بنوك التحليلية

1) الجواب:

$$\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{\imath} + \sqrt{6}\,\vec{\jmath} - \vec{k}$$

$$\Rightarrow ||\vec{v}|| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{2+6+1} = \sqrt{9} = 3$$

2) الجواب:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BG}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN}$$

حيثُ N هي منتصف BG أي مركز الوجه $BCGF$

3) الجواب:

$$\left(F\,;\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FD}\right)$$

وبالتالي:

$$A(1\,,0\,,0) \quad , \quad B(0\,,1\,,0)$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$$

بفرض $N(x\,,y\,,z)$ يكون:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x - 1 = -x \Rightarrow 2x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$y = 1 - y \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$
$$z = -z \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

وبالتالي:

$$N\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,0\right)$$

4) الجواب:

$$A(1\,,2\,,-1)\,,\ B(2\,,1\,,0)$$

C نظيرة A بالنسبة للمبدأ أي أنّ:

$$C(-1\,,-2\,,+1)$$

نشكّل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,1) \ , \ \overrightarrow{AC}(-2,-4,2)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين غير مرتبطين خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{-4} \neq \frac{1}{2}$$

لنفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$a = +(-2+4) = 2$$
$$b = -(2+2) = -4$$
$$c = +(-4-2) = -6$$
$$\Rightarrow \vec{n}(2,-4,-6) \ , \ A(1,2,-1)$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0$$
$$\Rightarrow 2(x-1) - 4(y-2) - 6(z+1) = 0$$
$$\Rightarrow 2x - 4y - 6z + 0 = 0$$

نقسم على 2 :

$$\Rightarrow x - 2y - 3z = 0$$

5) الجواب:

$$A(1,3,-1)\,,\ B(2,5,2)\ ,\ C(3,4,\alpha)$$

ليكون المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B يجب أن يكون:

$$AB = BC$$

ومنه:

$$BA = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$
$$BC = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (\alpha-2)^2}$$
$$= \sqrt{2 + (\alpha-2)^2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{14} = \sqrt{2 + (\alpha-2)^2}$$

نربّع الطرفين:

$$2 + (\alpha-2)^2 = 14$$
$$\Rightarrow (\alpha-2)^2 = 12$$
$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 12$$
$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(-8) = 48 \Rightarrow \sqrt{\Delta}$$
$$= 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+4-4\sqrt{3}}{2} = 2-2\sqrt{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+4+4\sqrt{3}}{2} = 2+2\sqrt{3} \end{cases}$$

6) الجواب:

$$A(3,-2,2)\ ,\ \vec{u}(1,1,0)\ ,\ \vec{v}(-1,1,1)$$

نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيّاً لأن:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$$

نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$a = +(0-1) = -1$$
$$b = -(0-1) = +1$$
$$c = +(-1-1) = -2$$
$$\Rightarrow \vec{n}(-1,1,-2)$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$-1(x-3)+1(y+2)-2(z-2)=0$$
$$\Rightarrow -x+3+y+2-2z+4=0$$
$$\Rightarrow -x+y-2z+9=0$$

نضرب الطرفين بـ (-1) :

$$\Rightarrow x-y+2z-9=0$$

7) الجواب:

$$(2,0,0)\ ,\ (0,3,0)\ ,\ (0,0,5)$$

المستوي له شكل المعادلة:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$$

نوحّد المقامات:

$$\Rightarrow \frac{15x+10y+6z}{30}=1$$
$$\Rightarrow 15x+10y+6z=30$$

8) الجواب:

$$\overrightarrow{w_1}=2\,\vec{u}-\vec{v}$$
$$\overrightarrow{w_2}=2\,\vec{u}+\vec{v}$$

بما أنّ $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان فإنّ:

$$\overrightarrow{w_1}.\overrightarrow{w_2}=0\Rightarrow 4\,\vec{u}^2-\vec{v}^2=0\Rightarrow 4\,\vec{u}^2=\vec{v}^2$$

$$||\vec{u}||=\frac{1}{4}||\vec{v}||^2$$
$$\Rightarrow ||\vec{u}||=\frac{1}{2}||\vec{v}||$$

9) الجواب:

$$A(1,2,-3)\ ,\ B(-1,3,3)\ ,\ C(4,-1,2)$$

بفرض $D(x,y,z)$

ليكون $ABCD$ متوازي أضلاع يجب أن يتحقق:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$
$$\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-x\\-1-y\\2-z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2=4-x\Rightarrow x=6\\1=-1-y\Rightarrow y=-2\\6=2-z\Rightarrow z=-4\end{cases}$$
$$\Rightarrow D(6\,,-2\,,-4)$$

10) الجواب:

$$AM^2=3+(x+1)^2$$

أصغر قيمة لـ AM^2 هي التي تحقق:

$$(x+1)^2=0\Rightarrow x=-1$$
$$\Rightarrow AM^2=3\Rightarrow AM=\sqrt{3}$$

11) الجواب:

$$\vec{u}(1,0,2)\ ,\ \vec{v}(-1,2,0)\ ,\ \vec{w}(-4,m,-2)$$

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$
$$\begin{pmatrix}-4\\m\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta\\2\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$-4=\alpha-\beta\quad ...(1)$$
$$m=2\beta\quad ...(2)$$
$$-2=2\alpha\Rightarrow\alpha=-1\quad ...(3)$$

نعوّض في (1) :

$$-4=-1-\beta\Rightarrow\beta=3$$

نعوّض في (2) :

$$\Rightarrow m=6$$

12) الجواب:

$$A(0,1,0)\ ,\ \vec{u}(0,1,2)\ ,\ \vec{v}(0,3,-1)$$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{3}\neq\frac{2}{-1}$$

بفرض $\vec{n}(a\,,b\,,c)$:

$$a=+(-1-6)=-7$$
$$b=-(0-0)=0$$
$$c=+(0-0)=0$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$\Rightarrow 7(x-0)+0+0=0\Rightarrow 7x=0\Rightarrow x=0$$

13) الجواب:

$$\overrightarrow{n_1}(1\,,2\,,-\lambda)\ ,\ \overrightarrow{n_2}(3\lambda-7\,,4\,,-6)$$

