المحتوى

يحتوي هذا الملف على ترتيب كامل لأفكار بحث النهايات مع حل أغلب مسائل الكتاب و أسئلة الدورات السابقة بالإضافة إلى تمارين خارجية محلولة و غيرمحلولة لتكون عوناً للطالب في إنجاز هذا البحث باتقان و كفاءة . و نعتذر سلفاً في حال ورود أي خطأ طباعي فجلّ من لا يخطئ و نرجو مراجعتنا في حال وروده

مدرس المادة

نذير تيناوي

طريقي إلى النهايات

منصة طريقي التعليمية

#المستقبل_بيبدا_بطريقي

النهايات

الهدف من حساب النهاية لتابع ما هو دراسة سلوكه عند أطراف مجموعة تعريفه المفتوحة

حيث نرمز لنهاية التابع f عندما تسعى x إلى a بالرمز $\lim_{x\to a} f(x)$

حيث a عدد حقيقي أو $\pm\infty$

❖سنميز حالتين في حساب النهايات

الحالة الأولى : السعي نحو عدد a

في هذه الحالة لحساب $\lim_{x\to a} f(x)$ نعوض كل x بالعدد a و نحسب الناتج مباشرةً

و لكن !!!!! ماذا لو واجهنا صفر في المقام :

-1 ندرس إشارة المقام (من خلال جدول إشارة)

-2 نميز السعي من اليمين $x \to a^+$

و السعي من اليسار $x \to a^-$

مثال

احسب نهاية f عند قيمة a الموافقة في كلٍ مما يلي:

$$1)\quad f(x) = \frac{2x}{x+3} \quad , \quad a = 2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{2(2)}{2+3} = \frac{4}{5}$$

$$2)\quad f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad , a = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1^2 - 2(1) - 1 = -2$$

$$3)\ f(x) = x + sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad a = \frac{4}{\pi}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{\pi}} f(x) = \frac{4}{\pi} + \sin\left(\frac{1}{\frac{4}{\pi}}\right) = \frac{4}{\pi} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4)\ f(x) = \frac{x+1}{2-x} \quad , \quad a = 2$$

❖نلاحظ أن المقام يسعى إلى الصفر و بهذه الحالة يجب دراسة إشارة المقام :

$$2 - x = 0$$
$$x = 2$$

x	$-\infty$ $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
$2-x$	$+ + + + +0 - - - - -$

و بالتالي نميز حالتين :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{+3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$5)\ f(x) = \frac{2x}{(x-3)^2} \quad , \quad a = 3$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

هنا المقام موجب دوماً بسبب وجود التربيع

✌الحالة الثانية : السعي نحو ∞ :

أولاً : التابع الصحيح

قاعدة: لإيجاد نهاية التابع الصحيح عند $+\infty$ أو $-\infty$ فإننا نقوم بالخطوات التالية:

1- نأخذ الحد المسيطر مع أمثاله

2- نعوض بدلاً من كل x بـ ∞

مثال

أوجد مجموعة التعريف واحسب النهايات للتابع

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 + 7$$

الحل

مجال التعريف لتابع كثير الحدود هو $\mathbb{R}$ أي المجال $D_f =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to a}(-x^3) = -(-\infty)^3 = -(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to a}(-x^3) = -(+\infty)^3 = -(\infty) = +\infty$$

ملاحظة: نحذف رمز lim عند اختفاء x (بالتعويض- الاختزال)

ثانياً: التابع الكسري

(بسطه ومقامه كثيري حدود أي توابع صحيحة)

➢عند $a = +\infty, a = -\infty$ نطبق الخطوات التالية:

1- نأخذ الحد المسيطر من البسط والحد المسيطر من المقام

2- نختزل ونعوض بدل كل x بـ a

مثال 1

أوجد D_f واحسب النهاية عند اطراف المجال للتابع $f(x) = \frac{3x^2+5x+7}{2x-4}$

الحل

مجموعة التعريف نعدم المقام $2x - 4 = 0$ ومنه $2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$$\Rightarrow D_f =]D_f - \infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2}{2x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{2}\right) = \frac{(-\infty)}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{2}\right) = \frac{(+\infty)}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{3(2)^2+5(2)+7}{2(2)-4}\right)$$
$$= \frac{29}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{3(2)^2+5(2)+7}{2(2)-4}\right)$$
$$= \frac{29}{0^+} = +\infty$$

مثال 2

أوجد D_f واحسب النهاية عند اطراف المجال $f(x) = \frac{3x+5}{1-x}$

الحل

مجموعة التعريف نعدم المقام

$1 - x = 0$ ومنه $x = 1$

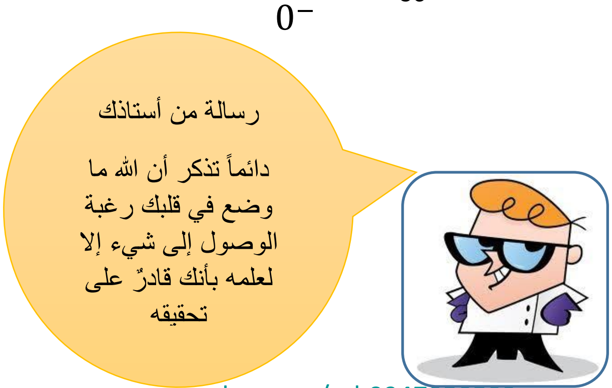
$\Rightarrow D_f =]D_f - \infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{-x}\right) = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{-x}\right) = -3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{3(1)+5}{1-(1)}\right)$$
$$= \frac{+8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{3(1)+5}{1-(1)}\right)$$
$$= \frac{+8}{0^-} = -\infty$$



ثالثاً: التوابع المركبة :

التابع المركب و بعبارة بسيطة هو تابع بسيط يحوي تابع بسيط آخر من أمثلته :

1- جذر مضمونه تابع كسري أو صحيح
2- لوغارتم مضمونه تابع كسري أو صحيح
3- أسي أسه هو تابع صحيح أو كسري
4- لوغارتمي مضمونه أسي

,,,,, و هكذا......

خطوات حساب مثل هذه النهايات :

1- نحسب نهاية المضمون
2- نعوض النهاية في التابع

مثال 1:

ليكن لدينا التابع f المعرف بالشكل $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ و المطلوب

1- أوجد مجموعة تعريفه
2- احسب نهايات التابع عند أطراف مجموعة تعريفه

الحل

التابع f تابع جذري معرف بشرط $x^2 - 9 \geq 0$ و لدراسة إشارة مقدار من الدرجة الثانية فكنا قد تعلمنا اتباع النهج التالي :

$$x^2 - 9 = 0$$
$$(x-3)(x+3) = 0$$
$$x = 3 \quad or \quad x = -3$$

نشكل جدول الإشارة :

x	$-\infty \quad -3 \qquad 3 \qquad +\infty$
$x^2 - 9$	$++ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +++$
المتراجحة	محققة غيرمحققة محققة

عليه تكون مجموعة التعريف المطلوبة

$$D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$$

و نعلم أن النهايات تحسب فقط عند الأطراف المفتوحة من مجموعة التعريف لذا x لحساب النهاية

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 9}$$

فإننا أولاً نحسب نهاية المضمون

(كونه تابع صحيح هنا) $\lim_{x\to-\infty} (x^2 - 9) = +\infty$

فقط نأخذ نهاية الحد المسيطر x^2)

, ثم نعوض هذا الناتج داخل الجذر:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} (x^2 - 9)} = \sqrt{+\infty}$$
$$= +\infty$$

و بالمثل نجد أن :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty$$

مثال2

أعد طلبات المثال السابق

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x}$$

الحل

f معرف بشرط: $2x^2 - 4x \geq 0$

نعدم المقدار : $2x^2 - 4x = 0$

$$2x(x-2) = 0$$
$$x = 0 \quad or \quad x = 2$$

x	$-\infty \qquad 0 \qquad 2 \qquad +\infty$
$2x^2 - 4$	$++ \quad 0 \quad -- \quad 0 \quad ++$
المتراجحة	محققة غيرمحققة محققة

و بالتالي : $D_f =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

و النهايات تحسب عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2 - 4}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} (2x^2 - 4)}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} (2x^2)} = \sqrt{+\infty}$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2 - 4}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} (2x^2 - 4)}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} (2x^2)} = \sqrt{+\infty}$$
$$= +\infty$$

مثال 3

ليكن التابع

$x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$, عين مجموعة تعريفه

ثم احسب نهايات التابع عند أطراف

مجموعة تعريفه

الحل

f معرف بشرط : $\frac{x+1}{x-3} \geq 0$

و قد تعلمنا أنه لدراسة إشارة كسر فإننا ندرس كل من البسط و المقام على حدة

- نعدم البسط $x + 1 = 0$ أي $x = -1$
- نعدم المقام $x - 3 = 0$ أي $x = 3$
- نشكل جدول الإشارة كما يلي :

x	$-\infty$ ... -1 ... 3 ... $+\infty$
البسط $x+1$	- - - - - - 0 + + + + + + ++ + + + +
المقام $x-3$	- - - - - - - - - - - - - - - - - 0 ++ + + ++ + +
الكسر $\frac{x+1}{x-3}$	+ + + + + + 0 - - - - - - ‖ + + + + + +
المتراجحة	محققة | غير محققة | محققة

فمجـ

$D_f =]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[$

لنوجد النهايات عند الأطراف المجموعة التعريف :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-3}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x}}$$
$$= \sqrt{1} = 1$$

وبشكل مماثل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-3}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}}$$
$$= \sqrt{1} = 1$$

و لدينا طرف مفتوح آيضاً من مجموعة التعريف هو الـ 3 :

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = \sqrt{\lim_{x\to3^+} \frac{x+1}{x-3}}$$
$$= \sqrt{+\infty} = +\infty$$

حيث كان ناتج النهاية $+\infty$ ذلك لأن البسط يسعى إلى 4+ عندما $x \to 3^+$ و أن المقام يكون موجباً أيضاً عندما $x \to 3^+$ و قسمةُ موجبين هو موجبٌ لاشك ... و لكون المقام يسعى إلى الصفر فإن الكسر ككل يسعى إلى $+\infty$

ملاحظة: إذا كان $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ فنقول إن للتابع نهاية عند a و إذا كانت النهاية المشتركة هي عدد حقيقي نقول أن للتابع نهاية حقيقية عند a مساوية لهذا العدد.

