

السؤال الأول:

أوجد نهاية كل من التوابع الآتية:

$$f(x) = \frac{2\sin x + 5}{\sqrt{x+1}}; a = +\infty \quad 1.$$

$$f(x) = \frac{x - |\sin x|}{x^2}; a = +\infty \quad 2.$$

الحل:

1. نستعمل مبرهنات الإحاطة لوجود $\sin(+\infty)$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نضرب ب 2:

$$-2 \leq 2\sin x \leq 2$$

نضيف 5:

$$3 \leq 2\sin x + 5 \leq 7$$

نقسم على $\sqrt{x+1} \geq 0$:

$$\frac{3}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{2\sin x + 5}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x+1}} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sin x + 5}{\sqrt{x+1}} = 0$$

2. نستعمل مبرهنة الإحاطة لوجود $\sin(+\infty)$

$$0 \leq |\sin x| \leq 1$$

نضرب ب -1:

$$0 \geq -|\sin x| \geq -1$$

نضيف $x \geq 0$ لأن $x \rightarrow +\infty$:

$$x \geq x - |\sin x| \geq x - 1$$

نقسم على $x^2 \geq 0$:

$$\frac{x}{x^2} \geq \frac{x - |\sin x|}{x^2} \geq \frac{x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x^2} = 0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - |\sin x|}{x^2} = 0$$

السؤال الثاني:

ليكن التابع f الذي يحقق العلاقة:

$$\frac{3x + \sin(2x)}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{3x + 8}{x^2 + 1}$$

أوجد نهاية f عند $+\infty$.

الحل:

نحسب النهاية الأولى وهي:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 8}{x^2 + 1} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

نحسب النهاية الثانية وهي:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin(2x)}{x^2} = \sin(+\infty) \Rightarrow \text{إحاطة}$$

$$-1 \geq \sin(2x) \geq 1$$

نضيف $3x \geq 0$:

$$3x - 1 \geq 3x + \sin(2x) \geq 3x + 1$$

نقسم على $x^2 \geq 0$:

$$\frac{3x - 1}{x^2} \geq \frac{3x + \sin(2x)}{x^2} \geq \frac{3x + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{x^2} = 0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin(2x)}{x^2} = 0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على R بالشكل :

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

1- أثبت أن C لا يقبل مقاربات أفقية

2- أثبت أن $f(x) - x = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

ثم استنتج أن C يملك مقارباً مائلاً Δ في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ

الحل:

$$1- (x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$2- f(x) - x = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

نضرب بالمرافق:

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x^2 + 1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

نستنتج أن معادلة المقارب المائل:

$$y_{\Delta} = x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0$$

3- نلاحظ أن:

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} > 0$$

C فوق Δ .

السؤال الرابع:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

ليكن التابع f المعروف بالشكل $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

1- أوجد مجموعة تعريف f وعين ما له من مقاربات شاقولية.

2- عين معادلة مقارب مائل للخط C_f .

3- ادرس الوضع النسبي لـ C_f مع المقارب المائل.

الحل:

1- نعدم المقام:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

إما:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

أو:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

فإن:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

$$=]-\infty, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{15}{0^-} = -\infty$$

$x = 2$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{15}{0^+} = +\infty$$

$x = 2$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{43}{0^+} = +\infty$$

$x = 3$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{43}{0^-} = -\infty$$

$x = 3$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$.

2- بقسمة البسط على المقام القسمة الإقليدية نجد:

$$f(x) = x + 7 + \frac{28x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

نفرض:

$$y_{\Delta} = x + 7$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y_{\Delta} = 0$$

فهو مقارب مائل في كل من الجوارين $\pm\infty$.

3- لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_{\Delta} = 0$$

$$\frac{28x + 1}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

$$28x + 1 = 0$$

$$28x = -1$$

$$x = -\frac{1}{28}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{28}$	2	3	$+\infty$
$\frac{28x + 1}{x^2 - 5x + 6}$	-	0	+	-	+
الوضع النسبي	فوق	تحت	فوق	تحت	فوق

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف وفق:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

1- جد مجموعة تعريف التابع f

2- جد معادلة المقارب الأفقي للتابع

3- ادرس الوضع النسبي للمقارب الأفقي مع C .

الحل:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

1- نعدم مقام التابع:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

مستحيلة.

$$D_f = \mathbb{R}$$

2- لإيجاد معادلة المقارب الأفقي:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $\pm\infty$.

3- نشكل الفرق ونعدم:

$$f(x) - 0 = \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

نعدم:

$$\frac{x + 2}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{1}{x} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right) = 0(1) = 0$$

و $f(0) = 1$ فالتابع غير مستمر عند 0 لأن

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

السؤال الثامن: ادرس قابلية الاشتقاق عند النقطة a الموافقة:

$$f(x) = 2\sqrt{x} + x; a = 1 \quad 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{0}{0} \text{ ح ع ت} \\ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{2\sqrt{x} + x - 2 - 1}{x - 1} \\ &= \frac{(2\sqrt{x} - 2) + (x - 1)}{x - 1} \\ &= \frac{2(\sqrt{x} - 1) + (x - 1)}{x - 1} \\ &= \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} + 1 \\ &= \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

فالتابع قابل للاشتقاق عند $x = 1$.

$$f(x) = \sqrt{2 - x}; a = 2 \quad 2.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2 - x} - 0}{-(2 - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{-\sqrt{2 - x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

غير قابل للاشتقاق عند $x = 2$.

$$f(x) = \sin(2x); a = 0 \quad 3.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x)}{2x} \\ &= 2(1) = 2 \end{aligned}$$

قابل للاشتقاق عند $x = 0$.

$$f(x) = (2x - 4)\sqrt{x - 2}; a = 2 \quad 4.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)\sqrt{x - 2}}{x - 2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

السؤال التاسع: أوجد معادلة المماس عند النقطة a الموافقة:

سنستخدم هذا القانون في الحل:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$f(x) = x^2 + 2, a = 1 \quad 1.$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f(1) = 3$$

$$f'(1) = 2$$

$$y = 2(x - 1) + 3 = 2x - 2 + 3 = 2x + 1$$

$$f(x) = \sqrt{2x + 1}, a = 2 \quad 2.$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$f(2) = \sqrt{5}$$

عندما $x < -2$ فإن C تحت المقارب الأفقي.

عندما $x > -2$ فإن C تحت المقارب الأفقي.

السؤال السادس:

ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + \frac{E(x)}{x + 1}$$

1- اثبت أن Δ الذي معادلته $y_{\Delta} = x + 1$ مقارب مائل لـ f .

2- احسب $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$

الحل:

1- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{E(x)}{x + 1} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_{\Delta} = E(\infty) \Rightarrow \text{إحاطة}$$

$$x - 1 \leq E(x) \leq x$$

نقسم على $x + 1 > 0$ في جوار $+\infty$

$$\frac{x - 1}{x + 1} \leq \frac{E(x)}{x + 1} \leq \frac{x}{x + 1}$$

نطرح 1:

$$\frac{x - 1}{x + 1} - 1 \leq f(x) - y_{\Delta} \leq \frac{x}{x + 1} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x + 1} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 1} - 1 = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_{\Delta} = 0$$

وبالتالي Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

2- لحساب النهاية:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) &= \sqrt{2} + \frac{E(\sqrt{2})}{\sqrt{2} + 1} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \end{aligned}$$

السؤال السابع:

ادرس استمرار كل من التوابع الآتية عند $a = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

الحل:

شرط استمرار تابع:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

التابع الأول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ ح ع ت } (0) = +\infty$$

نضرب ونقسم على $\frac{1}{x}$:

السؤال العاشر:

اكتب معادلة المماس الذي ميله 4.