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$$
$$\Rightarrow 3\lambda-7+8+6\lambda=0$$
$$\Rightarrow 9\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{9}$$

14) الجواب:

$$2x+3y-4z+1=0$$
$$\lambda\,x+2y+\frac{\lambda}{2}z-3=0$$

$$\overrightarrow{n_1}(2,3,-4)\ ,\ \overrightarrow{n_2}\left(\lambda\,,2,\frac{\lambda}{2}\right)$$

ليكون المستويين متعامدين يجب أن يتحقق الشرط:

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$$
$$\Rightarrow 2\lambda+6-2\lambda=0$$
$$\Rightarrow 6\neq 0$$ غير موجودة

15) الجواب:

$$||\vec{u}||=5\ ,\ ||\vec{v}||=3$$
$$\vec{u}.\vec{v}=-4$$

$$2\,\vec{u}(2\,\vec{v}+3\,\vec{u})$$
$$=4\,\vec{u}.\vec{v}+6\,\vec{u}.\vec{u}$$
$$=4\,\vec{u}.\vec{v}+6\,||\vec{u}||^2$$
$$=4(-4)+6(25)=-16+150=134$$

16) الجواب:

$\overrightarrow{n_Q}(1,-2,3)$ ، $\overrightarrow{n_R}(1,1,1)$ ، $A(2,5,-2)$

كون المستوي P عمودي على المستويين Q و R

فإنّ $\overrightarrow{n_R}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ شعاعي توجيه له.

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_R}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{3}{1}$$

نفرض ناظم P هو $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\begin{matrix}a=+(-2-3)=-5\\ b=-(1-3)=+2\\ c=+(1+2)=+3\end{matrix}\Rightarrow \vec{n}(-5,2,3)$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow -5(x-2)+2(y-5)+3(z+2)=0$$
$$\Rightarrow -5x+2y+3z+6=0$$

نضرب بـ 2 :

$$\Rightarrow -10x+4y+6z+12=0$$

17) الجواب:

$$AB=4\ ,\ BC=CG=2$$

نعرّف المعلم المتجانس:

$$\left(A\,;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

ونوجد الإحداثيّات:

$A(0,0,0)$ ، $E(0,0,2)$ ، $B(4,0,0)$ ، $F(4,0,2)$
$C(4,2,0)$ ، $G(4,2,2)$ ، $D(0,2,0)$ ، $H(0,2,2)$

$$J\left(\frac{4+4}{2}\,,\frac{2+2}{2}\,,\frac{0+2}{2}\right)\Rightarrow J(4,2,1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{JD}(-4,0,-1)\ ,\ \overrightarrow{JH}(-4,0,1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JH}=16+0-1=15$$

18) الجواب:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$$

19) الجواب:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=1$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM})=1$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}^2=1$$

حيثُ I منتصف $[AB]$ ، وبالتالي:

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{BI}$$
$$\Rightarrow -\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}^2=1$$
$$\Rightarrow -\overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{IM}^2=1\Rightarrow \overrightarrow{IM}^2=1+\overrightarrow{AI}^2$$

20) الجواب هو الخيار c .

21) الجواب:

$$A(3,4,1)$$

B هي مسقط A على المستوي (xoz) وبالتالي:

$$B(3,0,1)$$

C هي مسقط B على محور الرواقم oz وبالتالي:

$$C(0,0,1)$$

$$\Rightarrow AC=\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2+(1-1)^2}$$
$$=\sqrt{9+16+0}=\sqrt{25}=5$$

22) الجواب:

$$P: x-2y+3z-5=0$$
$$Q: x+y+z+1=0 \quad \times(-1)$$

بحل المعادلتين حل مشترك نجد:

$$x-2y+3z-5=0\ \ ...(1)$$
$$-x-y-z-1=0\ \ ..(2)$$

بجمع المعادلتين (2) و (1) نجد:

$$-3y+2z-6=0\Rightarrow y=\frac{2}{3}z-2$$

نعوّض في Q :

$$\Rightarrow x+\frac{2}{3}z-2+z+1=0$$
$$\Rightarrow x=-\frac{5}{3}z+1$$
$$\Rightarrow M\left(-\frac{5}{3}z+1\,,\frac{2}{3}z-2\,,z\right)$$

23) الجواب:

$$2x+2y+2z=0\ \ ...(1)$$
$$x+y-4z=0\ \ ...(2)$$

ندرس الوضع النسبي للنواظم:

$\overrightarrow{n_1}(2,2,2)$ ، $\overrightarrow{n_2}(1,1,-4)$

$\frac{2}{1}=\frac{2}{1}\neq\frac{2}{-4}$ غير مرتبطين خطيّاً

وبالتالي المستويين غير متوازيان.

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=^?0$$
$$2+2-8=-4\neq 0$$

ومنه فإنّ المستويان متقاطعان دون تعامد.

24) الجواب:

$$A(1,2,-1)\ ,\ B(3,0,1)$$

النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$:

الناظم $\overrightarrow{AB}(2,-2,2)$

M منتصف $[AB]$ وبالتالي:

$M(2,1,0)$

معادلة المستوي المحوري:

$$2(x-2)-2(y-1)+2(z-0)=0$$
$$\Rightarrow 2x-4-2y+2+2z=0$$
$$\Rightarrow 2x-2y+2z-2=0$$

نقسم على 2 :

$$\Rightarrow x-y+z-1=0$$

بالمقارنة مع

$$x+my+nz-1=0$$

نجد أنّ:

$$m=-1 \quad , \quad n=1$$

25) بتطبيق فيثاغورث نجد:

$$r^2=dist^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow 9=dist^2+2$$
$$\Rightarrow dist^2=9-2=7$$
$$\Rightarrow dist=\sqrt{7}$$

26) الجواب:

نوجد النقطة M هي : $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

ونشكل الشعاعان $\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE}$:

$$\overrightarrow{CM}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$$

$$\overrightarrow{OE}(1,1,1)$$

نوجد $||CM||$ و $||OE||$:

$$||CM||=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$||OE||=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

