التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ,x\neq 0\\ m & ,x=0\end{cases}$$

1. جد نهاية التابع f عند الصفر
2. عين قيمة العدد m ليكون التابع f مستمراً عند الصفر

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x+\frac{E(x)}{x^2+1}$$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط البياني في جوار $+\infty$

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط البياني في جوار الـ $-\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط البياني C

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
2. أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$
3. ادرس الوضع النسبي بين Δ والخط C

التمرين الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-3\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x+3}$$

1. احسب $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$
2. احسب $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$
3. استنتج معادلة المقارب المائل Δ
4. ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

التمرين السادس:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$$

1. اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2]$
2. ارسم التابع $f(x)$ على المجال $[0,2]$
3. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$
4. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(f(x)\right)$
5. ادرس استمرارية التابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=1$

انتهت الأسئلة..

بالتوفيق الدائم ^_^

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ,x\neq 0\\ m & ,x=0\end{cases}$$

1. جد نهاية التابع f عند الصفر
2. عين قيمة العدد m ليكون التابع f مستمراً عند الصفر

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$=\frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$=\frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}$$

$$=\frac{x\sin x}{x^2}.\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$

$$=\frac{\sin x}{x}.\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=(1)(2)=2$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

الطلب الثاني:

لكي يكون التابع f مستمر عند الصفر يجب تحقق

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2$$

$$f(0)=m$$

$$\to 2=m$$

وبالتالي

$$m=2$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x+\frac{E(x)}{x^2+1}$$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط البياني في جوار $+\infty$

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$=x+\frac{E(x)}{x^2+1}-x$$

$$=\frac{E(x)}{x^2+1}$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)$$

$$x-1<E(x)\leq x$$

نقسم على x^2+1

$$\frac{x-1}{x^2+1}<\frac{E(x)}{x^2+1}\leq\frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{x-1}{x^2+1}<h(x)\leq\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى فإن:

$$\lim_{x\to 0} h(x)=0$$

وبالتالي المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط البياني في جوار الـ $-\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط البياني C

إثبات أن المستقيم Δ مقارب مائل للخط البياني:

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$=x-\sqrt{x^2-1}-2x$$

$$=-x-\sqrt{x^2-1}$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$h(x)=-x-\sqrt{x^2-1}$$

$$=\frac{\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)}{-x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{x^2-x^2+1}{-x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\frac{1}{\infty}=0$$

وبالتالي فإن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط البياني في جوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي:

نشكل الفرق (مشكلينو من الطلب السابق)

$$h(x)=-x-\sqrt{x^2-1}$$

نعدم الفرق:

$$-x-\sqrt{x^2-1}=0$$

نعزل الجذر:

$$\sqrt{x^2-1}=-x$$

بشرط $x<0$ نربع الطرفين:

$$x^2-1=x^2$$

$$-1\neq 0$$

إذاً الفرق لا ينعدم..

ننظم جدول الوضع النسبي ولتحديد الإشارات نأخذ قيمة اختيارية من المجال الموافق ونعوضها في الفرق $h(x)$

x	$-\infty$ -1		1 $+\infty$
$h(x)$	$+$		$-$
الوضع النسبي	c فوق Δ		c تحت Δ

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
2. أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$
3. ادرس الوضع النسبي بين Δ والخط C

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

لما كان $x \to +\infty$ فإن $|x| = x$

$$f(x) = x + \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= x + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

لما كان $x \to -\infty$ فإن $|x| = -x$

$$f(x) = x + \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - 1 = -\infty$$

الطلب الثاني:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$= \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$$

لما كان $x \to +\infty$ فإن $|x| = x$

$$= \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

وبالتالي المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني في جوار $+\infty$

الطلب الثالث:

نشكل الفرق:

$$h(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1$$

$$x=\sqrt{x^2+1}$$

$$\sqrt{x^2+1}=x$$

بشرط $x>0$ نربع الطرفين:

$$x^2+1=x^2$$

$$1\neq 0$$

إذاً الفرق لا ينعدم..

ننظم جدول الوضع النسبي وفق:

x	$-\infty$ $+\infty$
$h(x)$	$-$
الوضع النسبي	c تحت Δ

التمرين الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-3\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x+3}$$

1. احسب $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$
2. احسب $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$
3. استنتج معادلة المقارب المائل Δ
4. ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

الطلب الأول:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{2x^2-7x-3}{x+3}}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{2x^2-7x-3}{x^2+3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2\to a=2$$

الطلب الثاني:

$$f(x)-2x$$

$$=\frac{2x^2-7x-3}{x+3}-2x$$

$$=\frac{2x^2-7x-3-2x^2-6x}{x+3}$$

$$=\frac{-11x-3}{x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=-11\to b=-11$$

الطلب الثالث:

من الطلب السابق نستنتج أن معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$ تعطى وفق: $\Delta: y=2x-11$

الطلب الرابع:

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$=\frac{2x^2-7x-3}{x+3}-2x+11$$

$$=\frac{2x^2-7x-3-2x^2-6x+11x+33}{x+3}$$

$$=\frac{30}{x+3}$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$

$$\frac{30}{x+3}=0$$

$$30\neq 0$$

إذاً الفرق لا ينعدم..

