحور الفواصل
إذا كان $g(x) = f(x)$ ولكن D_g محتواه في D_f (يعني مجموعة تعريف g شقفة من مجموعة تعريف f)	g مقصور التابع f على المجال D_g
إذا كان $g(x)$ تقابل عكسي لـ $f(x)$	c_g نظير c_f بالنسبة للمستقيم $y = x$