معادلات المستوي		
علم ناظم ونقطة	**علم شعاعي توجيه**	**علم ثلاثة نقاط**
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ حيث: ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$	1- نثبت أن $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين 2- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم 3- نشكل المعادلتين: $\vec{n}.\vec{u}=0$ $\vec{n}.\vec{v}=0$ 4- نحل المعادلتين حلاً مشتركاً ثم نعطي أحد المجاهيل قيمة اختيارية غير صفرية نعوض في القانون	1- نشكل شعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ نعيد خطوات الحالة السابقة
علم مستوي موازي	**علم مستويين معامدين**	**علم مستوي معامد ونقطتين**
1- بما أنهما متوازيان فلهما نفس الناظم نعوض في القانون	1- نحدد النواظم $\vec{n_1},\vec{n_2}$ 2- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي المطلوب 3- نشكل معادلتين : $\vec{n}.\vec{n_1}=0$ $\vec{n}.\vec{n_2}=0$ نكمل كما في الحالات السابقة	1- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ 2- نشكل شعاعاً $\overrightarrow{AB}$ و نحدد ناظم المستوي المعلوم $\vec{n'}$ 3- نشكل معادلتين : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ $\vec{n}.\vec{n'}=0$ نكمل كما في الحالة السابقة
معادلة المستوي المحوري	**مستوي محدد بتقاطع مستقيمين**	**مسامح بالباقي**
1- نحدد النقطة بأنها منتصف القطعة [AB] 2- نحدد الناظم بأنه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ نعوض في القانون	1- نعتبر نقطة تقاطع المستقيمين هي النقطة المطلوبة نعتبر شعاعي توجيه المستقيم هما شعاعي توجيه المستوي	

التمثيل الوسيطي لمستقيم

علم نقطة وشعاع توجيه	علم نقطتين	علم مستوي معامد
$d:\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad t \in R$	1- نعتبر شعاع التوجيه $\overrightarrow{AB}$ 2- نختار النقطة A أو B 3- نعوض في القانون	نعتبر ناظم المستوي هو شعاع التوجيه و نعوض في القانون

الفصل المشترك

1- ندرس ارتباط النواظم
2- نحل المعادلتين حلاً مشتركاً
3- نفرض أحد المجاهيل قيمة وسيطية t

الكرة

علم مركز ونصف قطر	علم قطر	علم مركز ونقطة تمر منها
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ حيث: المركز $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ نصف القطر r	1- نوجد المركز وهو منتصف القطر. 2- نوجد نصف القطر. 3- نعوض في القانون السابق	1- نوجد نصف القطر وهو عبارة عن المسافة بين المركز والنقطة التي تمر منها الكرة. 2- نعوض في القانون

كرة تمس مستوي

1- المركز معلوم
2- نصف القطر هو $dis(\Omega, P)$ بعد مركز الكرة عن المستوي.
3- نعوض في القانون.

الأسطوانة

أسطوانة محورها يوازي oz	أسطوانة محورها oy	أسطوانة محورها ox
بفرض إحداثيات مركز القاعدة $A(x_1, y_1, z_1)$ و أن ارتفاع هذه الأسطوانة h و نصف قطر قاعدتها r فإن هذه الأسطوانة تُعرّف بالشكل : $\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2 \\ z_1 \le z \le z_1 + h \end{cases}$ وبوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$	$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2 \\ y_1 \le y \le y_1 + h \end{cases}$ و بوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ 0 \le y \le h \end{cases}$	$\begin{cases} (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2 \\ x_1 \le x \le x_1 + h \end{cases}$ و بوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases} y^2 + z^2 = r^2 \\ 0 \le x \le h \end{cases}$

المخروط		
محوره يوازي oz	محوره يوازي oy	محوره يوازي ox
$\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(z \\ z_1\le z\le z_1+h\end{cases}$	$\begin{cases}(x-x_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(y \\ y_1\le y\le y_1+h\end{cases}$	$\begin{cases}(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(x \\ x_1\le x\le x_1+h\end{cases}$
و إذا كان المركز هو المبدأ : $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{r^2}{h^2}z^2 \\ 0\le z\le h\end{cases}$	و إذا كان المركز هو المبدأ: $\begin{cases}x^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}y^2 \\ 0\le y\le h\end{cases}$	و إذا كان المركز هو المبدأ: $\begin{cases}y^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}x^2 \\ 0\le x\le h\end{cases}$

التمرين الأول: في كلٍ من الحالات الآتية: اكتب معادلة المستوي P :

1- المستوي P يمر من $A(2,3,1)$ و ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ حيث $B(3,2,0)$

2- المستوي $P=(ABC)$ حيث $A(3,2,2), B(0,1,0), C(1,1,1)$

3- المستوي P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث $A(1,1,1), B(3,2,0)$

4- المستوي P المار من النقطتين $A(1,1,1), B(3,-1,1)$ و معامد للمستوي : $x+y+z=1$

5- المستوي P معامد للمستويين :
$Q: 2x+y-z-1=0$
$R: x+y-3z=0$

6- المستوي P مار بالنقطة $A(1,1,1)$ ويوازي المستوي:
$Q: 2x+3y-z=1$

7- المستوي P مار من المبدأ ويعامد المستقيم:
$$d:\begin{cases}x=t+1\\ y=0 \\ z=-t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

التمرين الثاني: اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d في الحالات الآتية :

1- المستقيم d يمر من النقطة $A(-1,1,0)$ و يقبل الشعاع $\vec{u}(2,3,-1)$ شعاع توجيه له

2- المستقيم $d=(AB)$ حيث : $A(1,1,2)\ ,B(3,0,1)$

3- المستقيم d يمر من المبدأ و يعامد المستوي $x-y+z=3$

4- المستقيم d المعطى بتقاطع المستويين :
$P: 2x-y+z-2=0$
$Q: x+y+2z-1=0$

التمرين الثالث: اكتب معادلة الكرة S في الحالات الآتية:

1- مركزها $A(1,1,3)$ و تمر من $B(0,2,2)$

2- تقبل $[AB]$ قطراً لها حيث : $A(1,2,3)\ ,B(5,2,1)$

3- مركزها $A(1,2,-1)$ و تمس المستوي $P: x-z=1$

التمرين الرابع: اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها يوازي (oz) ومركز قاعدتها $A(1,1,3)$ و ارتفاعها 5 ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{2}$.
التمرين الخامس: اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها يوازي (oy) ومركز قاعدتها السفلى $A(2,3,1)$ ومركز قاعدتها العليا $B(2,8,1)$, ونصف قطرها 3.
التمرين السادس: اكتب معادلة المخروط الذي محوره يوازي (ox) ومركز قاعدته المبدا ونصف قطرها 1 وارتفاعه 3.
التمرين السابع: ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة: $x^2+y^2-z^2=0\ \ ;0\le z\le 3$

الجلسة رقم 3: اذهب إلى بنوك الاتمتة في النهاية وتابع معي 😉

الجلسة 4 + 5

الارتباط الخطي لثلاث اشعة:

نقول عن الاشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ إنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان α,β بحيث:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

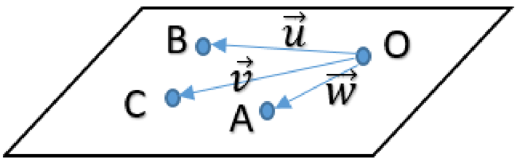
و $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

معنى الارتباط الخطي لثلاث أشعة (مطالعة):

أنه يمكن استبدال هذه الاشعة بثلاث أشعة أخرى تشترك في نفس البداية وتقع في مستوٍ واحد. ((لايعني توازي بالضرورة))

أي يوجد نقطة o تجعل الاشعة $\overrightarrow{oc},\overrightarrow{oB},\overrightarrow{oA}$ تقع في مستوٍ واحد حيث

$$\vec{w}=\overrightarrow{oA},\ \vec{u}=\overrightarrow{oB}\ ,\vec{v}=\overrightarrow{oC}$$



فوئد الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

1- إثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد.

2- إيجاد معادلة مستوٍ يمر من ثلاث نقاط.

3- إثبات انتماء M الى مستوٍ مار بثلاث نقاط.

انتبه: أي جملة معادلات مكونة من ثلاث معادلات ومجهولين فقط، فإننا نحل معادلتين منهما حلاً مشتركاً، ثم نعوض في الثالثة للتحقق ونميز حالتين:

1) إذا كانت المعادلة الثالثة محققة ← للجملة حل مشترك هو الحل الذي أوجدناه من اول معادلتين.

2) اذا كانت المعادلة الثالثة غير محققة فتكون الجملة مستحيلة الحل.

التمرين (1)

نتأمل في معلم $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الاتية:

$A(0,1,-1)\ ,\ B(1,0,0)\ ,C(-1,2,1)\ ,\ D(0,1,2)$

أثبت انتماء النقاط A,B,C,D الى مستوٍ واحد P

الحل

نشكل ثلاثة أشعة لها نفس البداية:

$$\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1,1,2)$$

$$\overrightarrow{AD}=(0,0,3)$$

نثبت ان الاشعة السابقة مرتبطة خطياً أي

لنثبت أولاً : أن $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين (و هذا واضح لعدم تناسب مركباتهما حيث $\frac{3}{2}\neq\frac{0}{1}$) ثم لنثبت وجود عددين α,β يحققان ان:

$$\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\3\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\2\alpha+3\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}1&=-\alpha &(1)\\-1&=\alpha &(2)\\1&=2\alpha+3\beta &(3)\end{aligned}$$

من 1 نجد أن $\Rightarrow \alpha=-1$

نعوض في 3 :

$$1=-2+3\beta$$

$$3=3\beta\Rightarrow\beta=1$$

نعوض في 2 للتحقق:

$-1=-1$ محققة

التمرين (2) دورة 2021 الأولى

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ النقاط التالية:

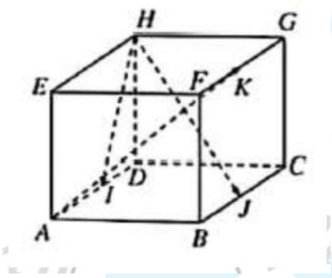
$A(2,0,1)$, $B(1,-2,1)$, $C(5,0,5)$, $D(6,2,5)$ ،

المطلوب:

1) أثبت أن $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.
2) عين العددين الحقيقيين α ، β بحيث: $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ، واستنتج أن النقاط A ، B ، C ، D تقع في مستوٍ واحد .