من قانون الجداء السلمي نجد :

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{OE}=||CM||.||OE||.\cos(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2}.\sqrt{3}\cos(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})=0$$

$$\cos(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})=0$$

27) الجواب:

28) الجواب:

$$A(-1,2,3) \ , \ B(1,4,-5)$$

نوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$:

الناظم $\overrightarrow{AB}(2,2,-8)$

النقطة M منتصف $[AB]$ وبالتالي:

$M(0,3,-1)$

$$\Rightarrow 2(x-0)+2(y-3)-8(z+1)=0$$

$$\Rightarrow P: 2x+2y-8z-14=0$$

إيجاد معادلة الكرة:

نصف القطر:

$$dist(A,P)=\frac{|-2+4-24-14|}{\sqrt{4+4+64}}=\frac{|-36|}{\sqrt{72}}=\frac{36}{\sqrt{72}}$$

$$\Rightarrow x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\left(\frac{36}{\sqrt{72}}\right)^2$$

29) الجواب:

$$d: \begin{cases} x=t+1 \\ y=t-2 \\ z=3t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{u_d}(1,1,3)$$

$$P: 2x+ay-z+b=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}(2,a,-1)$$

كون $d\in P$ فإنّ: $\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_P}$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=0\Rightarrow 2+a-3=0\Rightarrow a=1$$

وكون $d\in P$ فإنّ d يحقق معادلته:

$$\Rightarrow 2(t+1)+(t-2)-3t+b=0$$
$$\Rightarrow 2t+2+t-2-3t+b=0\Rightarrow b=0$$

30) الجواب:

$$A(3,2,1) \ , \ B(1,2,0) \ , \ C(3,1,-2) \ , \ D(x,y,3)$$

31) الجواب:

حسب خاصة الاختزال:

$$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

نعوض :

$$6\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right|=6\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

$$\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right|=\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$.

32) الجواب:

$$l_1 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$l_2 = 3\overrightarrow{MD} - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$$

$$= 3\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{MG}$$

$$= 3\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MD}\right)$$

$$= 3\overrightarrow{GD}$$

نعوض:

$$3\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right| = 3\left|\left|\overrightarrow{GD}\right|\right|$$

$$\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{GD}\right|\right|$$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $[DG]$

33) الجواب:

$$x^2 + z^2 = \frac{9}{4}y^2$$

$$r^2 = 9 \Longrightarrow r = 3$$

مخروط دوراني محوره محور التراتيب ونصف قطر قاعدته 3

34) الجواب:

$$\left(O\,;\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OC}\right)$$

$$\Longrightarrow A(1,0,0)\ ,\ B(0,1,0)\ ,\ C(0,0,1)$$
$$\Longrightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Longrightarrow x + y + z - 1 = 0$$

35) الجواب:

$$P_1 :\ 2x + y - z + 2 = 0 \quad \ldots(1)$$
$$P_2 :\ x + 2y - z + 1 = 0 \quad \ldots(2)$$

بطرح (2) و (1) نجد:

$$x - y + 1 = 0 \Longrightarrow x = y - 1$$

نعوّض في (2):

$$y - 1 + 2y - z + 1 = 0 \Longrightarrow z = 3y$$

وبالتالي:

$$(y - 1\,,y\,,3y)\ ;\ \ y \in \mathbb{R}$$

36) الجواب:

$$\left.\begin{matrix} A(-1,2,3) \\ B(1,2,-1) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AB}(2,0,-4)$$
$$P : x + y + z - 1 = 0$$

المعادلات الوسيطية للمستقيم d هي:

$$d :\ \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = -4t + 3 \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

نعوّض d في P:

$$2t - 1 + 2 - 4t + 3 - 1 = 0$$
$$\Longrightarrow -2t + 3 = 0 \Longrightarrow t = \frac{3}{2}$$

نعوّض في d:

$$x = 2\ ,\ y = 2\ ,\ z = -3$$
$$\Longrightarrow I(2,2,-3)$$

37) الجواب:

$$A(2,0,0)\ ,\ B(0,1,0)\ ,\ C(0,0,1)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}(-2,1,0) \Longrightarrow \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \\ \overrightarrow{AC}(-2,0,1) \Longrightarrow \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|.\cos\left(B\hat{A}C\right)$$
$$\Longrightarrow 4 + 0 + 0 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \cos\left(B\hat{A}C\right)$$
$$\Longrightarrow \cos\left(B\hat{A}C\right) = \frac{4}{5}$$

38) الجواب:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 8 = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 - 8 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 9 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$$

وبالتالي M تمثّل كرة مركزها:

$$(0,1,0)$$

ونصف قطرها:

$$r = \sqrt{9} = 3$$

39) الجواب:

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\left|\overrightarrow{BA}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right|.\cos\left(\hat{B}\right)$$

حسب فيثاغورث:

$$\left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right| = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

40) الجواب:

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HJ}$$
$$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$$

41) الجواب:

$$d :\ \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = -t + 1 \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \vec{n} = \overrightarrow{u_d} = (0\,,-1\,,-1)$$

42) الجواب:

$A \in d \Leftarrow$ تحقق معادلته

$$\begin{cases} -2 = at - 1 \quad \dots(1) \\ 5 = 3t + 2 \\ 2 = 2t \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

نعوّض في (1) :

$$-2 = a(1) - 1 \Rightarrow a = -2 + 1 = -1$$

43) الجواب:

$$d: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 1 \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_d}(3\,,2\,,-1)$$

$$\Delta: \begin{cases} x = s + 2 \\ y = 1 \\ z = 3s + 1 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}(1\,,0\,,3)$$

$$\frac{1}{3} \neq \frac{0}{2} \neq \frac{3}{-1}$$

وبالتالي شعاعي توجيه Δ و d غير مرتبطين خطيّاً، ومنه فإنّ Δ و d غير متوازيان أي أنهما ((إمّا متقاطعين أو متخالفين))

$$\left.\begin{matrix} x = x \\ y = y \\ z = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3t + 1 = s + 2 \quad \dots(1) \\ 2t = 1 \quad \dots(2) \\ -t + 1 = 3s + 1 \quad \dots(3) \end{cases}$$

من (2) نجد:

$$t = \frac{1}{2}$$

نعوّض في (1) :

$$\Rightarrow s = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 - 2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

نعوّض في (3) :

$$-\frac{1}{2} + 1 \stackrel{?}{=} 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{5}{2}$$

وبالتالي Δ و d متخالفين.

$$\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta} = (1)(3) + (0)(2) + (3)(-1) = 0$$

ومنه فإن المستقيمان Δ و d متخالفين ومتعامدين .