الحل:

$$f(x) = 2x - x^2$$

$$f'(x) = 2 - 2x$$

$$f'(a) = 4$$

$$2 - 2a = 4$$

$$\Rightarrow a = -2$$

$$f(-2) = -4 - 4 = -8$$

$$y = 4(x + 2) - 8$$

$$= 4x$$

السؤال الحادي عشر:

اكتب معادلة المماس في النقطة التي ترتيبها -1.

الحل:

$$f(x) = x^2 - 5x + 5$$

$$f'(x) = 2x - 5$$

$$f(a) = -1$$

$$a^2 - 5a + 5 = -1$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$(a - 3)(a - 2) = 0$$

إما:

$$a = 3$$

$$f(3) = 9 - 15 + 5 = -1$$

$$f'(3) = 2(3) - 5 = 1$$

$$\Rightarrow y_1 = 1(x - 3) - 1 = x - 4$$

أو:

$$a = 2$$

$$f(2) = 4 - 10 + 5 = -1$$

$$f'(2) = -1$$

$$\Rightarrow y_2 = -1(x - 2) - 1 = x - 3$$

السؤال الثاني عشر:

اكتب معادلة المماس في نقطة التقاطع مع محور الفواصل.

الحل:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2) + \sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2+5}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$f(x) = \sin(x), a = \frac{\pi}{2} \quad .3$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y = 0\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, a = 0 \quad .4$$

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$y = 1(x - 0) + 0$$

$$y = x$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}, a = -1 \quad .5$$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

$$f(-1) = 1 - 1 = 0$$

$$f'(-1) = -2 - 1 = -3$$

$$y = -3(x + 1) + 0$$

$$= -3x - 3$$

$$f(x) = 1 - \frac{3}{x}, a = 1 \quad .6$$

$$f'(x) = +\frac{3}{x^2}$$

$$f(1) = -2$$

$$f'(1) = 3$$

$$y = 3(x - 1) - 2$$

$$= 3x - 3 - 2 = 3x - 5$$

$$f(x) = \sin x, a = 0 \quad .7$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$y = 1(x - 0) + 0$$

$$y = x$$

$$f(x) = \tan x, a = \frac{\pi}{4} \quad .8$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$y = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

$$= 2x - \frac{\pi + 2}{2}$$

2- إن f يقبل مماساً شاقولياً عند $a = 1$ ومعادلته $x = 1$.

السؤال الخامس عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{x+3|x|}{x^2+3}$

- 1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $a = 0$
- 2- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للخط c_f عند $a = 0$
- 3- اكتب معادلة نصف المماس من اليسار للخط c_f عند $a = 0$

الحل:

1- لدراسة قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

نزول القيمة المطلقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x^2+3}; & x \in]-\infty, 0] \\ \frac{-2x}{x^2+3}; & x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4x}{x^2+3} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x^2+3} \\ &= \frac{4}{3} = f'(0^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-2x}{x^2+3} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x^2+3} \\ &= -\frac{2}{3} = f'(0^-) \end{aligned}$$

2- معادلة نصف المماس اليميني:

$$\begin{aligned} y_{T_1} &= f'(0^+)(x - 0) + f(0) \\ &= \frac{4}{3}x \end{aligned}$$

3- معادلة نصف المماس اليساري:

$$\begin{aligned} y_{T_2} &= f'(0^-)(x - 0) + f(0) \\ &= -\frac{2}{3}x \end{aligned}$$

السؤال السادس عشر:

ليكن c_f الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{2}{|x|+\sqrt{2}}$

- 1- ادرس قابلية الاشتقاق التابع f عند $a = 0$
- 2- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للخط c_f عند $a = 0$
- 3- اكتب معادلة نصف المماس من اليسار للخط c_f عند $a = 0$

الحل:

1- لدراسة قابلية الاشتقاق سنكتب التابع بصيغة مستقلة عن القيمة المطلقة:

$$f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

في التقاطع مع محور الفواصل نضع:

$$y = 0$$

$$f(a) = 0$$

$$\frac{a+1}{a-1} = 0$$

$$\Rightarrow a = -1$$

$$f'(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= -\frac{1}{2}(x+1) + 0 \\ &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

السؤال الثالث عشر:

اكتب معادلة المماس في نقطة التقاطع مع محور الترتيب.

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

في التقاطع مع محور الترتيب نضع:

$$x = 0$$

$$f(0) = -1$$

$$f'(0) = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= -\frac{1}{4}(x-0) - 1 \\ &= -\frac{1}{4}x - 1 \end{aligned}$$

السؤال الرابع عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع $f(x) = \sqrt{x-1}$

1- ادرس قابلية الاشتقاق عند $a = 1$

2- فسر النتيجة هندسياً

الحل:

1- لدراسة قابلية الاشتقاق:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty \end{aligned}$$

غير قابل للاشتقاق عند $a = 1$.

$$f^{(3)}(x) = -\frac{3}{x^4}$$

2- نستخدم الاثبات بالتدريج:

$$E(n): f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

محقة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \dots \dots \text{الفرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}} \dots \dots \text{الطلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

نشق:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)(n+1)x^n(-1)^n n!}{x^{2n+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{2n+2-n}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}$$

فالمساواة صحيحة.

دراسة تغيرات تابع

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف وفق $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$

- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب ما تجده من مقاربات
- جد معادلة المقارب المائل للخط C عند $+\infty$ و $-\infty$
- ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب المائل
- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها
- اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب
- أثبت أن النقطة $A(-1, -2)$ هي مركز تناظر للخط C
- ارسم ما وجدته من مقاربات و ا رسم T ثم ا رسم C
- ناقش بياناً حلول المعادلة $3 + m(-x-1) + x^2 = 0$

الحل:

1- نوجد مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x + \sqrt{2}} ; x \in [0, +\infty[\\ \frac{2}{-x + \sqrt{2}} ; x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

نميز حالتين:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x + \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2} - 2x - 2\sqrt{2}}{x(x + \sqrt{2})(\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{(x + \sqrt{2})(\sqrt{2})} = -1 = f'(0^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2}{\sqrt{2} - x} - \frac{2}{\sqrt{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2x}{x(\sqrt{2} - x)\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x(\sqrt{2} - x)\sqrt{2}} = 1 = f'(0^-)$$

2- لكتابة معادلة نصف المماس اليميني:

$$y_{T_1} = f'(0^+)(x - 0) + f(0)$$

$$= -1(x - 0) + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= -x + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

3- لكتابة معادلة المماس اليساري:

$$y_{T_2} = f'(0^-)(x - 0) + f(0)$$

$$= 1(x - 0) + \frac{2}{\sqrt{2}} = x + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

السؤال السابع عشر:

ليكن $f(x) = 2\cos(3x)$ أثبت أن $f''(x) + 9f(x) = 0$

الحل:

$$f'(x) = -6\sin(3x)$$

$$f''(x) = -18\cos(3x)$$

لننتقل من طرف لنصل إلى آخر:

$$f''(x) + 9f(x)$$

$$= -18\cos(3x) + 18\cos(3x) = 0$$

السؤال الثامن عشر:

ليكن f التابع المعروف وفق $f(x) = \frac{1}{x}$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$