التمرين (3)

في الشكل المجاور نتأمل مكعباً



$ABCDEFGH$ و طول حرفه 2 . و لتكن النقاط I و J و K منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$ بالترتيب . نختار معلماً متجانساً $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. و المطلوب:

1- جد إحداثيات الرؤوس و I,J,K
2- جد مركبات كلٍ من الأشعة $\overrightarrow{HI},\overrightarrow{HJ},\overrightarrow{AK}$
3- أثبت أن المستوي (HIJ) * يوازي المستقيم (AK)

التمرين (4)

تأمل في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,5,0),$

$D(-3,-5,6), E(3,1,2)$

أثبت انتماء النقاط A,B,C,D إلى مستوٍ واحد P و تبيّن إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P

التمرين (5)

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط :

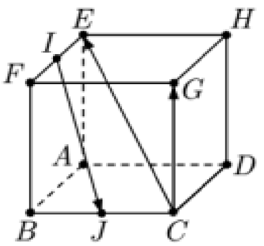
$A(3,2,1), B(1,2,0), C(3,1,-2)$

1- أثبت أن النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة

2- عند أي قيمة للوسيط λ تنتمي النقطة $M(\lambda,1,3)$ إلى المستوي (ABC)

3- ما العلاقة بين x, y لتقع النقاط $A,B,D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد .

التمرين (6)



في الشكل المجاور مكعب، $\boldsymbol{I}$ و $\boldsymbol{J}$ منتصفا $[\boldsymbol{EF}]$ و $[\boldsymbol{BC}]$ على الترتيب:

1- أثبت أن $\overrightarrow{IJ} = 2\left(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}\right)$

2- أثبت أن المستقيم (IJ) يوازي المستوي (CEG).

مركز الأبعاد المتناسبة

نقول إن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) و (B,β) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

حيث $\alpha + \beta \neq 0$

ويعمم الكلام السابق لأكثر من نقطتين أي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A.\alpha)$ و (B,β) و (C,γ) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

وحيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

بل أكثر من ذلك:

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)و (D,δ) إذا كان الشرط محقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

وتسمى العلاقة السابقة:

- **علاقة الوجود (العلاقة الأم)** لأنه عندما يكون $\alpha + \beta = 0$ عندئذ لا يوجد م أ م للنقاط (B,β) و (A,α).

- **نستخدم علاقة الوجود لتحديد أو تعيين α و β و γ ...**

1- نصلح شكل العلاقة لجعل الطرف الثاني $\vec{0}$ ونجعل البدايات كلها م أ م.

2- نقارن مع القانون

3- نختبر الشرط $(\alpha+\beta+\cdots\neq 0)$

ملاحظة: م أ م = مركز الأبعاد المتناسبة ولا تكتب بهاد الشكل بالامتحاااان^_^

نميز الحالات الآتية في م أ م:

الحالة الأولى: الانطلاق من علاقة شعاعية:

1) جد العددين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β) انطلاقاً من العلاقة:

$$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$$

الحل

$$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB})-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

ونلاحظ أنها من الشكل:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

إذن $\alpha=-2$ و $\beta=1$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$

2) عين الاعداد α و β و γ لتكون M م أ م للنقاط المحققة للعلاقة:

$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

الحل

سنضرب بالعدد 4:

$$4\overrightarrow{AM}=8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$
$$8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$8(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})+3(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})+4\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-8\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-7\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

وهذه العلاقة من الشكل:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

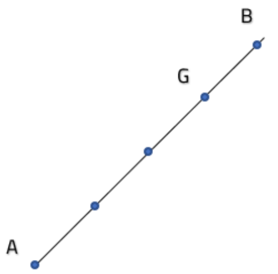
وبالتالي $\alpha=-7$ و $\beta=8$ و $\gamma=3$ حيث

$$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

الحالة الثانية: الانطلاق من شكل:

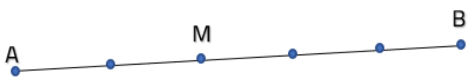
(مسائل 40 درجة):

1) عين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



$$\frac{AG}{AB}=\frac{3}{4}$$
$$4\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$$
$$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AG}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\alpha=1,\beta=3 \quad ;\alpha+\beta\neq 0$$

2) عين α و β ليكون M م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



لدينا طريقتان في الحل:

الطريقة الأولى:

من الشكل نلاحظ أن M م أ م للنقاط $(A,3)$ و $(B.2)$.

الطريقة الثانية:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}$$
$$5\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$$
$$-2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=-3\,,\beta=-2\,;\alpha+\beta\neq 0$$

3)

$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{3}$$
$$3\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$$
$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\alpha=3\,,\beta=-1\,;\alpha+\beta\neq 0$$

ملاحظات:

1- G م أ م لنقطتين من تثقيلتين مختلفتين بالإشارة فإن G تقع خارج القطعة وبالعكس

2- خاصة التجانس (هامة جداً)

G م أ م لـ (A,α) و (B,β):

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

نضرب بـ $k\neq 0$:

$$(k\alpha)\overrightarrow{GA}+(k\beta)\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

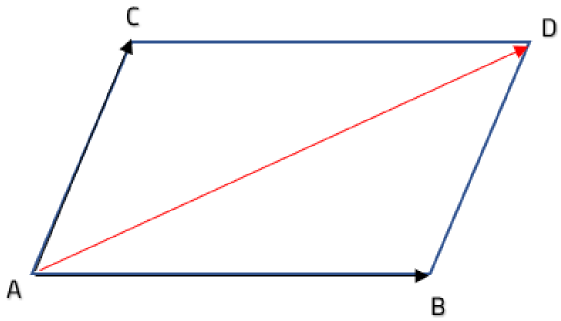
G م أ م لـ $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$.

(مسائل 100 درجة):

تذكرة:

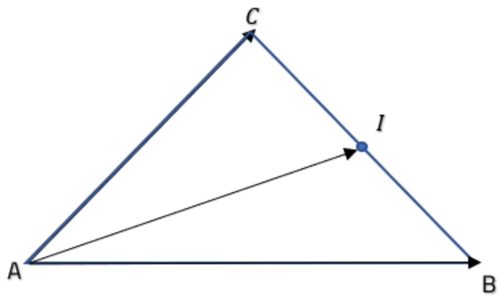
1) علاقة متوازي الأضلاع:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$



2) علاقة المتوسط في المثلث:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$$

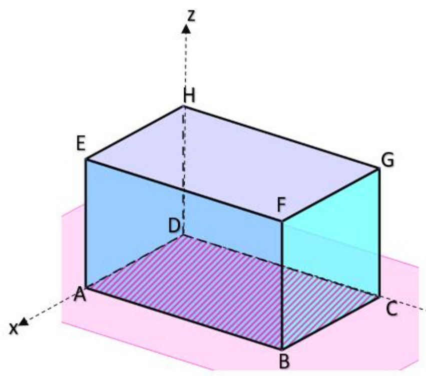


3) علاقة الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

أمثلة:

1) نتأمل في الشكل المجاور متوازي مستطيلات $ABCDEFGH$



عين α و β و γ ليكون D م أ م للنقاط

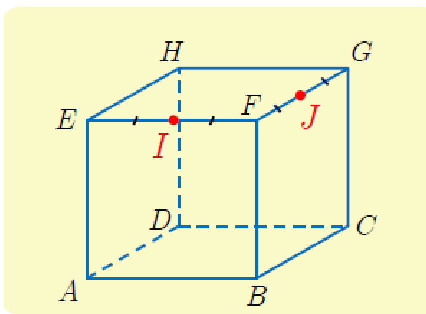
$(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$.

الحل

من الشكل نلاحظ أن:

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$\alpha=1\,,\beta=-1\,,\gamma=1\,;\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

2) نتأمل في الشكل المجاور مكعباً



عين α و β و γ ليكون I م أ م للنقاط

$(A,\alpha),(F,\beta),(E,\gamma)$.

الحل

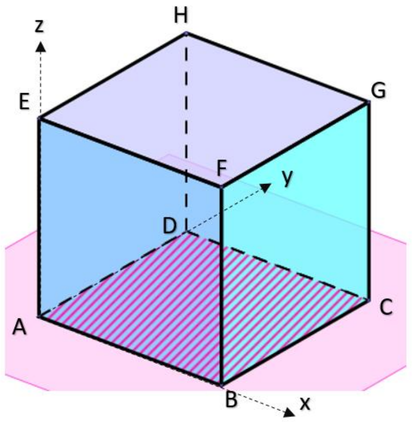
من علاقة المتوسط نجد:

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IE}-2\overrightarrow{AI}=\vec{0}$$
$$0\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{IE}=\vec{0}$$
$$\alpha=0\,,\beta=1\,,\gamma=1\,;\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

عند اختفاء أحد النقاط المطلوب تثقيلها

نكتبها في العلاقة بأمثال صفرية.

3) نتأمل جانباً مكعباً طول حرفه 3



نعرف معلماً متجانساً:

$$\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- جد معادلة المستوي (EBD).

$A(0,0,0)\quad E(0,0,3)$
$B(3,0,0)\quad F(3,0,3)$
$C(3,3,0)\quad G(3,3,3)$
$D(0,3,0)\quad H(0,3,3)$

نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{EB}(3,0,-3)$$
$$\overrightarrow{ED}(0,3,-3)$$
$$\frac{0}{3}\neq\frac{-3}{-3}$$

غير مرتبطين خطياً، نفرض الناظم

$\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EB}=0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{ED}=0$$
$$\begin{cases}3a-3C=0\\3B-3C=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a = 3c$$
$$a = c$$

نفرض $c = 1 \Leftarrow a = 1$, نعوض في أحد المعادلات فنجد:

$$3b - 3 = 0] \Rightarrow b = 1$$
$$\Rightarrow \vec{n}(1,1,1)$$

وتكون معادلة المستوى:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$1(x - 0) + 1(y - 0) + 1(z - 3) = 0$$
$$x + y + z - 3 = 0$$

2- برهن أن النقطة $K(5,2,-4)$ تنتمي للمستوي (EBD).