44) الجواب:

$$A(1\,,2\,,0) \ , \ B(0\,,0\,,1) \ , \ C(1\,,5\,,5)$$

$$\overrightarrow{BA}(1\,,2\,,-1) \ , \ \overrightarrow{BC}(1\,,5\,,4)$$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{5}$$

الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطان خطيّاً.

نفرض:

$$\vec{n}(a\,,b\,,c)$$

$$a = +(8 + 5) = 13$$
$$b = -(4 + 1) = -5$$
$$c = +(5 - 2) = 3$$
$$\Rightarrow \vec{n}(13\,,-5\,,3)$$
$$B(0\,,0\,,1)$$

$$(ABC): 13(x - 0) - 5(y - 0) + 3(z - 1) = 0$$
$$\Rightarrow (ABC): \ 13x - 5y + 3z - 3 = 0$$

نكتب معادلة المستقيم d المار بالنقطة

$$D(-11\,,9\,,-4)$$

وشعاع توجيهه هو:

$$\overrightarrow{u_d} = \vec{n} = (13\,,-5\,,3)$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = 13t - 11 \\ y = -5t + 9 \\ z = +3t - 4 \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$$

نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي

(ABC) بالحل المشترك:

$$13(13t - 11) - 5(-5t + 9) + 3(3t - 4) - 3 = 0$$
$$\Rightarrow 203t - 203 = 0 \Rightarrow t = 1$$

وبالتالي:

$$\begin{cases} x = 13(1) - 11 \\ y = -5(1) + 9 \\ z = 3(1) - 4 \end{cases} \Rightarrow D'(2\,,4\,,-1)$$

45) الجواب:

$$E \in yy' \Rightarrow E(0\,,y\,,0)$$
$$B(2\,,1\,,0) \ , \ A(2\,,0\,,2)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AE}(-2\,,y\,,-2)$$
$$\overrightarrow{BE}(-2\,,y-1\,,0)$$
$$\left|\left|\overrightarrow{AE}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{BE}\right|\right|$$
$$\Rightarrow \sqrt{4 + y^2 + 4} = \sqrt{4 + (y-1)^2 + 0}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$8 + y^2 = 4 + (y-1)^2$$
$$\Rightarrow 8 + y^2 = 4 + y^2 - 2y + 1$$
$$\Rightarrow 3 = -2y \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow E\left(0\,,-\frac{3}{2}\,,0\right)$$

46) الجواب:

$$A(2\,,0\,,0) \ , \ B(0\,,3\,,0) \ , \ C(0\,,0\,,1)$$
$$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$$

نضرب الطرفين بـ 6 :

$$\Rightarrow (ABC): \ 3x + 2y + 6z = 6$$

$$dist(O\,,P) = \frac{|3(0) + 2(0) + 6(0) - 6|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{|-6|}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$$

47) الجواب:

المستقيم يوازي المستوي أي أنّ:

$$\vec{u} \perp \vec{n}$$

وبالتالي:

$$\vec{n}.\vec{u} = 0$$
$$\Rightarrow (2\,,-2\,,a)(1\,,-1\,,2) = 0$$
$$\Rightarrow 2(1) + (-2)(-1) + a(2) = 0$$
$$\Rightarrow 2 + 2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

48) الجواب:

$$dist(M\,,P) = \frac{|2(3) + 3 + 2(3) - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$dist(M\,,Q) = \frac{|2(3) - 2(3) - 3 + 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

$$dist(M\,,d) = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

49) الجواب:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(2\,\overrightarrow{BI}\right)$$

حيثُ I منتصف $[AC]$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BI}$$

ومنه M تنطبق على منتصف $[AC]$

50) الجواب:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{6} \ , \ y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

51) الجواب:

I مركز ثقل BCD وبالتالي I هو م.أ.م للنقاط:

$$(D\,,2) \ , \ (C\,,2) \ , \ (B\,,2) \Rightarrow (I\,,6)$$

K هي نظيرة A بالنسبة لـ I أي أن:

$$\overrightarrow{IK} = \frac{-1}{1}\overrightarrow{IA}$$

وبالتالي K م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-1) \ , \ (I\,,2)$$

ومنه K م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-3) \ , \ (I\,,6)$$

ومنه K م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-3) \ , \ (B\,,2) \ , \ (C\,,2) \ , \ (D\,,2)$$

52) الجواب:

بما أنّ I مركز ثقل المثلث ABC فإنّ I م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,1) \ , \ (B\,,1) \ , \ (C\,,1) \Rightarrow (I\,,3)$$

H م.أ.م للنقاط:

$$(I\,,3) \ , \ (D\,,3)$$

وبالتالي H منتصف DI .

53) الجواب:

$$P: x + 2y = 4 \quad \ldots(1)$$
$$Q: x - y = 1 \quad \ldots(2)$$

من (1) نجد:

$$x = -2y + 4$$

ومن (2) نجد:

$$x = y + 1$$

وبالتالي:

$$-2y + 4 = y + 1 \Rightarrow -3y = -3 \Rightarrow y = 1$$
$$\Rightarrow x = 1 + 1 = 2 \Rightarrow x = 2$$

نفرض أن $z = t$:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \ ; \ t \in \mathbb{R}$$

54) الجواب:

$$P_1: \ x + 2y + z - 5 = 0 \quad \ldots(1)$$
$$P_2: \ 2x - y - 1 = 0 \quad \ldots(2)$$
$$P_3: \ 3x + y - 4 = 0 \quad \ldots(3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_{P_1}}(1,2,1) \\ \overrightarrow{n_{P_2}}(2,-1,0) \\ \overrightarrow{n_{P_3}}(2,1,0) \end{cases}$$