2- أثبت أن $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

الحل:

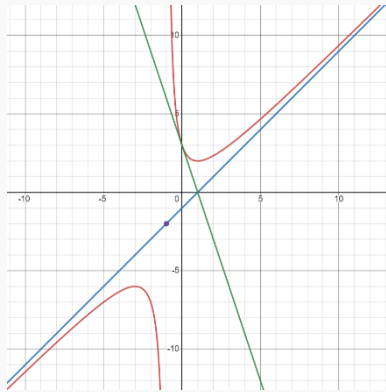
1- نحسب المشتقات:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{-2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 + 3 - (7 + 4x + x^2)}{x + 1} \\
&= \frac{x^2 + 3 - 7 - 4x - x^2}{x + 1} \\
&= \frac{-4(x + 1)}{(x + 1)} = -4
\end{aligned}$$

-7 الرسم:



-8 ننتقل من:

$$\begin{aligned}
3 + m(-x - 1) + x^2 &= 0 \\
m(-x - 1) &= -x^2 - 3 \\
m &= \frac{-(x^2 + 3)}{-(x + 1)} = f(x) \\
f(x) &= m
\end{aligned}$$

الحل: $\begin{cases} m \in]-\infty, -6[\text{ حلان} \\ m = -6 \text{ وحيد} \\ m \in]-6, 2[\text{ لا يوجد حلول} \\ m = 2 \text{ وحيد} \\ m \in]2, +\infty[\text{ حلان} \end{cases}$ الحلول بيانياً

المسألة الثانية:

$$f(x) = x - 4 + \sqrt{x - 2} :]2, +\infty[$$

- 1- ادرس تغيرات f على المجال $]2, +\infty[$ و نظم جدولاً بها
- 2- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد
- 3- اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 3$

الحل:

1- نوجد النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 - 4 + 0 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع اشتقاقي على $]2, +\infty[$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x-2} + 1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2\sqrt{x-2} + 1}{2\sqrt{x-2}} = 0$$

$$2\sqrt{x-2} + 1 = 0$$

$$2\sqrt{x-2} = -1$$

-1 $x =$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.

-2 بقسمة التابع قسمة إقليدية:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x + 1}$$

نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{4}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

-3 لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = 0$$

$$4 \neq 0$$

مستحيلة.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{4}{x+1}$	-		+
الوضع النسبي	تحت		فوق

-4 لدراسة التغيرات:

التابع f معرف واشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f(x)$		0		0	
$f'(x)$	$-\infty \nearrow$	$-6 \searrow$	$-\infty \nearrow$	$+\infty \searrow$	$+\infty \nearrow$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = -3$$

$$f(1) = \frac{4}{2} = 2$$

$$f(-3) = \frac{12}{-2} = -6$$

-5 التقاطع مع محور الترتيب:

$$x = 0$$

$$y_T = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$= -3(x - 0) + 3 = -3x + 3$$

-6 النقطة $A(-1, -2)$:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 - x \in \mathbb{R}$$

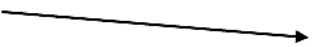
$$f(x) + f(2a - x) = 2b$$

$$f(x) + f(-2 - x)$$

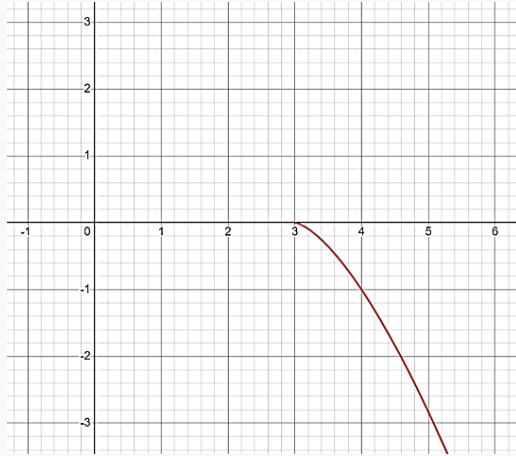
$$= \frac{x^2 + 3}{x + 1} + \frac{(-2 - x)^2 + 3}{-2 - x + 1}$$

$$= \frac{x^2 + 3}{x + 1} + \frac{4 + 4x + x^2 + 3}{-x - 1}$$

$$f(3) = 0$$

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	0	-----
$f(x)$	0	

-4 الرسم:



المسألة الرابعة:

ليكن $f(x) = x - \sin x$ اثبت أن f متزايد

الحل:

التابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} > 0$$

المشتق موجب فالتابع متزايد.

المسألة الخامسة:

ليكن التابع f المعروف بالشكل:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

- 1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
- 2- اوجد معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي
- 3- أثبت أن f فردي
- 4- ارسم المقارب المائل وارسم C_f
- 5- بفرض $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$

- أ- أثبت بالتدريج $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$
- ب- أستنتج أن المتتالية متقاربة و عين نهايتها

الحل:

1- مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\sqrt{x-2} = -\frac{1}{2}$$

مستحيلة.

x	+2	$+\infty$
$f'(x)$		+++++
$f(x)$	-2	

2- نجد من جدول التغيرات السابق أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً.

3- نعوض في قانون معادلة المماس:

$$\begin{aligned} y &= f'(3)(x-3) + f(3) \\ &= \frac{7}{2}(x-3) + 0 \\ &= \frac{7}{2}x - \frac{21}{2} \end{aligned}$$

المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = (3-x)\sqrt{x-3}$

- 1- جد مجموعة تعريف التابع f
- 2- أثبت أن f قابل للاشتقاق عند $a = 3$ ثم استنتج معادلة المماس عند $a = 3$
- 3- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها
- 4- ارسم C

1- التابع $\sqrt{x-3}$ معرف على:

$$x-3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$\Rightarrow D_{\sqrt{x-3}} = D_f = [3, +\infty[$$

2- نعوض في تعريف العدد المشتق:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)\sqrt{x-3}}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)\sqrt{x-3}}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} -\sqrt{x-3} = 0 \end{aligned}$$

معادلة المماس الأفقي:

$$y = 3$$

3- ندرس النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

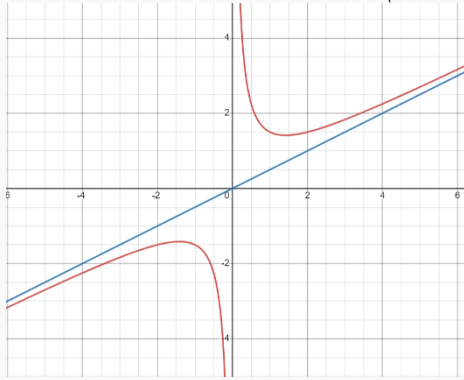
f اشتقاقي على $[3, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sqrt{x-3} + \frac{3-x}{\sqrt{x-3}} \\ &= \frac{3-x+3-x}{\sqrt{x-3}} = \frac{6-2x}{\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

نعدم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \Rightarrow 6-2x = 0 \\ &\Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

-4- الرسم:



-5- لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}, u_0 = 2$$

(أ) الإثبات:

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2} \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

صحيحة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \dots \text{فرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \dots \text{الطلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$$

نعرف تابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$ ولدينا منالجدول السابق أن f متزايد على $[\sqrt{2}, +\infty[$ وبالتالي نصور الأطراف:

$$f(\sqrt{2}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة.

(ب) لدينا من اقضية السابقة:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$$

بالتالي المتتالية متناقصة لأن:

$$u_{n+1} \leq u_n$$

ومحدودة من الأدنى لأن:

$$\sqrt{2} \leq u_n$$

فالمتتالية متقاربة ولتعيين نهايتها نحل المعادلة الآتية:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x$$

$$\frac{x^2 + 2}{2x} = x$$

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ مقبول}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ مرفوض}$$

وبالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

 $x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

 $x = 0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه. f اشتقاقي على $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$+\sqrt{2}$	$+\infty$					
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$				
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

-2- نفرض معادلة المقارب المائل:

$$y_\Delta = \frac{1}{2}x$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

وبالتالي Δ مقارب مائل في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = 0$$

$$\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$$

مستحيلة

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	-		+
الوضع	تحت		فوق

-3- لإثبات أن التابع فردي:

$$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$f(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

فالتابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

$$x^2 + 1 = 7x$$

$$x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(1)(1) = 45 > 0$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{45}}{2} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \text{ مقبول}$$

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{45}}{2} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ مقبول}$$

والحلان مقبولان حسب شرط الحل.

المعادلة الثانية:

$$\ln(x^2 - 4) = \ln(2x - 4)$$

$$E_1 =] - \infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

$$E_2 =]2, +\infty[$$

$$\Rightarrow E = E_1 \cap E_2 =]2, +\infty[$$

$$x^2 - 4 = 2x - 4$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

إما:

$$x = 0 \text{ مرفوض}$$

أو:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ مرفوض}$$

السؤال الثالث:

ليكن لدينا التابعان f و g المعرفان وفق:

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln(x)$$

والتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x)}{x}$$

أولاً:

(1) ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها.

(2) استنتج إشارة $g(x)$ من جدول التغيرات.

ثانياً:

(1) احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

(2) أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ واستنتج جدول تغيرات f .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$$

التابع اللوغارتمي

السؤال الأول:

ليكن f التابع المعرف على $]e^{-1}, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{\ln(x) + 2}{\ln(x) + 1}$$

1- احسب نهاية التابع f عند $+\infty$.

2- جد عدداً حقيقياً A ليحقق الشرط: $f(x) \in]0.9, 1.1[$ عندما $x > A$.

3- استنتج نهاية $f(f(x))$ عند $+\infty$.

الحل:

1- لحساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) \left(1 + \frac{2}{\ln(x)}\right)}{\ln(x) \left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)} = 1$$

2- لإيجاد العدد A :

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\varepsilon = b - l = 0.1 = \frac{1}{10}$$

نعوض:

$$\left| \frac{\ln(x) + 2}{\ln(x) + 1} - 1 \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{\ln(x) + 2 - \ln(x) - 1}{\ln(x) + 1} \right| = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{\ln(x) + 1} < \frac{1}{10}$$

نقلب:

$$\ln(x) + 1 > 10$$

$$\ln(x) > 9$$

$$x > e^9$$

$$A = e^9 \text{ نختار}$$

3- لاستنتاج النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{X \rightarrow 1} f(X) = 2$$

السؤال الثاني:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية:

$$\ln(x^2 + 1) = \ln(7x)$$

$$\ln(x^2 - 4) = \ln(2x - 4)$$

الحل:

المعادلة الأولى:

$$\ln(x^2 + 1) = \ln(7x)$$

$$E_1 =] - \infty, +\infty[, E_2 =]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow E = E_1 \cap E_2 =]0, +\infty[$$

مكتفة الرياضيات/ قسم التحليل إعداد المدرس: نذير تيناوي

ثالثاً:

(1) أثبت وجود عددين حقيقيين a و b يحققان أن:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$$

(2) استنتج معادلة المقارب Δ للخط C_f , وادرس الوضع النسبي.

(3) اكتب معادلة المماس d في نقطة من C_f التي فاصلتها (1).

رابعاً: ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f .

الحل:

أولاً:

1- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty(+\infty + 0 - 0) = +\infty$$

g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ مقبول}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ مرفوض}$$

الجدول:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		----- 0	+++++
$g(x)$		$+\infty$	$+\infty$

2- نلاحظ أن:

$$g(x) \geq \frac{3}{2} + \ln(2) > 0$$

$$g(x) > 0$$

ثانياً:

(1) لحساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(2) f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 2 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$$

الجدول:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+++++
$f(x)$		$-\infty$ $+\infty$

ثالثاً:

(1) نوجد النهايات:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x \cdot x} \right)}{x}$$

$$= 2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = a$$

$$f(x) - 2x = 2x - 2 + \frac{\ln(x)}{x} - 2x$$

$$= -2 + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = -2 = b$$

(2) المعادلة:

$$y_\Delta = 2x - 2$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

إذن هو مقارب مائل.

$$f(x) - y_\Delta = 0$$

$$\ln(x) = 0$$

$$x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$\frac{\ln(x)}{x}$		----- 0	+++++
وضع		تحت	فوق

(3) لكتابة معادلة المماس:

$$y_d = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$f'(1) = 3$$

$$f(1) = 0$$

$$\Rightarrow y_d = 3(x - 1) + 0 = 3x - 3$$

رابعاً: الرسم:



السؤال الرابع:

لنكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n} ; u_0 = 0$$

ولنضع المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ وفق $v_n = u_{n+1} - u_n$ (1) أثبت أن v_n هندسية وعين أساسها وحدها العام.(2) من أجل كل $n \geq 1$ نضع $w_n = \ln(v_n)$

(أ) أثبت أنها حسابية وعين أساسها.

(ب) اكتب w_n بدلالة n .

(ت) حسب قيمة المجموع:

$$S = 1 - \frac{w_1}{\ln(2)} - \frac{w_2}{\ln(2)} - \dots - \frac{w_5}{\ln(2)}$$

الحل:

1- لإثبات أن المتتالية هندسية:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n} = v_n$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n \cdot 2}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} = q$$

المتتالية هندسية وأساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها العام $v_n = \frac{1}{2^n}$.

2- لدينا:

$$w_n = \ln(v_n)$$

أ- نوجد w_{n+1} :

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$$

نوجد الفرق:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \\ &= \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) = r \end{aligned}$$

فالممتتالية حسابية وأساسها $r = -\ln(2)$.

ب- لإيجاد الحد العام نعوض في:

$$w_n = w_0 + n \cdot r = \ln(1) - n \cdot \ln(2)$$

$$= n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

ت- لحساب قيمة المجموع:

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{w_1}{\ln(2)} - \frac{w_2}{\ln(2)} - \dots - \frac{w_5}{\ln(2)} \\ &= 1 - \left(\frac{w_1}{\ln(2)} + \frac{w_2}{\ln(2)} + \dots + \frac{w_5}{\ln(2)} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\ln(2)} (w_1 + w_2 + \dots + w_5) \end{aligned}$$

ونلاحظ أن لدينا مجموع متتالية حسابية وهو:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

$$S = n \cdot \frac{a + l}{2}$$

$$n = 5 - 1 + 1 = 5$$

$$a = w_1 = 0$$

$$l = w_5 = 5 \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow w_1 + w_2 + \dots + w_5 = 5 \cdot \frac{0 + 5 \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{\ln(2)}{2}$$

نعوض في S:

$$S = 1 - \frac{1}{\ln(2)} \left(-\frac{\ln(2)}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

السؤال الخامس:

ادرس اطراد التابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$$

واستنتج حلول المتراجحة $\sqrt{x} \geq \ln(x)$ الحل: g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x} = 0$$

$$x = \sqrt{x}$$

نربع الطرفين بشرط $x > 0$ وهي كذلك على مجموعة التعريف:

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

إما:

$$x = 0 \text{ مرفوض}$$

أو:

$$x = 1 \text{ مقبول}$$

الجدول:

نلاحظ أن:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	---	0	+++
$g(x)$		0	

$$\sqrt{x} \geq \ln(x)$$

$$\sqrt{x} - \ln(x) \geq 0$$

$$g(x) \geq 0$$

من الجدول نلاحظ أن حلها:

$$s = [1, +\infty[$$

المتتاليات

مثال 1: لتكن لدينا المتتالية $u_n = 2 \times 3^n$ و المطلوب :

1- أثبت أنها هندسية

2- احسب قيمة المجموع

$$S = u_2 + u_3 + \dots + u_{10}$$

3- احسب المجموع :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

الحل: 1- إثبات أنها هندسية :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3 = q$$

2- حساب المجموع:

$$S = a \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$a = u_2 = 2 \times 3^2 = 18$$

$$\text{عدد الحدود} : 10 - 2 + 1 = 9$$

$$S = 18 \cdot \frac{1 - 3^9}{1 - 3} = -9(1 - 3^9)$$

3- حساب المجموع :

$$S_n = a \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$a = u_0 = 2$$

$$l = u_n = 2 \times 3^n$$

$$\text{عدد الحدود} : n - 0 + 1 = n + 1$$

$$S_n = 2 \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}$$

$$S_n = -1(1 - 3^{n+1}) = 3^{n+1} - 1$$

1- ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ ، أثبت أنها هندسية .

الحل :

(1) نحسب u_{n+1} وذلك باستبدال كل n بـ $n+1$

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

(2) نحسب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right)}{\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \cdot 2^1}{3^n \cdot 3^2} \cdot \frac{3^n \cdot 3^1}{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3} = q$$

هندسية وأساسها $q = \frac{2}{3}$ 2- لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $u_n = 3 - n$ ، أثبت أنها حسابية .

الحل :

(1) نحسب u_{n+1}

$$u_{n+1} = 3 - (n + 1) = 2 - n$$

(2) نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = (2 - n) - (3 - n) = -1 = r$$

حسابية وأساسها $r = -1$ 3- لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$ ، احسب u_{20}

$$u_{20} = -13$$

الحل :

من العلاقة بين حدين

$$u_n = u_m + (n - m)r$$

$$u_5 = u_2 + (5 - 2)r$$

$$\Rightarrow -13 - 41 = 3r$$

$$-54 = 3r$$

$$\Rightarrow r = -\frac{54}{3} = -18$$

مرة أخرى

$$u_n = u_m + (n - m)r$$

$$u_{20} = u_2 + (20 - 2)r$$

$$\Rightarrow u_{20} = 41 - 324$$

$$\Rightarrow u_{20} = -324 + 41 = -283$$

4- $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية فيها $u_4 = 16$ و، احسب u_3 ، $u_1 = 2$.

الحل :

من قانون الحدين $u_n = u_m q^{n-m}$

$$u_4 = u_1 \cdot q^{4-1} \Rightarrow \frac{16}{2} = q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

مرة أخرى :

فائدة هامة (مجموع مع قفزات)

نطبق نفس القوانين مع مراعاة :

عدد الحدود = 1 + $\frac{\text{أول دليل} - \text{آخر دليل}}{\text{طول القفزة}}$ في الهندسية القفزة $q' = q$ في الحسابية القفزة $r' = r \times \text{القفزة}$

مثال :

 $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$ (1) احسب u_n بدلالة n

(2) احسب قيمة المجموع

 $u_1 + u_2 + \dots + u_7$

(3) احسب قيمة المجموع

 $u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n}$

الحل :

(1) من قانون الحدين

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \Rightarrow \frac{u_n}{u_1} = q^{n-1} \Rightarrow \frac{u_n}{-2} = 3^{n-1}$$

$$u_n = -2 \cdot (3)^{n-1}$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_7 = (2)$$

$$a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a = u_1 = -2 \cdot (3)^{1-1} = -2$$

$$q = 3$$

$$n = 7 - 1 + 1 = 7$$

$$S = -2 \frac{1-3^7}{1-3} = 1 - 3^7 = -2186$$

(3) نلاحظ أن المجموع المطلوب هنا عبارة عن مجموع لحدود

ليست متعاقبة (يوجد قفزة قدرها 2 بين كل دليل و الآخر)

لذا نتبع الخطوات التالية :

$$\frac{2n-2}{2} + 1 = n \text{ عدد الحدود الجديد}$$

$$q' = 3^2 = 9 \text{ الأساس الجديد}$$

$$u_2 = -6 : \text{الحد الأول}$$

القانون :

$$S = a \frac{1-(q')^n}{1-q'}$$

$$S = -6 \frac{1-9^n}{1-9}$$

$$u_n = u_m \cdot q^{n-m}$$

$$u_3 = u_1 \cdot 2^{3-1}$$

$$u_3 = 2 \times 4 \Rightarrow u_3 = 8$$

-5 $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$ (1) احسب u_n بدلالة n (2) احسب المجموع $u_{30} + u_{31} + u_{32}$

(3) احسب المجموع

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$$

الحل :

(1) من قانون الحدين

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

$$u_n = u_1 + (n-1)3$$

$$u_n = 2 + 3n - 3$$

$$u_n = 3n - 5$$

(2) من قانون مجموع حدود متتالية حسابية :

$$u_{30} + u_{31} + u_{32} = n \frac{(a+l)}{2}$$

حيث $a = u_{30} = 3(30) - 5 = 85$ (تم حسابه من تعويض $n=30$ في الحد العام)و $l = u_{32} = 3(32) - 5 = 91$ (تم حسابه من تعويض $n=32$ في الحد العام)و عدد الحدود $n = 32 - 30 + 1 = 3$ (آخر دليل ناقص أول دليل + 1)
بالتعويض:

$$u_{30} + u_{31} + u_{32} = 3 \frac{(85+91)}{2} = 264$$

(3) أيضاً من قانون مجموع حدود متتالية حسابية :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = n \frac{(a+l)}{2}$$

$$a = u_1 = -2$$

$$l = u_{20} = 3(20) - 5 = 55$$

$$n = 20 - 1 + 1 = 20$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = 20 \frac{(-2+55)}{2} = 530$$

-6 $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 و $u_0 = 1$, احسب

$$u_3 + u_4 + \dots + u_{10}$$

الحل : لنوجد الحد العام أولاً

$$u_n = u_0 \cdot q^n = 1 \cdot 2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow u_n = 2^n$$

$$S = u_3 + u_4 + \dots + u_{10} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a = u_3 = 2^3 = 8$$

$$q = 2$$

$$n = 10 - 3 + 1 = 8$$

$$S = 8 \cdot \frac{1-2^8}{1-2} = 8 \frac{1-2^8}{-1} = 8(2^8 - 1) = 2040$$

مكتبة الرياضيات/ قسم التحليل إعداد المدرس: نذير تيناوي

$$4^{n+1} + 5 = 3m$$

وهو المطلوب

فبالخاصة $E(n)$ صحيحة مهما يكن $n \geq 1$

2 أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: " $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7 "

الحل:

نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 1$:

$$2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

من مضاعفات العدد 7

← الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$2^{3n} - 1 = 7k \dots (\text{الفرض})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$2^{3(n+1)} - 1 = 7m$$

$$2^{3n+3} - 1 = 7m \dots (\text{الطلب})$$

حيث $m \in \mathbb{Z}$

البرهان : لدينا من الفرض

$$2^{3n} - 1 = 7k$$

نضرب الطرفين بـ 2^3 :

$$2^{3n+3} - 2^3 = 2^3(7k)$$

$$2^{3n+3} - 8 = 56k$$

نطرح 1 و نضيف 1 :

$$2^{3n+3} - 1 + 1 - 8 = 56k$$

$$2^{3n+3} - 1 - 7 = 56k$$

$$2^{3n+3} - 1 = 56k + 7$$

$$2^{3n+3} - 1 = 7 \underbrace{(8k + 1)}_m$$

$$2^{3n+3} - 1 = 7m$$

وهو المطلوب .فبالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall n \geq 1$

3 أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: " $n^3 + 2n$ مضاعف للعدد 3 "

الحل:

إذا كانت $E(n)$ قضية متعلقة بالعدد الطبيعي n حيث $n \geq n_0$ وأردنا إثبات أنها صحيحة مهما تكن $n \geq n_0$ فإن أفضل الطرق لذلك هي "الإثبات بالتدريج" أو ما يعرف بال " الاستقراء الرياضي " .

طريقة الإثبات بالتدريج :

① نرسم للقضية $E(n)$

② نثبت صحة القضية من أجل أول قيمة لـ n ولتكن n_0

③ نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة ... (الفرض)

④ نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$... (الطلب) مستفيدين من (الفرض)

النمط الأول من التمارين (المضاعفات) :

1 أثبت صحة الخاصة

" العدد $4^n + 5$ للعدد مضاعف 3 " $E(n)$; $n \geq 1$

الحل:

نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n = 1$:

$$4^1 + 5 = 4 + 5 = 9$$

من مضاعفات العدد 3

← الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$4^n + 5 = 3k \dots (\text{الفرض})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$4^{n+1} + 5 = 3m \dots (\text{الطلب})$$

حيث $m \in \mathbb{Z}$

البرهان : لدينا من الفرض :

$$4^n + 5 = 3k$$

نضرب الطرفين بـ 4^1

$$4^{n+1} + 20 = 12k$$

نضيف و نطرح 5 :

$$4^{n+1} + 5 - 5 + 20 = 12k$$

$$4^{n+1} + 5 + 15 = 12k$$

$$4^{n+1} + 5 = 12k - 15$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \dots (\text{الطلب})$$

البرهان : "دائماً في المجاميع ننطلق من (الفرض) ثم نضيف للطرفين الحد الناقص للوصول للطلب , ثم نصلح الطرف الثاني"

لدينا من (الفرض) :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نضيف للطرفين $(n+1)$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

نوحد المقامات :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

و هو المطلوب.

2

$$E(n): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n=1$:

$$l_1 = 1^3 = 1 \quad l_2 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow l_1 = l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$: أي :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \dots (\text{الفرض})$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \dots (\text{الطلب})$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} :$$

نضيف للطرفين $(n+1)^3$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

نثبت صحة الخاصة $E(n)$ من أجل $n=1$:

$$1^3 + 2(1) = 3$$

مضاعف للعدد 3

$\Leftarrow$ الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$n^3 + 2n = 3k \dots (\text{الفرض})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = 3m \dots (\text{الطلب})$$

حيث $m \in \mathbb{Z}$

البرهان :

$$l_1 = (n+1)^3 + 2(n+1)$$

$$l_1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$$

$$l_1 = (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3$$

ولكن حسب (الفرض) لدينا

$$n^3 + 2n = 3k$$

نعوض:

$$l_1 = 3k + 3n^2 + 3n + 3$$

$$l_1 = 3(k + n^2 + n + 1)$$

$$l_1 = 3m$$

وهو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall n \geq 1$

النمط الثاني من التمارين (المجاميع) :

$$E(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \textcircled{1}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $n=1$:

$$l_1 = 1 \quad , \quad l_2 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \Rightarrow l_1 = l_2$$

فالخاصة محققة من أجل $n=1$

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \dots (\text{الفرض}) :$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

مكتبة الرياضيات/ قسم التحليل إعداد المدرس: نذير تيناوي

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$n! \geq 2^{n-1}$$

نضرب الطرفين ب (n + 1)

$$(n + 1)n! \geq (n + 1)2^{n-1}$$

$$(n + 1)! \geq (n + 1)2^n \cdot 2^{-1}$$

$$(n + 1)! \geq 2^n \frac{(n + 1)}{2} \geq 2^n$$

حيث $\frac{(n+1)}{2}$ مهملة فنحصل على مقدار أصغر

$$(n + 1)! \geq 2^n$$

وهو المطلوب

النمط الرابع من التمارين ($u_{n+1} = f(u_n)$)

الحالة الأولى : $u_{n+1} = f(u_n)$

و u_n ذكرت مرة واحدة فقط

عندها ننطلق من (الفرض) ونطبق عمليات جبرية (ضرب , جمع , طرح) للوصول لشكل f

$$\textcircled{1} \text{ لتكن } u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

(1) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$ أيأ كان $n \geq 0$
نعرف القضية

$$E(n): "0 \leq u_n \leq 2"$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 \leq u_0 = 1 \leq 2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$0 \leq u_n \leq 2 \dots \text{(الفرض)}$$

نثبت صحة الخاصة $E(n + 1)$:

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2 \dots \text{(الطلب)}$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$0 \leq u_n \leq 2$$

نضيف للطرفين 2

$$2 \leq 2 + u_n \leq 4$$

نجد

$$0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 \\ &= \frac{n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^3}{4} \\ &= \frac{(n + 1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 \\ &= \frac{(n + 1)^2(n + 2)^2}{4} \end{aligned}$$

و هو المطلوب .

النمط الثالث من التمارين (المترجمات)

$$E(n): (1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \textcircled{1}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= 1 + x \\ l_2 &= 2 + x \end{aligned} \right\} l_1 \geq l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \dots \text{(الفرض)}$$

نثبت صحة الخاصة $E(n + 1)$:

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$$

$$\text{أو : } (1 + x)^n \geq 1 + nx + x$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

نضرب الطرفين ب (1 + x)

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + nx^2$$

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + x(n + 1) + nx^2 \geq 1 + x(n + 1)$$

حيث nx^2 يمكن إهمالها لنحصل على مقدار أصغر

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + nx + x$$

وهو المطلوب .

$$E(n): n! \geq 2^{n-1} \quad \textcircled{2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= 1! = 1 \\ l_2 &= 2^{1-1} = 1 \end{aligned} \right\} l_1 \geq l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$n! \geq 2^{n-1} \dots \text{(الفرض)}$$

نثبت صحة الخاصة $E(n + 1)$:

$$(n + 1)! \geq 2^n$$

الحل:

في الطلب الأول تم تعريف التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ وهو مستخلص من شكل المتتالية في نص التمرين (قد لا يأتي التابع في نص التمرين ويكون من المفروض أن تصطنعه أنت ...)

إن f اشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$ ومشتقه $f'(x) = \frac{14}{(2x+6)^2}$ مهما تكن $x \geq 0$ وبالتالي التابع f تابع متزايد الآن لنفرض الخاصة :

$$E(n): " \frac{1}{2} < u_n \leq 1 "$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$\frac{1}{2} < u_n \leq 1 \dots (\text{الفرض})$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

البرهان :

نلاحظ أننا لا نستطيع الانطلاق من الفرض والحصول على الهدف بعمليات جبرية , لذلك سيكون من المفيد الاستفادة من التابع f المتزايد :

لدينا من الفرض

$$\frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

و f متزايد إذا :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1)$$

$$\frac{3\left(\frac{1}{2}\right) + 2}{2\left(\frac{1}{2}\right) + 6} < \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \leq \frac{3(1) + 2}{2(1) + 6}$$

$$\frac{7}{14} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

وهو المطلوب .

$$0 \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

وهو المطلوب

(2) أثبت أن المتتالية السابقة $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة
نعرف القضية

$$E(n): " u_n \leq u_{n+1} "$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \end{array} \right\} u_0 \leq u_1$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n \leq u_{n+1} \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$u_n \leq u_{n+1}$$

نضيف للطرفين 2

$$2 + u_n \leq 2 + u_{n+1}$$

نجد

$$\sqrt{2 + u_n} \leq \sqrt{2 + u_{n+1}}$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

وهو المطلوب

الحالة الثانية : $u_{n+1} = f(u_n)$ و u_n ذكرت أكثر من مرة عندها

① نعرف التابع $f(x)$

② نحسب $f'(x)$

③ نثبت أن f متزايد أي $f'(x) \geq 0$

④ نصور به أطراف المتراجحة

تمرين :

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \geq 0$

(1) أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أي u_n كان العدد n .

(2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً.

$$, t_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

سنحاول رد كل منها إلى الشكل q^n و الاستعانة بالفقرة السابقة :

$$x_n = \frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad \text{then}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \quad \text{because } q^n \text{ \& } q = \frac{4}{3} > 1$$

$$y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n} = \left(\frac{10}{10.1}\right)^n \quad \text{then}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0 \quad \text{because } q^n \text{ \& } q = \frac{10}{10.1} < 1$$

$$t_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3 \times 3^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{then}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{1}{3} (0) = 0 \quad \text{because } q^n \text{ \& } q = \frac{2}{3} < 1$$

(2) ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل :

$$\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$$

نخرج صاحب الأساس الأكبر عاملاً مشتركاً من البسط و من المقام)
أي نخرج 3^n عاملاً مشتركاً :

$$u_n = \frac{3^n \left[1 - \frac{2^n}{3^n}\right]}{3^n \left[1 + \frac{2^n}{3^n}\right]} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{حيث أن}$$

$$(q = \frac{2}{3} < 1 \text{ لأن الأساس } < 1)$$

(3) ادرس تقارب المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل :

$$\frac{10^n - 1}{10^n + 1}$$

نحل بأسلوب مماثل للتمرين السابق (أخرج 10^n عامل مشترك)
يترك للطالب

النمط الثالث من أسئلة التقارب : (حصر المتتالية ضمن مجال)

(1) حصر المتتالية ضمن مجال من الشكل $[a, b]$:

$$- \text{نوجد نصف قطر المجال } r = \frac{b-a}{2}$$

$$- \text{نوجد مركز المجال } l = \frac{b+a}{2} \text{ (أو يُحسب المركز بطريقة أخرى)}$$

$$\text{حيث } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

-نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < r$$

ثم نوجد مقامات أو نصلح حتى نصل إلى الشكل $n > A$ فنختار $n_0 \geq A$ يتم المطلوب

(بدها مثال مو !!)

مثال: أوجد عدداً طبيعياً n_0 بحيث يكون $u_n \in]1.9, 2, 1[$ عندما $n > n_0$ حيث :

النمط الأول من أسئلة التقارب : (دراسة تقارب متتالية معطاة بحد عام

$$(u_n = f(n))$$

فإنه يكفي أن نوجد النهاية عندما $n \rightarrow +\infty$ كما كنا نفعل في التوابع
(وكل ما كنت تفعله في التوابع مجازاً من إحاطة و مقارنة و طرق
لإزالة عدم التعيين)

(14) سنواجه حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$:

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n - \frac{1}{2}$$

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{[\sqrt{n^2 + n} - (n + \frac{1}{2})][\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2})]}{\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{n^2 + n - (n + \frac{1}{2})^2}{\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2})}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2})} = 0$$

فهي متتالية متقاربة من الصفر .

(15) اعلم أولاً أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$, عندها ستلاحظ اننا أمام حالة

عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

$$u_n = \frac{n! - 2}{n!} = \frac{n!}{n!} - \frac{2}{n!} = 1 - \frac{2}{n!} \quad \text{then } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - 0 = 1$$

فمتقاربة من الصفر

يترك الباقي كتمارين للتدرب عليها ☺

النمط الثاني من أسئلة التقارب : (دراسة تقارب متتالية هندسية)

قانون هام جداً (كل دورة يرد سؤال عليه)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ \text{ليس لها نهاية} & q \leq -1 \end{cases}$$

تمارين :

(1) احسب نهاية كل من المتتاليات التالية:

$$x_n = \frac{4^n}{3^n} \quad , \quad y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n}$$

- 1- نثبت أن المتتالية متزايدة (أو متناقصة) وذلك وفق ما تعلمناه في الوحدة الأولى
 - 2- نثبت أن المتتالية محدودة من الأعلى (أو من الأدنى) " غالباً بالتدريج - أو طلبات متدرجة"
 - 3- نستفيد من المبرهنة السابقة
- أخيراً : بعد إثبات تقارب المتتالية $u_{n+1} = f(u_n)$ يُمكن إيجاد نهاية هذه المتتالية من حل المعادلة $f(x) = x$

- 1- نعرف التابع f باستبدال $x \rightarrow u_n$
- 2- نحل المعادلة $f(x) = x$
- 3- نقبل الحل المناسب (المحقق لصفة الاطراد أو المحدودية) و توضح الأمثلة التالية كل ما سبق

مثال: لنأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بشرط البدء $u_0 = 1$ و

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

- 1- أثبت أنها متزايدة
- 2- أثبت أن $u_n \leq 2$
- 3- استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها

الحل :

- 1- وظيفة
 - 2- وظيفة
 - 3- بما أنها متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة
- و لحساب نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$ حيث $f(x) = \sqrt{1+x}$
- $$\sqrt{1+x} = x$$
- $$1+x = x^2$$
- $$x^2 - x - 1 = 0$$
- $$\Rightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
- و لكن كون حدود المتتالية موجبة فإننا نقبل الحل الموجب إذن
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

مسائل :

المسألة الأولى: المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2, \quad u_0 = \frac{3}{2}$$

- 1- أثبت مستعمل البرهان بالتدريج أن:
- $$1 \leq u_n \leq 2$$
- أياً يكن $n \in \mathbb{N}$

- 2- **A-** أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$
- B-** استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة
- 3- أهي متقاربة

الحل :

- 1- لنفرض القضية $E(n): \ll 1 \leq u_n \leq 2 \gg$
- نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$1 \leq u_0 \leq 2$$

$$u_n = \frac{2n-1}{n+3}$$

الحل :

نلاحظ أن الهدف هنا أن نحصر حدود المتتالية في مجال من الشكل $a, b[$ حيث $a = 1.9, b = 2.1$

لنتبع الخطوات المذكورة قبل قليل :

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = \frac{0.2}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$l = \frac{b+a}{2} = \frac{2.1+1.9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < r$$

$$\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{-7}{n+3} \right| < \frac{1}{10}$$

و بسبب القيمة المطلقة نكتب :

$$\frac{7}{n+3} < \frac{1}{10}$$

نقلب الطرفين :

$$\frac{n+3}{7} > 10$$

$$n+3 > 70$$

$$n > 67$$

و بالتالي نأخذ $n_0 \geq 67$ فيتم المطلوب.

(2) حصر المتتالية في مجال من النمط $[a, +\infty[$:

إن قولنا أن $u_n \in [a, +\infty[$ فهذا يعني أن u_n هي عدد أكبر تماماً من a لذلك ننطلق من المتراجحة :

$$u_n > a$$

و نعزل n لنصل لمتراجحة من الشكل $n \geq n_0$

مثال : لتكن المتتالية $u_n = n\sqrt{n}$, عين عدداً طبيعياً n_0 بحيث تنتمي حدود المتتالية إلى المجال $[10^3, +\infty[$ بدءاً من n_0

الحل :

$$u_n > 10^3$$

$$n\sqrt{n} > 10^3$$

$$n^3 > 10^6$$

$$n > 100$$

و بالتالي من أجل $n \geq 100$ فإن $u_n \in [10^3, +\infty[$

النمط الرابع من أسئلة التقارب : (دراسة تقارب متتاليات معرفة

بالتدريج $(u_{n+1} = f(u_n))$)

- كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى تكون متقاربة

- كل متتالية متناقصة و محدودة من الأدنى تكون متقاربة

و لكن كيف نستفيد من هذه المبرهنة ؟!

هذه هي المبرهنة التي سنستخدمها لدراسة المتتاليات المعرفة تدريجياً بالشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

3- و لما كانت u_n محدودة من الأدنى بالعدد 1 فنستنتج أنها متقاربة لأنها متناقصة و محدودة من الأدنى .

المسألة الثانية : ليكن عند كل عدد طبيعي n

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

1- أوجد عددين حقيقيين a, b يحققان عند كل عدد طبيعي n أن :

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

2- ليكن في حالة عدد طبيعي n :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
عبر عن S_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$

الحل :

1- لدينا :

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a(2n+1) + b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2a+2b)n + a-b}{(2n-1)(2n+1)}$$

نحذف المقامات و نطبق البسوط فنجد :

$$2a + 2b = 0$$

$$a - b = 1$$

بالحل المشترك نجد :

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right]$$

2- الآن :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right]$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left[-1 - \frac{1}{2n+1} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} (-1 + 0) = -\frac{1}{2}$$

المسألة الثالثة : المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

1- أثبت أن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ثم استنتج أنها متقاربة نحو الصفر

2- المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق :

$$1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$1 \leq u_n \leq 2 \dots (\text{الفرض})$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2 \dots (\text{الطلب})$$

البرهان : لنعرف التابع f على المجال $[1,2]$ بالشكل

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

فلاحظ أن $f'(x) = 2x - 2 \geq 0$ لكل $x \in [1,2]$

فالتابع f متزايد على المجال $[1,2]$:

لدينا من (*) :

$$1 \leq u_n \leq 2$$

و بما أن f متزايد فيمكن أن نصور أطراف المتراجحة وفقه :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$$

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

و هو المطلوب . فالقضية صحيحة مهما تكن $n \in N$

2- لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$$

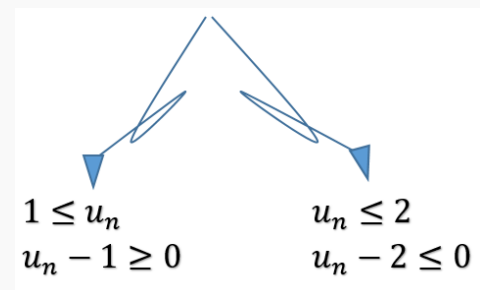
$$= u_n^2 - 3u_n + 2$$

بالتحليل المباشر :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

و لاستنتاج أنها متناقصة نلاحظ من الطلب السابق :

$$1 \leq u_n \leq 2$$



و بالتالي $u_n - 2$ سالب و $u_n - 1$ موجب فجداؤهما سالب :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1) < 0$$

و هذا يعني أن المتتالية (u_n) متناقصة

فالممتالتان (s_n) و (t_n) متجاورتانالتمرين الثاني: أثبت أن الممتالتين $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ متجاورتين

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

الحل: ندرس اطراد x_n :

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

نشكل الفرق:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{4n+3}{(2n+2)(2n+1)} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(4n+3)(n+1) - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{4n^2 + 7n + 3 - 4n^2 - 6n - 2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

إذن x_n متزايدةلندرس اطراد y_n :

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n - 2(2n+1)}{2n(2n+1)(n+1)} = \frac{-3n-2}{2n(2n+1)(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

إذن y_n متناقصة

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

$$y_n - x_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$$

فالممتالتان متجاورتان.

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

A- استغف من عبارة u_n بصيغتها الواردة لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n

B- استنتج نهاية v_n

الحل:

1- بضرب البسط والمقام بالمرافق:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

فهي مقاربة نحو الصفر

2- لدينا:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$v_n = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

$$v_n = 1 - 1 + \sqrt{n} = \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

الممتالتان المتجاورة:

نقول عن ممتالتين x_n, y_n إنهما متجاورتين إذا تحقق الشرطان:

1- إحداها متزايدة والأخرى متناقصة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$$

أمثلة:

التمرين الأول: أثبت أن الممتالتين:

$$s_n = \frac{1}{n+1}, t_n = \frac{-1}{2n+4}$$

متجاورتين

الحل: ندرس اطراد s_n فنعرّف التابع:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

فالممتالية s_n متناقصةندرس اطراد t_n فنعرّف التابع:

$$f(x) = -\frac{1}{2x+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(2x+4)^2} \geq 0$$

فالممتالية t_n متزايدة

$$s_n - t_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4} = \frac{3n+5}{(n+1)(2n+4)}$$

$$= \frac{3n+5}{2n^2+6n+4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - t_n) = 0$$

مكتبة الرياضيات/ قسم التحليل إعداد المدرس: نذير تيناوي

اسئلة دورات :

السؤال الاول : لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية فيها $q = 2$ و $u_0 = 1$

احسب u_3 ثم استنتج قيمة المجموع

$$S = u_3 + u_4 + \dots + u_7$$

السؤال الثاني : لتكن المتتالية المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2, \quad u_0 = 1$$

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق :

$$v_n = u_n + 3$$

- 1- أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هندسية
- 2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n
- 3- ليكن في حالة عدد طبيعي n :
 $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
 عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية $(S_n)_{n \geq 0}$

السؤال الثالث : بفرض أن

$$u_n = n^2 - \ln(n) \quad \text{أثبت أن } u_n \text{ متزايدة}$$

السؤال الرابع : بفرض $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

- 1- أثبت أن u_n متزايدة
- 2- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$
- 3- استنتج أن u_n متقاربة و احسب نهايتها .

السؤال الخامس : بفرض

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

- 1- أثبت أن S_n متزايدة
- 2- أثبت أن $S_n = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^n} \right)$
- 3- استنتج عنصراً راجحاً على S_n و هل هي متقاربة

السؤال السادس : بفرض لدينا :

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$$

- 1- أثبت أن $n \leq 2^n$
- 2- استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح عليها
- 3- أثبت أن المتتالية متقاربة