نعوض إحداثيات النقطة في المعادلة فنجد:

$$5 + 2 - 4 - 3 = 0 \Rightarrow 7 - 7 = 0$$
$$K \in (EBD)$$

3- عين α و β و γ ليكون K م أ م للنقاط $(E,\alpha),(B,\beta),(D,\gamma)$.

لدينا $K \in (EBD)$ فإن K و E و B و D في مستو واحد فإن الأشعة $\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KD}$:

$$\overrightarrow{KE} = a\overrightarrow{KB} + b\overrightarrow{KD}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2a - 5b = -5 \\ -2a + b = -2 \\ 4a + 4b = 7 \text{ للتحقق} \end{cases}$$

بطرح 1 و 2 نجد:

$$-6b = -3 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

نعوض في 2:

$$-2a + \frac{1}{2} = -2$$
$$-2a = -\frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

نعوض في 3 للتحقق:

$$5 + 2 = 7 \Rightarrow \text{محققة}$$

$$\overrightarrow{KE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KD}$$
$$\frac{5}{4}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KE} = \vec{0}$$

K م أ م للنقاط:

$$\left(B,\frac{5}{4}\right),\left(D,\frac{1}{2}\right),(E,-1)$$

حسب التجانس مضرب بـ 4:

$$(B,5),(D,2),E(-4)$$

حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

■ انشاء مركز الأبعاد المتناسبة:

أي تحديد موضع م أ م.

- G م أ م لنقطتين لهما نفس الثقل عندئذ G في منتصف القطعة المستقيمة.
- G م أ م لثلاثة نقاط لهما نفس الثقل عندئذ G مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات).

مثال₁: عين G م أ م للنقاط $(A,2)\ (B,2)(C,2)$.

الحل

G هي مركز ثقل المثلث ABC.

ارسم معنا :

- G م أ م لنقطتين أحدهما تثقيلتها معدومة عندئذ G تنطبق على الأخرى.

مثال2: عين G م أ م للنقاط $(A,0)$ $(B,3)$.

الحل

G تنطبق على B.

- G م أ م للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ عندها نستخدم علاقة الانشاء وهي:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

مثال3: عين G م أ م للنقطتين $(A,1),(B,3)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

ارسم معنا :

أو بطريقة أخرى:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$

ارسم معنا :

مثال4: عين M م أ م للنقاط $(A,5),(B,-2)$:

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

ارسم معنا :

مثال5: عين M م أ م للنقاط $(A,10),(B,10)$:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{10}{20}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

الرسم:

نلاحظ أن النتيجة تطابق نتيجة الحالة الأولى.

الخاصة التجميعية:

إذا كان G م أ م للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$:

- نفرض I م أ م لـ A و B ويكون:

1- موضع I: حسب ما تعلمنا سابقاً

2- ثقل I: هو $\alpha+\beta$

- حسب الخاصة التجميعية G م أ م لـ $(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ).

مثال1: جد G م أ م للنقاط $(A,1),(B,2),(C,1),(D,3)$:

ارسم معنا :

نفرض I م أ م للنقاط $(A,1),(C,1)$ عندئذ I منتصف $[AC]$ وأن $(I,2)$.

نفرض J م أ م للنقاط $(B,2),(D,3)$ عندئذ:

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BD}$$

وأن $(J,5)$, وبالتالي حسب الخاصة التجميعية فإن G م أ م لـ $(I,2),(J,5)$:

$$\overrightarrow{IG}=\frac{5}{7}\overrightarrow{IJ}$$

مثال2: عين G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.

ارسم معنا :

الحل

المطلوب هنا هو إيجاد مركز الابعاد المتناسبة للنقاط:
$(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

- نفرض I م أ م للنقطتان A و B عندها I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ وبالتالي $(I,2)$.
- نفرض أيضاً J م أ م للنقاط $(C,1),(D,1)$ وعندها J منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$ وبالتالي $(J,2)$, فحسب الخاصة التجميعية إن G م أ م للنقاط $(I,2),(J,2)$.

وبطريقة أخرى:

k م أ م لـ $(A,1),(B,1),(C,1)$ وبالتالي k مركز ثقل المثلث ABC.

حسب الخاصة التجميعية فإن G م أ م $(K,3),(D,1)$:

$$\overrightarrow{KG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{KD}$$

ملاحظة هامة:

وجدنا أنه إذا كان G م أ م للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

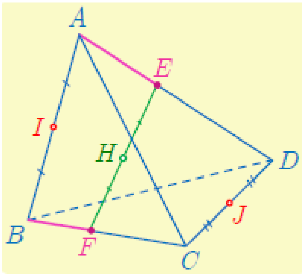
حيث $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ عدد حقيقي أي يمكننا اعتباره k:

$$\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AB}$$

وهذا يعني أن A و B و G على استقامة واحدة.

وهذا يعني انه يمكن اثبات أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة بإثبات أن إحداهما م أ م للنقطتين الباقيتين.

التمرين (1)



I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ ولدينا النقطتين E و F تحققان:

$$\overrightarrow{AE}=a.\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BF}=a.\overrightarrow{BC}$$

و H منتصف $[EF]$ والمطلوب إثبات أن H و I و J على استقامة واحدة.

الحل

- لدينا $\overrightarrow{AE}=a.\overrightarrow{AD}$ إذن E م أ م للنقاط: $(D,a),(A,1-a)$ وأن $(E,1)$.
- لدينا $\overrightarrow{BF}=a.\overrightarrow{BC}$ إذن F م أ م للنقاط: $(C,a),(B,1-a)$ وأن $(F,1)$.

وبما أن H منتصف $[EF]$ فهي م أ م للنقاط $(E,1),(F,1)$ وحسب الخاصة التجميعية H م أ م للنقاط:

$(A,1-a),(B,1-a),(C,a),(D,a)$

- بما أن I منتصف $[AB]$ إذن I م أ م للنقاط: $(A,1-a),(B,1-a)$ وأن $(I,2-2a)$.
- بما أن J منتصف $[CD]$ إذن J م أ م للنقاط: $(C,a),(D,a)$ وأن $(J,2a)$.

فحسب الخاصة التجميعية إن H م أ م للنقاط $(I,2-2a),(J,2a)$ وبالتالي H و I و J على استقامة واحدة.

التمرين (2)

$ABCD$ رباعي وجوه ويوجد:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

أثبت أن G م أ م للنقاط $(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$ يقع على $[EF]$ ثم عين G.

الحل

- F م أ م للنقاط $(A,1),(D,2)$ وأن $(F,3)$.
- E م أ م للنقاط $(B,3),(C,1)$ وأن $(E,4)$.

فحسب الخاصة التجميعية G م أ م $(E,4),(F,3)$ وبالتالي إن G و E و F على استقامة واحدة.

$$\overrightarrow{FG}=\frac{4}{7}\overrightarrow{FE}$$

إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة :

إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

فإن إحداثيات مركز الثقل :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_c}{\alpha + \beta + \gamma}$$

مثال: في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$A(1,1,-2), B(2,3,-2), C(4,0,-1)$

و ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$(A,2), (B,2), (C,-1)$

1- جد إحداثيات G

2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{2}$

■ خاصة الإختزال:

إذا كان G م أ م للنقاط $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$

فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

وشرط تطبيق الإختزال: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

- أما إذا كانت $\alpha + \beta + \gamma = 0$ عندئذ يمكن إخفاء M بإصلاح للعلاقة الشعاعية:

مثال₁: اختزل العلاقات الآتية:

1) $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

$3 + 1 - 2 \neq 0$

حسب علاقة الاختزال:

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (3+1-2)\overrightarrow{MG}$$
$$= 2\overrightarrow{MG}$$

حيث G م أ م للنقاط $(A,3), (B,1), (C,-2)$.

2) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$2 - 1 - 1 = 0$

نخفي M.

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$
$$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$$
$$= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}$$
$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{IA}$$

حيث I منتصف $[BC]$.

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$$

نضرب ب -1:

$$-\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IA}$$

حيث I منتصف $[BC]$, الرسم للتوضيح:

3) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

G م أ م للنقاط:

$(A,1),(B,1),(C,1)$

فإن G مركز ثقل المثلث ABC, الرسم

للتوضيح:

<u>تذكرة:</u> خاصة التجانس:

إذا كان G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(A,\alpha),(B,\beta)$

عندها:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

نضرب بـ $k\neq 0$:

$$k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

G مركز أبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A,k\alpha)\,,(B,k\beta)$

تمرينات ومسائل:

$\frac{21}{43}$: نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ و E و F

تحققان:

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

أثبت أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$

يقع على $[EF]$ ثم عين G.

الحل

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$
$$\gamma=1$$
$$\beta+1=4\Rightarrow\beta=3$$

E مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(B,3)\,,(C,1),(E,4)$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{\delta}{\alpha+\delta}\overrightarrow{AD}$$
$$\delta=2\,,\alpha=1$$
$$(F,3)$$

وبالتالي فإن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(E,4),(F,3)$

حسب الخاصة التجميعية فإن G و E و F تقع على استقامة واحدة.

$$\overrightarrow{EG}=\frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$

<u>وظائف:</u>

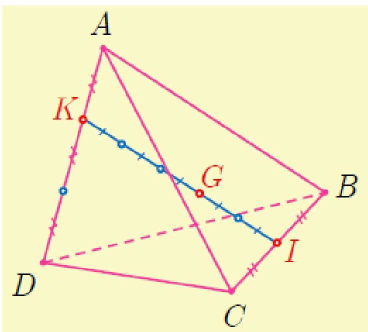
$\frac{25}{44},\frac{10}{31},\frac{2}{35},\frac{1}{35},\frac{7}{96},\frac{2}{94},\frac{1}{94}$

مع تدرب صفحة 81 و82.

<u>مسائل عامة في مركز الأبعاد المتناسبة:</u>

$\frac{1}{31}$: بالإستفادة من المعلومات في الشكل

عين الأعداد a و b و c و d ليتحقق ما يلي:



1) K م أ م للنقطتين $(D,d),(A,a)$.

2) I م أ م للنقطتين $(C,c)\,,(B,b)$.

3) G م أ م للنقاط:

$(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)$

الحل

1) من الشكل نلاحظ أن K م أ م للنقاط $(A,2),(D,1)$ و $(K,3)$.