نوجد الفصل المشترك لـ P_1 و P_3 :

من (2) نجد:

$$y = 2x - 1$$

ومن (3) نجد:

$$y = -3x + 4$$

وبالتالي:

$$2x-1=-3x+4 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$$
$$\Rightarrow y=2(1)-1=1 \Rightarrow y=1$$

نفرض $z=t$ ومنه:

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

نعوّض في معادلة المستوي P_1 فنجد:

$$1+2(1)+t-5=0 \Rightarrow t=2$$

وبالتالي المستويات P_1 و P_2 و P_3 متقاطعة بنقطة واحدة وهي:

$$(1\,,1\,,2)$$

55) الجواب: كرة

56) الجواب:

$$I(2,0,1)\ ,\ J(0,-2,3) \Rightarrow \overrightarrow{IJ}(-2\,,-2\,,2)$$
$$P:\ x+y-z+2=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}(1\,,1\,,-1)$$

بما أن P هي معادلة المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$ فإنّ $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{n_P}$ مرتبطان خطيّاً:

$$\frac{-2}{1}=\frac{-2}{1}=\frac{2}{-1}=-2$$
$$\Rightarrow J(0\,,-2\,,3) \text{ محققة}$$

57) الجواب:

G_α م.أ.م للنقاط:

$$(A,\alpha)\ ,\ (B,1+\alpha^2)\ ,\ (C,-\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{G_\alpha A}+(1+\alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B}-\alpha\overrightarrow{G_\alpha C}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow -\alpha\left(\overrightarrow{AG_\alpha}+\overrightarrow{G_\alpha C}\right)+(1+\alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow -\alpha\overrightarrow{AC}=-(1+\alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{G_\alpha B}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$$

58) الجواب:

$$dist(O,P)=\frac{|2(1)+(0)-2(1)-12|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{12}{\sqrt{9}}=4$$

$$R=\sqrt{r^2+dist^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=5$$
$$\Rightarrow R=5$$

59) الجواب:

$$\left.\begin{matrix} x=x \\ y=y \\ z=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=t+1 \\ 1=\lambda-1 \Rightarrow \lambda=2 \\ t=1 \end{cases}$$

نعوّض في المعادلة الأولى:

$$2=1+1 \text{ محققة}$$

نعوّض λ في L:

$$\left.\begin{matrix} x=2 \\ \Rightarrow y=2-1=1 \\ z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2,1,1)$$

60) الجواب:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=0$$

وبالتالي M م.أ.م للنقاط:

$$(B,-1)\ ,\ (A,1)\ ,\ (C,1)$$

61) الجواب:

مستوٍ مار من $(1,2,1)$ وعمودي على:

$$d: \begin{cases} x=0 \\ y=-t \\ z=-t+1 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{u_d}=(0\,,-1\,,-1)\ \ ,\ \ A(1,2,1)$$
$$\Rightarrow 0(x-1)-1(y-2)-1(z-1)=0$$
$$\Rightarrow -y-z+3=0$$
$$\Rightarrow z+y-3=0$$

62) الجواب:

$$x+y+z=1 \quad \dots L_1$$
$$-2y+z=1 \quad \dots L_2$$
$$-4y+14z=-2 \quad \dots L_3$$

نجري التحويل السطري:

$$-2L_2+L_3 \longrightarrow L_3'$$

فنحصل على:

$$x+y+z=1 \quad \dots L_1$$
$$-2y+z=1 \quad \dots L_2$$
$$12z=-4 \quad \dots L_3'$$

من L_3' نجد:

$$z=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3} \Rightarrow z=-\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow -2y-\frac{1}{3}=1 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow x=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+1=2 \Rightarrow x=2$$

وبالتالي المستويات الثلاث تشترك بنقطة واحدة هي:

$$\left(2\,,-\frac{2}{3}\,,-\frac{1}{3}\right)$$

63) الجواب:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \Rightarrow x=y-1 \\ x+y-1=0 \Rightarrow x=-y+1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y-1=-y+1 \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1$$
$$\Rightarrow x=1-1=0 \Rightarrow x=0$$

نفرض $z=t$ ومنه:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

64) الجواب:

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-3\vec{v}) =$$
$$\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2 - 3\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v} - 3\left|\left|\vec{v}\right|\right|^2 =$$
$$(5)^2 - 3(-5) - 5 - 3(3)^2 =$$
$$25 + 15 - 5 - 27 =$$
$$40 - 32 = 8$$

65) الجواب:

دوران الضلع $[BF]$ من المستطيل $BFHD$ حول

(DH) ينتج مخروط محوره:

$$(DH) \longrightarrow (OZ)$$

ومركزه:

$$D(0\,,0\,,0)$$

ونصف قطره $[DB]$:

$$B(2\,,2\,,0)$$

$$DB = \sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(0-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \quad ; \quad 0 \le z \le 2$$
$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 8 \quad ; \quad 0 \le z \le 2$$

66) الجواب:

الاختيار C خاطئ.

67) الجواب:

$$A(1,0)\,,\ B(4,0)\,,\ C(5,3)\,,\ D(3,2)\,,\ E(0,1)$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}(3,0)\ ,\ \overrightarrow{AC}(4,3)$$
$$\overrightarrow{AD}(2,2)\ ,\ \overrightarrow{AE}(-1,1)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12+0 = 12 \\ b = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 6+0 = 6 \\ c = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = -3+0 = -3 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow a+b+c = 12+6-3 = 15$$

بنوك الشعاعية

1 – 1) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$

M تنطبق على F.

2) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$

M تنطبق على G.

3) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$
$= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$

M تنطبق على E.

4) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$
$= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AZ}$

M خارج متوازي الأضلاع تقع في $EAGZ$.

5) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}\right)$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$
$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

2 – 1) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$
$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AJ}$

N تقع على J.

2) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$
$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HJ}$
$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$

N تقع على J.

3) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$

N تقع على I.

---

2 – 1) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$
$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AP}$

حيثُ P مركز الرباعي $BFGC$.