تدرب 1

احسب نهاية كلٍ من التوابع الآتية عند $-\infty$ و $+\infty$

1	$f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$
2	$f(x) = -3x^4 + 1$
3	$f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x$
4	$f(x) = 5x^3 - 3x - 1$
5	$f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$
6	$f(x) = 100x^3 - 2x^4$

تدرب 2

احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty, -\infty$ و عند النقطة a

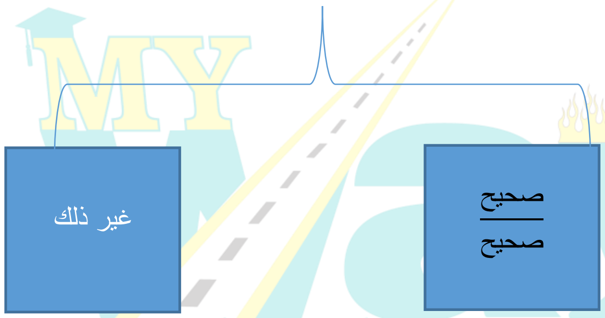
1	$a = 1$	$f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$
2	$a = -1$	$f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$
3	$a = 2$	$f(x) = \dfrac{x+2}{(x-2)^2}$
4	$a = 2$	$f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$
5	$a = -1$	$f(x) = \dfrac{5x+1}{x+1}$
6	$a = -2$	$f(x) = 3x - 5 + \dfrac{2}{x+2}$
7	$a = 1,2$	$f(x) = \dfrac{2x^2}{(1-x)(2+x)}$
8	$a = 2, -2$	$f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$
9	$a = 9$	$f(x) = x^2 - 2x - \dfrac{4}{(9-x)^2}$
10	$a = 1,2$	$f(x) = x + \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x-2}$

رسالة من أستاذك

قد تمرّ عليك أوقات ضعف أو فتور لكن ما إن تتذكر الحلم الذي لطالما انتظرته .. اشتعل بداخلك شعور الشغف و الحافز لتبذل الغالي و النفيس فداءً لحلمك و طموحك الذي كاد أن يلامس عنان السماء

حالات عدم التعيين

A. حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$



نأخذ نهاية الحد المسيطر على الحد المسيطر

إخراج عامل مناسب

✍العامل المناسب:.......................

مثال 1

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}-1}{x-1}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$,

نخرج عامل مناسب

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{(2-0)}{+\infty(1-0)}=\frac{2}{+\infty}=0$$

مثال 2

احسب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{\sqrt{x}-3}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ، نخرج عامل مناسب :

$$f(x)=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty(1+0)}{1-0}=+\infty$$

مثال 3

احسب نهاية التابع

$$f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$$

عند $+\infty$

مثال 4

احسب نهاية $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ عند $+\infty$

تذكرة :

....

....

....

....

B. حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$

$$\sqrt{\Delta} - \square$$

نهاية حزينة ← عامل مشترك

نهاية سعيدة ← الضرب بالمرافق

حالة النهاية الحزينة:

مثال 1: احسب $\lim_{x\to+\infty} x-x\sqrt{x}$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$

نخرج x عامل مشترك

$$f(x)=x(1-\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-\infty)$$

$$=+\infty(-\infty)=-\infty$$

مثال 2 : احسب $\lim_{x\to+\infty}(-\sqrt{x}+x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$:

نخرج $\sqrt{x}$ عامل مشترك:

$$f(x)=\sqrt{x}(-1+\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(-1+\infty)=+\infty$$

مثال 3 : احسب نهاية التابع
$$f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 1$$
عند $+\infty$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$

نخرج عامل مشترك :

$$f(x) = \sqrt{x}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x}\left(x\sqrt{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 1 - 0) = +\infty$$

❖ **فائدة** : أحياناً قد لا يكون العامل المشترك ظاهراً فنظهره من خلال:

1- نخرج x^2 عامل مناسب داخل الجذر

2- نجذر $\sqrt{x^2} = |x|$

3- نتخلص من القيمة المطلقة حسب جهة السعي

4- يكون قد ظهر العامل المشترك فنخرجه

مثال1 :
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{2x^2 + 1}\right)$$

$$f(x) = x - \sqrt{2x^2 + 1}$$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$f(x) = x - |x|\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

بما أن $x \to +\infty$ فإن $|x| = x$

$$f(x) = x - x\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

$$f(x) = x\left(1 - \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

مثال2 : احسب $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - 2x$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x$$

$$f(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2x$$

بما أن $x \to +\infty$ فإن $|x| = x$:

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2x$$

$$f(x) = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1 - 2) = -\infty$$

مثال 3 : احسب $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2 + 2} + 5x$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(3 + \frac{2}{x^2}\right)} + 5x$$

$$f(x) = |x|\sqrt{3 + \frac{2}{x^2}} + 5x$$

بما أن $x \to -\infty$ فإن $|x| = -x$

$$f(x) = -x\sqrt{3+\frac{2}{x^2}} + 5x$$

$$f(x) = x\left(-\sqrt{3+\frac{2}{x^2}} + 5\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty(-\sqrt{3}+5) = +\infty$$

✌حالة النهاية السعيدة :

معنى المرافق في التحليل :

....

....

....

....

....

مثال1 : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$

نضرب بالمرافق

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$f(x) = \frac{x-(x-1)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$f(x) = \frac{-1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

مثال 2: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2}\,x+\sqrt{2x^2+3}\right)$

حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty + \infty$

نضرب بالمرافق:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+3}\right)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2x^2+3}\right)}{\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2x^2+3}\right)}$$

$$f(x) = \frac{2x^2-(2x^2+3)}{\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2x^2+3}\right)}$$

$$f(x) = \frac{-3}{\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2x^2+3}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} = \frac{-3}{-\infty-\infty} = \frac{-3}{-\infty} = 0$$

C. حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$:

نفكر بالترتيب بالحالات الآتية :

1. يوجد جذر ⇐ نضرب بالمرافق
2. توابع صحيحة و $x \to a$

⇐ تحليل إلى عوامل

- مباشر
- $a^2 - b^2$
- $a^3 \pm b^3$

3. توابع درجة ثالثة و ليست مطابقة ⇐ قسمة إقليدية (على $x-a$)
4. توابع صحيحة و $x \to 0$ ⇐ عامل مشترك x^n

5. توابع مثلثية ⇐ دساتير مثلثية ونهايات شهيرة
6. غير ذلك ⇐ تعريف العدد المشتق

في جميع الحالات السابقة $x \to a$ فنهدف إلى إظهار $x - a$ في البسط والمقام

تذكرة بالمطابقات:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

مثال 1: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+2x}{x^2+x}\right)$

$$f(x) = \frac{x(x^2+x)}{x(x+1)} = \frac{x^2+x}{x+1}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{1} = 2$$

مثال 2: $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\right)$

يوجد جذر ⇐ مرافق

$$f(x) = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$= \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}$$
$$= \sqrt{x}+2$$
$$\lim_{x\to 4} f(x) = \sqrt{4}+2 = 4$$

مثال 3: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-5x+6}{x-3}\right)$

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)} = x-2$$
$$\lim_{x\to 3} f(x) = 3-2 = 1$$

مثال 4: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-3x+2}\right)$

$x \to 1$ يجب إظهار $x-1$

⇐ نقسم البسط على $x-1$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+1 \\ x-1 & x^3-x^2+x-1 \\ & \underline{x^3-x^2} \\ & x-1 \\ & x-1 \\ & 00 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1+1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

قدماً نحو الأمام :

احسب نهايات التوابع التالية عند قيم a الموافقة لها :

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\ ; a = 3$
2) $f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}\ , a = 1, +\infty$
3) $f(x) = \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}\ ; a = 2$
4) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\ ; a = -1, +\infty$
5) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x\ , a = +\infty$
6) $\mathrm{f(x)} = \sqrt{4x^2+x} + 2x\ ; a = -\infty$

النهايات المثلثية :

أولاً: النهايات الشهيرة :

❖نهاية مميزة :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

و بالتالي هنا يجب جعل مضمون الساين نفسه المقام (أو نفسه البسط إذا كانت الساين في المقام) و المضمون يسعى إلى الصفر

مثال 1: $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{sinx}$

نحن أمام حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{sinx}=\lim_{x\to 0}x^2\,\frac{x}{sinx}=0(1)=0$$

مثال 2: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\mathbf{2}\,\frac{sin2x}{\mathbf{2}x}=2(1)=2$$

$$\lim_{Natheer\to 0}\frac{\sin Natheer}{Natheer}=1$$

مثال 3: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$

في البسط : نضرب البسط و المقام بـ $2x$

وفي المقام : نضرب البسط و المقام بـ x

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{2x}\,\frac{\sin 2x}{\mathbf{2x}}}{\mathbf{x}\,\frac{\sin x}{\mathbf{x}}}$$

نختصر:

$$\lim_{x\to 0}2\,\frac{\frac{sin2x}{2x}}{\frac{sinx}{x}}=2\,\frac{1}{1}=2$$

مثال 4 : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{3x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{4}}{3}\,\frac{\sin(4x)}{\mathbf{4}x}=\frac{4}{3}$$

مثال5 : $\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{3-x}$

$$\lim_{x\to 3}-\frac{\sin(x-3)}{x-3}=-1$$

لأن $\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t}=1$

ثانياً : الدساتير المثلثية :

أحياناً قد لا يكون شكل المبرهنة السابقة واضح لذلك نلجأ لاستخدام بعض المطابقات المثلثية لتبسيط شكل التابع, **و سنسرد المطابقات من خلال المجموعات التالية :**

☝المجموعة الأولى :

$$\boxed{tan\theta=\frac{sin\theta}{cos\theta}}$$

$$\boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$$

و من الدستور الأخير يمكن استنتاج القانون

$$\boxed{1-\cos^2\theta=\sin^2\theta}$$

مثال 1

احسب نهاية f عند a :

$$f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos^2(2x)} \qquad a=0$$

....
....
....
....
....
....
......

مثال 2 : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

$$f(x) = \frac{\tan x}{x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \frac{\sin x}{x\cos x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

يمكن حفظ النتيجة التالية :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1}$$

مثال3

احسب نهاية f عند a

$$f(x) = \frac{x+\tan x}{x+\sin x} \qquad a=0$$

....
....
....
....