2) من الشكل نلاحظ أن I م أ م للنقاط $(B,1)$,$(C,1)$ و $(I,2)$.

3) من الشكل نلاحظ أن G م أ م للنقاط $(K,3),(I,2)$:

لما كان K م أ م للنقطتين $(A,2),(D,1)$ فحسب التجانس نضرب بـ $\frac{2}{3}$:

$$\left(A,\frac{4}{3}\right),\left(D,\frac{2}{3}\right),(K,2)$$

لما كان I م أ م للنقطتين $(B,1),(C,1)$ فحسب خاصة التجانس نضرب بـ $\frac{3}{2}$:

$$\left(B,\frac{3}{2}\right),\left(C,\frac{3}{2}\right),(I,3)$$

حسب الخاصة التجميعية إن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$\left(A,\frac{4}{3}\right),\left(B,\frac{3}{2}\right),\left(C,\frac{3}{2}\right),\left(D,\frac{2}{3}\right)$$

إذن:

$$a=\frac{4}{3}\,,b=\frac{3}{2}\,,c=\frac{3}{2}\,,d=\frac{2}{3}$$

$\frac{4}{31}$: ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي 1، ولتكن I و J و K و L النقاط المعرفة وفق:

$$\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AJ}=k\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CK}=k\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{CL}=k\overrightarrow{CB}$$

1) أثبت أن:

$$\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{LK}$$

واستنتج أن النقاط I و J و K و L تقع في مستوي واحد.

2) ما طبيعة الرباعي $IJKL$؟

الحل

1) لدينا:

- $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}$
$=-k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}=k\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CK}=-\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{CK}$
$=-k\overrightarrow{CB}+k\overrightarrow{CD}=k\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{LK}=k\overrightarrow{BD}$

بما أن $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ بالتالي المستقيمان (IJ) و (LK) متوازيان وهما يقعان في مستوي واحد.

الرسم للتوضيح:

2) بما أن $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ وبالتالي $IJKL$ متوازي أضلاع.

$\frac{10}{41}$: A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة و E و D تحققان:

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}\,,3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$$

1) أثبت أن A و B و C تقع في مستو واحد.

2) بفرض I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$ أثبت أن A و J و I تقع على استقامة واحدة.

الحل

الرسم:

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{EC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$$
$$3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

نلاحظ أن A و E و C على استقامة واحدة وأن B و D و A على استقامة واحدة وبالتالي المستقيمان (EC) و (BD) متقاطعان في A وبالتالي A و B و C و D و E في مستو واحد.

- حسب المتوسط:

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\right)$$
$$2\left(\overrightarrow{AI}\right) = \frac{2}{3}\left(2\left(\overrightarrow{AJ}\right)\right)$$
$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

فالنقاط J, I, A على استقامة واحدة.

25/44: $ABCDEFGH$ مكعب I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ و M م أ م لـ $(B,1),(A,1),(G,1)$ والمطلوب:

1) أثبت أن M تنتمي إلى $[IJ]$ وعين موضعها.
2) أثبت أن M تنتمي إلى $[KL]$ وعين موضعها.
3) استنتج أن I و J و K و L تقع في مستو واحد وماهي طبيعة $ILJK$؟

الحل

- I منتصف $[AE]$ وبالتالي I م أ م للنقاط $(A,1),(E,1)$ و $(I,2)$.
- J منتصف $[BG]$ وبالتالي J م أ م للنقاط $(G,1),(B,1)$ وأن $(J,2)$.

حسب الخاصة التجميعية M م أ م للنقاط $(I,2),(J,2)$ إذن M تقع في منتصف $[IJ]$.

- بشكل مماثل M تقع في منتصف $[KL]$.

إذن المستقيمان (KL) و (IJ) متقاطعان في M وبالتالي I و J و K و L تقع في مستو واحد.

بما أن قطرا الرباعي $ILJK$ متناصفان فإن الرباعي هو متوازي أضلاع.

$\frac{2}{94}$: $ABCD$ رباعي وجوه, أثبت أن النقاط M و B و C و D تقع في مستو واحد ثم وضع النقطة M:

1) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

M مركز أبعاد متناسبة للنقاط وبالتالي النقاط تقع في مستو واحد، وM مركز ثقل المثلث BDC.

2) $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

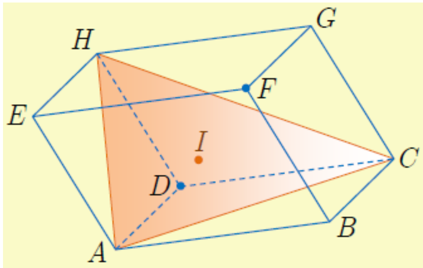
فإن M م أ م للنقاط $(B,1),(C,1),(D,2)$

ولتوضيع M:

نفرض I م أ م لـ $(C,1),(B,1)$ إذن I منتصف

$[BC]$ و $(I,2)$ فحسب الخاصة التجميعية M

م أ م $(D,2),(I,2)$ وبالتالي M منتصف $[DI]$.



$\frac{5}{95}$:

I مركز ثقل المثلث AHC، أثبت أن I و D و F

على استقامة واحدة وعين موقع I على

$[DF]$:

الحل

لدينا:

- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}$
- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HI}$

بالجمع نجد:

$$3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}+\underbrace{\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{HI}\right)}_{=\vec{0}}$$

لأن I مركز ثقل AHC

$$3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$$

$$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DH}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$$

I و D و F على استقامة واحدة.

مثال: $ABCD$ رباعي وجوه و K و I منتصفا

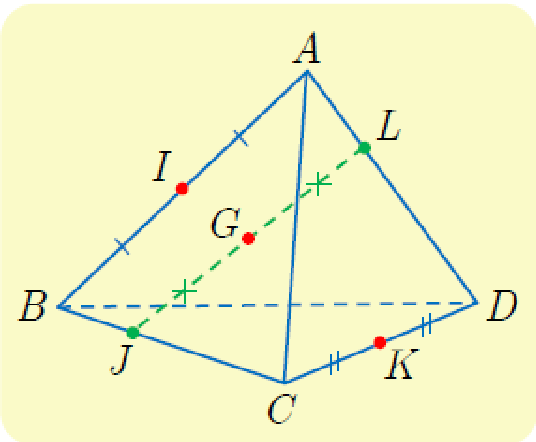
الحرفين $[AB]$ و $[CD]$ على الترتيب و النقطتان

J و L معرفتان بالعلاقتين :

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و أخيراً G منتصف $[JI]$ أثبت أن

النقاط G و I و K على استقامة واحدة



مسألة مستقيمات متقاطعة :

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما . و لنعرف النقاط

P,Q,S,R بالشكل :

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\ ,\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}\ \ ,\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمين (PQ) و

(RS)

1- أثبت أن P هي مركز الأبعاد المتناسبة

للنقاط (B,β) , (C,γ) و أن Q مركز الأبعاد

المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(D,\delta)$ حيث $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ثوابت يُطلب تعيينها

2- ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,4),(C,1),(D,3)$
أثبت أن G تقع على المستقيم (PQ)

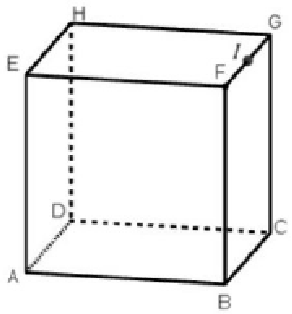
3- أثبت بأسلوب مماث أن G تقع على المستقيم (RS)

4- استنتج تقاطع المستقيمين $(PQ),(RS)$

اختبار

السؤال (1)

في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب و I

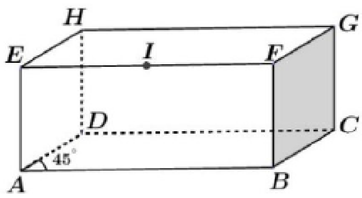


منتصف $[FG]$ والمطلوب:

عين النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$$

السؤال (2)



$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ وقياس الزاوي $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$:

1- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

2- عين موضع النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

السؤال (3)

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط الآتية:

$A(2,0,1)\ ,B(1,-2,1)\ ,C(5,0,5)\ ,D(6,2,5)$

1- أثبت أن $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

واستنتج أن النقاط D,C,B,A تقع في مستو واحد.

السؤال (4)

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P:2x+y-2z-4=0$.

1- احسب بعد النقطة A عن المستوي P.

2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

السؤال (5)

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقطة $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

1- احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ ثم استنتج $\cos(\widehat{BAC})$.

2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC، عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

السؤال (6)

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكون من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة:

$$MA=MB$$

وما طبيعة المجموعة S.

التمرين (1)

تتأمل الهرم $S-ABCD$ قاعدته مربع طول ضلعه 4 ورأسه S.

وطول كل حرف من حروفه الجانبية 4 والنقطة O مرتسم S القائم على القاعدة:

1- احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$.

2- احسب طول القطر CA ثم احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}$.

3- عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(S,1)\,,(B,3)\,,(A,2)$$

التمرين (2)

المستقيمين d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=2t+1\,;\ t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}$$

$$d':\begin{cases}x=2s-1\\ y=s-2\ \ ;s\in\mathbb{R}\\ z=3s-2\end{cases}$$

المطلوب:

1- أثبت أن d و d' متقاطعان ثم عين احداثيات I نقطة التقاطع.

2- جد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d و d'.

التمرين (3)

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نتأمل النقطتين $A(2,2,4)\,,B(2,0,-2)$:

1- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

2- اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ، ما طبيعة المجموعة S؟

المسألة (1)

$ABCDEFG$ مكعب طول حرفه يساوي 2،

نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ في المعلم

$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$:

1- اكتب معادلة المستوي (GBD).

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC).

3- جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD).

4- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

5- أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC).

المسألة (2)

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط:

$A(1,1,0)$, $B(1,2,1)$, $C(4,0,0)$

1- أثبت أن النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة.

2- أثبت ان معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

3- ليكن المستويان:

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$

$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).

5- احسب بعد A عن المستقيم d.

المسألة (3)

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نتأمل النقاط:

$E(1,-1,1)$, $D(0,4,0)$, $C(4,0,0)$

$B(1,0,-1)$, $A(2,1,3)$

1- جد $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CD}$.

2- أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

3- أثبت أن (AB) يعامد للمستوي (CDE).

4- اكتب معادلة المستوي (CDE).

5- احسب بعد B عن المستوي (CDE).

6- اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

المسألة (4)

نتأمل في معلم متجانس $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ المكعب $ABCDEFGH$.

1- اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط:

A , C , H , F , D

2- اكتب معادلة المستوي (ACH).

3- أثبت أن المستوي P الذي معادلته:

$$P: -2x + 2y - 2z + 1 = 0$$

يوازي المستوي (ACH).

4- بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة.

5- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.

المسألة (5)

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x-y+2z-2=0$$

$$Q: x+y+z-1=0$$

$$R: x-z-1=0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان مشترك Δ, اكتب تمثيله الوسيطي.

2- تحقق أن المستوي يعامد Δ ويمر بالنقطة A.

3- أثبت أن المستويات P , Q , R تتقاطع بالنقطة I يطلب تعيين احداثياتها.

4- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

المسألة (6)

$EABCD$ هرم رباعي رأسه E وقاعدته مربع طول ضلعه 3, $[AE]$ عمودي على $(ABCD)$ و $EA=3$.

نختار المعلم المتجانس:

$$\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- عين إحداثيات A , B , C , D , E.

2- جد معادلة المستوي (EBC).

3- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

4- استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC).

5- احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$.

المسألة (7)

مكعب طول حرفه 2, O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.

نختار معلم متجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.

والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O.

2- أعط معادلة المستوي (GOB).

3- احسب $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.

4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

5- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

6- جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

المسألة (8)

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نتأمل النقاط:

$A(-1,2,3)$, $B(2,1,1)$, $C(-3,4,-1)$, $D(3,1,1)$

1- جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.

2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

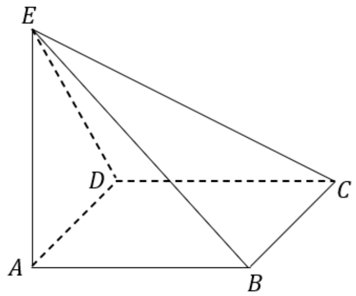
3- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC).

4- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

5- بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (CG) و (AB) متوازيان.

المسألة (9)

$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربع، المستقيم $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$، $AB=4$ و $AE=3$. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:



1- جد إحداثيات النقاط الرؤوس.

2- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق:

$$4\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CE}$$

3- احسب $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BC}$ واستنتج نوع المثلث EBC ثم احسب مساحته.

4- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

5- اكتب معادلة المستوي (EBC) واحسب بعد النقطة A عن المستوي (EBC) ثم استنتج حجم الهرم $AEBC$.

المسألة (VIE 1)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:
$D(1,1,1)$ ، $C(0,0,1)$ ، $B(0,1,0)$ ، $A(1,0,0)$

1- جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC، وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC).

2- جد معادلة المستوي (ABC).

3- نعرف النقاط $A'(2,0,0)$ ، $B'(0,2,0)$ ، $C'(0,0,4)$ للمستوي $A'B'C'$. أثبت أن $2x+2y+z-4=0$ معادلة المستوي $(A'B'C')$.

4- أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=3-t;t\in\mathbb{R} \\ z=-2 \end{cases}$$

5- احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ.

6- احسب حجم رباعي الوجوه $A'-OB'C'$

7- احسب بعد النقطة O عن المستوي $(A'B'C')$ ثم استنتج مساحة المثلث $A'B'C'$.

المسألة (VIE 2)

لتكن S الكرة التي مركزها $A(1,1,1)$ ونصف قطرها $r=3$ والمستوي:
$P:x-z=1$

أثبت أن المستوي P يقطع الكرة S في دائرة
C, عين مركزها ونصف قطرها.

<table>
<tr><th colspan="3">الوضع النسبي لمستوي مع مستوي</th></tr>
<tr><td>شرط التوازي: ارتباط النواظم
وإذا كان:
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$
كان المستويين منطبقين.</td><td>شرط التقاطع: عدم ارتباط النواظم</td><td>شرط التعامد: جداء النواظم معدوم.</td></tr>
<tr><th colspan="3">الوضع النسبي لمستوي مع مستقيم</th></tr>
<tr><td colspan="3">نعوض المستقيم في المستوي ونميز الحالات الآتية:</td></tr>
<tr><td>$0 = 0$
المستقيم محتوى في المستوي</td><td>$0 = 1$
المستقيم يوازي المستوي</td><td>$t =$ عدد
المستقيم والمستوي متقاطعان في نقطة.
لإيجاد احداثياتها نعوض t في المستقيم.</td></tr>
<tr><th colspan="3">الوضع النسبي لمستقيم مع مستقيم</th></tr>
<tr><td colspan="3">ندرس ارتباط اشعة التوجيه ونميز حالتين:</td></tr>
<tr><td>اشعة التوجيه مرتبطة: المستقيمان متوازيان</td><td colspan="2">الأشعة غير مرتبطة: المستقيمان غير متوازيان , ندرس التقاطع:
$x_t = x_s$
$y_t = y_s$
$z_t = z_s$</td></tr>
</table>

ملاحظات:

1- لإثبات أن مستقيم يعامد مستوي نثبت أن الناظم و شعاع التوجيه مرتبطان
2- لإثبات أن شعاعاً معطى هو ناظم على مستوي معلوم يوجد اسلوبين :
   أ- الأسلوب الأول : الشعاع عمودي على شعاعين في المستوي
   ب- الأسلوب الثاني: الشعاع المعطى مرتبط مع ناظم المستوي

التمرين الأول: في كلٍ من الحالات الآتية , ادرس تقاطع المستويين P,Q و في حال التوازي بيّن فيما إذا كانا منطبقين أم لا .

$P: 2x + y - z = 0 \ , Q: x + y + z = 1$	$P: 2x - y + z - 3 = 0$ $Q: 4x - 2y + 2z - 1 = 0$

التمرين الثاني: ادرس الوضع النسبي للمستقيمين الآتيين:

$$d: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = -t + 1 \end{cases} ; t \in R$$

$$d': \begin{cases} x = -9s + 4 \\ y = -12s + 4 \\ z = 3s \end{cases} ; s \in R$$

التمرين الثالث: d و d' مستقيمان معرفان وفق:

$$d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = t - 1 \end{cases} ; t \in R$$

$$d': \begin{cases} x = 3s - 4 \\ y = s - 1 \\ z = 5s - 6 \end{cases} : s \in R$$

1- أثبت أن d, d' متقاطعان في نقطة N يُطلب تعيين إحداثياتها

2- جد معادلة المستوي P المحدد بهذين المستقيمين

التمرين الرابع: ادرس الوضع النسبي للمستوي مع المستقيم المعطى:

1- $P: 2x - y - z = 3$

$$d: \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 0 \\ z = 4t - 7 \end{cases} : t \in R$$

2- $P: 2x + y - 3z - 1 = 0$

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t + 7 \end{cases} : t \in R$$

المساقط القائمة	
على مستوي:	على مستقيم:
1- نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من D وشعاع توجيهه هو ناظم المستوي $\vec{n}$ P	1- نوجد معادلة المستوي P المعامد للمستقيم d والمار من النقطة D. 2- نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P ولتكن D' فتكون المسقط القائم للنقطة D على المستقيم d.

2- نوجد تقاطع هذا المستقيم مع المستوي فنحصل على D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي P	
ملاحظة: إن DD' تمثل بعد النقطة D عن المستوي.	**ملاحظة:** إن DD' تمثل بعد النقطة D عن المستقيم.
يمكن حساب بعد نقطة عن مستوي بشكل مباشر: $dis(D,P) = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	لا يوجد طريقة أخرى لحساب بعد نقطة ما عن المستقيم **الا المسقط القائم**

الوضع النسبي لمستوي مع كرة		
نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي ونميز الحالات الآتية:		
$dis < r$	$dis = r$	$dis > r$
المستوي يقطع الكرة في دائرة	المستوي يمس الكرة	المستوي لا يشترك مع الكرة بأي نقطة.
يطلب حساب نصف قطر دائرة المقطع باستخدام القانون: $r_c = \sqrt{r^2 - dis^2}$	**Nothing…keep going forward**	

الجلسة السادسة

المسألة (1)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$A(2,-2,2), B(1,1,0), C(1,0,1), D(0,0,1)$

1- تحقق أن النقاط (BCD) لا تقع على استقامة واحدة
2- أثبت أن $y + z - 1 = 0$ هي معادلة المستوي (BCD)
3- أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCD)
4- عين إحداثيات K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)
5- اكتب معادلة الكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها

المسألة (2)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقطة A(1,1,2) و المستويان :

$P: x - y + 2z - 1 = 0$
$Q: 2x + y + z + 1 = 0$

1- أثبت أن P, Q متقاطعان في فصل مشترك d
2- اكتب تمثيلاً للمستقيم d
3- اكتب معادلة المستوي R المار من A و يعامد كلاً من P, Q
4- جد إحداثيات B نقطة تقاطع d مع المستوي R و استنتج وضع المستويات P,Q,R
5- احسب بعد A عن المستقيم d

المسألة (3)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقطة $A(1,2,0)$ و المستويات :

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: x + y + z - 1 = 0$$
$$R: x - z - 1 = 0$$

1- أثبت أن المستويين P, Q متقاطعان في فصل مشترك Δ . اكتب تمثيله الوسيطي
2- تحقق أن المستوي R يعامد Δ و يمر من A
3- أثبت تقاطع المستويات P, Q, R في نقطة I يُطلب تعيينها
4- استنتج بعد A عن المستقيم Δ

المسألة (4)

في معلمٍ متجانس :

$$A(1,1,0), B(1,2,1), C(4,0,0)$$

1- تحقق ان A, B, C ليست على استقامة واحدة
2- أثبت أن المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة $x + 3y - 3z - 4 = 0$
3- ليكن المستويان :

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$
$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في فصل مشترك d له التمثيل الوسيطي

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \quad t \in R \\ z = t \end{cases}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات
$P, Q, (ABC)$
5- احسب بعد A عن المستقيم d

المسألة (5)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$$A(1,3,0), B(0,6,0), N(0,0,3), M(0,6,2)$$

1- اكتب معادلة المستوى (AMN)

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من O ومعامد للمستوى (AMN)

3- أثبت أن المستوى الذي معادلته $z - 1 = 0$ هو المستوى المحوري للقطعة $[BM]$.

المسألة (6)

1- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

2- تحقق ان المستوى P الذي معادلته:

$$P: x - y + z + 3 = 0$$

يمس الكرة S.

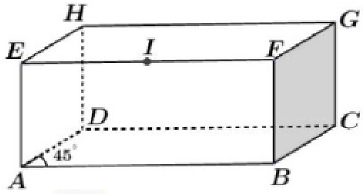
المسألة (7)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقطة $A(1, -2, 0)$ والمستوى $P: x + 2y + z - 1 = 0$:

احسب بعد النقطة A عن المستوى P ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوى P.

المسألة (8)

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$ وقياس الزاوي $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$:



3- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

4- عين موضع النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

المسألة (9)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$:

1- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$.

2- أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان.

المسألة (10)

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$ والمستوى:

$$P: 3x - y - 3z - 8 = 0$$

1- أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوى P.

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB), ثم عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P.

المسألة (11)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$$A(2,0,1)\ ,B(1,-2,1)\ ,C(5,0,5)\ ,D(6,2,5)$$

3- أثبت أن $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

4- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

واستنتج أن النقاط A,B,C,D تقع في مستو واحد.

المسألة (12)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

3- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج $\cos(\widehat{BAC})$.

4- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC, عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

المسألة (13)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكون من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة:

$$MA=MB$$

وما طبيعة المجموعة S.

المسألة (14)

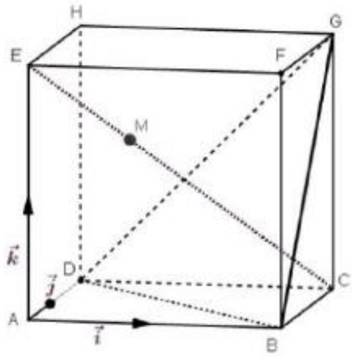
في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $B(2,0,-2)\ ,A(2,2,4)$:

3- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

4- اعطِ معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ، ما طبيعة المجموعة S؟

المسألة (15)

$ABCDEFG$ مكعب طول حرفه يساوي 2, نتأمل المعلم المتجانس $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ في المعلم



$\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$:

6- اكتب معادلة المستوي (GBD).

7- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC).

8- جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD).

9- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

10- أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC).

المسألة (16)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$$A(1,1,0)\,,B(1,2,1)\,,C(4,0,0)$$

6- أثبت أن النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة.

7- أثبت ان معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x+3y-3z-4=0$$

8- ليكن المستويان:

$$P: x+2y-z-4=0$$

$$Q: 2x+3y-2z-5=0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases}x=t-2\\ y=3 \quad ;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

9- ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).

10- احسب بعد A عن المستقيم d.

المسألة (17)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$E(1,-1,1)\ ,D(0,4,0)\ ,C(4,0,0)$$

$$B(1,0,-1), A(2,1,3)$$

7- جد $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{CE}\ ,\overrightarrow{CD}$.

8- أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

9- أثبت أن (AB) يعامد للمستوي (CDE).

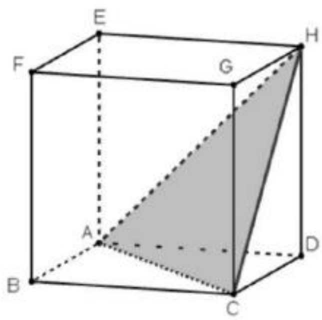
10- اكتب معادلة المستوي (CDE).

11- احسب بعد B عن المستوي (CDE).

12- اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

المسألة (18)

نتأمل في معلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$.



6- اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط:

$$A\ ,C\ ,H\ ,F\ ,D$$

7- اكتب معادلة المستوي (ACH).

8- أثبت أن المستوي P الذي معادلته:

$$P: -2x+2y-2z+1=0$$

يوازي المستوي (ACH).

9- بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة.

10- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.

المسألة (19)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x-y+2z-2=0$$

$$Q: x+y+z-1=0$$

$$R: x-z-1=0$$

5- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان مشترك Δ, اكتب تمثيله الوسيطي.

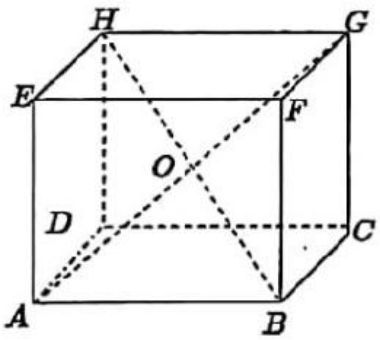
6- تحقق أن المستوي يعامد Δ ويمر بالنقطة A.

7- أثبت أن المستويات P , Q , R تتقاطع بالنقطة I يطلب تعيين احداثياتها.

8- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

المسألة (20)

مكعب طول حرفه 2، O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.



نختار معلم متجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$. والمطلوب:

7- جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O.

8- أعط معادلة المستوي (GOB).

9- احسب $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.

10- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

11- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

12- جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

المسألة (21)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$A(-1,2,3)\ ,B(2,1,1)\ ,C(-3,4,-1)\ ,D(3,1,1)$$

6- جد $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.

7- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

8- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC).

9- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

10- بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (CG) و (AB) متوازيان.

المسألة (22)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان:

$$P: x-y+2z-1=0$$

$$Q: 2x+y+z+1=0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان في فصل مشترك d.

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.

3- اكتب معادلة المستوى R المار من A المعامد للمستويين P و Q.

4- جد إحداثيات B الناتجة من تقاطع المستوي R والمستقيم d.

5- احسب بعد النقطة A عن المستقيم d.

6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q.

المسألة (23)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$D(1,1,1)$, $C(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $A(1,0,0)$

8- جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC, وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC).

9- جد معادلة المستوي (ABC).

10- نعرف النقاط $A'(2,0,0)$, $B'(0,2,0)$, $C'(0,0,4)$ للمستوي $A'B'C'$. أثبت أن $2x+2y+z-4=0$ معادلة المستوي $(A'B'C')$.

11- أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=3-t;t\in\mathbb{R} \\ z=-2 \end{cases}$$

12- احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ.

حجوم المجسمات الفراغية	
المجسم له قاعدتين	المجسم له قاعدة واحدة
$V=S\times h$	$V=\frac{1}{3}S\times h$
حيث أن S مساحة القاعدة, h الارتفاع	
ملاحظة نذيرية: بعد حساب الحجم يمكن استنتاج مساحة قاعدة أخرى له أو ارتفاع اخر له ويتم ذلك بحساب الحجم من منظور آخر (بدلالة القاعدة أو الارتفاع حسب الطلب)	

المجموعات النقطية	
$\|\|\overrightarrow{AM}\|\|=\|\|\overrightarrow{BM}\|\|$ أو $AM=BM$	تمثل مستوي محوري للقطعة $[AB]$
$\|\|\overrightarrow{AM}\|\|=const$ أو $AM=const$	تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $const$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$	تمثل كرة التي قطرها $[AB]$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$	تمثل المستوي الذي يمر من النقطة A ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له
معادلة من الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$	نتمم إلى مربع كامل لنصل إلى الشكل $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=k$ ونميز الحالات:

	1- $k<0$ فتكون معادلة تمثل المجموعة الخالية Φ. 2- $k=0$ فتكون معادلة تمثل نقطة التي إحداثياتها $A(x_0,y_0,z_0)$. 3- $k>0$ فتكون المعادلة تمثل كرة التي نصف قطرها k ومركزها $A(x_0,y_0,z_0)$.
في باقي الحالات	1- نفرض $M(x,y,z)$ 2- نعوض في المعادلة 3- نصلح ثم نقارن شكل المعادلة المختزل مع الاشكال السابقة
لا ننسا الشكل العام لمعادلة المخروط والاسطوانة	

تطبيقات المسافة في الفراغ		
انتماء نقطة لكرة	انتماء نقطة لمستوي محوري	معرفة طبيعة مثلث
نحسب بعد النقطة عن مركز الكرة ونقارن من نصف القطر	نحسب بعد النقطة عن طرفي القطعة المستقيمة ونقارن بينهم	نحسب أطوال أضلاع المثلث ونقارن بينها ثم نختبر عكس فيثاغورث
جداء السلمي		
$\vec{u}.\vec{v}=\|\|\vec{u}\|\|\|\|\vec{v}\|\|\cos\alpha$	$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\|\vec{u}+\vec{v}\|\|^2-\|\|\vec{u}\|\|^2-\|\|\vec{v}\|\|^2\right]$	$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

طلبات مميزة:

1- أثبت أن النقطة J هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC:
ثبت أن $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}=0$ و $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AC}=0$.

2- حساب $\cos\alpha$ عن طريق القانون الأول في الجداء السلمي.

3- اثبات أن شعاعين متساويين بالطول.

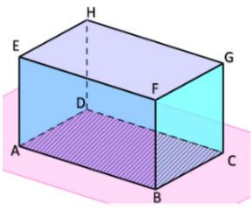
الجلسات 7 + 8

بنوك الأتمتة للأشعة التحليلية

1- ليكن لديك الاشعة $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{\imath} + \sqrt{6}\vec{\jmath} - \vec{k}$, عندئذٍ $||\vec{v}||$ يساوي :

10	d	7	c	9	b	3	a

2- في الشكل المجاور نتأمل متوازي مستطيلات ABCDEFGH النقطة P النقطة المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ تنطبق على مركز الوجه



$BCGF$	d	$ADHE$	c	$EFGH$	b	$ABCD$	a

3- لدينا المعلم الكيفي $(F; \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FD})$ عندئذٍ إحداثيات N التي تحقق: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$ هي:

$N\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$	D	$N\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$	C	$N\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$	B	$N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$	A

4- لتكن النقاط $A(1,2,-1), B(2,1,0)$ و C نظيرة A بالنسبة للمبدأ . أي من المعادلات الآتية تمثل معادلة للمستوي (ABC)

$x - 3y - 2z = 0$	d	$x - 2y - 3z + 1 = 0$	c	$x - 2y - 3 = 0$	b	$x - 2y - 3z = 0$	a

5- لتكن النقاط $A(1,3,-1), B(2,5,2), C(3,4,\alpha)$ أحد قيم العدد α التي تجعل المثلث ABC مثلثاً متساوي الساقين رأسه B

2	d	3	c	1	b	-3	a

6- معادلة المستوي المار من النقطة $A(3,-2,2)$ و شعاعا توجيهه $\vec{u}(1,1,0), \vec{v}(-1,1,1)$

$-x + y + 1 = 0$	d	$x - y + 2z = -5$	c	$x - y + 2z - 9 = 0$	b	$3x - y + 2z = 9$	a

7- المستوي المحدد بالنقاط $(2,0,0), (0,3,0), (0,0,5)$ له المعادلة :

$x + y + z = 30$	d	$15x + 10y + 6z = 1$	c	$x + y + z = 1$	b	$15x + 10y + 6z = 30$	a

8- في معلمٍ متجانس نتأمل الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ و لنعرف الشعاعين :

$$\overrightarrow{w_1} = 2\vec{u} - \vec{v} \quad , \overrightarrow{w_2} = 2\vec{u} + \vec{v}$$

فإذا علمت أن $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ متعامدان يمكن إثبات أن :

$\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert = \frac{1}{2}\lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert$	d	$\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert = 2\lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert$	c	$\vec{u}, \vec{v}$ مرتبطان خطياً	b	$\vec{u}, \vec{v}$ لهما الطول ذاته	a

9- لتكن لدينا النقاط $A(1,2,-3), B(-1,3,3)$, $C(4,-1,2)$ فإن إحداثيات D التي تجعل ABCD متوازي الأضلاع هي :

$D(6,-2,-4)$	d	$D(-2,0,-8)$	c	$D(2,0,8)$	b	$D(6,-2,4)$	a

10- بفرض A, M نقطتان من الفراغ ويحققان أن $AM^2 = 3 + (x+1)^2$ عندئذٍ أصغر قيمة لـ AM

$\sqrt{3}$	d	3	c	-1	b	1	a

11- قيمة العدد الحقيقي m التي تجعل الأشعة $\vec{v}(-1,2,0)$, $\vec{u}(1,0,2)$, $\vec{w}(-4,m,-2)$ مرتبطة خطياً

1	d	-3	c	6	b	3	a

12- معادلة المستوي P المار من النقطة $A(0,1,0)$ و يقبل $\vec{v}(0,3,-1)$, $\vec{u}(0,1,2)$ شعاعي توجيه :

$y-z+1=0$	d	$y=1$	c	$z=2$	b	$x=0$	a

13- قيمة العدد الحقيقي λ التي تجعل المستويان :

$$P: \quad x+2y-\lambda z+1=0$$
$$Q: \quad (3\lambda-7)x+4y-6z+5=0$$

لا يمكن تعيينها	d	2	c	-3	b	3	a

14- قيمة العدد λ الذي يجعل المستويين الآتيين متعامدين :

$$2x+3y-4z+1=0$$
$$\lambda x+2y+\frac{\lambda}{2}z-3=0$$

غير موجودة	d	2	c	-3	b	3	a

15- إذا علمت ان نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وان $\vec{u}.\vec{v}=-4$ المقدار $2\vec{u}(2\vec{v}+3\vec{u})$ يساوي:

143	d	-166	c	140	b	134	a

16- P مار من $A(2,5,-2)$ وعمودي على كل من Q وR وحيث:

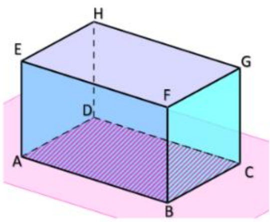
$$\begin{cases} Q: x-2y+3z-5=0 \\ R: x+y+z+1=0 \end{cases}$$

$P: -10x-y-z-2=0$	b	$P: -10x+4y+6z+12=0$	a
$P: x+y+z+1=0$	d	$P: 10x+4y-6z+12=0$	c

17- في الشكل المجاور . متوازي مستطيلات ABCDEFGH فيه

$AB=4$, $BC=CG=2$ و بفرض J منتصف $[CG]$ عندئذٍ قيمة الجداء

$\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JH}$ هي :



3	d	12	c	15	b	16	a

18- نفترض أن $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ و النقاط B,C,D ليست على استقامة واحدة عندئذٍ يمكن التأكيد على أنّ

المستقيم (AM) يوازي المستوي (BCD)	b	النقاط A,M,B على استقامة واحدة	a
$P: x+y+z+1=0$	d	المستقيم (AM) يوازي أحد المستقيمين (BC) , (BD)	c

19- نفترض أن $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM}=1$ و نفترض أن I منتصف $[AB]$ عندئذٍ أي من العلاقات الآتية صحيحة

$IA^2=\frac{1}{2}IM^2$	d	$IA^2=IM^2$	c	$IA^2=1+IM^2$	b	$IM^2=1+IA^2$	a

20- أكمل العبارة الآتية : أعان الله المدرسين الذين …

a	لا يملكون أقلاماً ملونة	b	يمسحون السبورة بأنفسهم
c	لا يملكون طلاب مثلكم	d	يدرسوننا

21- في معلم متجانس . نتأمل النقطة $A(3,4,1)$ و لتكن B مسقط A على المستوي xoz و النقطة C مسقط B على محور الرواقم . عندئذٍ طول القطعة المستقيمة [AC]

a	5	b	$\sqrt{5}$	c	2	d	$\sqrt{3}$

22- إذا كان d هو الفصل المشترك للمستويين :

$$P: x-2y+3z=5 \quad , \quad Q: x+y+z=-1$$

عندئذٍ d هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$

a	$\left(-5z+\frac{1}{3}, 2z-\frac{2}{3}, 3z\right)$	b	$\left(-\frac{5}{3}z+1, \frac{2}{3}z-2, z\right)$	c	$\left(-5z+1, \frac{2}{3}z-2, z\right)$	d	$\left(-\frac{5}{3}z+1, \frac{2}{3}z-2, 3z\right)$

23- المستويان $2x+2y+2z=0 , x+y-4z=0$

a	متوازيان دون تطابق	b	طبوقان	c	متقاطعان و متعامدان	d	متقاطعان دون تعامد

24- في معلم متجانس لتكن النقطتان $A(1,2,-1), B(3,0,1)$. النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [AB] إذا وفقط إذا كان $x+my+nz-1=0$ عندئذٍ

a	$m=-1$, $n=1$	b	$m=0$, $n=-1$	c	$m=n=1$	d	$m=1$, $n=-1$

25- الكرة S مركزها A و نصف قطرها 3 . و المستوي P يقطعها في دائرة نصف قطرها $\sqrt{2}$. قيمة $dis(A,P)$ يساوي

a	$\sqrt{7}$	b	$\sqrt{11}$	c	$\sqrt{2}$	d	2

26- في معلم متجانس . لتكن النقاط $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), E(1,1,1)$ و النقطة M منتصف [BA] عندئذ قيمة $\cos(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{OE})$ ي

a	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	b	1	c	-1	d	0

27- لدينا ABCD رباعي وجوه . M تنتمي إلى الحرف [AB] و N تنتمي إلى الحرف [AC] . G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha), (B,1), (C,1), (D,1)$ و بنفس الوقت G مركز ثقل المثلث DMN عندئذٍ قيمة العدد α

a	$\frac{3}{2}$	b	1	c	2	d	3

28- نتأمل النقطتين $A(-1,2,3), B(1,4,-5)$. معادلة الكرة التي مركزها A و تمس المستوي المحوري للقطعة [AB]

a	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=72$	b	$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$
c	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$	d	$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$

29- ليكن d المستقيم الذي يُعطى وسيطياً بالمعادلات $x = t + 1 , y = t - 2 , z = 3t$ حيث $t \in R$. و المستوي $P: 2x + ay - z + b = 0$ فإذا علمت أن المستقيم d محتوى في المستوي P فإن قيمة الثنائية (a, b)

a	$(0,1)$	b	$(-1,4)$	c	$(-1,-4)$	d	$(1,0)$

30- في معلمٍ متجانس لديك النقاط $A(3,2,1), B(1,2,0), C(3,1,-2)$. العلاقة بين x, y لتكون النقاط $A, B, C, D(x, y, 3)$ في مستوٍ واحد

a	$x + 6y - 19 = 0$	b	$x + 6y - 11 = 0$	c	$x + 6y + 5 = 0$	d	$-x + 6y - 13 = 0$

31- بفرض G مركز ثقل المثلث ABC . إن مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 6\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

a	كرة مركزها G طول نصف قطرها AB	b	كرة مركزها G و نصف قطرها 6
c	المستوي المحوري للقطعة [AB]	d	غير ذلك

32- رباعي وجوه ABCD فيه G مركز ثقل المثلث(ABC) مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$$

a	كرة مركزها G طول نصف قطرها AB	b	كرة مركزها G و نصف قطرها DG
c	المستوي المحوري للقطعة [AB]	d	غير ذلك

33- مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ المحققة للشروط :

$$x^2 + z^2 - \frac{9}{4}y^2 = 0 \quad , 0 \le y \le 4$$

a	أسطوانة محورها محور التراتيب	b	مخروط دوراني محوره محور التراتيب ونصف قطر قاعدته 6
c	مخروط دوراني محوره محور الفواصل و نصف قطر قاعدتها 3	d	مخروط دوراني محور محور التراتيب و نصف قطر قاعدته 3

34- في معلم متجانس $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ إن معادلة المستوي (ABC)

a	$x + y + z - 1 = 0$	b	$x + y + z = 0$
c	$x + y + z + 1 = 0$	d	$x - y - z = 0$

35- المستويان $P_2: x + 2y - z + 1 = 0$, $P_1 : 2x + y - z + 2 = 0$ متقاطعان بمستقيم تمثله مجموعة الحلول :

a	$(5, 2z, z) : z \in R$	b	$(x, 3x, x - 1) : x \in R$
c	$(y + 1, y, 5y) \ : y \in R$	d	$(y - 1, y, 3y) \ : y \in R$

36- لتكن النقطتان $A(-1,2,3)$ و $B(1,2,-1)$ و المستوي $x + y + z = 1$ فإن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي P

a	$I(3,-2,2)$	b	$I(3,2,2)$	c	$I(-2,-2,3)$	d	$I(2,2,-3)$

37- في معلم متجانس نتأمل النقطة $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ فإن قيمة $\cos(\widehat{BAC})$

a	$\frac{4}{5}$	b	$-\frac{4}{5}$	c	$\frac{2}{5}$	d	$-\frac{2}{5}$

38- مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2-2y-8=0$ تمثل

a	نقطة وحيدة	b	المجموعة الخالية	c	كرة نصف قطرها 3	d	كرة نصف قطرها 9

39- لدينا ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين . طول كل من ساقيه $\sqrt{2}$ قيمة الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

تساوي

a	-2	b	2	c	$-\sqrt{2}$	d	$\sqrt{2}$

40- $ABCDEFGH$ مكعب I . منتصف $[FG]$ عندئذٍ يساوي الشعاع

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HJ}$

يساوي

a	$\overrightarrow{AD}$	b	$\overrightarrow{(AH)}$	c	$\overrightarrow{AG}$	d	$\overrightarrow{AJ}$

41- معادلة المستوي المعامد لمستقيم d معادلاته الوسيطية

$x=0\,, y=-t\,, z=-t+1$

a	$z+y-3=0$	b	$y-z-3=0$	c	$x+y+3=0$	d	$y-z+3=0$

42- المستقيم d المعرف وسيطياً وفق :

$$d:\begin{cases} x=at-1 \\ y=3t+2 \\ z=2t \end{cases}$$

قيمة العدد لتنتمي النقطة $A(-2,5,2)$ للمستقيم d

a	0	b	-2	c	-1	d	1

43- في معلم متجانس :

$$d:\begin{cases} x=3t+1 \\ y=2t \\ z=-t+1 \end{cases} ;t\in R \quad ,\Delta:\begin{cases} x=s+2 \\ y=1 \\ z=3s+1 \end{cases} ;s\in R$$

a	منطبقان	b	متقاطعان دون تعامد	c	متوازيان دون انطباق	d	متخالفان و متعامدان

44- لدينا النقاط $A(1,2,0)$, $B(0,0,1)$, $C(1,5,5)$. إن إحداثيات النقطة D' مسقط $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC)

a	$(-2,-4,1)$	b	$(-4,2,1)$	c	$(1,2,4)$	d	$(2,4,-1$

45- إحداثيات النقطة E من محور التراتيب و متساوية البعد عن النقطتين $A(2,0,2)$, $B(2,1,0)$ هي :

a	$(0,2,0)$	b	$(0,-2,0)$	c	$\left(0,\frac{3}{2},0\right)$	d	$\left(0,-\frac{3}{2},0\right)$

46- في معلم متجانس لدينا النقاط $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$. بعد المبدأ عن المستوي (ABC) يساوي

a	$\frac{7}{6}$	b	$\frac{6}{7}$	c	$\frac{1}{36}$	d	$\frac{36}{49}$

47- ليكن المستوي $P: 2x-2y+az+3=0$

و ليكن المستقيم :

$x=1+t \quad ,y=2-t \quad ,z=3+2t$

قيمة الثابت a الذي يجعل المستقيم السابق يوازي المستوي P

a	-4	b	-1	c	-2	d	2

48- في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط $M(3,3,3)$ و المستويان :

$$P: 2x + y + 2z - 6 = 0$$
$$Q: 2x - 2y - z + 6 = 0$$

متعامدان . بعد النقطة M عن الفصل المشترك لهما يساوي

a	2	b	$\sqrt{10}$	c	$2\sqrt{5}$	d	$\sqrt{5}$

-49 $ABCD$ رباعي وجوه، و M نقطة تحقق :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB})$$

a	M منطبقة على A	b	Mمنطبقة على C	c	M منطبقة على منتصف [AB]	d	M منطبقة على [AC]

-50 إن قيمة العددين x, y المحققان للعلاقة $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3), (B,1), (C,2)$

a	$x = \frac{1}{6}, y = -\frac{1}{3}$	b	$x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{6}$	c	$y = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{6}$	d	$x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}$

-51 ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و ليكن I مركز ثقل المثلث BCD . و النقطة K نظيرة A بالنسبة لـ I . فإن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

a	$(A,-3)$ $(B,2)$ $(D,2)$ $(C,-2)$	b	$(A,-3)$ $(B,-2)$ $(D,2)$ $(C,2)$	c	$(A,-3)$ $(B,2)$ $(D,2)$ $(C,2)$	d	$(A,-3)$ $(B,-2)$ $(D,-2)$ $(C,-2)$

-52 $ABCD$ رباعي وجوه و I مركز ثقل المثلث ABC، H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,\alpha), (C,1), (B,1), (A,1)$

قيمة α التي تجعل H منتصف $[DI]$ هي:

a	1	b	2	c	3	d	-2

-53 المستويان P ، Q معادلتاهما $P: x + 2y = 4$ ، $Q: x - y = 1$ عندئذ التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لهما:

a	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$	B	$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \{t \in \mathbb{R}\}$	C	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \{t \in \mathbb{R}\}$	d	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \{t \in \mathbb{R}\}$

-54 المعادلات الثلاث $P_1: x + 2y + z = 5$ ، $P_2; 2x - y = 1$ ، $P_3: 3x + y = 4$ تمثل ثلاثة مستويات:

a	متوازية	b	متقاطعة بنقطة واحدة	c	متقاطعة بفصل مشترك	d	متعامدة

-55 A و B نقطتان مختلفتان في الفراغ، عندئذ مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $MA = 4MB$ هي:

a	نقطة وحيدة	c	المستوي المحوري لـ $[AB]$	d	مستقيم	e	كرة

-56 $P: x + y - z + 2 = 0$ معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ حيث $I(2,0,1)$، عندئذ إحداثيات J هي:

a	$(0,2,-1)$	b	$(0,-2,3)$	c	$(1,2,3)$	d	$(1,1,2)$	e	$(3,4,1)$

57- نتأمل ثلاث نقاط A,B,C من الفراغ وعددا حقيقيا α من المجال $[-1,+1]$ نرمز بالرمز G_α الى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,1+\alpha^2),(C,-\alpha)$، إن $\overrightarrow{BG_\alpha}$ تساوي:

a	$-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	b	$\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	c	$\frac{1-\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	d	$\frac{\alpha-1}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	e	$\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\overrightarrow{AC}$

58- ليكن لدينا الكرة S التي مركزها $(1,0,1)$ ونصف قطرها R والمستوي $P: 2x+y-2x=12$.

إذا كان تقاطع S وP هو دائرة نصف قطرها $r=3$ ، إن R يساوي:

a	$2\sqrt{3}$	b	5	c	3	d	$3\sqrt{2}$

59- المستقيمان L وL' معرفان وسيطياً وفق الآتي: $L\begin{cases}x=\lambda\\ y=\lambda-1\\ z=1\end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$ ، $L'\begin{cases}x=t+1\\ y=1\\ z=t\end{cases} t\in\mathbb{R}$

إن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين L, L' هي:

a	$(2,-1,1)$	b	$(1,1,2)$	c	$(-1,-1,2)$	d	$(2,1,1)$

60- $ABCM$ متوازي أضلاع عندئذ M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

A	$(A;1),(B;1),(C;-1)$	B	$(A;-1),(B;1),(C;1)$	C	$(A;1),(B;-1),(C;1)$	d	$(A;-1),(B;1)$ $(C;2)$

61- في معلم متجانس للفراغ، لتكن $A(1,2,1)$ والمستقيم (d) الممثل وسيطياً وفق: $x=0, y=-t, z=-t+1 : t\in\mathbb{R}$ عندئذ معادلة المستوي المار بالنقطة A ويعامد (d) هي:

a	$z+y-3=0$	b	$y-z-3=0$	c	$x+y+3=0$	d	$y-z+3=0$	e	$x+3=0$

62- في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. معادلات ثلاثة مستويات، بحل الجملة الخطية الموافقة فإن هذه المستويات:

$$P_1: x+y+z=1$$
$$P_2: -2y+z=1$$
$$P_3: -4y+14z=-2$$

a	متوازية	b	تشترك بمستقيم	c	لا تشترك بأية نقطة	d	تشترك بنقطة	e	متعامدة

63- نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، المستويين P وQ : $\begin{cases}x-y+1=0\\ x+y-1=0\end{cases}$ فإن التمثيلات الوسيطية لفصلهما المشترك بدلالة $t\in\mathbb{R}$ هو:

a	$\begin{cases}x=-t\\ y=2\\ z=0\end{cases}$	b	$\begin{cases}x=0\\ y=t\\ z=1\end{cases}$	c	$\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=-t\end{cases}$	d	$\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=t\end{cases}$	e	$\begin{cases}x=0\\ y=2\\ z=t\end{cases}$

64- إذا علمت أن نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأن $\vec{u}.\vec{v}=-5$ فإن $(\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$ يساوي:

a	4	b	8	c	2	d	5	e	3

-65 ABCDEFGH مكعب طول حرفه 2 نعرف عليه معلماً $\left(D;\frac{1}{2}\overrightarrow{DA},\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\right)$. عندئذٍ معادلة مجموعة نقطة الفراغ التي تنتج عن دوران الضلع [BF] من المستطيل $BFHD$ حول (DH)

a	$x^2+y^2=8\ \ ,0\le z\le 2$	b	$x^2+y^2=2\ \ ,\quad 0\le z\le 2$
c	$x^2+y^2-2z^2=0\ ,\quad 0\le z\le 2$	d	$x^2+y^2=2\ \ ,0\le z\le 1$

-66 بفرض A,B نقطتان متمايزتان في الفراغ , في الخيارات الآتية نضع توصيفاً لمجموعة النقاط M المحققة للشرط المذكور

a	$\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$ المستوي المحوري للقطعة $[AB]$	b	$\mathrm{MB}=\mathrm{AB}$ كرة مركزها B و نصف قطرها AB
c	$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ تمثل نقطة وحيدة هي منتصف القطعة [AB]	d	$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ نقطة وحيدة $\mathrm{M}=\mathrm{A}$

-67 أكمل العبارة الآتية : أعان الله المدرسين الذين ...

a	لا يملكون أقلاماً ملونة	b	يمسحون السبورة بأنفسهم
c	لا يملكون طلاب مثلكم	d	يدرسوننا