2) $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AQ}$

حيثُ Q مركز الرباعي $EFGH$.

3) $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA}\right) + \overrightarrow{BA}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BA}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CR}$

حيثُ R مركز الرباعي $DHEA$.

---

3 – $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$
$= \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$

توازي.

$$2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$$

$$2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = 1 \ , \ \alpha = -1$$

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$4\overrightarrow{AM} = 8\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$8\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$8(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + 3(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) - 4\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$8\overrightarrow{AM} + 8\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$8\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 7\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$-7\overrightarrow{MA} + 8\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = 8 \ , \ \alpha = -7 \ , \ \gamma = 3$$

تأمّل الشكل:

1) $\dfrac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow 4\overrightarrow{AG} - 3(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow 4\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow -\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = 3 \ , \ \alpha = 1$$

2) $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{2}{5}$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) - 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow -3\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = 2 \ , \ \alpha = 3$$

3) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$: نلاحظ

$$\Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = -1 \ , \ \alpha = 1 \ , \ \gamma = 1$$

4) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI}$: نلاحظ

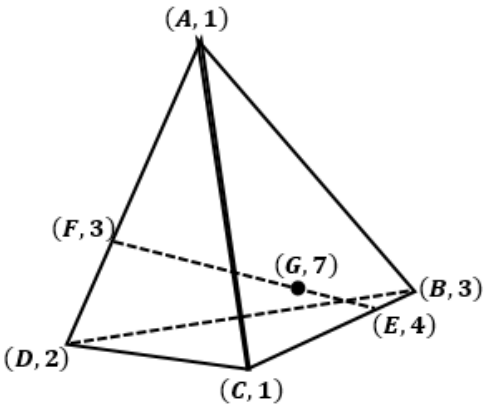
$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF} = 2\overrightarrow{AI}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} + 0\overrightarrow{IA} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \beta = 1 \ , \ \alpha = 0 \ , \ \gamma = 1$$

ثقل مركز الأبعاد $(A,1),(B,3)$ يساوي 4 .

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,0),(B,3)$ يقع على B .

مركز الأبعاد $(A,10),(B,10)$ يقع في منتصف $[AB]$.

$\boxed{\frac{21}{43}}$:



$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \ , \quad \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

من العلاقات:

$(E,4)$ مركز لـ $(C,1)$, $(B,3)$.

$(F,3)$ مركز لـ $(D,2)$, $(A,1)$.

$(G,7)$ مركز لـ $(F,3)$, $(E,4)$.

$$\overrightarrow{EG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$

وبالتالي:

$(G,7)$ مركز لـ $(D,2),(C,1),(B,3),(A,1)$

تدرّب (1) صفحة 31:

من الشكل:

$(K,3)$ م.أ.م لـ $(D,1),(A,2)$.

$(I,2)$ م.أ.م لـ $(C,1),(B,1)$.

$(G,5)$ م.أ.م لـ $(I,3),(K,2)$.

لكن نلاحظ تناقض لذلك يجب تعديل أثقال النقاط I و K حيثُ:

نضرب I بـ $\frac{2}{3}$ ونضرب K بـ $\frac{2}{3}$ لنصل إلى:

$(K,2)$ و $(I,3)$

وهذا ما يتفّق مع G .

م.أ.م لـ$(I,3)$ للنقاط:

$\left(C,\frac{3}{2}\right)$, $\left(B,\frac{3}{2}\right)$

م.أ.م للنقاط: $(K,2)$

$\left(D,\frac{3}{2}\right)$,$\left(A,\frac{4}{3}\right)$

ومنه:

$a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=\frac{3}{2}$, $d=\frac{3}{2}$

تمرينات ومسائل

المسألة الأولى صفحة 35 :

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

2) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{BD}$

$+$

$2\,\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\,\overrightarrow{OI}$ ... (1)

$l_1=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}=2\,\overrightarrow{OI}=l_2$

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\,\overrightarrow{OI}$ ... (2)

$l_1=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JD}=2\,\overrightarrow{OJ}=l_2$

بجمع (2) و(1) نجد:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

4) $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ ... (1)

$l_1=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ .... (2)

$l_1=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

من (1) و(2) نجد:

$\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{LJ}$

وبالتالي: $IKJL$ متوازي أضلاع.

المسألة الثانية صفحة 35 :

1) $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{DJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

3) $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$

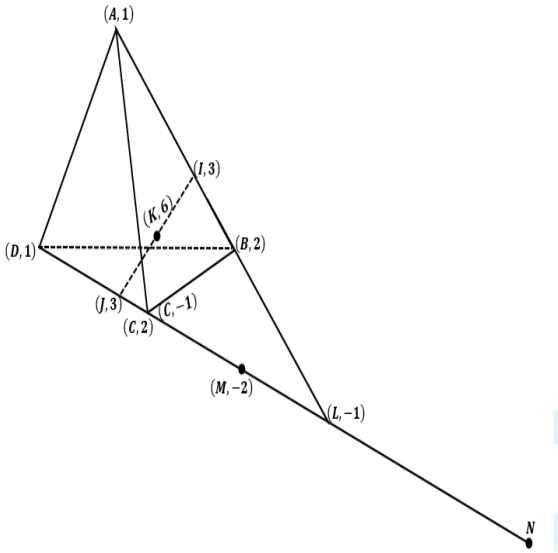
K مركز لـ $(J,3)$, $(I,3)$.

4) $\overrightarrow{AL}=\frac{-2}{-1}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$

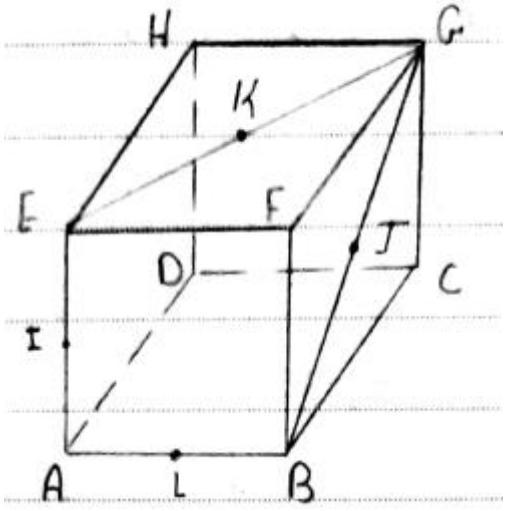
5) $\overrightarrow{LM}=\frac{-1}{-2}\overrightarrow{LC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{LC}$

6) $\overrightarrow{DN}=\frac{-2}{-1}\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DM}$

N مركز لـ $(M,-2)$, $(D,1)$.