مثال 4: $\lim_{x\to 0}\frac{6x^3}{3-3\cos^2 x}$

$$f(x) = \frac{6x^3}{3-3\cos^2 x}$$

$$f(x) = \frac{6x^3}{3(1-\cos^2 x)}$$

$$f(x) = \frac{2x^3}{\sin^2 x} = 2x\frac{x^2}{\sin^2 x} = 2x\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(0)(1)^2 = 0$$

مثال 5: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}$

$$f(x) = \frac{\cos^2 x-1}{x}$$

$$f(x) = -\frac{1-\cos^2 x}{x}$$

$$f(x) = -\frac{\sin^2 x}{x} = -\sin x\,\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -(0)(1) = 0$$

مثال 6: $\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^2 x-4}{\sin x}+\frac{3}{2}$

$$f(x) = \frac{4\cos^2 x-4}{\sin x}+\frac{3}{2}$$

$$f(x) = -4\frac{1-\cos^2 x}{\sin x}+\frac{3}{2}$$

$$f(x) = -\frac{4\sin^2 x}{\sin x}+\frac{3}{2}$$

$$f(x) = -4\sin x+\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0+\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

✌المجموعة الثانية :

$$\boxed{1+\cos(\theta)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\boxed{1-\cos(\theta)=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\boxed{\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta}$$

مثال 1 : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin x}$

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{\sin x}=\frac{2\sin^2 x}{\sin x}$$

$$f(x)=2\sin x$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=2(0)=0$$

مثال2 : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-3\cos 2x}{x^2}$

$$f(x)=\frac{3-3\cos 2x}{x^2}$$

$$f(x)=\frac{3(1-\cos 2x)}{x^2}=\frac{3(2\sin^2 x)}{x^2}$$

$$f(x)=6\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=6(1)=6$$

مثال3 : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

$$f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$f(x)=-\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=-2\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right]^2$$

$$f(x)=-2\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\frac{x}{2}}\right]^2$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-2\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

لأن $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$

مثال 3 : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x\cos 2x}{x^2\sin 2x}$

$$f(x)=\frac{x-x\cos 2x}{x^2\sin 2x}$$

$$f(x)=\frac{x(1-\cos 2x)}{x^2\sin 2x}$$

$$f(x)=\frac{2\sin^2(x)}{x.2\sin x\cos x}$$

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.1=1$$

مثال 4: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x+6\cos x-6}{\sqrt{4+2x}-2}$

$$f(x)=\frac{5x+6\cos x-6}{\sqrt{4+2x^2}-2}$$

$$f(x)=\frac{(5x+6\cos x-6)(\sqrt{4+2x}+2)}{(\sqrt{4+2x}-2)(\sqrt{4+2x}+2)}$$

$$f(x)=\frac{5x+6\cos x-6}{4+2x-4}(\sqrt{4+2x}+2)$$

$$f(x)=\frac{5x-6(1-\cos x)}{2x}(\sqrt{4+2x}+2)$$

$$f(x)=\left(\frac{5x}{2x}-\frac{3(1-\cos x)}{x}\right)(\sqrt{4+2x}+2)$$

$$f(x)=\left(\frac{5}{2}-\frac{3\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x}\right)(\sqrt{4+2x}+2)$$

$$f(x)=\left(\frac{5}{2}-6\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)(\sqrt{4+2x}+2)$$

$$f(x)=\left(\frac{5}{2}-6\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)(\sqrt{4+2x}+2)$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\left(\frac{5}{2}-3(1)(0)\right)(4)=\frac{5}{2}.4=10$$

✌المجموعة الثالثة:

$$\boxed{\cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

$$\boxed{\cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

$$\boxed{\sin(a)+\sin(b)=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

$$\sin(a)-\sin(b)=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

مثال1 : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{2x^2}$

$$f(x)=\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{2x^2}$$

$$f(x)=\frac{-2\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)}{2x^2}$$

$$f(x)=-\frac{\sin(x)\sin(2x)}{x^2}$$

$$f(x)=-\frac{2\sin^2 x\,.\,cosx}{x^2}=-2\left(\frac{sinx}{x}\right)^2 cosx$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-2(1)^2(1)=-2$$

مثال 2: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-\sin(x)}{x}$

$$f(x)=2\frac{\sin(2x)}{2x}-\frac{sinx}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=2(1)-1=1$$

رسالة من أستاذك

و ما قدّر عليك العطايا أو المحن إلا للأخذ بيديك للأفضل

مسألة VIE :

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

الحل :

سنعيد صياغة شكل التابع :

$$f(x)=\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$$

لأن $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$

هكذا نكون قد وصلنا إلى نهاية فكرتنا

وبقي علينا أن نصل إلى حلمنا وذلك باتباع الخطوات التالية:

1) أن تثق بنفسك وقدراتك وتثق بأن الله لن يضيع تعبك وسهرك
2) التدرب والتكرار المتباعد للأفكار
3) المتابعة معي ^-^ والمحافظة على أكبر قدر ممكن من مدرسي الرياضيات

لا تتسبب بانتحارهم ^_^

نظريات المقارنة:

المقارنة (1) :

إذا كان f , g , h ثلاث توابع معرفة على مجال من النمط: $]a\,,+\infty[$ و بحيث :

$$h(x)\le f(x)\le g(x)$$

فإذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x)=l$

$\lim_{x\to x_0} h(x)=l$

عندئذٍ يكون $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$

مثال

بفرض f تابع يحقق :

$$\frac{2x}{3x-1} \le f(x) \le \frac{2x}{3x-2}$$

فبملاحظة أن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x-1} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x-2} = \frac{2}{3}$$

فحسب نظرية المقارنة (1) فإن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{3}$$

☺ تستخدم هذه المبرهنة لحساب نهايات تحوي *sin* أو *cos* بشرط أن مضمونها يسعى الى ∞ .

تذكر الـ *menu* ^_^

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$0 \le \sin^2 x \le 1$$
$$0 \le \cos^2 x \le 1$$
$$0 \le |\sin x| \le 1$$
$$0 \le |\cos x| \le 1$$

تدرب1

احسب كلاً من النهايات التالية:

1- $lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2}$

نلاحظ أن مضمون sin يسعى الى ∞+ لذلك نطبق نظرية الإحاطة

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على x^2 :

$$-\frac{1}{x^2} \le \frac{\sin x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

فحسب نهايات الأطراف :

$$lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \ \ , lim_{x\to\infty} = \frac{1}{x^2} = 0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة :

$$lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

يجب الانتباه الى النقاط التالية:

1- عند ضرب طرفي المتراجحة بمقدار سالب تقلب إشارة المتراجحة .

2- عند القسمة لطرفي المتراجحة على عدد سالب تقلب إشارة المتراجحة.

3- عند إضافة عدد سالب او موجب لاتتأثر المتراجحة.

4- عند الضرب او القسمة بمجهول ننتبه اذا كان موجباً او سالباً أو ((هيك وهيك))

2- $lim_{x\to\infty} \frac{2\sin x}{\sqrt{x}}$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نضرب ب 2

$$-2 \le 2\sin x \le 2$$

نقسم على $\sqrt{x} > 0$:

$$\frac{-2}{\sqrt{x}} \le \frac{2\sin x}{\sqrt{x}} \le \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} = 0 \ , lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

ومنه حسب نظرية الإحاطة فإن :

$$lim_{x\to\infty} \frac{2\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

-3 $lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x}{x+1}$

لدينا $0 \le \cos^2 x \le 1$

نقسم على $x+1 > 0$ (لان $x \to \infty$)

وبالتالي $x+1 \to \infty$ إذن $(x+1 > 0$

$$0 \le \frac{\cos^2 x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$

$$lim_{x\to\infty}(0) = 0 \ , \quad lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة :

$$lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x}{x+1} = 0$$

-4 $lim_{x\to\infty} \frac{x - |\cos x|}{x^2+7}$

لدينا $0 \le |\cos x| \le 1$

نضرب الطرفين ب (-1)

$$0 \ge -|\cos x| \ge -1$$

نضيف x:

$$x \ge x - |\cos x| \ge x - 1$$

نقسم على $x^2 + 7 > 0$

$$\frac{x}{x^2+7} \ge \frac{x - |\cos x|}{x^2+7} \ge \frac{x-1}{x^2+7}$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+7} = 0 \ , lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+7} = 0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة :

$$lim_{x\to\infty} \frac{x - |\cos x|}{x^2+7} = 0$$

تدرب 2

1) f تابع يحقق أن:

$$\frac{3x + \cos x}{x} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x-1}$$

أياً كان $x > 1$ فما نهاية f عند $+\infty$

الحل:

حسب مبرهنة الإحاطة: سنأخذ نهايات الأطراف:

$$lim_{x\to\infty} \frac{3x+7}{x-1} = 3$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = ???$$

هنا مضمون ال cos يسعى الى $+\infty$ لذلك تحتاج الى حصر :

$$-1 \le \cos x \le 1$$

نضيف للطرفين $3x$

$$3x - 1 \le 3x + \cos x \le 3x + 1$$

نقسم على $x > 0$ (لان $x > 1$ فرضاً)

$$\frac{3x-1}{x} \le \frac{3x+\cos x}{x} \le \frac{3x+1}{x}$$

$$lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x} = 3 \ ,$$

$$lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x} = 3$$

وحسب مبرهنة الإحاطة يكون:

$$lim_{x\to\infty}\frac{3x+\cos x}{x} = 3$$

$$lim_{x\to\infty} f(x) = 3 \Leftarrow$$

✌المقارنة (2):

ليكن g, f تابعين معرفين على مجال من النمط $I =]b, +\infty[$ ولنفرض ان $|f(x) - l| \le g(x)$

وأن $lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

عندئذٍ يكون $lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

مثال

f تابع يحقق أن:

$$|f(x) - 3| \le \frac{1}{x+1}$$

أياً كان $x > 0$ فنهاية $f(x)$ عند $+\infty$

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$lim_{x\to+\infty} g(x) = lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 0$$

فحسب المقارنة 2 تكون $lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

مثال2

بفرض $|f(x) + 600| \le \frac{1-\cos 2x}{x}$

احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

👌المقارنة (3) :

1- اذا كان لدينا $f(x) \ge g(x)$

وكانت $lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ فإن

$$lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

2- اذا كانت $f(x) \le g(x)$ وكانت

$$lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$$

فإن $lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

كيف نستخدمها؟؟؟

1- نطبق احد متراجحات الإحاطة ونحصل على متراجحة من الشكل:

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$

2- نحسب نهايات الأطراف ونميز حالتين:

أ) اذا كانت النهايات $+\infty$ نحذف الجزء الأكبر ((أي $g(x)$))

ب) اذا كانت النهايات $-\infty$ نحذف الجزء الأصغر ((أي $h(x)$))

مثال

احسب نهاية التابع f المعرف بالشكل $f(x) = x + \cos x$ عند $-\infty$, $+\infty$

الحل:

لدينا $-1 \leq cosx \leq 1$

نضيف للطرفين x

$$x - 1 \leq x + \cos x \leq x + 1$$

نلاحظ ان نهايات الأطراف عند $+\infty$ هي $+\infty$

لذلك نحذف الجزء الأكبر (أي $x + 1$)

$$\Rightarrow x - 1 \leq x + \cos x$$

$$lim_{x\to+\infty}(x - 1) = +\infty$$

$\Leftarrow$ حسب المقارنة 3

$$lim_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$$

اما عند $-\infty$ فنهايات الأطراف $-\infty$ لذلك

نحذف الجزء الأصغر أي $(x - 1)$

$$\Rightarrow x + \cos x \leq x + 1$$

$$lim_{x\to-\infty}(x + 1) = -\infty$$

الخلاصة: الأكبر من $+\infty$ هي $+\infty$

الأصغر من $-\infty$ هي $-\infty$

تدرب1

1- f تابع يحقق ان $f(x) \geq \frac{1}{4}x^2$ اياً كانت $x < 0$

احسب نهاية f عند $-\infty$

الحل:

$$lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4}x^2 = +\infty$$

$\Leftarrow$ حسب المقارنة 3

$$lim_{x\to+\infty}f(x) = +3$$

2- اثبت ان $x^2 - 5\sin x \leq x^2 - 5$

واحسب النهاية عند $-\infty$, $+\infty$

الحل:

نضرب ب 5-

$$5 \geq -5\sin x \geq -5$$

نضيف x^2 :

$$x^2 + 5 \geq x^2 - 5\sin x \geq x^2 - 5$$

نحذف القسم الأكبر:

$$x^2 - 5sinx \geq x^2 - 5$$

الآن نحسب النهاية عند $+\infty$

$$lim_{x\to+\infty}(x^2 - 5) = +\infty$$

$$\Leftarrow lim_{x\to+\infty}(x^2 - 5\sin x) = 0$$

حسب المقارنة (3)

عند ال $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-5)=+\infty$$

$$\Leftarrow \lim_{x\to-\infty}(x^2-5\sin x)=+\infty$$

تدرب2

احسب نهاية كل من التوابع التالية عند قيم a الموافقة لـ:

$f(x)=2x+\sin x$	$a=+\infty$ $a=-\infty$
$f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$	$a=+\infty$ $a=-\infty$

مسائل VIE:

المسألة الأولى

ليكن f التابع المعرف على $[0\,,+\infty[$

بالشكل: $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

1- اثبت ان $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

2- استنتج ان $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\le f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3- وما نهاية f عند $+\infty$

الحل:

1- نضرب البسط والمقام بالمرافق

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

2- نلاحظ ان:

$$\sqrt{x}\le\sqrt{x+1}$$

نضيف للطرفين $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{x}\le\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$$

$$2\sqrt{x}\le\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$$

نقلب طرفي المتراجحة:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\ge\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\quad\ldots.(1)$$

ايضاً $\sqrt{x}\le\sqrt{x+1}$

نضيف: $\sqrt{x+1}$:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\le\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\le 2\sqrt{x+1}$$

نقلب طرفي المتراجحة:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\ge\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\quad\ldots.(2)$$

من 1 و2 نجد أن:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\le\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\le f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

نأخذ نهايات الأطراف:

$$lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=0\ ,$$

$$lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$$

فحسب نظرية الإحاطة

$$lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

المسألة الثانية

احسب نهاية التابع

$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ في جوار الصفر

الحل :

سنواجه هنا مشكلة أثناء ضرب طرفي المتراجحة بـ x

فلما كانت $x\to 0$ فنحن لا نعلم إشارة الـ x

فإما يجب أن نميز حالتين : السعي من اليمين و السعي من اليسار

أو نلجأ إلى طريقة مبتكرة كما يلي :

نعلم أن :

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le 1$$

نضرب الطرفين بـ $|x|>0$

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le|x|$$

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0\right|\le|x|$$

$$|f(x)-0|\le|x|$$

الآن : لما كان :

$$\lim_{x\to0}|x|=0$$

فإنه حسب نظرية المقارنة 2 :

$$\lim_{x\to0}f(x)=0$$

المسألة الثالثة

ليكن g التابع المعرف على R بالشكل:

$$g(x)=\frac{1}{3+2\sin x}$$

1. اثبت محدودية التابع g
2. استنتج $lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3+2\sin x}\right)$
3. استنتج $lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)$

الحل :

1- نعلم أن :

$$-1\le sinx\le 1$$

نضرب بـ 2 :

$$-2\le 2sinx\le 2$$

نضيف 3 :

$$1\le 3+2sinx\le 5$$

نقلب أطراف المتراجحة :

$$1\ge\frac{1}{3+2sinx}\ge\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}\le g(x)\le 1$$

و بالتالي g محدود .

2- لحساب نهاية $\frac{x^2}{3+2sinx}$:

فانطلاقاً من الطلب السابق وجدنا :

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3+2sinx} \leq 1$$

نضرب بـ $x^2 > 0$:

$$\frac{x^2}{5} \leq \frac{x^2}{3+2sinx} \leq x^2$$

و لما كان $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{5} = +\infty$ فإنه حسب نظرية المقارنة3: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2sinx} = +\infty$

-3 نعلم أنّ:

$$-1 \leq sinx \leq 1$$

نضيف x :

$$x-1 \leq x+sinx \leq x+1$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{1}{3+sinx} \geq \frac{1}{5} > 0$:

$$\frac{x-1}{3+2sinx} \leq \frac{x+sinx}{3+2sinx} \leq \frac{x+sinx}{3+2sinx}$$

و مرة أخرى :

$$\frac{x-1}{5} \leq \frac{x-1}{3+2sinx} \leq \frac{x+sinx}{3+2sinx} \leq \frac{x+sinx}{3+2sinx}$$

و لما كان :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{5} = +\infty$$

فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+sinx}{3+2sinx} = +\infty$

المسألة الرابعة

ليكن $f(x) = \frac{x}{2} + 2\sin(x)$

-1 احصر التابع f بين تابعين

-2 أوجد مجالاً يحصر القيمة $f(1000)$

الحل :

$$-1 \leq sinx \leq 1$$

نضرب بـ $2 > 0$:

$$-2 \leq 2sinx \leq 2$$

نضيف $\frac{x}{2}$:

$$\frac{x}{2} - 2 \leq \frac{x}{2} + 2sinx \leq \frac{x}{2} + 2$$

$$\frac{x-4}{2} \leq f(x) \leq \frac{x+4}{2}$$

و الآن لحصر المقدار $f(1000)$:

$$\frac{1000-4}{2} \leq f(1000) \leq \frac{1000+4}{2}$$

$$\frac{996}{2} \leq f(1000) \leq \frac{1004}{2}$$

$$498 \leq f(1000) \leq 502$$

التفسير الهندسي للنهايات:

(المقاربات – تعريف النهايات بلغة الجوارات)

أولاً : تفسير $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

إن النهاية السابقة تعني أن :

المستقيم $y = l$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

و تعني أنه من أجل أي مجال $]a,b[$ مركزه l و نصف قطره r فإنه يوجد عدد حقيقي A بحيث $f(x) \in]a,b[$ عندما $x > A$

و لتعيين A نتبع الخطوات التالية :

-1 نحدد مركز المجال $l = \frac{b+a}{2}$ (و هي نفسها $\lim_{x\to+\infty} f(x)$)

-2 نحدد نصف قطر المجال $\varepsilon = b - l$

-3 نعوض في القانون $|f(x) - l| < \varepsilon$ ثم نصلح لنصل إلى $x > A$

مثال 1

ليكن f التابع المعرف على $[1,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$ و المطلوب :

-1 احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و فسر النتيجة هندسياً

-2 جد عدداً حقيقياً A يحقق أن $f(x) \in]2.99, 3.01[$ عندما $x > A$

الحل:

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ إذن $y = 3$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

2- أولا: نوجد المركز: $l = \frac{b+a}{2} = \frac{3.01+2.99}{2} = \frac{6}{2} = 3$

ثانياً: نوجد نصف قطر المجال

$$\varepsilon = b - l = 3.01 - 3 = 0.01 = \frac{1}{100}$$

ثالثاً: نعوض في القانون :

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{3x+2}{x+1} - 3\right| < \frac{1}{100}$$
$$\left|\frac{3x+2-3x-3}{x+1}\right| < \frac{1}{100}$$
$$\left|\frac{-1}{x+1}\right| < \frac{1}{100}$$
$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{100}$$
$$x+1 > 100$$
$$x > 99$$

نختار $A = 99$ أو أي عدد أكبر منها

مثال 2

ليكن f التابع المعرف على $[0,\_\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ و المطلوب :

1- **احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و ما هو التأويل الهندسي للنتيجة**

2- **أوجد عدداً حقيقياً A يحقق أن $f(x) \in]0.25, 0.75[$ عندما $x > A$**

الحل :

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ التأويل الهندسي: $y = \frac{1}{2}$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

2- أولاً : نوجد مركز المجال $l = \frac{b+a}{2} = \frac{0.75+0.25}{2} = \frac{1}{2}$

ثانياً : نوجد نصف قطر المجال

$$\varepsilon = b - l = 0.75 - \frac{1}{2} = 0.25 = \frac{1}{4}$$

ثالثاً : نعوض في القانون :

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$$
$$\left|\frac{2x+2-2x-1}{4x+2}\right| < \frac{1}{4}$$
$$\left|\frac{1}{4x+2}\right| < \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{4x+2} < \frac{1}{4}$$
$$4x+2 > 4$$
$$4x > 2$$
$$x > \frac{1}{2}$$

نختار $A = \frac{1}{2}$ أو أي عدد طبيعي أكبر منها

✌ثانياً : تفسير $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

إن النهاية السابقة تعني أن المستقيم $y = l$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

✌ثالثاً: تفسير $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

إن تفسير النهاية السابقة يعني ان التابع لا يملك مقارب أفقي في جوار $+\infty$ (مع إمكانية وجود مقارب مائل)

و تعني أنه من أجل أي مجال من النمط $]a, +\infty[$ فإنه يوجد عدد حقيقي A بحيث $f(x) \in]M, +\infty[$ عندما $x > A$

و لإيجاد A نتبع الخطوات التالية :

1- نضع $f(x) > M$

2- نحل المتراجحة و نعزل x للوصول إلى $x > A$

مثال

ليكن $f(x) = x\sqrt{x}$, احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أوجد عدداً حقيقياً A بحيث $f(x) \in]10^3, +\infty[$ عندما $x > A$

الحل :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$f(x) \in]10^3, +\infty[$
$f(x) > 10^3$
$x\sqrt{x} > 10^3$

نربع:

$$x^3 > 10^6$$

نجذر من المرتبة الثالثة :

$$x > 10^2$$

نختار $A = 10^2 = 100$ أو أي عدد أكبر منها .

رابعاً: تفسير $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

يعني أنه من أجل أي مجال من النمط $]a, b[$ يوجد مجال من النمط $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ بحيث إذا تحقق الشرط $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$

كان $f(x) \in]a, b[$

و لتعيين المجال $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ نتبع الخطوات التالية :

1- نضع $a < f(x) < b$
2- نعزل x للوصول إلى $A < x < B$ فيكون المجال المطلوب $]A, B[$
3- إذ طُلب تعيين نصف قطر المجال α فإن $\alpha = \frac{B-A}{2}$

مثال (1)

ليكن $f(x) = \sqrt{4x+1}$ و المطلوب :

1- احسب $\lim_{x\to 2} f(x)$
2- أوجد مجالاً J مركزه 2 بحيث $f(x) \in]2.9, 3.1[$ عندما $x \in J$

الحل :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \sqrt{9} = 3$$

$2.9 < f(x) < 3.1$
$2.9 < \sqrt{4x+1} < 3.1$
$2.9^2 < 4x + 1 < 3.1^2$
$2.9^2 - 1 < 4x < 3.1^2 - 1$

$$\frac{2.9^2 - 1}{4} < x < \frac{3.1^1 - 1}{4}$$

فالمجال المطلوب $J =]\frac{2.9^2-1}{4}, \frac{3.1^2-1}{4}[$

مثال (2)

ليكن $f(x) = 3x - 4$ و المطلوب :

1- احسب $\lim_{x\to 3} f(x)$
2- أوجد مجالاً J مركزه 5 بحيث $f(x) \in]4.8, 5.2[$ عندما $x \in J$

الحل :

1- $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$
2- بما أن : $f(x) \in]4.8 , 5.2[$
فإن : $4.8 < 3x - 4 < 5.2$
نضيف 4 للطرفين : $8.8 < 3x < 9.2$
نقسم على 3 : $\frac{8.8}{3} < x < \frac{9.2}{3}$ و بالتالي المجال المطلوب: $J =]\frac{8.8}{3}, \frac{9.2}{3}[$

خامساً: تفسير النهاية $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

التفسير هنا أن المستقيم $x = a$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ سنوضح هذه الحالة من خلال مثال مباشر

رسالة من أستاذك
لا تدع اليأس يعرف لك طريقاً
قاوم فإن الدنيا الله يعطي أصعب معاركه لأقوى جنوده

مثال

ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ و المطلوب:

1- احسب $\lim_{x\to 1} f(x)$

-2 جد عدداً حقيقياً α بحيث إذا انتمت x إلى المجال $]1-\alpha, 1+\alpha[$ تحقق أن $f(x) > 10^3$

الحل :

-1 $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$

-2 إن انتماء x إلى المجال $]1-\alpha, 1+\alpha[$ يكافئ تحقق المتراجحة $|x-1| < \alpha$

و بالتالي سنحاول الوصول إلى هذه المتراجحة انطلاقاً من الفرض $f(x) > 10^3$

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2} > 10^3$$

لكن عندما $x \to 1$ فإن $5x-1 \approx 4$ و بالتالي يمكن أن نضع $\frac{5x-1}{(x-1)^2} \approx \frac{A}{(x-1)^2}$

فلو أخذنا عدداً مناسباً أصغر من A و يمكن جذره مثل 3.6 لكان :

$$A > 3.6$$

$$\frac{A}{(x-1)^2} > \frac{3.6}{(x-1)^2} > 10^3$$

$$\frac{(x-1)^2}{3.6} < \frac{1}{10^3}$$

$$(x-1)^2 < \frac{3.6}{10^3}$$

$$|x-1| < \sqrt{\frac{3.6}{10^3}}$$

$$|x-1| < \sqrt{\frac{36}{10^4}}$$

$$|x-1| < 0.06$$

و عليه نضع $\alpha = 0.06$ فيتم المطلوب.

	تدرب 1
1	ليكن $f(x) = \frac{1-x}{x-4}$ المعرف على $[5, +\infty[$ و المطلوب : -1 احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و ما هو التفسيرالهندسي للنهاية السابقة -2 جد عدداً حقيقياً A يحقق أنه من أجل $x > A$ يكون $f(x) \in]-1.3, -0.7[$
2	ليكن $f(x) = \frac{2x+1}{(x-3)^2}$ المعرف على $R\backslash\{3\}$: -1 احسب $\lim_{x\to 3} f(x)$ و فسر النتيجة هندسياً -2 جد عدداً حقيقياً α يحقق أنه إذا انتمت x إلى المجال $]3-\alpha, 3+\alpha[$ كان $f(x) > 10$

المقارب المائل

تمهيد : إن أي مستقيم مائل تُكتب معادلته بالشكل $y = ax + b$

و يمثل العدد a هنا ميل هذا المستقيم

مثلاً :

-1 المعادلة $y = 2x - 1$ تمثل مستقيماً مائلاً ميله 2

-2 المعادلة $y = \frac{x}{2}$ تمثل مستقيماً مائلاً ميله $\frac{1}{2}$

-3 المعادلة $y = 1 - x$ تمثل مستقيماً ميله -1

-4 المعادلة $y = \frac{3x-1}{2}$ تمثل مستقيماً ميله $\frac{3}{2}$

أولاً: الإثبات

لإثبات أنّ مستقيماً ما Δ معادلته:

$\Delta: y = ax + b$

مقارب مائل للخط c_f عند $+\infty$

نتبع الخطوات التالية:

1- نشكل تابع الفرق: $f(x) - y_\Delta$

2- نثبت أن

$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$

وبنفس الأسلوب نعرف المقارب المائل في جوار $-\infty$

✌ثانياً : الوضع النسبي:

نقصد بدراسة الوضع النسبي للخط C_f مع مقاربه Δ معرفة :

المجال الذي يكون عليه C_f فوق Δ

و المجال الذي يكون عليه C_f تحت Δ

و نقاط تقاطع C_f مع Δ (النقاط المشتركة)

و لدراسة الوضع النسبي :

ندرس إشارة الفرق (إما عن طريق تشكيل جدول إشارة أو أن يكون واضح الإشارة كمثل $-\frac{1}{(x-3)^2}$, e^x , $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x^2+9}$, $-\frac{2}{x^2+1}$, $\frac{1}{x^2}$

مثال1:

أثبت ان المستقيم Δ

$\Delta: y = x + 1$

مقارب مائل للخط البياني c_f للتابع f المعرف بالشكل:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$$

في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C_f مع مقاربه

الحل:

1- نشكل تابع الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} - (x + 1)$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 1 - (x + 1)(x + 2)}{x + 2}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2 - 3x - 2}{x + 2}$$

$$= \frac{-1}{x + 2}$$

2- نأخذ النهاية:

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x + 2} = 0$$

$\Leftarrow \Delta$ مقارب للخط c_f في جوار $+\infty$

لندرس الوضع النسبي بينهما:

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{1}{x + 2}$$

البسط $0 > -1$

المقام $x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
-1	$- - - -$		$- - - - -$
$x+2$	$- - - -$	0	$+ + + +$
$f(x)-y_\Delta$	$+ + + + +$	$\|\|$	$- - - -$
الوضع النسبي	C فوق Δ		C تحت Δ

تدرب

فيما يأتي بين معللاً إجابتك إذا كانت المستقيم Δ مقارباً مائلاً للخط البياني c_f عند $+\infty$ او $-\infty$ وادرس بعدئذٍ الوضع النسبي للخط c_f ومقاربه Δ

-1 $f(x)=2x+3+\frac{10}{x+1}$ ، $\Delta: y=2x+3$

f معرف على $R/\{-1\}$

$$f(x)-y_\Delta = 2x+3+\frac{10}{x+1} - (2x+3) = \frac{10}{x+1}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0\ ,\quad lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$\Leftarrow$ Δ مقارب مائل للخط c_f في جوار $+\infty , -\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{10}{x+1}$$

البسط: $10>0$

المقام: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
10	$+ + + +$		$+ + + +$
$x+1$	$- - - -$	0	$+ + + +$
$f(x)-y_\Delta$	$- - - - - -$	$\|\|$	$+ + + + + +$
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

-2 $f(x)=-x+1-\frac{1}{x^2}$

$\Delta: y=-x+1$

f معرف على R^*

$$f(x)-y_\Delta = -x+1-\frac{1}{x^2}-(-x+1) = -\frac{1}{x^2}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0\ ,\quad lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$\Leftarrow$ Δ مقارب مائل في جوار $+\infty , -\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=-\frac{1}{x^2}<0$$

ومن الواضح انه سالب دوماً

C_f تحت Δ دوماً

-3 $f(x)=3x+7-\frac{5}{\sqrt{|x|}}$

$\Delta: y=3x+7$

f معرف على R^*:

$$f(x)-y_\Delta = 3x+7-\frac{5}{\sqrt{|x|}}-(3x+7) = -\frac{5}{\sqrt{|x|}}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0\ ,\quad lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=-\frac{5}{\sqrt{|x|}}<0$$

من الواضح انه سالب دوماً

و منه C يقع دائماً تحت Δ

-4 $f(x)=\frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$ ، $\Delta: y=x-2$

f معرف على $R\backslash\{-1\}$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}-(x-2)$$

$$=\frac{x^3-3x-5-(x-2)(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x^3-3x-5-(x-2)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^3-3x-5-x^3-2x^2-x+2x^2+4x+2}{(x+1)^2}$$

$$=-\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0\ ,\quad lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$\Leftarrow\Delta$ مقارب مائل عند $+\infty,-\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=-\frac{3}{(x+1)^2}<0$$

C يقع تحت Δ دوماً .

-5 $f(x)=\frac{-x^2-4x+\sin x}{x}$ ، $\Delta: y=-x-4$

f معرف على R^*:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-x^2-4x+\sin x}{x}-(-x-4)$$

$$=-\frac{-x^2-4x+\sin x-x(-x-4)}{x}$$

$$=\frac{-x^2-4x+\sin x+x^2+4x}{x}$$

$$=\frac{\sin x}{x}$$

لحساب $lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)$ فإننا نعلم ان :

$$-1\le\sin x\le 1$$

نقسم على $x>0$ (لان $x\to+\infty$)

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$$

$$lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0\ ,\quad lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\Rightarrow lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

Δ مقارب مائل للخط c_f في جوار $+\infty$

لحساب $lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على $x < 0$ $(x \to -\infty)$

$$-\frac{1}{x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{x}$$

$$lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0 \ ,$$

$$lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

الوضع النسبي :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدرب

في كل من الحالات التالية : أثبت أن Δ مقارب مائل للخط C_f ثم ادرس الوضع النسبي للخط البياني مع مقاربة

6- $f(x) = \frac{2x^2-7x-3}{x-4}$, $\Delta: y = 2x+1$

7- $f(x) = x + \frac{sinx}{x}$, $\Delta: y = x$

8- $f(x) = \frac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}}{2x+1}$, $\Delta: y = \frac{x}{2}+1$

سؤال دورة 2021 – تكميلي

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]-\infty, 0[$ وفق :

$$f(x) = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x}$$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل و ادرس الوضع النسبي له مع مقاربه

الحل :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x} - 2x$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x}$$

$$0 \le \cos^2 x \le 1$$

و لما كانت $x \to -\infty$ فإن $x < 0$:

$$0 \geq \frac{\cos^2 x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

فحسب الإحاطة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

و عليه Δ مقارب مائل في جوار $-\infty$

اما بخصوص الوضع النسبي :

$$\cos^2 x \geq 0$$

و $x < 0$ على المجال $]-\infty, 0[$

فإن $f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x} < 0$ على I

و بالتالي c تحت Δ على كامل المجال I

ثالثاً : إيجاد معادلة المقارب المائل :

في الفقرة السابقة كان يعطى المقارب المائل في نص السؤال ويطلب اثبات انه مقارب مائل, في الفقرة التالية ستنعلم كيف نوجد معادلة المقارب المائل بأنفسنا, ثم اثبات انه مقارب مائل.

إيجاد معادلة المقارب المائل:

لإيجاد معادلة المقارب المائل للخط البياني c_f للتابع f فإننا نميز الحالات:

الحالة الخاصة 1:

التابع f معرف بالشكل:

$$f(x) = ax + b + u(x)$$

عندئذٍ نضع $\Delta: y = ax + b$

ونثبت انه مقارب مائل كما مر معنا سابقاً.

مثال

f تابع معرف على R^* بالشكل:

$$f(x) = 3x + 1 + \frac{2023}{x^4}$$

أوجد معادلة المقارب المائل للخط c_f في جوار $+\infty$, وادرس الوضع النسبي.

الحل:

نضع $\Delta: y = 3x + 1$ عندئذٍ نلاحظ:

$$f(x) - y_\Delta = 3x + 1 + \frac{2021}{x^4} - (3x+1) = \frac{2021}{x^4}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$\Leftarrow \Delta$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: نلاحظ ان:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2021}{x^4} > 0 \ : x \in R^*$$

الحالة الخاصة 2: التابع f معرف بشكل كسر درجة بسطه اكبر من درجة مقامه بدرجة واحدة عندئذٍ نقسم البسط على

المقام قسمة اقليدية ثم نتبع طريقة التقليد.

فائدة: عند اجراء القسمة $\frac{u(x)}{v(x)}$ فإن الناتج يكون بالشكل:

$$\text{ناتج القسمة} + \frac{\text{باقي القسمة}}{\text{المقسوم عليه}}$$

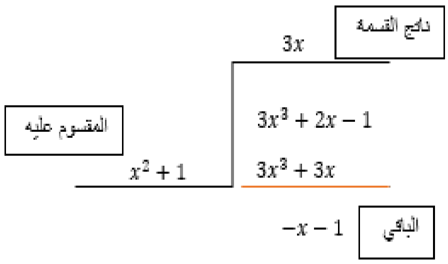
مثال

اوجد معادلة المقارب المائل للخط البياني c_f للتابع f المعرف بالشكل:

$$f(x)=\frac{3x^3+2x-1}{x^2+1}$$

الحل:

f معرف على R^*



$$f(x)=3x+\frac{-x-1}{x^2+1}$$

نضع $\Delta: y=3x$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-x-1}{x^2+1}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{x^2}$$

$$=lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$$

$$lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$\Leftarrow$ Δ مقارب مائل عند $-\infty$, $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta=-x-1$$

البسط: $-x-1=0\to x=-1$

المقام: $x^2+1>0$

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$-x-1$	$+++++0$ $------$
x^2+1	$+++++$ $++++++$
$f(x)-y_\Delta$	$++++0-----$
الوضع النسبي	C فوق Δ C تحت Δ

و النقطة $A(-1,0)$ نقطة مشتركة

ملاحظة: أحياناً قد لا تنفع القسمة الاقليدية ويكون البديل تفريق البسط على المقام

مثال

بفرض $f(x)=\frac{x^2+2+\sin^2 x}{x}$ المعرف على R^*

جد معادلة المقارب المائل للخط c_f و ادرس الوضع النسبي له مع c_f

الحل :

$$f(x)=\frac{x^2}{x}+\frac{2}{x}+\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$=x+\frac{2}{x}+\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= x + \frac{2+\sin^2 x}{x}$$

نضع $\Delta: y = x$,

أكمل الحل وانجزه باستخدام مبرهنة الإحاطة .

الحالة الخاصة 3 (مهارة الإتمام):

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R بالشكل : $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$

1- ادرس نهاية f عند $+\infty, -\infty$

2- اكتب $4x^2 - 4x + 3$ بالشكل القانوني (مربع كامل)

3- ادرس نهاية التابع h المعرف وفق : $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$ عند $+\infty, -\infty$

4- استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما .

الحل :

1- لنحسب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2- الكتابة بالشكل القانوني تعني الإتمام إلى مربع كامل :

$$4x^2 - 4x + 3$$
$$= 4(x^2 - x) + 3$$
$$= 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 3$$
$$= 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 3$$
$$= 4\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 - 1 + 3$$
$$= (2x-1)^2 + 2$$

3- نلاحظ الآن أنّ:

$$h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$$
$$= \sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2}$$

سنكون هنا أمام حالة عدم تعيين من الشكل : $+\infty - \infty$, لذلك نضرب البسط و المقام بالمرافق :

$$h(x) = \frac{\left(\sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2}\right)\left(\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}\right)}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$
$$= \frac{(2x-1)^2 + 2 - (2x-1)^2}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$

و بالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 \quad \& \quad \lim_{h\to-\infty} h(x) = 0$$

4- نستنتج ما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - |2x-1|\right) = 0$$

و بما أن $x \to +\infty$ فإن $|2x-1| = 2x-1$ إذن :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (2x-1)\right) = 0$$

و بالتالي $d_1: y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

أما عندما $x \to -\infty$ فإن:

$|2x-1| = -2x+1$ و بالتالي

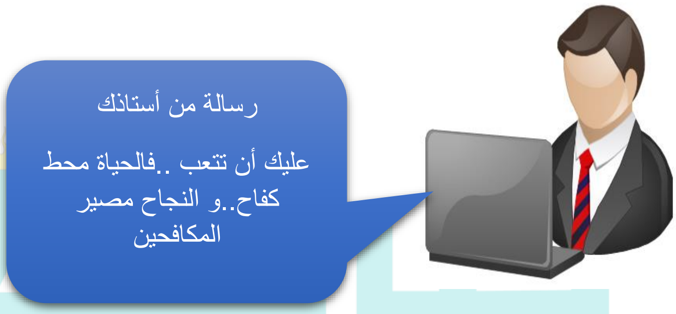
$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+1)\right)=0$$

مما يعني أن المستقيم $d_2: y = -2x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

إضافي : لدراسة الوضع النسبي :

$$f(x)-y_{d_1,d_2}=\frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}}>0$$

و بالتالي C فوق مقاربيه .



الحالة العامة:

في حال لم تتحقق أي حالة من الحالات الخاصة السابقة فإننا لايجاد معادلة المقارب المائل نتبع الخطوات التالية:

1- نثبت ان $lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ او $lim_{x\to+\infty}=-\infty$

2- نفرض معادلة المقارب المائل $\Delta: y = ax+b$

3- نحسب a من القانون $a = lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

4- نحسب b من القانون $b = lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$

نثبت ان $\Delta: y = ax+b$ مقارب مائل وبشكل مماثل عند $-\infty$

مثال

ليكن f التابع المعرف على R بالشكل:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$$

اوجد معادلة المقارب المائل عند $+\infty$

الحل:

$$lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

نفرض $\Delta: y = ax+b$

$$a = lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x} = lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}{x}$$

$$lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

$|x| = x$ لان $x>0$ حيث $x\to+\infty$

$$a = lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}=1$$

$$b = lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

$$lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)$$

نضرب بالمرافق:

$$= lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+x}$$

$$= lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+x}$$

$$= lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+x}$$

حيث $x>0$

$$= lim_{x\to+\infty}\frac{x[2+\frac{4}{x}]}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right]}=\frac{2}{2}$$
$$=1$$

$$\Rightarrow \Delta: y=x+1$$

تدرب

1- أوجد معادلة المقارب المائل للخط c_f بجوار $+\infty$ إذا علمت أن: $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$ ثم ادرس النسبي للخط البياني مع مقاربة

2- فيما يلي C الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f. بين في كل حالة إن كان ثمة مستقيمات مقاربة (أفقية أو شاقولية أو مائلة) للخط C

1	$f(x)=\frac{x+1}{x-3}$
2	$f(x)=-x+3+\frac{2}{x^2+1}$
3	$f(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$
4	$f(x)=1-x+\frac{3x}{x^2+2}$
5	$f(x)=\frac{x^2+2+sinx}{x}$
6	$f(x)=\frac{2x^2+5x-4}{x}$
7	$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$
8	$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$
9	$f(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^2-1}$
10	$f(x)=\frac{3x^3+2x-1}{x^2+1}$

-3 ليكن f التابع المعرف وفق

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

-1 احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

-2 احسب

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)$

-3 استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C للتابع f في جوار $+\infty$

-4 ادرس وضع المقارب Δ مع الخط C

-5 احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

-6 أثبت وجود عددين حقيقين a, b يحققان أن :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$$
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b$$

-7 استنتج معادلة مقارب مائل Δ' في جوار $-\infty$

-4 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

-1 احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

-2 A) اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية

B) استنتج وجود مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$. اكتب معادلته و ادرس وضعه النسبي مع C

تابع القيمة المطلقة :

هو تابع معرف على R بالشكل:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

مثال

$$|3| = 3$$

$$|-5| = -(-5) = +5$$

$$|-3| = -(-3) = 3$$

$$\left| \overbrace{1}^{\text{صغير}} - \underbrace{\overbrace{\sqrt{2}}^{\text{كبير}}}_{\approx 1.4} \right| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$$

$$\left|5 - 2\underbrace{\sqrt{3}}_{\approx 1.7}\right| = 5 - 2\sqrt{3}$$

كيف نتخلص من القيمة المطلقة :

بفرض لدين المقدار $|u(x)|$ و أردنا التخلص من القيمة المطلقة فإننا **نقوم بالخطوات التالية :**

① نعدم المضمون $u(x) = 0$

② ننظم جدول

x		الحل	
$u(x)$	$-$	0	$+$
$\|u(x)\|$	$-u(x)$		$u(x)$

مثال 1

اكتب بعبارة مستقلة عن القيمة المطلقة المقدار $|\mathbf{6x-3}|$:

نعدم المضمون :

$$6x - 3 = 0$$

$$6x = 3$$

$$x = \frac{3}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ننظم جدول إشارة

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$6x-3$	$-$	0	$+$
$\|6x-3\|$	$-6x+3$		$6x-3$

و بالتالي نكتب :

$$|6x-3| = \begin{cases} 6x-3 & ; x \in [\frac{1}{2}, \infty[\\ -6x+3 & ; x \in]-\infty, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

مثال 2

اكتب المقدار $|\mathbf{4x^2-1}|$ بعبارة لا تحوي قيمة مطلقة

نعدم المضمون :

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad , x = -\frac{1}{2}$$

x		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	
$4x^2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert 4x^2-1\rvert$	$4x^2-1$		$-4x^2+1$		$4x^2-1$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2-1 & ; x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[\\ -4x^2 & ; x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\end{cases}$$

المعادلات التي تحوي قيمة مطلقة :

① $|\boldsymbol{u(x)}| = \boldsymbol{k}\left(\text{عدد سالب}\right)$ مستحيلة

الحل

مثال1

$$|x-3| = -2$$

معادلة مستحيلة الحل

② $|\boldsymbol{u(x)}| = \boldsymbol{0}$

$$\Rightarrow u(x) = 0$$

$$|x-3| = 0$$

مثال2

$$x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

③ $|\boldsymbol{u(x)}| = \boldsymbol{k}\left(\text{عدد موجب}\right)$

إما $u(x) = k$

أو $u(x) = -k$

مثال

$$|2x-4| = 2$$

$$2x-4 = 2$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$2x-4 = -2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

④ **الطرف الثاني مقدار يحوي x اي :**

$$|\boldsymbol{u(x)}| = \boldsymbol{v(x)}$$

❶ نضع الشرط $E : v(x) \geq 0$

❷ $u(x) = v(x)$

أو $u(x) = -v(x)$

❸ تقبل الحلول الموجودة في E

مثال

حل المعادلة :

$$|4x-2| = -2x$$

① بشرط

$$-2x > 0 \Rightarrow x < \frac{0}{-2}$$

إما

$$4x-2 = -2x$$

$$4x+2x = 2$$

$$6x = 2$$

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow E$ مرفوض حسب

أو

$$4x-2=-(-2x)$$

$$4x-2=+2x$$

$$4x-2x=2$$

$$2x=2$$

$x=1$ مرفوض

⇐ هنا لا يوجد حلول .

مسألة 1

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$$

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

② a. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

b. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$

③ استنتج أن للخط البياني للتابع f مقاربين مائلين عند $+\infty$ و $-\infty$ وادرس الوضع النسبي لهما .

ملاحظة : لدراسة نهاية ومشتق تابع يحوي قيمة مطلقة يفضل التخلص من القيمة المطلقة أولاً

الحل :

$$4x^2-1=0$$

$$4x^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{4}$$

$$\overbrace{x=-\frac{1}{2} \qquad\qquad x=\frac{1}{2}}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\|4x^2-1\|$	$4x^2-1$		$-4x^2+1$		$4x^2-1$

$$f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{4x^2-1}\,;x\in]-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},+\infty[\\ x+\sqrt{-4x^2+1}\,;x\in]-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}[\end{cases}$$

① في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{4x^2-1}\right)=+\infty$$

في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=$$

☹

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{4x^2-1}\right):-\infty+\infty$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x+|x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x-x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty(-1)$$

$$=+\infty$$

② a.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{4x^2-1}-3x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right):$$

$+\infty-\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}+2x}=0$$

.b

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{4x^2-1}+x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right):$$

$+\infty-\infty$

نضرب بالمرافق لنصل إلى

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}-2x}\right)=0$$

③ بما أن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$$

فلو وضعنا

$$\Delta_1: y=3x$$

فإن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta_1})=0$$

إذن Δ_1 مقارب مائل في جوار $+\infty$

كما وجدنا :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x))=0$$

نضع $\Delta_2: y=-x$

نلاحظ أنه مقارب مائل في جوار $-\infty$

المعادلة الجذرية :

① سالب $\sqrt{u(x)}=k$

مستحيلة

② $\sqrt{u(x)}=0$

$\leftarrow u(x)=0$

③ موجب $\sqrt{u(x)}=k$

نربع

④ $\sqrt{u(x)}=v(x)$

- نضع شرط $E: v(x)>0$
- نربع
- نقبل ونرفض

③ الوضع النسبي ل Δ_1 :

❶ نشكل الفرق

$$f(x)-y_{\Delta_1}=f(x)-3x$$

$$= x+\sqrt{|4x^2-1|}-3x$$

$$= \sqrt{|4x^2-1|}-2x$$

❷ نعدم

$$\sqrt{|4x^2-1|}-2x=0$$

$$\sqrt{|4x^2-1|}=2x$$

نضع الشرط $2x>0$

$$E : x > 0$$

$$|4x^2 - 1| = 4x^2$$

إما :

$$4x^2 - 1 = 4x^2$$

$$-1 = 0$$

أو:

$$4x^2 - 1 = -4x^2$$

$$8x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{8}$$

$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ مقبول , $x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ مرفوض

x	$-\infty$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$\sqrt{\|4x^2-1\|} - 2x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق Δ		C تحت Δ

دراسة الوضع النسبي لـ Δ_2 :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مسألة 2

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}}$$

①أثبت أن المستقيم $d_1 : y = x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لهما

$$f(x) - y_{d_1} = x + \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} - (x + 1)$$

$$f(x) - y_{d_1} = x + \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} - x - 1$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} - 1$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{x - \sqrt{9 + x^2}}{\sqrt{9 + x^2}}$$

$: +\infty - \infty$

بالمرافق

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{\left(x - \sqrt{9 + x^2}\right)\left(x + \sqrt{9 + x^2}\right)}{\left(\sqrt{9 + x^2}\right)\left(x + \sqrt{9 + x^2}\right)}$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{x^2 - (9 + x^2)}{\left(\sqrt{9 + x^2}\right)\left(x + \sqrt{9 + x^2}\right)}$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{x^2 - 9 - x^2}{\left(\sqrt{9 + x^2}\right)\left(x + \sqrt{9 + x^2}\right)}$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{-9}{\left(\sqrt{9 + x^2}\right)\left(x + \sqrt{9 + x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_{d_1}\right)=\frac{-9}{+\infty}=0$$

الوضع النسبي :

$$f(x)-y_{d_1}=\frac{-9}{\sqrt{9+x^2}\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)}<0$$

C تحت d_1

② أثبت أن المستقيم $d_2: y=x-1$ مقارب في جوار $-\infty$ و ادرس الوضع النسبي لهما

$$f(x)-y_{d_2}=x+\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}-x+1$$

$$f(x)-y_{d_2}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}+1$$
$$=\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}:-\infty+\infty$$

بالمرافق

$$f(x)-y_{d_1}=\frac{x^2-(9+x^2)}{\left(\sqrt{9+x^2}\right)\left(x-\sqrt{9+x^2}\right)}$$

$$f(x)-y_{d_1}=\frac{-9}{\left(\sqrt{9+x^2}\right)\left(x-\sqrt{9+x^2}\right)}\leq 0$$

C فوق d_2

مسألة 3 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :

$$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$$

① احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و ما هو التأويل الهندسي

② أثبت أن المستقيم $\Delta: y=2x$ مقارب مائل و ادرس الوضع النسبي لهما

رسالة من أستاذك:

كل يوم يخاطبك فيقول

أنا يوم جديد على عملك شهيد فاغتنمني ..فوالله لن أعود إلى يوم يبعثون

نهاية تابع مركب:

نتأمل ثلاث توابع f, g, h بحيث:

$$f(x) = g\big(h(x)\big)$$

عندئذٍ اذا كان

$$lim_{x\to a}h(x) = \ b$$

فإن

$$lim_{x\to a}f(x) = lim_{X\to b}g(X)$$

مثال1

ليكن h التابع المعرف بالشكل:

$$h(x) = x^2 - x + 1$$

و g التابع المعرف بالشكل: $g(x) = \sqrt{x}$

-1 احسب $lim_{x\to+\infty}h(x)$

-2 استنتج نهاية التابع $f(x) = g\big(h(x)\big)$

الحل:

-1 $lim_{x\to+\infty}h(x)$

$= lim_{x\to+\infty}(x^2 - x + 1) = +\infty$

-2 نضع $X = x^2 - x + 1$ فيكون

$$f(x) = g(x) = \sqrt{x}$$

$lim_{x\to+\infty}f(x)$

$= lim_{X\to+\infty}g(X) = +\infty$

مثال2:

نتأمل التابع f المعرف بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$$

1) اكتب f على شكل تركيب تابعين h, g

2) احسب نهاية f عند $x = \frac{1}{3}$

الحل:

1) لنضع, $X = h(x) = 3x - 1$

$$g(X) = \frac{1}{\sqrt{X}}$$

عندئذٍ:

$$f(x) = g(X) = g\big(h(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$$

2) $lim_{x\to\frac{1}{3}}h(x) = 0$

$\Longrightarrow lim_{x\to\frac{1}{3}}f(x)$

$= lim_{X\to 0}g(X) = \lim_{X\to 0}\frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$

تدرب 1:

فيما يأتي يعطى تابعاً f على مجموعة تعريف D ويطلب حساب نهاية f عند a (باستخدام تغيير المتحول)

.1 $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$, $a = 5^+$

نضع $X = h(x) = \frac{x+3}{x-5}$

$lim_{x\to 5^+}h(x)$

$= lim_{x\to 5^+}\left(\frac{x+3}{x-5}\right) = +\infty$

$\Longrightarrow lim_{x\to 5^+}f(x)$

$= lim_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$

.2 $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$, $a = +\infty$

نضع $X = h(x) = -x^3 + x^2 + x$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3+x^2+x)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = +\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$$

.3 $a=+\infty$ $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x+1}{x+1}\right)$

نضع $X = h(x) = \left(\frac{\pi x+1}{x+1}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x+1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x}{x} = \pi$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to\pi}\cos(X) = \cos(\pi) = -1$$

.4 $,a=+\infty$ $f(x)=\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

نضع $X = h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to0}\sin(X) = 0$$

.5 $,\ a=+\infty$ $f(x)=\cos^2\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

لنضع $X = h(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$$

ثم نضع $Y = \sqrt{X}$ عندئذٍ:

$$\lim_{X\to1} Y = \lim_{x\to1}\sqrt{X} = 1$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{Y\to1}\cos^2(\pi Y) = (-1)^2 = 1$$

تدرب 2:

ليكن f التابع المعرف على المجال $]-5,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$

-1 احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

-2 اعد حساب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x

الحل:

-1 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

لنضع $X = f(x)$ وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to1} f(X) = \lim_{X\to1}\frac{X-3}{X+5} = -\frac{1}{3}$$

-2 $$f(f(x)) = \frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5} = \frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}} = \frac{-2x-18}{6x+24}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{6x} = -\frac{1}{3}$$

تدرب3 :

ليكن g التابع المعرف على المجال $]3,+\infty[$ وفق $g(x)=\frac{3x-1}{x-3}$

1- احسب $lim_{x\to+\infty} g(x)$ واستنتج $lim_{x\to+\infty} g(g(x))$

2- اعد حساب $lim_{x\to+\infty} g(g(x))$

بعد كتابة $g(x)$ بدلالة x

الاستمرار والجزء الصحيح

مقدمة :

التابع ذو الأفرع : هو تابع تتغير قاعدة ربطه من مجال لمجال آخر

مثال

التابع f المعرف بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 0 \\ x^2+1 & ; x < 0 \end{cases}$$

هو تابع ذو فرعين :

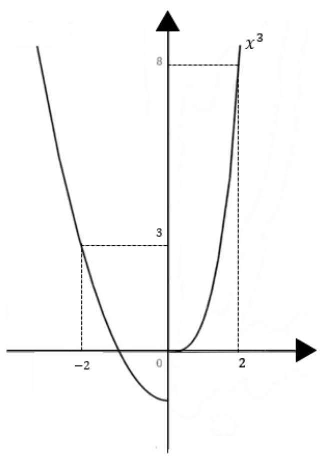
الفرع الأول : $x \mapsto 2x+1$

معرف على المجال $[0,+\infty[$

والفرع الثاني : $x \mapsto x^2+1$

معرف على المجال $]-\infty\,,0]$

ويكون خطه البياني ⇐



فهو على المجال $[0,+\infty[$ يمثل المستقيم $y = 2x+1$

وعلى المجال $]-\infty\,,0]$ يمثل القطع المكافئ

ونلاحظ من الرسم أنه مستمر " لا يوجد نقاط انقطاع "

مثال2 :

التابع :

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1 & ; -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

ونلاحظ أن التابع هنا غير مستمر عند $x = 0$

" التابع ينقطع عند الصفر "

الاستمرار:

A. الاستمرار عند النقطة a :

شرط الاستمرار للتابع f عند النقطة a هو

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

وبالتالي لدراسة استمرار التابع f عند النقطة a

1. نحسب الصورة $f(a)$

2. نحسب نهاية التابع f عندما $x \to a$

أي $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ إذن f مستمر عند a

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ إذن f غير مستمر عند a

مثال1

ادرس استمرار التابع f عند $a = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ; x \neq 2 \\ 4 & ; x = 2 \end{cases}$$

الحل :

نلاحظ أن $f(2) = 4$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} (x+2) = 4$$

نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ إذن f

مستمر عند $a = 2$

مثال2

ادرس استمرار f عند $a = 0$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} & ; x \neq 0 \\ \dfrac{3}{2} & ; x \neq 0 \end{cases}$$

الحل :

نلاحظ أن $f(0) = \frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

نعيد صياغة التابع f

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$f(x) = \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

$$f(x) = \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{1+x-1}$$

$$f(x) = \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1\left(\sqrt{1+x}+1\right) = 2$$

نلاحظ أن

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$$

$\Leftarrow f$ غير مستمر عند $a = 0$

B. إيجاد الثابت والاستمرار:

قد يرد سؤال يطلب فيه إيجاد قيمة ثابت مجهول ليكون f مستمر

1. نحسب $f(a)$ كما سبق
2. نحسب $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
3. بما أن f' مستمر عند a فهو يحقق أن

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

نقوم بحسابهم سابقاً

4. نحصل على معادلة بالمجهول المطلوب ونقوم بحلها .

مثال

جد قيمة الثابت A ليكون التابع f مستمر عند $a = 0$

حيث

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ; x \neq 0 \\ A+2 & ; x = 0 \end{cases}$$

الحل :

نحسب $f(0)$

نلاحظ $f(0) = A + 2$

نحسب النهاية :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$, نعيد صياغة التابع f

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$f(x) = \frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$f(x) = \frac{1-x^2-1}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$f(x) = \frac{-x^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}} = 0$$

بما أن f مستمر عند $a = 0$ فهو يحقق :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$0 = A + 2$$

$$\Rightarrow A = -2$$

انتبه :

أحياناً لا يحدد لنا في نص السؤال قيمة a لذلك يمكن أن نحددها من نقاط تفرع التابع

مثال

ليكن f المعرف على R وفق :

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) : x \neq 0$$

و $f(0) = 0$ أي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ m & ; m = 0 \end{cases}$$

جد قيمة m ليكون f مستمر على $\mathbb{R}$

تفكير: نلاحظ أن f له نقطة تفرع واحدة هي $a = 0$ لذلك ندرس الاستمرار عند $a = 0$

الحل :

نحسب الصورة $f(0) = m$

نحسب النهاية

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

نلاحظ أن هذه النهاية لا يمكن حسابها مباشرة

وبالتالي نلجأ لنظريات الحصر:

$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

نضرب الطرفين ب$x^2 > 0$

$$-x^2 \le x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$$

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \ \ \& \ \ \lim_{x\to 0}(x^2)$$

فحسب مبرهنة الحصر الأولي :

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

بما أن f مستمر عند $a = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$0 = m$$

C.الاستمرار على مجال:

نقبل هنا المبرهنات التالية :

1- كل تابع صحيح مستمر علىR

2- كل تابع كسري مستمر على R عدا القيم التي تعدم المقام

3- كل تابع جذري مستمر على مجال تعريفه

4- كل تابع مثلثي (sin, cos) مستمر علىR

5- جمع و طرح و ضرب تابعين مستمرين هو تابع مستمر

الجزء الصحيح:

$$E(x) = n \ ; \ n \le x < n+1$$
$$E(3.14) = 3 \ ; \ 3 \le 3.14 < 4$$
$$E(2.16) = 2 \ ; \ 2 \le 2.16 < 3$$
$$E(5) = 5 \ ; \ 5 \le 5 < 6$$
$$E(-2.3) = -3 \ ; \ -3 \le -2.3 < -2$$

متراجحة هامة :

$$x - 1 < E(x) \le x$$

مثال1

ليكن f التابع المعرف على $[0,3[$ وفق :
$f(x) = E(x)$

1- اكتب f بعبارة مستقلة عن x

2- ارسم C

3- هل f مستمر

4- احسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

مثال2

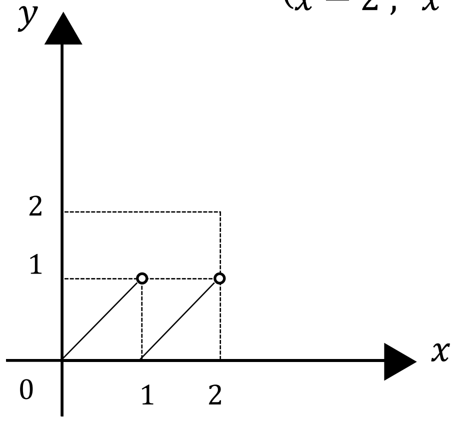
ليكن f المعرف على المجال $[0,2]$ بالشكل
$f(x) = x - E(x)$

1) اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

2) ارسم c_f على $[0,2]$

الحل :

$$f(x)=\begin{cases} x \quad ; & x\in[0,1[\\ x-1; & x\in[1,2[\\ x-2\,; & x=2 \end{cases}$$



إضافي :

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ " دورة 2020 "

الحل:

$$x-1\le E(x)\le x$$

نضرب ب (-1)

$$1-x\ge -E(x)\ge -x$$

نضيف x

$$1\ge x-E(x)\ge 0$$

نقسم على $x^2>0$

$$\frac{1}{x^2}\ge\frac{f(x)}{x^2}\ge 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$$

مثال3

ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق :

$$f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$$

1- اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

2- أثبت أن f مستمر على $[0,2]$

أضف إلى درس تابع الجزء الصحيح تمارين الوحدة التي تمّ حلها ضمن الدروس المصورة

ستكون نهاية هذا العام بداية فرح عارم

و نجاح منقطع النظير
و لكن هذا الفرح يتطلب منك جهداً و همة

و التزام