ننظم جدول الوضع النسبي ولتحديد الإشارات نأخذ قيمة اختيارية من المجال الموافق ونعوضها في الفرق $h(x)$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	c تحت Δ	$\|\|$	c فوق Δ

التمرين السادس:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$$

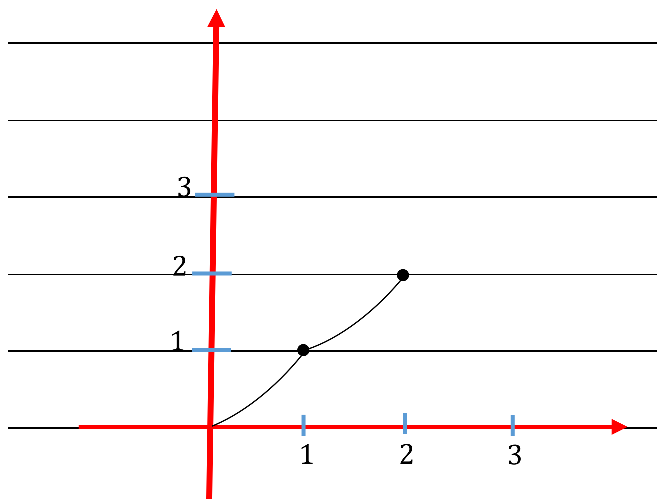
1. **اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2]$**
2. **ارسم التابع $f(x)$ على المجال $[0,2]$**
3. **احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$**
4. **احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(f(x)\right)$**
5. **ادرس استمرارية التابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=1$**

الطلب الأول:

$$E(x)=\begin{cases}0\ , x\in[0,1[\\ 1\ ; x\in[1,2[\\ 2\ ;\quad x=2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ;\ x\in[0,1[\\ 1+(x-1)^2 & ; x\in[1,2[\\ 2 & ;\quad x=2\end{cases}$$

الطلب الثاني:



الطلب الثالث:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{E(x)+\left(x-E(x)\right)^2}{x}$$

$$x-1<E(x)\le x$$

$$-x+1>-E(x)\ge -x$$

$$1>x-E(x)\ge 0$$

$$1>\left(x-E(x)\right)^2\ge 0$$

$$E(x)+1>E(x)+\left(x-E(x)\right)^2\ge E(x)$$

بشرط $x>0$

$$\underbrace{\frac{E(x)+1}{x}}_{g(x)}>\frac{E(x)+\left(x-E(x)\right)^2}{x}\ge\underbrace{\frac{E(x)}{x}}_{h(x)}$$

إيجاد نهاية التابع $g(x)$ وفق:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)$$

$$x-1<E(x)\le x$$

$$x<E(x)+1\le x+1$$

بشرط $x>0$

$$\frac{x}{x}<\frac{E(x)+1}{x}\le\frac{x+1}{x}$$

$$1<g(x)\le\frac{x+1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى فإن:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=1$$

إيجاد نهاية التابع $h(x)$ وفق:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)$$

$$x-1<E(x)\le x$$

بشرط $x>0$:

$$\frac{x-1}{x}<\frac{E(x)}{x}\le\frac{x}{x}$$

$$\frac{x-1}{x}<h(x)\le 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى فإن:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=1$$

ومنه:

$$g(x)>\frac{f(x)}{x}\geq h(x)$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

الطلب الرابع:

$$\lim_{(x\to+\infty)}f(x)$$

$$x-1<E(x)\leq x$$

$$-x+1>-E(x)\geq -x$$

$$1>x-E(x)\geq 0$$

$$1>\big(x-E(x)\big)^2\geq 0$$

$$\underbrace{E(x)+1}_{g(x)}>E(x)+\big(\underbrace{x-E(x)}_{h(x)}\big)^2\geq E(x)$$

$$E(x)+1>f(x)\geq E(x)$$

إيجاد نهاية التابع $g(x)$ وفق:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)$$

$$x-1<E(x)\leq x$$

$$x<E(x)+1\leq x+1$$

$$x<g(x)\leq x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة فإن:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

إيجاد نهاية التابع $h(x)$ وفق:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)$$

$$x-1<E(x)\leq x$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة فإن:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$$

ومنه:

$$f(x)\geq h(x)$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة فإن:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

استنتاج $\lim_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)=+\infty$$

الطلب الخامس:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ;\ x\in[0,1[\\ 1+(x-1)^2 & ;x\in[1,2[\\ 2 & ;\quad x=2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=1$$

$$f(1)=1$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=1$$

وبالتالي التابع f مستمر عند الواحد..