$\frac{25}{44}$



M مركز لـ $(E,1),(G,1),(B,1),(A,1)$

1) $(J,2)$ مركز لـ $(B,1),(G,1)$

$(I,2)$ مركز لـ $(A,1),(E,1)$

$(M,4)$ مركز لـ $(J,2),(I,2)$

وبالتالي النقاط M ، I ، J تقع على استقامة واحدة.

2) $(L,2)$ مركز لـ $(B,1),(A,1)$

$(K,2)$ مركز لـ $(G,1),(E,1)$

$(M,4)$ مركز لـ $(L,2),(K,2)$

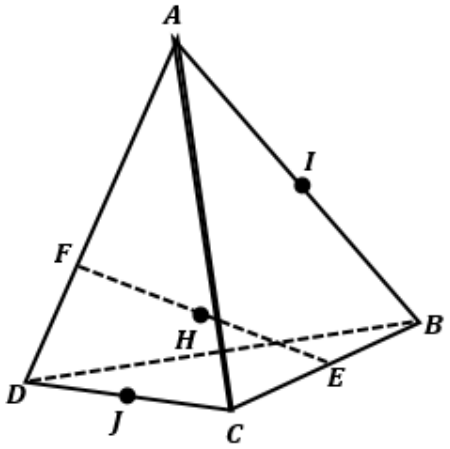
وبالتالي النقاط M ، K ، L تقع على استقامة واحدة.

3) $[IJ]$ و $[KL]$ متناصفان في M

ومنه J ، I ، L ، K ، M تقع في مستوٍ واحد.

وبالتالي $IJLK$ متوازي أضلاع.

$\boxed{\frac{1}{94}}$



1) $\overrightarrow{AE} = \alpha\,\overrightarrow{AD}$

وبالتالي: $(E,1)$ مركز لـ $(D,\alpha),(A,1-\alpha)$

$\overrightarrow{BF} = \alpha\,\overrightarrow{BC}$

وبالتالي: $(F,1)$ مركز لـ $(C,\alpha),(B,1-\alpha)$.

2) مما سبق نستنتج أنّ: $(H,2)$ مركز لـ:

$(C,1),(D,1),(A,1-\alpha),(B,1-\alpha)$

3) $(I,2-2\alpha)$ مركز لـ:

$(A,1-\alpha),(B,1-\alpha)$

$(J,2\alpha)$ مركز لـ:

$(C,\alpha),(D,\alpha)$

وبالتالي $(H,2)$ مركز لـ:

$(J,2\alpha)$ ، $(I,2-2\alpha)$

ومنه فإنّ H ، J ، I تقع على استقامة واحدة.

$\boxed{\frac{2}{94}}$

1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$(M,3)$ مركز لـ $(B,1),(C,1),(D,1)$

ومنه M ، C ، D ، B تقع في مستوي واحد.

2) $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

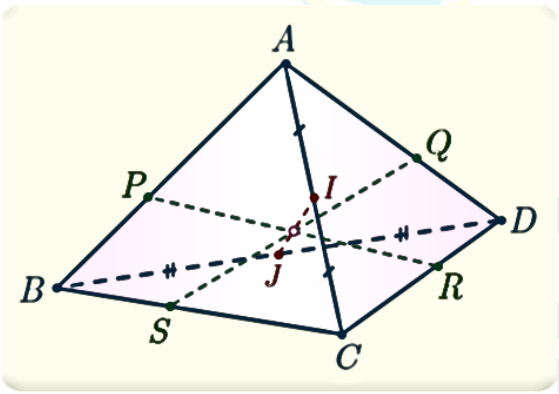
$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

ومنه $(M,4)$ مركز لـ:

$(B,1),(D,2),(C,1)$

$\boxed{\frac{6}{95}}$



بحث أول:

$\overrightarrow{AQ} = \alpha\,\overrightarrow{AD}$

وبالتالي $(Q,1)$ مركز لـ:

$(A,1-\alpha)$ ، (D,α)

$\overrightarrow{AP} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$

وبالتالي $(P,1)$ مركز لـ:

$(A,1-\alpha)$ ، (B,α)

$\overrightarrow{CS} = \alpha\,\overrightarrow{CB}$

وبالتالي $(S,1)$ مركز لـ:

$(C,1-\alpha)$ ، (B,α)

$\overrightarrow{CR} = \alpha\,\overrightarrow{CD}$

وبالتالي $(R,1)$ مركز لـ:

$(C,1-\alpha)$ ، (D,α)

$(I, 2-2\alpha)$ مركز لـ :

$(C, 1-\alpha), (A, 1-\alpha)$ "منتصف"

$(J, 2\alpha)$ مركز لـ :

$(D, \alpha), (B, \alpha)$ "منتصف"

$(G, 2)$ مركز لـ :

$(D, \alpha), (C, 1-\alpha), (B, \alpha), (A, 1-\alpha)$

لأنّ:

$(G, 2)$ مركز لـ $(P, 1)$ ، $(R, 1)$

$(G, 2)$ مركز لـ $(Q, 1)$ ، $(S, 1)$

$(G, 2)$ مركز لـ $(J, 2\alpha)$ ، $(I, 2-2\alpha)$

مما سبق نستنتج أنّ:

(QS) ، (PR) ، (IJ)

تلتقي في نقطة واحدة.

---

1) M مركز لـ $(B, 1)$ ، $(A, -2)$ $\boxed{\frac{1}{80}}$

$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{-1}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow t = -1$

2) M مركز لـ $(B, 3)$ ، $(A, 2)$

$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow t = \frac{3}{5}$

---

1) M مركز لـ $(A, 5)$ ، $(B, 2)$ $\boxed{\frac{2}{80}}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$

2) $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

M مركز أبعاد لـ $(A, 3)$ ، $(B, -1)$

3) $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$

طريقة 1 :

M مركز أبعاد لـ $(A, 4)$ ، $(B, -3)$

طريقة ثانية:

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

M مركز أبعاد لـ $(A, 4)$ ، $(B, -3)$

$\boxed{\frac{3}{81}}$

C مركز لـ $(A, 2)$ ، $(B, -5)$

$\overrightarrow{AC} = \frac{-5}{-3}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$

A مركز لـ $(C, -3)$ ، $(B, 5)$

$\overrightarrow{BA} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$

B مركز لـ $(C, 3)$ ، $(A, 2)$

$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

C مركز لـ $(A, 6)$ ، $(B, -4)$

$\overrightarrow{AC} = \frac{-4}{2}\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$

A مركز لـ $(C, 2)$ ، $(B, 4)$

$\overrightarrow{BA} = \frac{2}{6}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

B مركز لـ $(A, -6)$ ، $(C, 2)$

$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{-4}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

---

1) M مركز لـ $(C, 1), (B, 1), (A, -1)$ $\boxed{\frac{4}{81}}$

$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1}\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2) M مركز لـ $(C, 2), (B, 1), (A, 3)$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$

---

1) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ $\boxed{\frac{4}{81}}$

M مركز أبعاد لـ:

$(A, 0), (B, 2), (C, -1)$

2) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

M مركز أبعاد لـ:

$(A,1)\,,(B,1)\,,(C,-1)$

3) $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

M مركز أبعاد لـ:

$(A,3)\,,(B,2)\,,(C,-4)$

4) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **1ط**

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

M مركز أبعاد لـ:

$(A,1)\,,(B,2)\,,(C,1)$

2ط:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

6/81 $(B',2)$ مركز لـ $(C,1)\,,\ (A,1)$

$(I,4)$ مركز لـ $(B,2)\,,\ (B',2)$

وبالتالي:

$(I,4)$ مركز لـ $(B,2)\,,(A,1)\,,(C,1)$

$\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$1\,\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Longrightarrow \lambda = 2$

7/81 $(I,2)$ مركز لـ $(C,1)\,,\ (B,1)$

$(J,4)$ مركز لـ $(D,2)\,,\ (I,2)$

$(K,8)$ مركز لـ $(A,4)\,,\ (J,4)$

وبالتالي:

$(K,8)$ مركز لـ: $(B,1)\,,(A,4)\,,(C,1),(D,2)$

8/81

1) G مركز لـ:

$(D,3)\,,\ (C,1)\,,\ (B,1),(A,1)$

$(K,3)$ مركز أبعاد لـ:

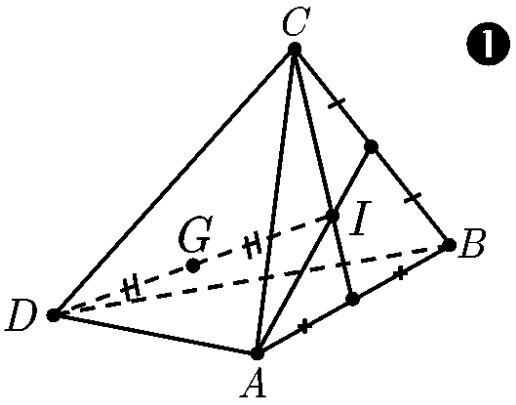
$(C,1)\ ,(B,1)\,,(A,1)$

وبالتالي:

$(G,6)$ مركز لـ:

$(D,3)\,,(K,3)$

G منتصف $[DK]$



2) G مركز لـ:

$(D,-2)\,,(C,-1)\,,(B,2)\,,(A,-1)$

$(I,-2)$ مركز لـ:

$(C,-1)\,,(A,-1)$

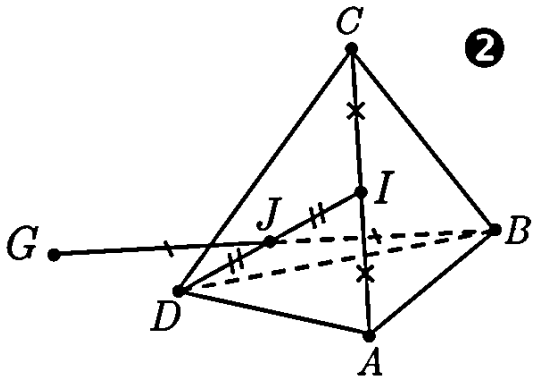
$(J,-4)$ مركز لـ:

$(D,-2)\,,(I,-2)$

$(G,-2)$ مركز لـ:

$(B,2)\,,(J,-4)$

$\overrightarrow{JG} = -1\,\overrightarrow{JB}$



3) G مركز لـ:

$(D,6)\,,(C,3)\,,(B,2)\,,(A,1)$

$(I,3)$ مركز لـ:

$(A,1)\,,(B,2)$

وبالتالي:

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$(J,6)$ مركز لـ: $(I,3)$, $(C,3)$ "منتصف"

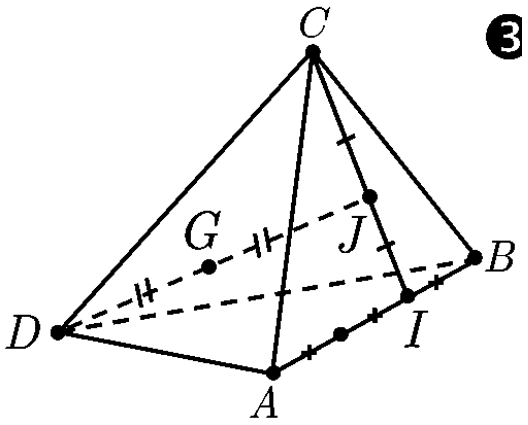
$(G,12)$ مركز لـ:

$(D,6)$, $(J,6)$

وبالتالي G مركز أبعاد لـ:

$(D,6)$, $(C,3)$, $(B,2)$, $(A,1)$

3



منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد