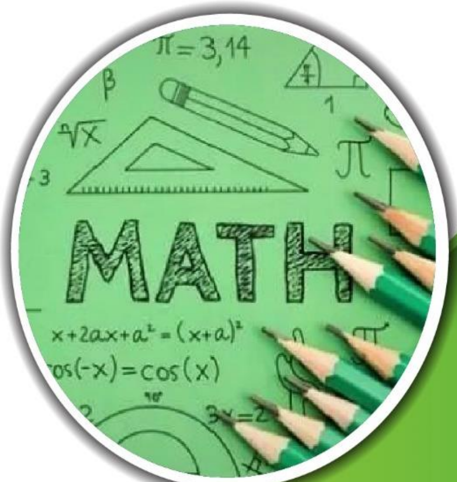
شيفرة الـ 600

للإعداد والتكوين والتأسيس في الرياضيات

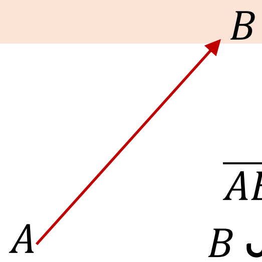
إعداد: أ.خالد عامر



الأشعة في الفراغ

شيفرة الـ 600 في الأشعة في الفراغ

تذكرة وعموميات:



تعريف:

لتكن لدينا النقطتين A و B

من الفراغ نقول عن الشعاع $\overrightarrow{AB}$

أنه الانسحاب الذي ينقل A إلى B

ونميز:

حالة 1 :

في حالة $A \neq B$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يمتلك:

- منحى: هو منحى المستقيم (AB)
- اتجاه: يتفق مع الانتقال من A إلى B
- طولاً أو نظيماً: هو المسافة بين A إلى B

ونرمز إلى نظيم الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

ويكون: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

حالة 2 : في حالة $A = B$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AA}$ هو

الشعاع الصفري ورمزه $\vec{0}$ حيث الشعاع الصفري:

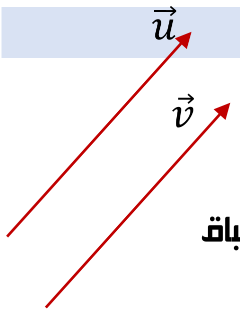
هو شعاع له نفس البداية ونفس النهاية أي

بدايته تنطبق على نهايته

نتيجة هامة: إذا كان $\overrightarrow{DN} = \vec{0}$

فهذا يعني أن $D = N$ أي D تنطبق على N

الشعاعين المتساويين:



الشعاعين المتساويين لهما

نفس المنحى ونفس الجهة

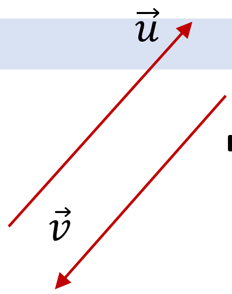
ونفس الطويلة حيث:

نفس المنحى تعني توازي أو انطباق

الفائدة:

تفيد في استبدال شعاع بشعاع آخر يساويه

الشعاعين المتعاكسين:



لهما نفس المنحى ونفس

الطويلة واتجاهين متعاكسين

الفائدة:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

جمع الأشعة:

ملاحظة: ناتج مجموع أشعة هو شعاع

قواعد جمع الأشعة:

مجموع شعاعين متساويين:

الناتج هو ضعفي أحدهما

مثال: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$

مجموع شعاعين متعاكسين:

الناتج هو الشعاع الصفري

مثال: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

مجموع شعاعين في حالة تعاقب:

أي نهاية أحد الأشعة هي بداية للشعاع الآخر

وهنا نستخدم قاعدة شال في جمع الأشعة وفق:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

مجموع شعاعين لهما البداية نفسها

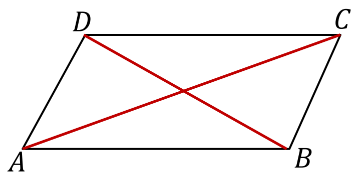
نستخدم قاعدة متوازي الأضلاع بحيث يكون

مجموع الشعاعين هو قطر متوازي الأضلاع

المنشأ على هذين الشعاعين والذي له نفس بداية

الشعاعين

مثال:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$$

ملاحظة: أحياناً نحتاج إلى استخدام إصلاحات

* ترتيب
* استبدال
* زرع

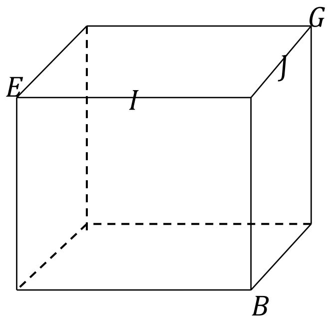
للوصول إلى إحدى الحالات السابقة (جمع شعاعين متساويين , مجموع شعاعين متعاكسين , مجموع شعاعين في حالة تعاقب , مجموع شعاعين لهما نفس البداية)

طرح الأشعة:

لطرح شعاعين نجمع الأول مع معاكس الشعاع الثاني وفق: $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ ثم نتابع حسب قواعد جمع الأشعة

مثال:

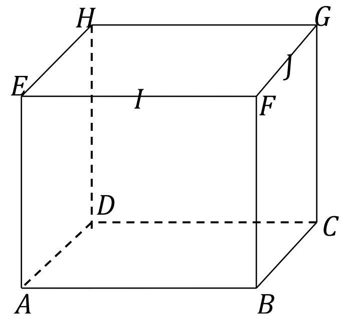
$ABCDEFGH$ مكعب فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$ والمطلوب: أكمل ما يلي:



1. $\overrightarrow{AB}=$
2. $\overrightarrow{HD}=$
3. $\overrightarrow{AD}=$
4. $\overrightarrow{BG}=$
5. $\overrightarrow{DG}=$
6. $\overrightarrow{DG}+\cdots=\vec{0}$
7. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=$
8. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{GF}=$
9. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$
10. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=$
11. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}=$
12. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}=$
13. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$
14. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}=$
15. $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FI}=$
16. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FG}=$
17. $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GJ}=$
18. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{GJ}=$
19. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FI}=$
20. $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EH}=$
21. $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AG}=$
22. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=$
23. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{HE}=$
24. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}=$
25. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GI}=$

تدرب صفحة 16

التمرين الأول:



$ABCDEFGH$ مكعب فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$ في كل من الحالات الآتية بين إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب على إجابتك:

1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$
2. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
3. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$
4. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$
5. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$

في كل من الحالات الآتية حدد موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة:

1. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$
2. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$
3. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

ولا نتوب عن أحلامنا مهما تكرر انكسارها..

في كل من الحالات الآتية عبر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً

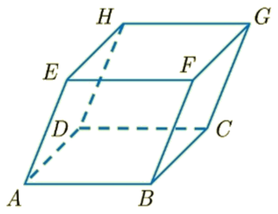
$$\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$$

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF}$$

تمرين:



$ABCDEFGH$ متوازي سطوح

أثبت صحة المساواة الشعاعية في الحالات:

1. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$
2. $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$
3. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$
4. $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD}$

المعلم في الفراغ:

المعلم في الفراغ:

اختيار معلم في الفراغ هو إعطاء نقطة O تسمى مبدأ المعلم. وجملة ثلاثة أشعة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليست مرتبطة خطياً.

نرمز إلى هذا المعلم بالرمز $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k},)$

ونسمي الجملة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس أشعة الفراغ

إحداثيات نقطة في الفراغ:

لتكن M نقطة من الفراغ إذاً إحداثيات M وفق: $M(x,y,z)$ حيث x فاصلة النقطة و y ترتيب النقطة و z راقم النقطة

مركبات شعاع في الفراغ:

ليكن $\vec{u}$ في الفراغ مركباته تعطى وفق: $\vec{u}(x,y,z)$ ويمكن أن نكتب $\vec{u}$ بالصيغة

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ويمكن أيضاً أن نكتب $\vec{u}$ وفق عمود وفق:

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

إيجاد مركبات شعاع:

لتكن لدينا النقطتين

$A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$

فإن مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ تعطى وفق:

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

مثال:

نتأمل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$A(3,2,0)$ و $B(1,2,-1)$ و $C(1,-2,1)$

1. احسب مركبات $\overrightarrow{AB}$
2. احسب مركبات $\overrightarrow{CB}$

العمليات على الأشعة:

ليكن لدينا

$\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ فإن:

جداء عدد حقيقي K بشعاع

هو شعاع مركباته تنتج من ضرب هذا العدد بمركبات الشعاع أي:

$$K\vec{u} = \begin{pmatrix} Kx_1 \\ Ky_1 \\ Kz_1 \end{pmatrix}$$

مجموع شعاعين

هو شعاع مركباته تنتج من جمع مركبات الشعاع الأول مع مقابلاتها من الشعاع الثاني أي:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

تساوي شعاعين:

إذا كان لدينا $\vec{u} = \vec{v}$ فهذا يكافئ أن:

$$\vec{u} = \vec{v} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{pmatrix}$$

مثال:

في معلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

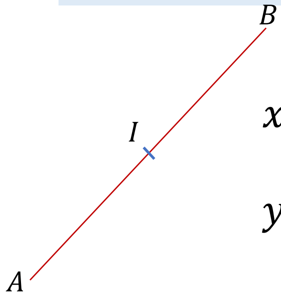
$$A(3,5,2)\,,B(2,-1,3)\,,C(0,-2,2)$$
$$D(-2,5,1)\,,E(3,9,2)\,,F(8,13,3)$$

1. احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$
2. جد مركبات الشعاع $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$
3. جد مركبات الشعاع

$$\vec{v}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EF}$$

إيجاد إحداثيات نقطة:

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة:



لدينا I منتصف $[AB]$ إذاً:

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}$$
$$y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$$
$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على إحداثيات I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

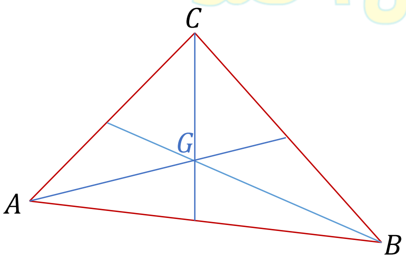
مثال:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطتان:

$$B(3,-1,2)\,,F(5,0,1)$$

أوجد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BF]$:

إحداثيات مركز ثقل المثلث:



تذكر مركز ثقل المثلث هو نقطة تلاقي المتوسطات

لتكن G مركز ثقل المثلث (ABC) إذاً:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$$
$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$
$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

مثال:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:
$A(3,-1,0)\ ,B(5,1,1)\ ,C(0,-1,2)$
والمطلوب: أوجد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث (ABC)

إحداثيات نقطة تحقق علاقة شعاعية (معطاة)

الخطوات:

- لتكن النقطة المطلوبة (x,y,z)
- نعوض في العلاقة الشعاعية ثم نطبق العمليات على الأشعة فنحصل على معادلات وبحل هذه المعادلات نحصل على المطلوب

مثال:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:
$A(3,-1,2)\ ,B(1,0,1)\ ,C(-1,1,-1)$
أوجد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{CB}$$

إحداثيات نقطة تجعل رباعي متوازي أضلاع: (مربع / معين / مستطيل)

الخطوات:

- لتكن النقطة المطلوبة (x,y,z)
- نرسم شكل تقريبي وبالاعتماد على هذا الشكل نضع علاقة شعاعية
- نتابع كما سبق

مثال:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:
$A(3,-1,2)\ ,B(1,0,1)\ ,C(-1,1,-1)$
أوجد إحداثيات النقطة N التي تجعل الرباعي $ABNC$ متوازي أضلاع:

إحداثيات نقطة مركز متوازي الأضلاع:

تذكرة: مركز متوازي الأضلاع هو نقطة تلاقي القطرين (أي منتصف أحد الأقطار)

الخطوات:

لإيجاد إحداثيات النقطة مركز متوازي الأضلاع فإننا نوجد إحداثيات منتصف أحد أقطاره

إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى نقطة:

الخطوات:

- نضع النقطة المطلوبة (x,y,z)
- نرسم شكل تقريبي (بحيث النقطة الموجودة بعد كلمة بالنسبة تكون في المنتصف)
- بالاعتماد على الشكل نضع علاقة شعاعية ثم نتابع كما سبق:

مثال:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(3,-1,0)\ ,B(2,1,5)$

أوجد إحداثيات النقطة N نظيرة النقطة A بالنسبة إلى B

تدرب صفحة 24

التمرين الأول:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تتأمل النقاط:

$A(3,5,2)\ ,B(2,-1,3)\ ,C(0,-2,2)$

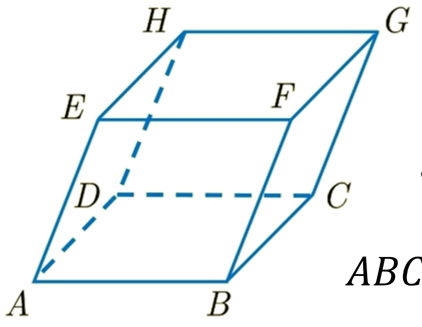
$D(-2,5,1)\ ,E(3,9,2)\ ,F(8,13,3)$

احسب إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[CD]$ و $[EF]$

1. عين مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$
2. عين إحداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $(ABCK)$ متوازي أضلاع
3. جد مركبات كل من الشعاعين:
   - $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$
   - $\vec{v}=2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EF}$
4. أوجد إحداثيات النقطة N مركز متوازي الأضلاع $(ABCK)$

التمرين الثاني:

في معلم متجانس للفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعطى إحداثيات أربع من رؤوس متوازي السطوح $ABCDEFGH$ المرسوم جانباً



وهي: $A(2,1,-1)$ و $B(1,3,-1)$ و $C(-3,2,0)$ و $E(3,-1,3)$

جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.

التمرين الثالث:

لدينا في معلم للفراغ النقاط

$A(3,0,1)$, $B(-2,3,2)$, $C(1,2,-2)$

1. جد إحداثيات النقطة I منصف $[AB]$
2. جد إحداثيات النقطة D نظيرة I بالنسبة إلى C
3. جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

4. جد إحداثيات النقطة N التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NC}$$

التمرين الرابع:

لدينا النقطتان $A(2,3,-2)\ ,B(5,-1,0)$
جد إحداثيات إن أمكن في كل حالة إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة

1. $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$
3. $3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$
4. $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

تمرين شامل:

لتكن لدينا النقاط $A(5,2,1)$ و $B(-1,0,2)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(0,-2,2)$ و $E(3,-1,-3)$ و $F(-1,1,0)$ والمطلوب:

١. جد مركبات الشعاع $\vec{u}$ الذي يحقق العلاقة:
$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ED}$$

٢. جد مركبات الشعاع $\vec{v}$ الذي يحقق العلاقة:
$$\vec{v} = \overrightarrow{BA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF}$$

٣. جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:
$$\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$$

٤. جد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

٥. جد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث (DFE)

٦. جد إحداثيات النقطة K التي تجعل $ABCK$ متوازي أضلاع ثم احسب إحداثيات N مركز متوازي الأضلاع

٧. جد إحداثيات النقطة H نظيرة C بالنسبة إلى B

٨. جد إحداثيات النقطة L نظيرة F بالنسبة إلى المبدأ

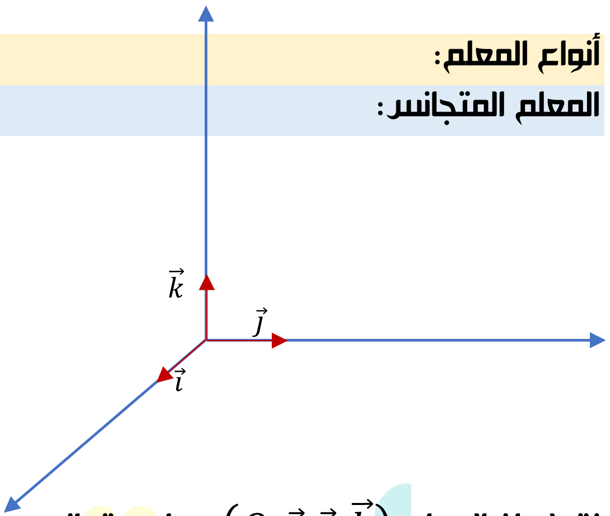
أنواع المعالم وإيجاد إحداثيات النقاط بالاعتماد على معلم:

تذكرة المعلم في الفراغ:

اختيار معلم في الفراغ هو إعطاء نقطة O تسمى مبدأ المعلم. وجملة ثلاثة أشعة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليست مرتبطة خطياً.

نرمز إلى هذا المعلم بالرمز $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k},)$

ونسمي الجملة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس أشعة الفراغ



أنواع المعلم:

المعلم المتجانس:

نقول بإن المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متجانس إذا تحقق:

- $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى
- نظيم كل من $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ يساوي واحدة الطول أي:

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

المعلم المتعامد:

نقول بإن المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد إذا تحقق:

$\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى (أي وجود ثلاثية متعامدة)

ملاحظة:

المعلم المتعامد يمكن تحويله إلى معلم متجانس

المعلم الكيفي:

نقول إن المعلم كيفي إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ غير متعامدة مثنى مثنى (عدم وجود ثلاثية متعامدة)

إيجاد إحداثيات النقاط بالاعتماد على معلم:

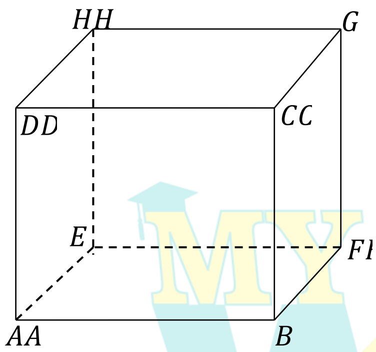
نميز الحالات:

الحالة الأولى: حالة الشكل هو مكعب

- عندما يكون الشكل مكعب فهذا يعني وجود ثلاثية متعامدة أي وجود معلم متعامد
- عندما يكون طول حرف المكعب غير معلوم يمكننا أن نأخذ معلم متجانس بإعتبار طول حرفه هو 1

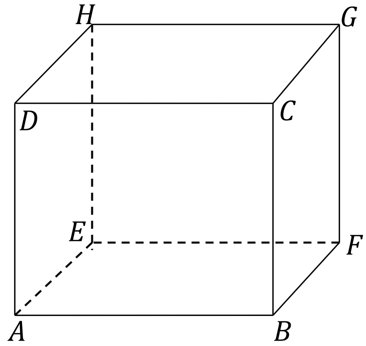
التمرين الأول:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه هو 3 بإختيار معلم متجانس مبدؤه A أوجد إحداثيات النقاط.



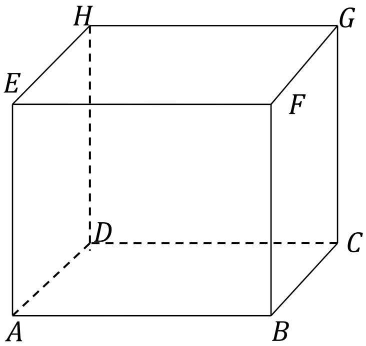
التمرين الثاني:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه هو 5 بإختيار معلم متجانس مبدؤه E أوجد إحداثيات النقاط.



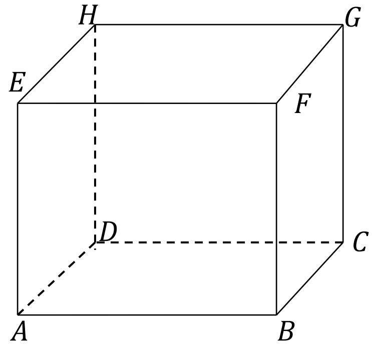
التمرين الثالث:

$ABCDEFGH$ مكعب بإختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط



الحالة الثانية: متوازي مستطيلات أبعاده معلومة

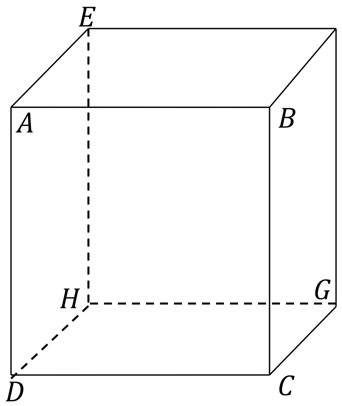
في حالة متوازي المستطيلات يوجد ثلاثية متعامدة



التمرين الأول:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه: $AB = 4$ و $BC = 1$ و $CG = 3$

التمرين الثاني:



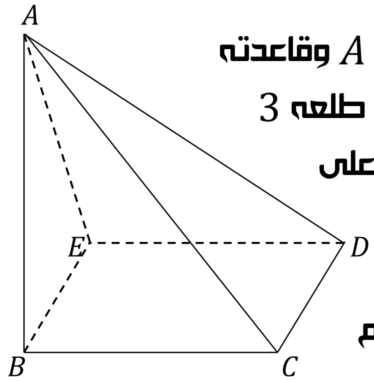
$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه: $AB = 4$ و $BC = 4\sqrt{2}$ و $CG = 2$ بإختيار معلم متجانس مبدؤه هو النقطة H أوجد إحداثيات النقاط

ملاحظة:

- في حالة متوازي المستطيلات الذي أبعاده معلومة يمكن وضع معلم متجانس.
- في حالة متوازي المستطيلات الذي أبعاده غير معلومة لا يمكن وضع معلم متجانس.

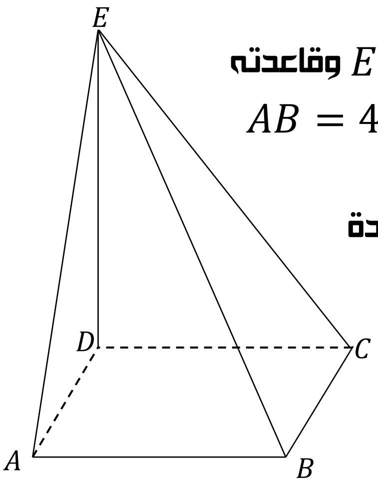
الحالة الثالثة:
حالة هرم يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة

التمرين الأول:



$ABCDE$ هرم رأسه A وقاعدته $(BCDE)$ مربع طول طلعه 3 ولدينا (AB) عمودي على مستوي القاعدة $(BCDE)$ و $AB = 4$ بإختيار معلم مناسب جد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم.

التمرين الثاني:



$E - ABCD$ هرم رأسه E وقاعدته $(ABCD)$ مستطيل فيه $AB = 4$ و $BC = 3$ ولدينا (ED) عمودي على مستوي القاعدة $(ABCD)$ بحيث: $ED = 4\sqrt{2}$ بإختيار معلم مناسب جد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم.

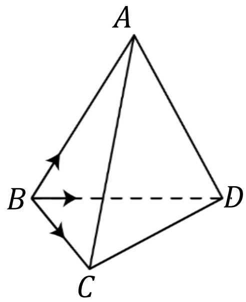
الحالة الرابعة: رباعي وجوه
يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة

تمهيد:

رباعي الوجوه هو هرم قاعدته مثلث.

تمرين:

$ABCD$ رباعي وجوه رأسه A وقاعدته (BCD) مثلث قائم في B وفيه: $BC = 3$ و $BD = 4$ ولدينا (AB) عمودي على مستوي القاعدة (BCD) و $AB = 4\sqrt{3}$ بإختيار معلم متجانس أوجد إحداثيات النقاط



ملاحظة:

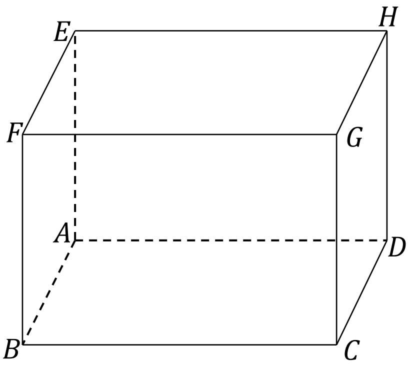
في حال عدم معرفة الأطوال في حالة رباعي الوجوه فهذا يعني عدم إمكانية وضع معلم متجا نس.

ملخص الحديث يا طلابي:

متى يمكن وضع معلم متجانس؟

- في حالة المكعب
- في حالة متوازي المستطيلات بشرط أبعاده معلومة
- في حالة الهرم بشرط وجود ثلاثية متعامدة وبشرط أبعاده معلومة
- في حالة رباعي الوجوه بشرط وجود ثلاثية متعامدة وبشرط أبعاده معلومة

تمرين شامل:



$ABCDEFGH$ مكعب فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[BC]$ نفرض وبإختيار $AB = 1$ معلم مبدؤه A

١. جد إحداثيات رؤوس المكعب والنقطة I و J
٢. جد إحداثيات النقطة K مركز ثقل المثلث (FHC)
٣. جد إحداثيات النقطة N التي تجعل الرباعي $(ABKN)$ متوازي أضلاع ثم أوجد إحداثيات النقطة M مركز متوازي الأضلاع
٤. جد إحداثيات النقطة L نظيرة M بالنسبة إلى A
٥. جد إحداثيات النقطة O نظيرة K بالنسبة إلى C

المسافة في الفراغ:

نظيم شعاع:

في معلم متجانس يعطى نظيم الشعاع الذي $\vec{u}$ مركباته $\vec{u}(a,b,c)$ بالعلاقة:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{نظيم شعاع} = \sqrt{\left(\text{المركبة الأولى}\right)^2 + \left(\text{المركبة الثانية}\right)^2 + \left(\text{المركبة الثالثة}\right)^2}$$

المسافة بين نقطتان:

في معلم متجانس تعطى المسافة بين النقطتان $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ وفق:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

التمرين الأول:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

أوجد $||\vec{u}||$ حيث: $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

التمرين الثاني:

تتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط:

$A(2,3,2)$, $B(-2,-1,2)$, $C(-2,3,-2)$

احسب المسافات AB و AC و CB

تدرب صفحة 27 :

التمرين الأول:

احسب نظيم $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

في كل من الحالات الآتية:

1. $\vec{u}(2,-2,3)$
   $\vec{v}(4,-4,-2)$
   $\vec{w}(4,1,-2)$
2. $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$
   $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{k}$
   $\vec{w} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} + \vec{k}$

تطبيقات المسافة في الفراغ:

التطبيق الأول: تحديد نوع المثلث

لتحديد نوع المثلث نتبع الخطوات:

- نوجد أطوال أضلاع المثلث باستخدام قانون المسافة بين نقطتين في الفراغ ونحدد نوع هذا المثلث من حيث أطوال الأضلاع
- في حال كان المثلث متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع فإننا نختبر كونه قائماً باستخدام مبرهنة عكس فيثاغورث

ملاحظة:

المثلث متساوي الأضلاع من المستحيل أن يكون قائماً.

تدرب صفحة 27 :

التمرين الثاني:

فيما يأتي هل المثلث ABC قائم؟ هل هو متساوي الساقين؟ هل هو متساوي الأضلاع؟

1. في حالة $A(1,3,-1)$ و $B(3,6,-2)$ و $C(0,4,0)$
2. في حالة $A(1,3,-2)$ و $B(2,-1,0)$ و $C(6,-3,-1)$

التمرين الرابع:

تتأمل النقاط $A\left(1,1,\sqrt{2}\right)$ **و** $B\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},0\right)$
و C **نظيرة** A **بالنسبة إلى المبدأ** O **, أثبت أن المثلث** ABC **قائم ومتساوي الساقين.**

ملاحظة تملئ أثناء الجلسة:

التطبيق الثاني: انتماء نقطة إلى المستوي المحوري لقطعة مستقيمة

تمهيد:

تعريف: المستوي المحوري هو المستوي العمودي على هذه القطعة في منتصفها

خاصة: كل نقطة من المستوي المحوري تكون متساوية البعد عن طرفيها

نص السؤال:

هل النقطة M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ ؟

الخطوات:

- نوجد المسافة MA .
- نوجد المسافة MB .
- نميز حالتين:

الحالة الأولى: إذا تحقق: $MA = MB$

فإن النقطة M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

الحالة الثانية: إذا تحقق: $MA \neq MB$

فإن النقطة M لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

صفحة 24

التمرين الثالث:

لدينا النقطتان $A(5,2,1)$ و $B(3,0,1)$, بين أي النقاط C أو D أو E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ في حالة:

$D(1,1,-3)$, $C(-2,5,-2)$, $E(3,2,1)$

التطبيق الثالث: انتماء نقطة إلى كرة:

تمهيد: لكل كرة مركز ونصف قطر

أنماط التمارين:

النمط الأول:

نص السؤال:

هل النقطة M تنتمي إلى الكرة
التي مركزها Ω ونصف قطرها R

خطوات الحل:

- نوجد المسافة بين النقطة ومركز الكرة ولتكن مثلاً $M\Omega$
- نميز حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان $R = M\Omega$

فالنقطة M تنتمي إلى الكرة.

الحالة الثانية: إذا كان $R \neq M\Omega$

فالنقطة M لا تنتمي إلى الكرة.

مثال:

لدينا كرة S مركزها $A(2,3,5)$ ونصف قطرها 5 هل النقطة $B(-2,0,5)$ تنتمي إلى الكرة؟

النمط الثاني:

نص السؤال:

هل النقاط A و B و C و D و E
تقع على كرة وحدة مركزها Ω .

خطوات الحل:

- نوجد المسافات بين جميع النقاط ومركز الكرة.
- نميز حالتين:

الحالة الأولى: جميع المسافات متساوية

فإن جميع النقاط تقع على كرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها هو المسافة بين المركز وإحدى النقاط.

الحالة الثانية: المسافات ليست جميعها متساوية

إذاً النقاط لا تقع على كرة واحدة.

صفحة 27

التمرين الخامس:

نتأمل النقاط $A(2,3,-1)$ و $B(2,8,-1)$ و $C(7,3,-1)$ و $D(-1,3,3)$ و $E(5,3,3)$
أثبت أن B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A

التمرين 16 صفحة 42 :

جد على محور الفواصل نقطة C مستوية البعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1))$

التمرين 17 صفحة 42

ليكن α عدداً حقيقياً ولنتأمل النقاط $A(3,1,-3)$ و $B(01,5,-3)$ و $C(-1,1,\alpha)$ أقبت أن المثلث ABC متساوي الساقين أياً كان α , أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع؟

ن شخص مُميَز ينطبق عليهِ الأمل..
كُن شخص إيجابي واصنع لنفسك قصة يتحدث الجميع بها..
أنت قوي.. ♡

الارتباط الخطي لشعاعين:

مبرهنة:

يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي أي

إذا وجد عدد حقيقي k يحقق: $\vec{u} = k\vec{v}$

إذا وجد عدد حقيقي k' يحقق: $\vec{v} = k'\vec{u}$

كيفية اختبار الارتباط الخطي لشعاعين:

لإختبار الارتباط الخطي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإننا نميز الحالات:

الحالة الأولى:

إذا كانت مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ جميعها غير صفرية فإننا نختبر تناسب المركبات ونميز:

المركبات متناسبة ← الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً

المركبات غير متناسبة ← الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

التمرين الأول:

هل $\vec{u}(3,-1,2)$ و $\vec{v}(6,-2,4)$ مرتبطين خطياً ؟

التمرين الثاني:

هل $\vec{u}(3,-1,2)$ و $\vec{v}(6,-2,5)$ مرتبطان خطياً؟

الحالة الثانية:

إذا كانت مركبات أحد الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أو كلاهما تحوي أصفار فإننا نميز:

أولاً: مركبات كل شعاع تحوي صفراً واحداً فقط والأصفار فوق بعضها فإننا نختبر تناسب المركبات المتبقية ونميز:

- المركبات متناسبة إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً
ويكون التعليل بإستخدام المبرهنة

- المركبات غير متناسبة إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً
ويكون التعليل بإستخدام المبرهنة

التمرين الأول:

هل $\vec{u}(3,0,-1)$ و $\vec{v}(6,0,-2)$ مرتبطان خطياً؟

التمرين الثاني:

هل $\vec{u}(0,3,1)$ و $\vec{v}(0,5,2)$ مرتبطان خطياً؟

ثانياً: الأصفار ليست فوق بعضها إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ويكون التعليل بإستخدام المبرهنة

تمرين:

هل $\vec{u}(3,0,-1)$ و $\vec{v}(6,1,-2)$ مرتبطان خطياً؟

ثالثاً: مركبات كل شعاع تحوي صفرين والأصفار فوق بعصها إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً ويكون التعليل بإستخدام المبرهنة.

تمرين:

هل $\vec{u}(0,0,-3)$ و $\vec{v}(0,0,5)$ مرتبطان خطياً؟

قراءة علاقة:

- إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{CD}$

نفهم أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً
وبالتالي المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان

- إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{AC}$

نفهم أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً
والنقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

تذكرة:

المعنى الهندسي للارتباط الخطي لشعاعين

يكون لهما نفس المنحى

توازي | **انطباق**

الفائدة من مفهوم الارتباط الخطي لشعاعين:

- **معرفة توازي مستقيمان أو نفي ذلك**
- **معرف وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة أو نفي ذلك**

أنماط التمارين:

النمط الأول:

نص السؤال:

هل النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة
هل النقطة A تقع على المستقيم (BC) ؟

الخطوات:

- **نشكل $\overrightarrow{AB}$**
- **نشكل $\overrightarrow{AC}$**
- **نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$**
- **ونميز:**

حالة 1 : إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً

إذاً النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة

حالة 2 : إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً

إذاً النقاط A و B و C ليست تقع على استقامة واحدة

تمرين 7 صفحة 24 :

في كل من الحالات الآتية بين إذا كانت النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

1. $A(3,-1,2)\,,B(0,2,4)\,,C(2,0,-3)$
2. $A(-4,1,3)\,,B(-2,0,5)\,,C(0,-1,7)$
3. $A(1,-1,0)\,,B(1,-1,4)\,,C(1,-1,-3)$

النمط الثاني:

نص السؤال:

هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان؟

الخطوات:

- نشكل $\overrightarrow{AB}$
- نشكل $\overrightarrow{CD}$
- نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$
- ونميز:

حالة 1 : إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً

إذاً (AB) و (CD) متوازيان

حالة 2 : إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطان خطياً

إذاً (AB) و (CD) غير متوازيان

مثال:

لتكن لدينا النقاط $A(3,-1,2)$ و $B(5,0,1)$ و $C(2,1,-1)$ و $D(1,1,0)$ والمطلوب:

هل (AB) و (CD) متوازيان؟

النمط الثالث:

نص السؤال:

هل النقاط A و B و C تشكل مستوي؟

الخطوات:

- نشكل $\overrightarrow{AB}$
- نشكل $\overrightarrow{AC}$
- نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
- ونميز:

حالة 1 : إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً

إذاً النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة فهي لا تشكل مستوي.

حالة 2 : إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً

إذاً النقاط A و B و C ليست تقع على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي.

مثال:

هل النقاط $A(1,-1,3)$ و $B(1,-1,4)$ و $C(1,-1,0)$ تعيين مستو؟

تمرين 5 صفحة 24 :

أيمكن تعيين a و b لتكون النقاط

$$A(2,3,0)\ ,B(3,2,1)\ ,F(a,b,2)$$

على استقامة واحدة؟

تمرين 6 صفحة 24 :

أيمكن تعيين a ليكون الشعاعين

$$\vec{u}(2,a,5)\ ,\vec{v}(1,-2,a)$$

مرتبطين خطياً؟

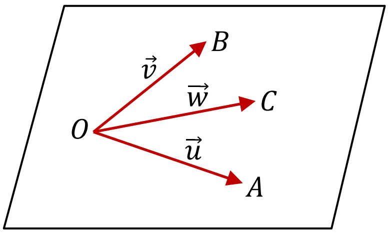
ملاحظة تملئ أثناء الجلسة:

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

تعريف:

نقول عن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد نقطة O تجعل النقاط O, A, B, C المعرفة وفق: $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ و $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ تقع في مستوٍ واحد.

مبرهنة:



ثلاثة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ أشعة نفترض أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً عندئذٍ تكون الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان a و b يحققان:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

المعنى الهندسي للارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

إذا كان لدينا ثلاثة أشعة مرتبطة خطياً فهذا يعني أن أحد الأشعة الثلاثة يوازي المستوي المنشأ على الشعاعيين الباقيين

قراءة علاقة:

- إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{DE}$ فهذا يعني أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{DE}$ مرتبطة خطياً فالمستقيم (AB) يوازي المستوي (CDE)

- إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$ فهذا يعني أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً إذاً النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد

كيفية اختبار الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

نص السؤال:

هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً؟

الخطوات:

- نحدد منها شعاعين غير مرتبطين خطياً ولتكن فرضاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$
- نبحث عن عددين حقيقيين a و b يحققان العلاقة $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

ونميز:

الحالة الأولى: وجود عددان a و b يحققان العلاقة

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

إذاً الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً.

الحالة الثانية:

عدم وجود عددان a و b يحققان العلاقة

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

إذاً الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مرتبطة خطياً.

التمرين الأول

لتكن لدينا الأشعة:

$$\vec{u}(1,-1,1)\ ,\ \vec{v}(-1,1,2)\ ,\ \vec{w}(0,0,3)$$

هل الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً؟

التمرين الثاني:

لتكن لدينا الأشعة:

$\vec{u}(-1,-2,0)$, $\vec{v}(3,5,-1)$, $\vec{w}(1,1,1)$

هل الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً؟

أنماط التمارين:

النمط الأول:

وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد

نص السؤال:

هل النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد؟

الخطوات:

* نأخذ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$
* نختبر الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ (كما ورد معنا سابقاً)
* ونميز:

حالة 1 : إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً

إذاً النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد

حالة 2: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطة خطياً

إذاً النقاط A و B و C و D لا تقع في مستوٍ واحد

تمرين 4 صفحة 36 :

نتأمل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$A(2,0,1)\,,B(1,-2,1)\,,C(5,5,0)$

$D(-3,-5,6)\,,E(3,1,2)$

أثبت انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستوٍ واحد P وتبين إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P

النمط الثاني:

نص السؤال:

هل المستقيم (AB) يوازي المستوي (CDE)

الخطوات:

- نأخذ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$
- نختبر الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ (كما ورد معنا سابقاً)
- ونميز:

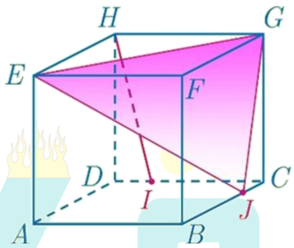
حالة 1 : إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً

إذاً المستقيم (AB) يوازي المتسوي (CDE)

حالة 2 : إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ غير مرتبطة خطياً

إذاً المستقيم (AB) لا يوازي المتسوي (CDE)

تمرين 6 صفحة 38 :



نتأمل المكعب $ABCDEFGH$ النقطة I من الحرف $[CD]$ تحقق المساواة: $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

والنقطة J من $[BC]$ تحقق المساواة:

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

أثبت أن المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)

النمط الثالث:

نص السؤال:

لدينا المستقيم d المار من A وشعاع توجيهه $\vec{u}$ ولدينا المستقيم d_2 المار من B وشعاع توجيههه $\vec{v}$ والمطلوب هو إثبات أن المستقيمان d_1 و d_2 متقاطعان

الخطوات:

- نثبت أن المستقيمان d_1 و d_2 غير متوازيان وذلك بإثبات أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً
- نثبت أن d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد وذلك بإثبات أن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً
- وبالتالي يكون d_1 و d_2 متقاطعان.

ملاحظة: في حال تقاطع مستقيمان فإن تقاطعهما هو نقطة

تمرين 5 صفحة 37 :

في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$ والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$ ولدينا d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بـ $\vec{u}$ ولدينا d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجه بـ $\vec{v}$ والمطلوب أثبت أن المستقيمان d و d' متقاطعان ثم عين I نقطة تقاطعهما.

مراكز الأبعاد المتناسبة:

عدد النقاط / الفكرة	لنقطتين	لثلاثة نقاط	لأربعة نقاط
مبرهنة الوجود والتعريف	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α)و (B,β) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta\neq 0$	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ بحيث: $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$
تجانس مركز الأبعاد (k عدد حقيقي غير معدوم)	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α)و(B,β) فإنّ G تكون مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,K\alpha)$ و$(B,k\beta)$ حيث k عدد حقيقي	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) فإنّ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ: $(A,k\alpha)$ و$(B,k\beta)$ و$(C,k\gamma)$ حيث K عدد حقيقي	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) فإنّ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ: $(A,k\alpha)$ و$(B,k\beta)$ و$(C,k\gamma)$ و$(D,k\delta)$ حيث k عدد حقيقي
تساوي الأثقال	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,a) و (B,a) فهذا يعني أنّ G هي منتصف $[AB]$	إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,a) و (B,a) و (C,a) تكون G مركز ثقل المثلث (ABC)	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,a) و(B,a) و(C,a) و(D,a) فهذا يعني أنّ النقطة G مركز ثقل رباعي الوجوه $(ABCD)$

إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) فإنّ إحداثيّات النقطة G هي: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$ $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$	لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) فإنّ إحداثيّات النقطة G هي: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$	ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) فإنّ إحداثيّات النقطة G تعطى وفق: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$
علاقة تفيد في الإنشاء	لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و(B,β) فإنّ: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) فإنّ: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$	
مبرهنة	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) ولدينا M نقطة من الفراغ فإنّه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ $=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبةلـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) ولدينا النقطة M من الفراغ فإنّه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ $=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) ولدينا النقطة M من الفراغ فإنّه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\gamma\overrightarrow{MD}$ $=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$

	لثلاثة نقاط	لأربعة نقاط
الخاصة التجميعية	**اتجاه اللم:** لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ). لدينا النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) ← فإنّه استناداً إلى الخاصّة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(I,\alpha+\beta)$ و(C,γ).	**اتجاه اللم:** ليكن لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) لدينا I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) لدينا J مركز الأبعاد المتناسبة لـ(C,γ) و(D,δ) ← فإنّه استناداً إلى الخاصّة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,\alpha+\beta)$ و$(J,\gamma+\delta)$
	اتجاه الفك: لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,\alpha+\beta)$ و(C,γ) لدينا النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β). ← فإنّه استناداً إلى الخاصّة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ)	**اتجاه الفك:** ليكن لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(I,\alpha+\beta)$ و$(J,\gamma+\delta)$. لدينا I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β). لدينا J مركز الأبعاد المتناسبة لـ(C,γ) و(D,δ) ← فإنّه استناداً إلى الخاصّة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ)

ملاحظة: يتم اختيار اتجاه الفك أو اتجاه اللم حسب حاجة السؤال.

أنماط التمارين:

النمط الأول:

إيجاد إحداثيات النقطة مركز الأبعاد المتناسبة

ويتم وفق استخدام القانون المناسب

مثال: لتكن لدينا النقاط $A(2,-1,3)$ و $B(0,1,2)$ و $C(-1,1,0)$ و $D(-2,1,-3)$ أوجد إحداثيات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,-1)$ و $(D,2)$

النمط الثاني: قراءة علاقة

وهو طلب ضمني بحيث يكون المعطى هو علاقة شعاعية والمطلوب هو معرفة ماذا تعني هذه العلاقة

مثال: اقرأ العلاقات التالية:

1. $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$
2. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DM} = \vec{0}$
3. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
4. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{a}\overrightarrow{BA}$
5. $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$
6. $\overrightarrow{CA} = a\overrightarrow{CB}$

النمط الثالث:

إثبات وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة

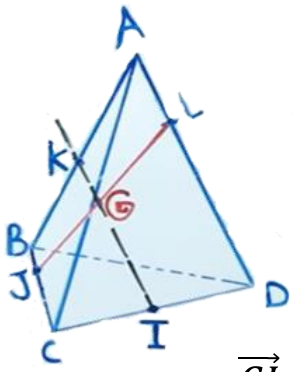
الخطوات:

بالاعتماد على نص السؤال نضع جميع المعطيات

نثبت أن إحدى النقاط هي مركز أبعاد متناسبة

للنقطتين الباقيتين

مثال:



$ABCD$ رباعي وجوه فيه K

منتصف $[AB]$ و I منتصف

$[CD]$ وL تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

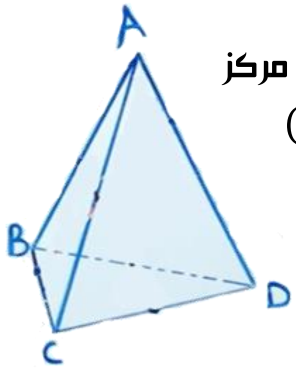
و J تحقق العلاقة: $\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

وأخيراً G هي منتصف $[JL]$ أثبت أن G و I و K

تقع على استقامة واحدة

مثال:

$ABCD$ رباعي وجوه فيه G مركز ثقل رباعي الوجوه $(ABCD)$ ولدينا K مركز ثقل الوجه (BCD) أثبت أن النقاط A و G و K تقع على استقامة واحدة



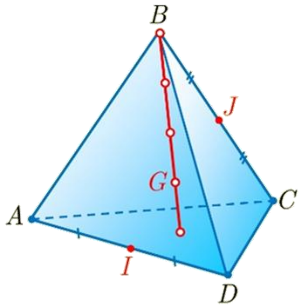
مثال محلول صفحة 29 :

$ABCD$ رابعي وجوه مركز ثقله G فيه:

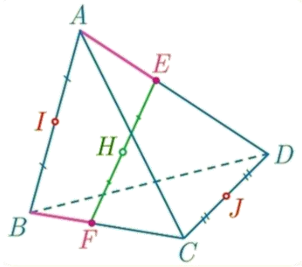
I منتصف $[AD]$

J منتصف $[BC]$

أثبت أن I و J و G تقع على استقامة واحدة



تمرين 9 صفحة 40 :



$ABCD$ رباعي وجوه و a عدد حقيقي , I و J هما بالترتيب منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ ولدينا E و F نقطتان تحققان العلاقتين:

$$\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$$

وأخيراً H هي منتصف $[EF]$ أثبت أن I و J و H تقع على استقامة واحدة.

النمط الرابع:

إثبات وقوع أربعة نقاط في مستو واحد

الخطوات:

- نضع المعطيات المناسبة لنص السؤال
- نثبت أن إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاثة المتبقية

مثال:

$ABCD$ رباعي وجوه تتحقق فيه:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$$

أثبت أن النقاط M و B و C و D تقع في مستو واحد.

مثال محلول صفحة 30 :

$ABCDEFGH$ مكعب أثبت أن النقطة K المعرفة بالعلاقة:

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

تقع في المستوي (BCG) .

ملاحظة مهمة:

* إذا كان لدينا $(B,1),(B,2)$ يمكن دمجها بـ $(B,3)$
* إذا كان لدينا مثلاً $(B,3)$ يمكن تفريقها لـ $(B,2)$ و $(B,1)$

ونستخدم هذه الملاحظة عند اللزوم

مثال:

$ABCDEFGH$ مكعب فيه:

I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[BC]$ ولدينا K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$ أثبت وقوع I و J و K و H في مستو واحد.

النمط الخامس: إثبات تلاقي مستقيمات

لإثبات تلاقي مستقيمات يكفي إثبات وجود نقطة مشتركة بين هذه المستقيمات.

مثال:

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه L ,

ولنعرف النقاط P و Q و R و S كما يأتي:

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

أثبت أن P هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(B,4)$ و $(C,1)$ وأن Q هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(D,3)$ ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,4)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$

1. بين أن النقطة G تقع على المستقيم (PQ)

من أجل أحلامك الجميلة
كُن مرناً..
كُن بشوشاً
كُن واثقًا أنَّ الله كلّفك ما هو في وسعك وقدرتك..
كُنْ كفئاً لذلك وانطلق في يومك بعد توكلك..

ملاحظة تملئ أثناء الجلسة:

٢. أثبت بأسلوب مماثل أن:

G تقع على المستقيم (RS)

٣. استنتج تلاقي المستقيمان (PQ) و (RS)

النمط السادس:
وضع مركز الأبعاد المتناسبة في شكل

الخطوات:

- بالاستفادة من المعطيات نضع علاقة الإنشاء المناسبة
- بالاعتماد على علاقة الإنشاء نوضع النقطة مركز الأبعاد المتناسبة على الشكل

تنويه:
من الممكن أن نستخدم الخاصة التجميعية

التمرين الأول:
وضع على شكل النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,3)$ و $(B,1)$

التمرين الثاني:
(ABC) مثلث والمطلوب وضع النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$

التمرين الثالث:

(ABC) مثلث والمطلوب وضع النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$.

النمط السابع: تعيين الثوابت

الخطوات:

بالاعتماد على معطيات المسألة نضع علاقتين إحداهما تحوي ثوابت والثانية لا تحوي ثوابت باستخدام إصلاحات مناسبة نحول إحدى العلاقتين لتشابه العلاقة الثانية

بالمقارنة بين العلاقتين نحصل على المطلوب.

التمرين الأول:

النقطتان A و B نقطتان مختلفتان , عين t التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ علماً أن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,3)$

التمرين الثاني:

عين قيمة α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) حيث يتحقق:

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

التمرين الثالث:

نتأمل مثلثاً (ABC) جد عددين x و y بحيث:

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

إذا علمت أن M هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ :

$$(A,3)\,,(B,1)\,,(C,2)$$

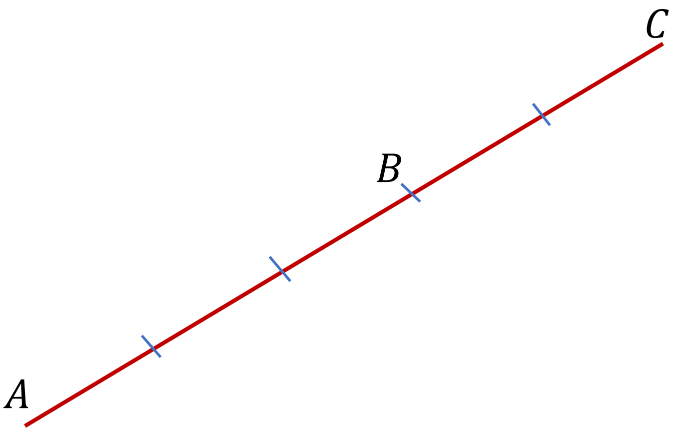
التمرين الرابع:

جد α و β و γ التي تجعل M مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) علماً أنه يتحقق: $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

التمرين الخامس:

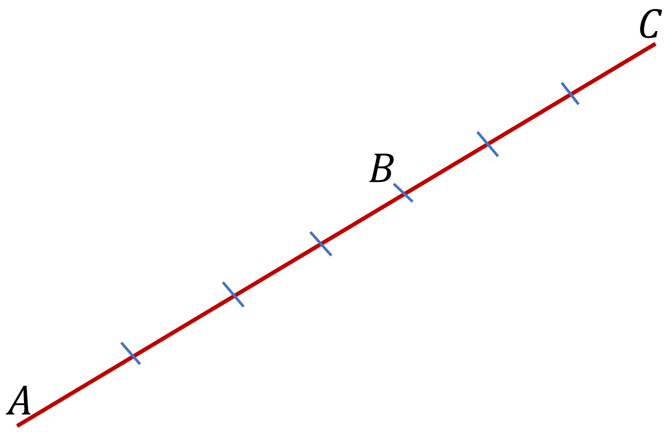
في الشكل التالي التدريجات متساوية

عين قيمة α و β إذا علمت أن النقطة C هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β)



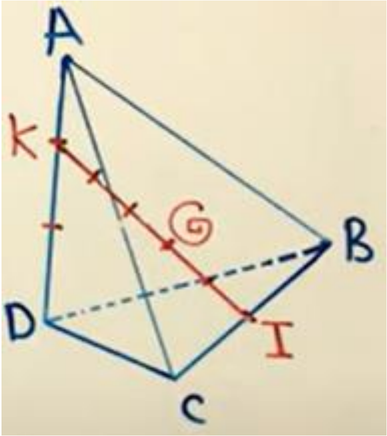
التمرين السادس:

في الشكل التالي التدريجات متساوية عين قيمة α و β إذا علمت أن النقطة B هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (C,β)



التمرين السابع:

بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور عين الأعداد a و b و c و d مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,a) و (B,b) و (C,c) و (D,d)



الجداء السلمي:

تعريف:

في الفراغ , الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{v}$

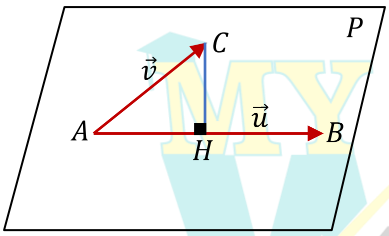
العبارات المختلفة للجداء السلمي:

١. في الفراغ الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\left|\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\right|^2 - \left|\left|\vec{u}\right|\right|^2 - \left|\left|\vec{v}\right|\right|^2\right]$$

٢. إذا كان α قياساً للزاوية الهندسية للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ كان: $\vec{u}.\vec{v} = \left|\left|\vec{u}\right|\right|.\left|\left|\vec{v}\right|\right| \cos\alpha$

٣. إذا كانت H هي المسقط القائم في المستوي P للنقطة C على المستوي (AB) فإن:



$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

٤. العبارة التحليلية للجداء السلمي

نفترض أن مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في معلم متجانس هي $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ فإن:

$$\vec{u}.\vec{v} = (x_1.x_2) + (y_1.y_2) + (z_1.z_2)$$

ملاحظة:

يتم اختيار العبارة المناسبة للجداء السلمي للشعاعين حسب المعطيات

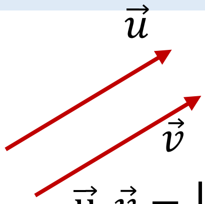
مثال:

أوجد الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$ في الحالات الآتية:

1. $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5 \,, \|\vec{u}\| = 3 \,, \|\vec{v}\| = 4$
2. $\|\vec{u}\| = 3 \,, \|\vec{v}\| = 4 \,, (\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$
3. $\|\vec{u}\| = 2 \,, \|\vec{v}\| = 1 \,, (\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$
4. $\|\vec{u}\| = 3 \,, \|\vec{v}\| = 2 \,, (\vec{u},\vec{v}) = \frac{5\pi}{6}$
5. $\vec{u}(2,-1,3) \,, \vec{v}(1,0,-2)$

الجداء السلمي لشعاعين متساويين:

لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين متساويين



إذاً: $(\vec{u},\vec{v}) = 0$

وبالتالي:

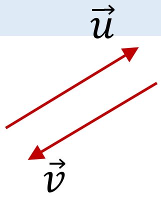
$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$= ||\vec{u}||.||u||.(1)$$
$$= ||\vec{u}||^2$$

إذاً الملخص:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = ||\overrightarrow{AB}||^2$$
$$\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$$
$$\vec{v}.\vec{v} = ||\vec{v}||^2$$

الجداء السلمي لشعاعين متعاكسين:

لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين متعاكسين



إذاً: $(\vec{u}.\vec{v}) = \pi$

وبالتالي:

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$= ||\vec{u}||.||\vec{u}||.(-1)$$
$$= -||\vec{u}||^2$$

إذاً الملخص:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -||\overrightarrow{AB}||^2$$

خواص الجداء السلمي:

لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أشعة ولدينا a و b أعداد حقيقية فإن:

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$
$$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$$
$$(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$$
$$(a\vec{u}).(b\vec{v}) = ab.\vec{u}.\vec{v}$$

مثال:

إذا علمت أن نظيم $\vec{u}$ يساوي 5

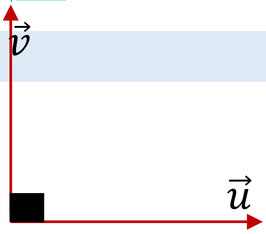
ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأن: $\vec{u}.\vec{v} = -4$

والمطلوب: احسب المقادير الآتية:

1. $\vec{u}(\vec{u}+\vec{v})$
2. $\vec{v}(\vec{u}-\vec{v})$
3. $(2\vec{u})(\vec{v}-3\vec{u})$
4. $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-3\vec{v})$

لله قادر على أن يخلق لك أمنيات أجمل ممّا تريد، قادر على أن يمحو ملامح البؤس عن وجهك، ويضيء ثنايا روحك التي انطفأت.. ♡
لا تتوقف حتى ولو كانَ تقدمكَ بطيئاً،
فـ تقدّمٌ بطيء أفضلُ من عدمِ التقدم على الإطلاق..

التعامد في الفراغ:



لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان:

إذاً: $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$

إذاً:

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u}, \vec{v})$$
$$= ||\vec{u}||.||\vec{v}||.(0)$$
$$= 0$$

الملخص:

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذاً $\vec{u}.\vec{v} = 0$

أنماط التمارين:

النمط الأول:

نص السؤال: هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان؟

الخطوات:

- نوجد $\vec{u}.\vec{v}$ (وذلك باستخدام إحدى العبارات المناسبة للمعطيات)
- نميز:
  - إذا تحقق $\vec{u}.\vec{v} = 0$ ← $\vec{u}$, $\vec{v}$ متعامدان
  - إذا تحقق $\vec{u}.\vec{v} \neq 0$ ← $\vec{u}$, $\vec{v}$ غير متعامدان

مثال:

في كل من الحالات الآتية

هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان؟

1. $\vec{u}(3,2,1)\ ,\vec{v}(-1,1,1)$
2. $\vec{u}(3,2,1)\ ,\vec{v}(1,-1,1)$

النمط الثاني:

نص السؤال:

عين قيمة الوسيط α ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

الخطوات:

- نكتب بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذاً

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

- نعوض في العلاقة السابقة فنحصل على معادلة يكون فيها المجهول هو الوسيط
- بحل هذه المعادلة نحصل على المطلوب

مثال:

ليكن لدينا الشعاعين $\vec{u}(3,0,-1)$ و $\vec{v}(2,1,\alpha)$ عين قيمة الوسيط α ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

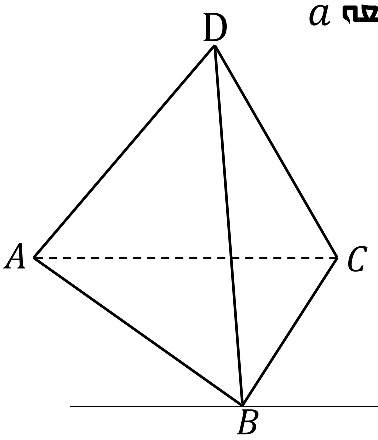
حساب جداء سلمي دون معلم:

مثال:

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a

والمطلوب:

1. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
3. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$



مثال:

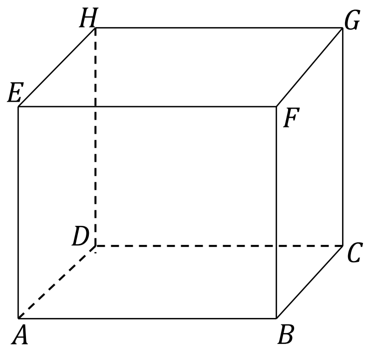
$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a

احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$

احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$

احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$

احسب $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$



ملاحظة: عند حساب جداء سلمي دون معلم ينصح باستخدام ... التتمة تملى في أثناء الجلسة ^_^

استنتاج نسبة مثلثية لزاوية:

نص السؤال:

إذا كان لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ والمطلوب:

إيجاد نسبة مثلثية للزاوية بينهما فإننا نتبع

الخطوات:

- نوجد $\vec{u}.\vec{v}$
- نوجد $||\vec{u}||$ و $||\vec{v}||$
- نضع العبارة:

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\vec{u},\vec{v})$$

- نعزل $\cos(\vec{u},\vec{v})$ وفق:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||}$$

- نعوض

مثال:

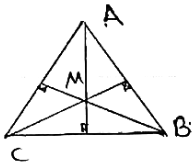
ليكن لدينا $\vec{u}(1,-2,1)$ و $\vec{v}(3,0,1)$

أوجد نسبة مثلثية للزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

إثبات أنّ نقطة هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث:

نصّ السّؤال: أثبت أنّ النّقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث (ABC)

الخطوات:



باستخدام الجداء السّلمي نثبت أنّ:

١. (AM) و (CB) متعامدان أيّ:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB} = 0$$

٢. (BM) و (AC) متعامدان أيّ:

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$$

٣. (CM) و (AB) متعامدان أيّ:

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0$$

إذاً النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث (ABC)

تمرين:

نتأمل في معلم متجانس النقاط $A(1,1,2)$ و $B(3,1,-4)$ و $C(2,0,-1)$ و $H(2,-9,-1)$, أثبت أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

المعادلة الديكارتية لمستو:

تعريف: في معلم متجانس

1. لكل مستو p معادلة ديكارتية من الشكل $p: ax + by + cz + d = 0$ حيث الأعداد a و b و c ليست جميعها معدومة وعندها يكون $\vec{n}(a, b, c)$ شعاعاً ناظماً على p

2. وبالعكس, إذا أعطيت الأعداد a و b و c و d ولم تكن a و b و c جميعها معدومة فإن مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق $p: ax + by + cz + d = 0$ هي مستو يقبل $\vec{n}(a, b, c)$ شعاعاً ناظماً

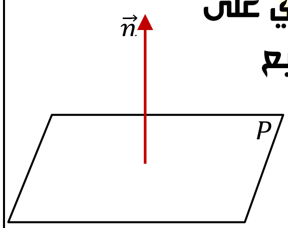
ملاحظة:

ناظم المستوي هو الشعاع $\boxed{\vec{n}(a, b, c)}$

a أمثال x
b أمثال y
c أمثال z

حيث أن $\vec{n}$ شعاع عمودي على المستوي دوماً.

وكما نعلم أن المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودي على جميع المستقيمات الموجودة في المستوي



تطبيق:

حدد $\vec{n}$ ناظم المستوي في الحالات:

1. $P: 3x - y + 5z - 7 = 0$
2. $Q: x + 3z - 7 = 0$
3. $R: x + 5y = 7$

كتابة معادلة المستوي

لكتابة معادلة أي مستوي نحتاج:

- ناظم المستوي $\vec{n}(a, b, c)$
- نقطة منه $A(x_A, y_A, z_A)$
- تكون المعادلة وفق الشكل:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

تمرين:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة A ويقبل الشعاع $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً له:

1. $A(1,0,5)$, $\vec{n}(1, -1,0)$
2. $A(\sqrt{2}, -2,5)$ $\vec{n}(2, -3, -1)$
3. $A\left(\frac{1}{2}, 3, -1\right)$, $\vec{n}\left(\frac{2}{3}, 4, -1\right)$
4. $A(0, -3,0)$, $\vec{n}(\sqrt{3}, 2,0)$

حالات كتابة معادلة المستوي:

الحالة الأولى: مستوي يوازي مستوي آخر

نص السؤال: اكتب معادلة المستوي P المار من A والموازي للمستوي Q .

فكرة الحل:

- تحديد $\vec{n}P$ ناظم للمستوي:

بما أن المستوي P والمستوي Q متوازيان فإن:

$$\vec{n}P = \vec{n}Q$$

- تحديد النقطة: (A معطاة)
- نكتب المعادلة

تمرين:

في كل حالة من حالة من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي Q المار من النقطة A موازياً للمستوي p

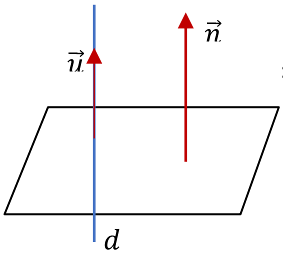
1. $P: z = 2 , A(0,0,0)$
2. $P: 2x - y + 3z = 4 , A(1,0,1)$
3. $P: 5x - 3y + 4z = 8 , A(-1,2,-3)$
4. $P: x + y = 5 , A(0,3,0)$

الحالة الثانية: مستوي يعامد مستقيم

نص السؤال: اكتب معادلة المستوي P المار من A والعمودي على المستقيم d .

فكرة الحل:

- ❈ تحديد $\vec{n}P$ ناظم للمستوي:
- ❈ بما أن المستقيم (d) والمستوي P متعامدان فإن: $\vec{n}_P = \vec{u}_d$ حيث: $\vec{u}_d$ شعاع توجيه المستقيم (d)



- ❈ تحديد النقطة: $\left(A \text{ معطاة}\right)$
- ❈ نكتب المعادلة

تمرين:

اكتب معادلة المستوي p المار من النقطة $A(-1,2,0)$ والذي يعامد المستقيم d حيث شعاع توجيه المستقيم d هو: $\vec{u}(2,-1,3)$

اكتب معادلة المستوي Q المار من $A(3,-1.5)$ ويعامد المستقيم (BC) حيث:

$B(1,0,1)\ ,A(3,-1,5)$

اكتب معادلة المستوي Q المار من $A(3,-1,5)$ ويعامد المستقيم Δ الذي شعاع توجيه $\vec{u}(-1,2,1)$

الحالة الثالثة:

معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة

نص السؤال: اكتب معادلة P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

فكرة الحل:

- تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P
  بما أن P هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فإن: $\vec{n}_P = \overrightarrow{AB}$
- تحديد النقطة:
  بما أن المستوي P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ تنتمي إلى المستوي P لذلك نوجد احداثيات I
- نكتب المعادلة

تمرين:

في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة المستوي المحوري P لـ:

القطعة المستقيمة $[AB]$

حيث: $A(5,2,-1)\ ,B(3,0,1)$

القطعة المستقيمة $[CD]$

حيث: $C(2,0,1)\ ,B(1,-2,1)$

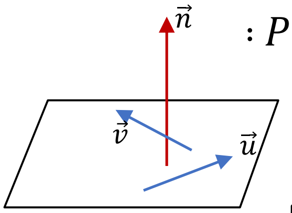
القطعة المستقيمة $[EF]$ حيث:

$E(1,0,1)\ ,F(2,-2,3)$

الحالة الرابعة: معادلة مستوي مار من نقطة ويحوي شعاعين (يقبل شعاعين توجيه)

نص السؤال: اكتب معادلة المستوي P المار من A ويقبل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين موجهين له.

فكرة الحل:



- تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P :

ليكن: $\vec{n}_P(a,b,c)$ بما أن $\vec{n}_P$ ناظم للمستوي P وبما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من المستوي P فإن $\vec{n}_P$ يكون عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أي:

$$\vec{n}_P.\vec{u} = 0 \ldots (1)$$
$$\vec{n}_P.\vec{v} = 0 \ldots (2)$$

- نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c,b,a وبحل هذه الجملة نحصل على مركبات ناظم المستوي $\vec{n}_P$
- تحديد النقطة: (A المعطاة)
- نكتب المعادلة

تمرين:

في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة المستوي P:

الذي يقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجهين ويمر من النقطة $A(2,-3,1)$

الذي يحوي الشعاعين $\vec{u}(2,3,4)$ و $\vec{v}(1,1,1)$ والمار من النقطة $B(1,0,1)$

الذي يوازي الشعاعين $\vec{u}(1,1,3)$

و$\vec{v}(2,-1,4)$ والمار من النقطة $C(2,3,1)$

الحالة الخامسة:

معادلة مستوي مار من نقطة ويعامد مستويان

نص السؤال: اكتب معادلة المستوي P المار من A والعمودي على كل من المستويان R, Q

فكرة الحل:

- تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P :

ليكن $\vec{n}_P(a,b,c)$ بما أن المستوي P و Q متعامدان فإن $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_Q$ متعامدان

أي: $\vec{n}_p . \vec{n}_Q = 0$

- بما أن المستوي P و R متعامدان

فإن $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_R$ متعامدان

أي : $\vec{n}_p . \vec{n}_R = 0$

- مما سبق نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c, b, a نحلها

فنحصل على مركبات $\vec{n}_p$

- تحديد النقطة: (A المعطاة)
- نكتب المعادلة

التمرين الأول:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

المستويان Q و P حيث:

$$P : x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$$Q : x + y + z + 1 = 0$$

والمطلوب:

اكتب معادلة المستوي R العمودي على كل من Q و P ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$

التمرين الثاني:

ليكن Q و R مستويان

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، حيث:

$$Q : x + 2y - z + 3 = 0$$

$$R : 2x - y + z - 1 = 0$$

أعطِ معادلة المستوي P المار من النقطة $A(0,1,-2)$ عمودياً على كل من المستويين Q و R

الحالة السادسة: معادلة مستوي مار من نقطتين ويعامد مستوي آخر

نص السؤال: اكتب معادلة المستوي P المار من النقطتين A و B ويعامد المستوي Q

فكرة الحل:

- تحديد $\vec{n}_p$ ناظم المستوي P :
ليكن $\vec{n}_p(a,b,c)$ بما أن النقطتان A و B من المستوي P فإن $\vec{n}_p$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان أي:
$$\vec{n}_p.\overrightarrow{AB} = 0$$
- بما ان المستويان P و Q متعامدان وهذا يعني أن $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_Q$ متعامدان أي:
$$\vec{n}_p.\vec{n}_Q = 0$$
- نحصل مما سبق على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل وبحل هذه الجملة نحصل على مركبات $\vec{n}_p$
- تحديد النقطة إما A أو B
- نكتب المعادلة

التمرين الأول:

نتأمل في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، النقطتين الآتيتين: $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوي p الذي معادلته:
$$x - y + 3z - 4 = 0$$
جد معادلة المستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A و B

التمرين الثاني:

في كل من الحالات الآتية، نعطى
نقطتين B و A والمعادلة الديكارتية لمستوٍ P
أعطِ معادلة للمستوي Q العمودي
على P والمار بالنقطتين B و A

$$P : x + y + z = 0$$
$$A(1,0,0)\ ,B(0,1,1)$$

$$P : x + z = 0$$
$$A(1,2,0), B(1,0,1)$$

$$P : 2x + z - 4 = 0$$
$$A(2,3,-1), B(1,1,1)$$

الحالة السابعة: معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط

نص السؤال:

صيغة أولى:

اكتب معادلة المستوي المار من A و B و C

صيغة ثانية:

اكتب معادلة المستوي (ABC)

فكرة الحل:

- تتحقق من أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً
نحدد $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC) بما أن النقاط A, B, C من المستوي P فإن $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ أي:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$$

- نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a, b, c
بحل هذه الجملة نحصل على مركبات $\vec{n}$
- تحديد النقطة: إما A أو B أو C
- نكتب المعادلة

تمرين:

اكتب معادلة المستوي P المار من النقاط:

$D(-1,-2,-3)$, $B(0,1,0)$, $C(-1,1,0)$

اكتب معادلة المستوي (AFE) حيث
$A(0,1,0), F(-1,1,0), E(-1,2,-3)$

اكتب معادلة المستوي المار بالنقاط:
$N(0,0,1), M(1,1,1), L(1,9,3)$

الحالة الثامنة:

معادلة مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان

نص السؤال:

اكتب معادلة المستوي P المحدد

بالمستقيمان المتقاطعان d_2 وd_1

فكرة الحل:

- تحديد $\vec{n}_p$ ناظم المستوي P :

ليكن $\vec{n}_p(a,b,c)$ بما أن المستوي P محدد

بالمستقيمان d_1 و d_2 فإن:

$$\vec{n}_P.\vec{u}=0$$
$$\vec{n}_P.\vec{v}=0$$

- بالتعويض نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c,b,a وبحلها نحصل على ناظم المستوي P
- تحديد النقطة: نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2 هي نقطة تنتمي إلى المستوي ونوجدها
- نكتب المعادلة

تمرين:

ليكن لدينا المستقيمان:

$$d:\begin{cases} x=2s-1 \\ y=s-2 \quad ;s\in R \\ z=3s-2 \end{cases}$$

$$d':\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+1 \;;t\in R \\ z=-t \end{cases}$$

اكتب معادلة المستوي P المحدد

بالمستقيمان d و d' الذي يتقاطعان بالنقطة

$A(1,-1,1)$

الحالة التاسعة:

معادلة مستوي مماس لكرة في نقطة

نص السؤال:

اكتب معادلة المستوي P

المماس للكرة في النقطة A

فكرة الحل:

* تحديد $\vec{n}_p$ ناظم المستوي P :

بما أن P هو المستوي المماس للكرة S فهذا

يعني أن: $\vec{n}_p = \overrightarrow{BA}$

حيث B هي مركز الكرة S

* تحديد النقطة: (A المعطاة)
* نكتب المعادلة

التمرين الأول:

اكتب معادلة المستوي P المماس للكرة S حيث:

$S: (x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 3$

في النقطة $A(2,1,0)$

التمرين الثاني:

لتكن لدينا الكرة S التي معادلتها:

$S: x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$

اكتب معادلة المستوي المماس للكرة

في النقطة $A(-1,1,0)$

تطبيقات معادلة المستوي:

التطبيق الأول: إثبات معادلة مستوي

نص السؤال:

أثبت أن معادلة المستوي ABC هي
(وتكون معطاة)

فكرة الحل:

* الطريقة الأبسط في الإجابة:
نعوض إحداثيات النقاط A و B و C في المعادلة المعطاة ونثبت أنها محققة

التمرين الأول:

لدينا النقاط:

$C(4,0,0)$ ، $B(1,2,1)$ ، $A(1,1,0)$

أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة: $x+3y-3z-4=0$

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

لتكن لدينا النقاط:

$A(1,-1,0)$ و $B(-1,0,1)$ و $C(0,2,1)$

أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى

بالعلاقة: $2x-y+5z-3=0$

التطبيق الثاني: انتماء نقطة إلى مستوي

نص السؤال:

هل النقطة A تنتمي الى المستوي P ؟

فكرة الحل:

- نكتب معادلة المستوي P عند اللزوم
- نعوض احداثيات النقطة A في معادلة المستوي P
- نميز حالتين:

حالة1: المعادلة محققة إذاً: $A \in P$

حالة2: المعادلة غير محققة اذاً: $A \notin P$

التمرين الأول:

ليكن لدينا المستوي P المعطى وفق:

$P: x + y - z - 5 = 0$ والنقاط:

$C(-2,5,-2)$ و $D(1,1,-3)$

و $E(3,2,1)$

هل النقاط C و D و E تنتمي إلى المستوي P

التمرين الثاني:

ليكن لدينا المستوي P الذي معادلته:

$P: 2x - y + 3z + 1 = 0$ والنقاط

$A(1,2,-\frac{1}{3})$ و $B(0,4,1)$ و $C(2,1,1)$

هل النقاط A و B و C تنتمي إلى المستوي P .

التطبيق الثالث: بعد نقطة عن مستوي في الفراغ

نص السؤال:

ليكن لدينا المستوي P معادلته:

$$P: ax + by + cz + d = 0$$

ولدينا النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ والمطلوب:

احسب بعد النقطة A عن المستوي P

فكرة الحل:

إن بعد النقطة A عن المستوي P يعطى بالقانون:

$$dist(A, P) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

☒ انتبه:

شرط تطبيق القانون السابق أن يكون الطرف الأيمن في معادلة المستوي هو الصفر

التمرين الأول:

احسب بعد النقطة $A(5, -3,4)$ عن المستوي $p: 2x - y + 3z - 5 = 0$ وكذلك احسب بعد النقطة $B(2,2,5)$ عن المستوي

$$Q: y - z = 0$$

التمرين الثاني:

في الحالتين الآتيتين

احسب بعد A عن المستوي P :

$A(1.2.-3)$ و $P: 2x - y + z + 1 = 0$.

$A(-1,1,1)$ و P هو المستوي المار بالنقاط

$B(0,1,0)$ و $C(-1,1,0)$

و $D(-1,-2,-3)$.

التطبيق الرابع: وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد

نص السؤال:

هل النقاط D, C, B, A تقع في مستوٍ واحد؟

فكرة الحل:

- نكتب معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط ولتكن C, B, A
- نتحقق من انتماء النقطة المتبقية D الى المستوي السابق (ABC) ونميز:

حالة 1: $D \in (ABC)$ وبالتالي تكون النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد

حالة 2: $D \notin (ABC)$ وبالتالي تكون النقاط A و B و C و D لا تقع في مستوٍ واحد

التمرين الأول:

نتأمل في المعلم $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, النقاط الاتية:

$A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,5,0)$

و $D(-3,-5,6)$ و $E(3,1,2)$.

اثبت انتماء النقاط A و B و C و D الى مستوٍ واحد p , وتبيّن اذا كانت النقطة E تنتمي الى المستوي p

حين تحلو الاهداف يحلو الشقاء من أجلها.. 😍🤍

التمرين الثاني:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقاط: $B(10,4,3)$ و $A(1,5,4)$

$D(0,4,5)$ و $C(4,3,5)$ أثبت أن النقاط

$A\ ,B\ ,C\ ,D$ تقع في مستوٍ واحد

التطبيق الخامس: البعد بين مستويين متوازيين

نص السؤال:

ليكن لدينا المستويان P و Q احسب البعد بينهما علماً أنهما متوازيان

فكرة الحل:

نأخذ نقطة A من المستوي P (مثلاً) وفق: نفرض قيم اختيارية للاحداثيتين من النقطة ولتكن مثلاً y, x ونعوض في معادلة المستوي فنحسب z وبالتالي نحصل على النقطة المطلوبة نحسب البعد بين النقطة السابقة عن المستوي Q بتطبيق دستور ال $dist$

التمرين الأول:

ليكن لدينا المستويان

$$P: 2x + y - 3z - 7 = 0$$
$$Q: 4x + 2y - 6z + 3 = 0$$

1. تحقق أن المستويان متوازيان
2. احسب البعد بين p و Q

التمرين الثاني:

لتكن لدينا المستويين:

$$P: 2x + y - z = 3$$

$$Q: 4x + 2y - 2z = 1$$

والمطلوب:

أثبت أن المستويين P و Q متوازيين

احسب البعد بين المستويين P و Q

التمثيلات الوسيطية:

التمثيل الوسيطي لمستقيم:

إن المستقيم d المار بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(a, b, c)$ هو مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق:

$$(s)\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

تسمى الجملة (s) تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ويسمى t وسيطاً نقرن بكل عدد حقيقي t نقطة وحيدة $M(at + x_0, bt + y_0, ct + z_0)$ من المستقيم d وبالعكس يوافق كل نقطة M من d عدد حقيقي وحيد t يحقق $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة ولنصف مستقيم

التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة

لتكن $A(x_0, y_0, z_0)$ و $B(x_1, y_1, z_1)$ نقطتين من الفراغ ولنضع $\overrightarrow{AB} = \vec{u}(a, b, c)$ عندئذ القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق:

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \ ; t \in [0,1] \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

التمثيل الوسيطي لنصف مستقيم

ونصف المستقيم الذي $[AB)$ الذي مبدؤه A ويمر بالنقطة B هو مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق:

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \ ; t \in [0, +\infty[\\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

لكتابة لتمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ:

فإننا نحتاج:

- ❈ شعاع توجيه المستقيم $\vec{u}(a, b, c)$
- ❈ نقطة من المستقيم ولتكن $A(x_A, y_A, z_A)$
- ❈ ويكون التمثيل الوسيطي للمستقيم d من الشكل:

$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

ملاحظة:

إن كتابة التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم وللقطعة المستقيمة تكون بنفس الأسلوب مع الانتباه إلى أن:

- ❈ $t \in [0, +\infty[$ فيي حال كان التمثيل الوسيطي لنصف مستقيم
- ❈ $t \in [0,1]$ في حال كان التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة

تمرين:

١. أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) الذي يمر بالنقطة $A(-1,2,0)$ ويقبل $\vec{u}(0,1,-1)$ شعاعاً موجهاً

٢. أعطِ تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم $[AB)$ المار من النقطة $A(-1,3,1)$ والذي يقبل $\vec{u}(1,2,-2)$ شعاعاً موجهاً

٣. أعطِ تمثيلاً وسيطياً للنقطة المستقيمة $[AB]$ المارة من النقطة $A(3,-1,2)$ والتي تقبل $\vec{u}(-3,2,0)$ شعاعاً موجهاً لها .

حالات إيجاد التمثيل الوسيطي:

الحالة الأولى:

التمثيل الوسيطي لمستقيم يوازي مستقيم

نص السؤال:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة A والموازي للمستقيم Δ

فكرة الحل:

- تحديد النقطة : (A المعطاة)
- تحديد شعاع التوجيه $\vec{u}_d$ للمستقيم d :

بما أن المستقيمان d و Δ متوازيان فإن:

$$\vec{u}_\Delta = \vec{u}_d$$

- نكتب التمثيل الوسيطي

التمرين الأول:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) المار من النقطة $A(-1,2,1)$ والذي يوازي المستقيم $\overrightarrow{CD}$ حيث: $C(1,0,-3)$ و $D(-1,-2,1)$

التمرين الثاني:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) المار من النقطة $B(1,0,-1)$ والموازي للمستقيم (d) الذي يقبل $\vec{u}(2,3,-1)$ شعاعاً موجهاً له .

الحالة الثانية:

التمثيل الوسيطي لمستقيم يعامد مستوي

نص السؤال:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A والعامودي على المستوي P

فكرة الحل:

- تحديد النقطة: (A معلومة)
- تحديد شعاع التوجيه $\vec{u}_d$ للمستقيم d :
  بما أن المستقيم d والمستوي P متعامدان
  فإن: $\vec{u}_d = \vec{n}_p$
- نكتب التمثيل الوسيطي

التمرين الأول:

ليكن لدينا المستوي P :

$$P: 3x - 5z + 7 = 0$$

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة $A(1, -3.2)$ والعمودي على المستوي P

التمرين الثاني:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة $A(-1,3.2)$ عمودياً على المستوي P المعطى بالعلاقة: $P: 2x - y + z + 1 = 0$

الحالة الثالثة:

التمثيل الوسيطي للمستقيم المار من نقطتين

نص السؤال:

صيغة أولى:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

صيغة ثانية:

اكتب التمثيل الوسيطي المار من A و B

فكرة الحل:

- تحديد النقطة: إما A أو B
- تحديد $\vec{u}$ شعاع توجيه المستقيم:
  بما أن المستقيم مار بالنقطتين A و B فإن:
  $$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$
- نكتب التمثيل الوسيطي

التمرين الأول:

أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطتين
$A(2,1,3), B(-2,0,1)$

التمرين الثاني:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) حيث
$A(1,2,-1)$ و $B(3,-1,1)$

الحالة الرابعة:
التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لمستويان

نص السؤال:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك للمستويان P و Q

فكرة الحل:

- نأخذ معادلتي المستويان نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل بدلالة t ونعوض في معادلتي المستويان فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين
- بحل هذه الجملة نحصل على جميع المجاهيل بدلالة t فنحصل على التمثيل الوسيطي للفصل المشترك

التمرين الأول:

أعطِ تمثيلاً وسيطياً لـ (d) الفصل المشترك للمستويان:

$$P:\ -x+y+z=3$$
$$Q: 2x-y+2z=1$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا المستويان Q و P حيث:

$$P: 2x-y+z-4=0$$
$$Q: x+y+2z-5=0$$

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الذي يمثل الفصل المشترك للمستويان Q و P .

تطبيقات التمثيل الوسيطي:

التطبيق الأول:

إثبات تمثيل وسيطي لمستقيم نص السؤال:

نص السؤال:

أثبت أن معادلة المستقيم d (تمثيله الوسيطي معلوم) هو فصل مشترك للمستويان P و Q حيث (معادلتي P و Q معطاة)

فكرة الحل:

الطريقة الأبسط في الإجابة: نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم $\boldsymbol{d}$ في كل من معادلتي المستويان P وQ ونثبت أن كل منهما محققة

التمرين الأول:

ليكن لدينا المستويان P و Q , حيث :

$$p: x + 2y - z - 4 = 0$$
$$Q: 2z + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$(d): \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \quad ; t \in R \\ z = t \end{cases}$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا المستويان p و Q حيث:

$$p: 2x + y - z + 2 = 0$$
$$Q: x + 2y - z + 1 = 0$$

أثبت أن التمثيل الوسيطي للفصل المشترك للمستويان المعطى وفق :

$$(d): \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \quad ; t \in R \\ z = 3t \end{cases}$$

التمرين الثالث:

أثبت أن المستقيم d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d\begin{cases} x = \frac{7}{3}t + \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

هو الفصل المشترك لـ:

$$P; x + 2y + z - 1 = 0$$

$$Q: x - y + 3z - 2 = 0$$

التطبيق الثاني:

انتماء نقطة إلى مستقيم في الفراغ

نص السؤال:

ليكن لدينا المستقيم d تمثيله الوسيطي:

$$(d):\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A ; t \in \mathbb{R} \\ z = \gamma t + z_A \end{cases}$$

هل النقطة $B(x_B, y_B, z_B)$ تنتمي الى المستقيم d ؟

فكرة الحل:

- نعوض إحداثيات النقطة في التمثيلات الوسيطية للمستقيم ثم نحدد قيم t
- نميز:

حالة 1: قيم t متساوية

وبالتالي تكون النقطة B تنتمي إلى المستقيم d

حالة 2: قيم t غير متساوية

وبالتالي تكون النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم d

تمرين:

ليكن المستقيم Δ تمثيله الوسيطي :

$$d:\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 1 \quad , t \in R \\ z = t + 2 \end{cases}$$

1. هل النقطة $A(1,0,-1)$ تنتمي إلى Δ ؟
2. هل النقطة $B(1,2,-1)$ تنتمي إلى Δ ؟
3. هل النقطة $C(1,2,3)$ تنتمي إلى Δ ؟

الكرة:

الشكل العام:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

حيث:

- ❄ مركز الكرة: $\Omega(x_0, y_0, z_0)$
- ❄ نصف قطر الكرة: R

تمرين:

حدد مركز ونصف قطر الكرة في الحالات

1. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$
2. $(x + 1)^2 + y^2 + \left(z - \frac{3}{4}\right)^2 = 3$

كتابة معادلة الكرة

لكتابة معادلة كرة فإننا نحتاج:

- ❄ مركز الكرة: $\Omega(x_0, y_0, z_0)$
- ❄ نصف قطر الكرة: R
- ❄ تكون معادلة الكرة وفق:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

تمرين:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r

1. $r = 2 , \Omega(1,2,3)$
2. $r = \sqrt{3} , \Omega(0,5,-1)$

حالات معادلة الكرة:

الحالة الأولى:

معادلة كرة مركزها معلوم وتمر من نقطة

نص السؤال: اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمرّ من النقطة A

فكرة الحل:

- تحديد المركز: Ω معلوم
- تحديد نصف القطر R: $R = \Omega A$
- نكتب المعادلة

تمرين:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A

1. $\Omega(0,0,1)$, $A(1,1,1)$
2. $\Omega(0,5,-1)$, $A(1,-2,3)$
3. $\Omega(1,1,1)$, $A(0,5,-1)$

الحالة الثانية:

معادلة كرة قطرها $[AB]$

نص السؤال:

اكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$.

فكرة الحل:

- تحديد المركز Ω:

النقطة Ω منتصف $[AB]$ هي مركز هذه الكرة.

- تحديد نصف القطر R:
  - إمّا $R = \Omega A$
  - أو $R = \Omega B$
  - أو $R = \frac{1}{2}AB$
- نكتب المعادلة

تمرين:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ اكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$.

1. $A(-3,1,2)$, $B(1,0,5)$
2. $A(1,2,-1)$, $B(0,-1,1)$
3. $A(0,-1,3)$, $A(3,2,1)$

الحالة الثالثة:

معادلة كرة مركزها معلوم وتمسر مستوي

نص السؤال: اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمسّ المستوي P

فكرة الحل:

- تحديد المركز Ω معلوم
- تحديد نصف القطر R:

بما أنّ الكرة تمسّ المستوي P فإنّ:

$R = \text{dist}(\Omega, P)$

- نكتب المعادلة

تمرين:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نتأمّل النقطة $A(2,-2,2)$ والمستو

$P: x + 2y + 3z = 5$

اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمسر المستوي

معادلة الاسطوانة:

المحور	OX	OY	OZ
مركز قاعدتها الأولى	$A(x_A,0,0)$	$A(0,y_A,0)$	$A(0,0,z_A)$
مركز قاعدتها الثانية	$B(x_B,0,0)$	$B(0,y_B,0)$	$B(0,0,z_B)$
نصف قطر القواعد	r		
شكل المعادلة	$\begin{cases} y^2+z^2=r^2 \\ x_A \le x \le x_B \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ y_A \le y \le y_B \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ z_A \le z \le z_B \end{cases}$

أنماط التمارين:

النمط الأول:

نص السؤال: اكتب معادلة الاسطوانة

فكرة الحل: قانون وتعويض

تمرين:

في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة الاسطوانة التي:

محورها $(O,\vec{i})$ ومركزي قاعدتها $A(8,0,0)$ و $B(4,0,0)$ ونصف قطرها $2\sqrt{2}$

محورها $(O,\vec{j})$ ومركزي قاعدتيها $A(0,6,0)$ و $B(0,3,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$

محورها $(O,\vec{k})$ ومركزي قاعدتيها $A(0,06)$ و $B(0,0,3)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

النمط الثاني:

نص السؤال:

صف مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة

فكرة الحل: نحدّد ماذا تمثّل المعادلة حسب ما ورد معنا في المخططات السّابقة.

تمرين: في كل من الحالات الآتية ,صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي احداثياتها تحقق العلاقات الآتية :

$$\begin{cases} y^2+z^2=16 \\ 3\le x\le 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+z^2=9 \\ 3\le y\le 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ 1\le z\le 7 \end{cases}$$

النمط الثالث:

نص السؤال:

هل النقطة A تقع على الاسطوانة

فكرة الحل:

نعوّض إحداثيّات النقطة في المعادلة

ونميّز:

- تحقق الشّرطين معاً ← إذاً النّقطة A تقع عل (الأسطوانة/ المخروط)
- اختلال أحد الشّرطين ← إذاً النّقطة A لا تقع عل (الأسطوانة/المخروط)

لدينا معادلة الأسطوانة: $\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ 1 \leq y \leq 5 \end{cases}$

ولدينا النقاط $A(3,2,0)$ و $B(3,9,0)$

و $C(\sqrt{3}, 2,1)$ هل النقاط A و B و C تقع على الأسطوانة؟

لدينا معادلة الاسطوانة $\begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

ولدينا النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,1,2)$

و $C\left(\frac{3}{2}, 0, -2\right)$ هل النقاط A و B و C تقع على الاسطوانة؟

معادلة المخروط:

المحور	OX	OY	OZ
الرأس	المبدأ O		
مركز قاعدته	$A(x_A,0,0)$	$A(0,y_A,0)$	$A(0,0,z_A)$
نصف قطر القاعدة	r		
شكل المعادلة	$\begin{cases} y^2+z^2=\frac{r^2}{(x_A)^2}x^2 \\ O\le x\le x_A \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+z^2=\frac{r^2}{(y_A)^2}y^2 \\ O\le y\le y_A \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{r^2}{(z_A)^2}z^2 \\ O\le z\le z_A \end{cases}$

أنماط التمارين:

النمط الأول:

نص السؤال: اكتب معادلة المخروط

فكرة الحل: قانون وتعويض

تمرين:

في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة المخروط الذي:

محوره $(O,\vec{i})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $(4,0,0)$ ونصف قطرها 3

محوره $(O,\vec{j})$ و رأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $(0,2,0)$ ونصف قطرها 4

محوره $(O,\vec{k})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $(0,0,3)$ ونصف قطرها 5

.

النمط الثاني:

نص السؤال: صف مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة

فكرة الحل: نحدّد ماذا تمثّل المعادلة حسب ما ورد معنا في المخططات السّابقة.

تمرين: في كل من الحالات الآتية صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي احداثياتها تحقق العلاقات الآتية:

$$\begin{cases} y^2+z^2=36x^2 \\ 0\le x\le \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+z^2=\dfrac{5}{3}y^2 \\ 0\le y\le \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{9}{25}z^2 \\ 0\le z\le 5 \end{cases}$$

النمط الثالث:

نص السؤال:

هل النقطة A تقع على الاسطوانة

فكرة الحل:

نعوّض إحداثيّات النقطة في المعادلة

ونميّز:

- تحقق الشّرطين معاً ← إذاً النّقطة A تقع على (الأسطوانة/ المخروط)
- اختلال أحد الشّرطين ← إذاً النّقطة A لا تقع على (الأسطوانة/المخروط)

لدينا معادلة المخروط $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3z^2 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$

ولدينا النقاط $A(0, \sqrt{3}, 1)$ **و** $B(1,2,3)$ **و** $C(-1,1,2)$ **هل النقاط** A **و** B **و** C **تقع على المخروط ؟**

لدينا معادلة المخروط: $\begin{cases} y^2 + z^2 = \frac{6}{4}x^2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

ولدينا النقاط:

$D\left(2,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **و** $C(10,0,0)$ **و** $B(1,0,-\frac{\sqrt{6}}{2})$

هل النقاط B **و** C **و D تقع على المخروط ؟**

ليست العظمة في ان لا تسقط أبداً..
بل أن تسقط ثم تنهض من جديد..

الأوضاع النسبية:

الوضع لنسبي لمستويان في الفراغ:

ليكن لدينا المستوي P_1 ناظمه $\vec{n}_1$
وليكن لدينا المستوي P_2 ناظمه $\vec{n}_2$
لدراسة الوضع النسبي بين المستويان P_2 و P_1
فإننا نختبر الارتباط الخطي للنواظم $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$
ونميز الحالات:

الحالة الأولى

إذا كان $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ مرتبطين خطياً فهذا يعني أن المستويان P_1 و P_2 متوازيان وفي **حالة خاصة** يكون المستويان منطبقان

الحالة الثانية:

إذا كان $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ غير مرتبطين خطياً فهذا يعني أن المستويان P_1 و P_2 متقاطعان وفي **حالة خاصة** إذا تحقق $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$
فإن المستويان P_1 وP_2 متعامدان

تمرين:

في الحالات الآتية ادرس الوضع النسبي للمستويان P و Q :

$$P: x - 4y + 7 = 0$$
$$Q: x + 2y - z + 1 = 0$$

$$P: x - 2y + 3z - 1 = 0$$
$$Q: 2x - 4y + 6z = 0$$

$$P: x + 2y + 4z - 5 = 0$$
$$Q: 2x + y - z + 1 = 0$$

ملاحظة:

في حال كان المستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو فصل مشترك (مستقيم) يطلب منا إيجاد تمثيله الوسيطي ويتم ذلك كما في الحالة الثالثة من حالات التمثيل الوسيطي لمستقيم

التمرين الأول:

نتأمل المستويان:

$$P: 2x + y - z + 2 = 0$$
$$Q: x + 2y - z + 1 = 0$$

1. أثبت أن P و Q متقاطعان
2. جد التمثيل الوسيطي لـ d الفصل المشترك للمستويان P و Q

التمرين الثاني:

في الحالات الآتية تحقق من تقاطع P_1 و P_2 وأعط تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك

$$P_1: x + z = 1$$
$$P_2: x + y = 2$$

التمرين الثالث:

في الحالات الآتية

بين إذا كان المستويان P و Q متقاطعين.

$$P: x - y + z = 0$$
$$Q: x - y + z - 3 = 0$$

$$P_1: 2x - y + 2z = 1$$
$$P_2: -x + y + z = 3$$

المستويان المتعامدان:

ليكن لدينا المستوي P_1 ناظمه $\vec{n}_1$ والمستوي P_2 ناظمه $\vec{n}_2$ حتى يكون المستويان P_1 و P_2 متعامدان نختبر الجداء السلمي لناظميهما ونميز:

حالة 1 : إذا كان $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$

يكون المستويان P_1 و P_2 متعامدان

حالة 2 : إذا كان $\vec{n}_1.\vec{n}_2 \neq 0$

يكون المستويان P_1 و P_2 غير متعامدان

التمرين الأول:

ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية:

$$p: 7x + 3y - z - 1 = 0$$
$$Q: 6x - 11y - 5 = 0$$
$$R: 2x - 3y + 5z + 4 = 0$$

$$P: 2x + y + 5 = 0$$
$$Q: 4x + 2y + z + 5 = 0$$

التمرين الثاني:

بين في كل من الحالات الآتية

إذا كان المستويان P و Q متعامدان

$$P: x + 2y - 5z + 7 = 0$$
$$Q: x + 2y + z - 3 = 0$$

$$P: x - 3y + 2 = 0$$
$$Q: y - 2z + 3 = 0$$

اذا نظرت حولك ولم ترى شيئاً يشبه النجاح أبداً..♡

المستويان المنطبقان:

يكون المستويان Q , P منطبقان إذا كانت معادلة أحدهما تنتج عن الآخر بضربه بعدد حقيقي (أي معادلتي المستويان P, Q متكافئتان)

مثلاً:

$$P: x - 2y + z - 5 = 0$$

$$Q: 2x - 4y + 2z - 10 = 0$$

معادلتي P, Q متكافئتان

إذاً المستويان P, Q منطبقان.

ملخص دراسة الوضع النسبي بين مستويان في الفراغ:

نص السّؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P وQ متوازيان	نثبت أنّ $\overrightarrow{nP}$ و$\overrightarrow{nQ}$ مرتبطان خطّيّاً
أثبت أنّ P وQ متقاطعان	نثبت أنّ $\overrightarrow{nP}$ و$\overrightarrow{nQ}$ غير مرتبطان خطّيّاً
أثبت أنّ P وQ متعامدان	نثبت أنّ: $\overrightarrow{nP}.\overrightarrow{nQ} = 0$
أثبت أنّ P وQ منطبقان	نثبت أنّ معادلتي P وQ متكافئتان أي: إحدى المعادلتين تنتج عن الاخرى بضربها بعدد حقيقي
في حال تقاطع P وQ ما هو تقاطعهما؟	تقاطعهما هو فصل مشترك (مستقيم)
اكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لـ P وQ	الحالة الرّابعة من حالات كتابة التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ

الوضع النسبي بين مستقيمان في الفراغ:

ليكن لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\vec{u}_1$
ليكن لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\vec{u}_2$
لدراسة الوضع النسبي بين d_1 و d_2 فإننا نختبر الارتباط الخطي لشعاعي التوجيه $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ ونميز الحالات:

الحالة الأولى:

إذا كان $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطان خطياً فإن المستقيمان d_1 و d_2 إما منطبقان أو متوازيان وفق:

- إذا كان المستقيمان d_1 و d_2 لا يشتركان بأية نقطة فهما متوازيان.
- إذا كان المستقيمان d_1 و d_2 يشتركان بنقطة فهما فهما منطبقان (ويشتركان بعدد لا نهائي من الحلول)

الحالة الثانية:

إذا كان $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطين خطياً فهذا يعني أن المستقيمان d_1 و d_2 إما متخالفان أو متقاطعان ويكون ذلك وفق:

- إذا كان المستقيمان d_1 و d_2 لا يشتركان بأية نقطة فهما متخالفان
- إذا كان المستقيمان d_1 و d_2 يشتركان بنقطة فهما فهما متقاطعان (يشتركان بنقطة واحدة فقط)

ملاحظة هامة جداً: شرط الاشتراك بنقطة:

لمعرفة فيما إذا كان المستقيمان d_1 و d_2 يشتركان بنقطة فإننا:

- نحافظ على التمثيل الوسيطي للمستقيم d_1 بدلالة الوسيط t
- نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d_2 بدلالة الوسيط s
- نشكل من التمثيل الوسيطي للمستقيم d_1 ومن التمثيل الوسيطي للمستقيم d_2 جملة ثلاثة معادلات بمجهولين t و s
- نحل الجملة السابقة ونميز الحالات:

الحالة الأولى:

إذا كان للجملة حل
فإن المستقيمان يشتركان بنقطة

الحالة الثانية:

إذا كانت الجملة مستحيلة الحل
فإن المستقيمان لا يشتركان بأية نقطة

التمرين الأول:

في كل من الحالات الآتية ادرس الوضع النسبي للمستقيمان d_1 و d_2 :

$$d_1:\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 4t \qquad ; t \in R \\ z = -t+1 \end{cases}$$

$$d_2:\begin{cases} x = -9t+4 \\ y = -12t+4 \quad ; t \in R \\ z = 3t \end{cases}$$

$$d_1:\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad ; t \in R$$

$$d_2:\begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad ; t \in R$$

$$d_1:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases} \quad ; t \in R$$

$$d_2:\begin{cases} x = t \\ y = -3t - 3 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad ; t \in R$$

$$d_1:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \quad ; t \in R \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

$$d_2:\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t - 1 \quad ; t \in R \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

التمرين الثاني:

في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$ والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$, d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بالشعاع $\vec{u}$ و d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجه بالشعاع $\vec{v}$ أثبت أن المستقيمان d و d' متقاطعان ثم عين I نقطة تقاطع المستقيمان d و d'

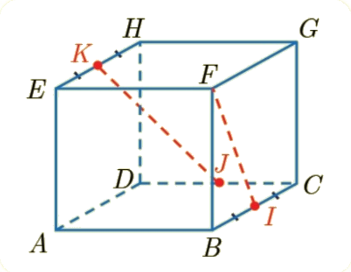
التمرين الثالث:

نتأمل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيم d المار بالنقطة $A(2,0,5)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(2,5,-1)$ والمستقيم d' المار بالنقطة $B(2,2,-1)$ والموجه بالشعاع $\vec{v}(1,2,1)$

هل d و d' متقاطعان؟

وفي حالة الإيجاب عين نقطة تقاطعهما.

التمرين الثالث:



$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه l فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[EH]$ نتأمل المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

1. أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ)
2. أيتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ) ؟ هل النقاط I و J و K و F في مستو واحد؟

التمرين الرابع:

في الحالات الآتية: أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' وبين إذا كان المستقيمان d' و d متوازيان أو كان d منطبقاً على d' :

$$d:\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad ; t \in R$$

$$d':\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$d:\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = t + 1 \end{cases} \quad ; t \in R$$

$$d':\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - y - 2z = 5 \end{cases}$$

ملاحظة هامة:

وقوع مستقيمان في مستو واحد

نميز الحالتين:

الحالة الأولى:

إذا كان المستقيمان d_1 و d_2 متوازيان أو منطبقان أو متقاطعان فهذا يعني أن المستقيمان d_1 و d_2 يحويهما مستوي واحد (d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد)

الحالة الثانية:

إذا كان المستقيمان d_1 و d_2 متخالفان فهذا يعني أن المستقيمان d_1 و d_2 لا يقعان في مستو واحد

تمرين:

ليكن لدينا المستقيمان d_1 و d_2 حيث:

$$d_1:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2\,; t \in R \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

$$d_2:\begin{cases} x = s \\ y = -3s + 3 \quad ; t \in R \\ z = -s + 1 \end{cases}$$

١. اكتب شعاعي توجيه للمستقيمان d_1 و d_2

٢. هل المستقيمان d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد؟

تعامد مستقيمان في الفراغ:

لإثبات أن مستقيمان (AB) و (CD) متعامدان يكفي أن نثبت أن شعاعي التوجيه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدان أي يجب إثبات أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

تمرين دورة 2019 الأولى:

لدينا النقطتان $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$

والمطلوب:

1. اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيهه $\vec{u}(2,2,1)$
2. أثبت أن المستقيمان (AB) و d متعامدان

ملخص دراسة الوضع النسبي بين مستقيمان في الفراغ:

نص السّؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ d_1 و d_2 متوازيان	نثبت أنّ: $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطان خطّيّاً d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 و d_2 منطبقان	نثبت أنّ: $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطان خطّيّاً d_1 و d_2 يشتركان بعدد لا نهائي من النّقاط
أثبت أنّ d_1 و d_2 متخالفان	نثبت أنّ: $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطّيّاً d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 و d_2 متقاطعان	نثبت أنّ: $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطّيّاً d_1 و d_2 يشتركان بأيّة نقطة
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع d_1 و d_2	بالحلّ المشترك لجملة التّمثيلات الوسيطيّة لـ d_1 و d_2
أثبت أنّ d_1 و d_2 متعامدان	نثبت أنّ: $\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 0$
هل d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد؟	ندرس الوضع النّسبي لـ d_1 و d_2 ونميّز الحالات: حالة ①: d_1 و d_2 متخالفان، إذاً d_1 و d_2 لا يقعان في مستوٍ واحد حالة ②: باقي الحالات إذاً d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد.

الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

ليكن لدينا المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}$
وليكن لدينا المستوي P ناظمه $\vec{n}$
لدراسة الوضع النسبي بين المستقيم d
والمستوي P فإننا نختبر الجداء السلمي لـ $\vec{u}$
شعاع توجيه المستقيم d و $\vec{n}$ ناظم المستوي P

ونميز الحالات:

الحالة الأولى:

إذا كان $\vec{n}.\vec{u} = 0$ فإن المستقيم d والمستوي P متوازيان (لا يشتركان بأية نقطة) وفي حالة خاصة يكون المستقيم d محتوى في المستوي P (يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط)

الحالة الثانية:

إذا كان $\vec{n}.\vec{u} \neq 0$ فإن المستقيم d والمستوي P متقاطعان (يشتركان بنقطة) وفي حالة خاصة يكون المستقيم d عمودي على المستوي P إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً

ملاحظة هامة جداً:

في حالة تقاطع المستقيم d والمستوي P يكون تقاطعهما هو نقطة (يطلب تعيين إحداثيات هذه النقطة) ولتحديد إحداثيات نقطة التقاطع نقوم بحل جملة المعادلات الوسيطية للمستقيم ومعادلة المستوي حلاً مشتركاً.

التمرين الأول:

تتأمل النقطتان $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$
والمستوي $P: 2x - y + z - 2 = 0$
والمطلوب:

١. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)
٢. تيقن أن (AB) يقطع المستوي P
٣. حدد إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي P

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ نتأمل نقطتين $A(2,-1,0)$ و $\mathrm{B}(-1,3,5)$ والمستوي P الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$ أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P وعين إحداثيات C نقطة التقاطع

إثبات أن مستقيم عمودي على مستوي:

للإثبات أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي P لدينا أسلوبان حسب معطيات المسألة:

الأسلوب الأول:

إذا كان لدينا ناظم المستوي معلوم فيكفي للإثبات أن المستقيم عمودي على المستوي أن نثبت أن شعاع توجيه المستقيم وناظم المستوي مرتبطان خطياً

تمرين:

ليكن لدينا المستوي P الذي معادلته:

$$P: 2x - y + z - 5 = 0$$

والمستقيم d الذي تمثيله الوسيطي

$$d: \begin{cases} x = -4t + 3 \\ y = 2t - 1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t - 5 \end{cases}$$

ادرس الوضع النسبي وأثبت أن المستقيم d عمودي على المستوي P

الأسلوب الثاني:

إذا كان ناظم المستوي غير معلوم فيكفي للإثبات أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي P أن نثبت أن $\overrightarrow{AB}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من P

تمرين:

نتأمل النقطتان $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$ ولدينا $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجهين له والمطلوب أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي P

تمرين:

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط:

$A(2,1,3)$, $B(1,0,-1)$, $C(4,0,0)$

$D(0,4,0)$, $E(1,-1,1)$

1. أثبت أن النقاط C و D و E ليست على استقامة واحدة
2. أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE)

إثبات أن مستقيم محتوى في مستوي:

لإثبات أن المستقيم d محتوى في المستوي P فإننا نتبع الخطوات:

خطوة 1 :

نتحقق من كون المستقيم d والمستوي P متوازيان

خطوة 2 :

بالحل المشترك لجملة معادلة المستوي ومعادلات التمثيل الوسيطي للمستقيم نحصل على عدد لا نهائي من الحلول أي (لا نحصل على قيمة لـ t إنما تكون محققة) وبذلك يكون المستقيم d محتوى في المستوي P

تمرين:

ليكن المستقيم d المعطى وفق:

$$d:\begin{cases} x = 1 \\ y = t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$$

والمستوي P الذي معادلته:

$$P: x + 2z + 1 = 0$$

أثبت أن d محتوى في المستوي P

ملخص دراسة الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

نص السّؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P و d متوازيان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u}=0$
أثبت أنّ P و d متقاطعان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u}\neq 0$
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ معلوم	نثبت أنّ $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطّيّاً
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ غير معلوم	نثبت أنّ شعاع توجيه المستقيم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطّيّاً من المستوي
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي P	بالحلّ المشترك لجملة معادلات المستوي ومعادلات المستقيم نحصل على نقطة التقاطع
هل المستقيم d محتوى في المستوي P ؟	بالحلّ المشترك لجملة المعادلات الأربعة نلاحظ أنّ المستقيم والمستوي يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط إذاً المستقيم محتوى في المستوي

الوضع النسبي لثلاثة مستويات:

تمهيد:

حل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل:

نصّ السّؤال:

حلّ جملة المعادلات:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & L_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & L_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & L_3 \end{cases}$$

فكرة الحلّ:

ينصح باستخدام طريقة غاوس وفق:

1. نرتب المعادلات الثّلاث بحيث نجعل في المعادلة الأولى (الرّائدة) أمثال x فيها هي الواحد، وهي خطوة ليست ضروريّة وإنّما لسهولة التعامل مع أعداد عاديّة وليست كسور
2. المرحلة الأولى:
نثبّت L_1 ونقوم بإجراء تحويلات سطريّة مناسبة لكي نجعل المجهول x في L_2 وL_3 هو الصّفر

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & L_1 \\ b_2y + c_2z = d_2 & L_2' \\ b_3y + c_3z = d_3 & L_3' \end{cases}$$

3. المرحلة الثانية:
تكون L_1 ثابتة أساساً ونثبّت L_2' وبإجراء تحويل سطري مناسب فإننا نجعل المجهول y في L_3' هو الصّفر

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & L_1 \\ b_2y + c_2z = d_2 & L_2' \\ c_3z = d_3 & L_3'' \end{cases}$$

4. نوجد قيمة z من L_3'' ونعوّضها في L_2'، وبذلك نكون قد حصلنا على y أيضاً، نعوّضها في L_1 فنحصل على x

ملاحظة مهمة جداً جداً:

بعد تطبيق الخطوة 3) نميز الحالات:

حالة 1: إذا كانت المعادلة L_3'' من الشكل:

$$c_3z = d_3 \quad L_3''$$

فهذا يعني أن لجملة المعادلات حل وحيد

حالة 2: إذا كانت المعادلة L_3'' من الشكل (مثلاً):

$$0 = 0 \quad L_3''$$

فهذا يعني أن لجملة المعادلات عدد لا نهائي من الحلول

حالة 3: إذا كانت المعادلة L_3'' من الشكل (مثلاً):

$$0 = 1 \quad L_3''$$

فهذا يعني أن جملة المعادلات تكون مستحيلة الحل

تمرين:

حل جمل المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$$

لا يَمنَعك خَطَؤك عن العمل
ولا يوقِفُك ذَنبُك عن المحاولة..

دراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات في الفراغ:

نصّ السّؤال:

ادرس الوضع النّسبي للمستويات R, Q, P.

فكرة الحلّ:

الخطوة ❶:

باستخدام طريقة غاوس نحلّ جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل (معادلات R, Q, P).

الخطوة ❷:

نميّز الحالات:

- **الحالة الأولى:**

إذا كانت الجملة مستحيلة الحلّ: فهذا يعني أنّ المستويات R, Q, P لا تشترك بأيّة نقطة.

- **الحالة الثّانية:**

إذا كان للجملة حلّ وحيد: فهذا يعني أنّ المستويات R, Q, P تشترك بنقطة وحيدة وإحداثيّات هذه النّقطة هي حلّ الجملة

- **الحالة الثّالثة:**

إذا كان للجملة عدد لا نهائي من الحلول: فهذا يعني أنّ المستويات R, Q, P تشترك بعدد لا نهائي من النّقاط وبالتّالي المستويات تشترك بمستقيم d (فصل مشترك)

ملاحظة①:

إذا كان للجملة عدد لا نهائي من الحلول وطلب منّا إيجاد التّمثيل الوسيطي للمستويات فإنّنا نأخذ المعادلتين L_1 و L'_2 ونتابع كما في الحالة الرّابعة من حالات التّمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ

ملاحظة②:

نصّ السّؤال:

لدينا ثلاث مستويات R, Q, P والمطلوب:

١) اكتب التّمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك لـ P و Q (تمّ مناقشة الفكرة سابقاً)

٢) أثبت أنّ المستقيم d والمستوي R متقاطعان (تمّ مناقشة الفكرة سابقاً)

٣) استنتج نقطة تقاطع المستويات R, Q, P، في هذه الحالة نقطة تقاطع المستويات R, Q, P هي ذاتها نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي R

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 2 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

للتنويه:

- في حال عدم تدريج الطّلبات فهذا يعني استخدام غاوس
- في حال كان السّؤال حلّ الجمل الخطيّة الموافقة، هذا يعني استخدام غاوس

تمرين: ادرس الوضع النسبي للمستويات في كل من الحالات الآتية:

$$\begin{cases} P_1: 5x + y + z = -5 \\ P_2: 2x + 13y - 7z = -1 \\ P_3: x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1: x - 2y - 3z = 3 \\ P_2: 2x - y - 4z = 7 \\ P_3: 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1: 2x - y + 3z = 0 \\ P_2: x + 2y + z = 0 \\ P_3: 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1: 2x - y + 3z = 2 \\ P_2: x + 2y + z = 1 \\ P_3: 3x - 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1: 2x - y + 3z = 2 \\ P_2: x + 2y + z = 1 \\ P_3: 3x - 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1: x + y + z = 1 \\ P_2: x - 2y + z = 1 \\ P_3: 3x - 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

الوضع النسبي لمستوي وكرة:

الفكرة	نص السؤال	طريقة الإجابة
الوضع النسبي لمستوي وكرة	ليكن لدينا المستوي P والكرة S مركزها Ω، ونصف قطرها R، والمطلوب: إمّا: أثبت أنّ المستوي P مماس للكرة S. أو: أثبت أنّ المستوي P قاطع للكرة S. أو: أثبت أنّ المستوي P خارج للكرة S. أو: ادرس الوضع النسبي للمستوي P والكرة S.	- نحدّد R نصف قطر الكرة وΩ مركزها. - نوجد بُعد مركز الكرة عن المستوي P، أي نوجد $\mathrm{dist}(\Omega, P)$ ونميّز: ▪ $\mathrm{dist}(\Omega, P) > R$: فإنّ المستوي P خارج الكرة S. ▪ $\mathrm{dist}(\Omega, P) = R$: فإنّ المستوي P مماس للكرة S. ▪ $\mathrm{dist}(\Omega, P) < R$: فإنّ المستوي P قاطع للكرة S.
تحديد نقطة تماس المستوي P والكرة S	ليكن لدينا المستوي P والكرة S، أوجد إحداثيات نقطة تماس P و S	تكون نقطة التماس هي المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي P

التمرين الأول: ادرس الوضع النسبي بين المستوي $P: x + y - z + 6 = 0$ والكرة التي مركزها $\omega(-1, -2, 6)$ ونصف قطرها $R = 4$

التمرين الثاني: ادرس الوضع النسبي بين المستوي $P: 2x + y - 2z + 9 = 0$ والكرة التي مركزها $\omega(2, -1, 0)$ ونصف قطرها $R = 4$

التمرين الثالث:

ادرس الوضع النسبي بين المستوي $P: x - z - 2 = 0$ والكرة التي مركزها $\omega(-1,1,1)$ ونصف قطرها $R = 1$

التمرين الرابع: ليكن لدينا المستوي

$$P: 2x - y + z + 2 = 0$$

والكرة التي معادلتها:

$$S: (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$$

١. هل المستوي P يمس الكرة S ؟
٢. وفي حال المماس حدد إحداثيات نقطة التماس

الوضع النسبي لمستقيم وكرة:

الفكرة	نص السؤال	طريقة الإجابة
الوضع النسبي لمستقيم وكرة	ليكن لدينا المستقيم d والكرة S مركزها Ω، ونصف قطرها R، والمطلوب: إمّا: أثبت أنّ المستقيم d مماس للكرة S. أو: أثبت أنّ المستقيم d قاطع للكرة S. أو: أثبت أنّ المستقيم d خارج للكرة S. أو: ادرس الوضع النسبي للمستقيم d والكرة S.	❈ نعوّض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة الكرة فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية ❈ نحل هذه المعادلة ونميز: ▪ للمعادلة حلّان، فالمستقيم قاطع للكرة في نقطتين. ▪ للمعادلة حلّ وحيد، فالمستقيم مماس للكرة في نقطة. ▪ المعادلة مستحيلة الحلّ، فالمستقيم خارج الكرة.
تحديد النقطة المشتركة للمستقيم d والكرة s	ليكن لدينا المستقيم d والكرة S، عيّن إحداثيّات النقاط المشتركة.	نعوّض قيم الحلول في التمثيل الوسيطي فنحصل على المطلوب

التمرين الأول:

ادرس الوضع النسبي بين المستقيم d والكرة s حيث:

$$d:\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \quad ; t \in R \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

$$S: (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 25$$

التمرين الثاني:

ادرس الوضع النسبي بين المستقيم d والكرة s حيث:

$$d:\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \quad ; t \in R \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$S: (x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6$$

التمرين الثالث: ليكن لدينا المستقيم

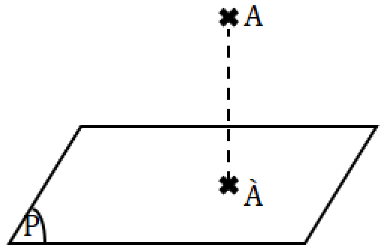
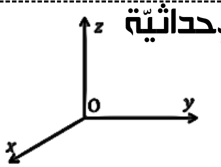
$$d:\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -4 + 4t \quad ; t \in R \\ z = -5 + t \end{cases}$$

$$S: (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 25$$

١. هل المستقيم d مماس للكرة s ؟
٢. وفي حال المماس حدد إحداثيات نقطة التماس

المساقط القائمة:

المسقط القائم لنقطة على مستو:

<table>
<tr><th>المستوي عشوائي</th><th colspan="3">المستوي معلم</th></tr>
<tr><td rowspan="3">لا تعتمد فكرته عل الرّسم إنما تحتاج مهارة
☒ الخطوات:
- نكتب معادلة المستوي P المراد الإسقاط عليه.
- نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المارّ من النقطة A (المراد إيجاد مسقطها) والعمودي على المستوي السّابق P
- يكون المسقط القائم هو نقطة تقاطع المستقيم والمستوي
</td><td colspan="3">هو المستوي المرسوم على المحاور الإحداثيّة تعتمد فكرته على الرّسم، ونميّز فيه:
</td></tr>
<tr><td>المستوي (OXY)</td><td>المستوي (OXZ)</td><td>المستوي (OYZ)</td></tr>
<tr><td>نحافظ على فاصلة وترتيب النقطة ونجعل راقم النقطة هو صفر، أيّ: $(x, y, 0)$</td><td>نحافظ على فاصلة وراقم النقطة ونجعل ترتيب النقطة هو صفر، أيّ: $(x, 0, z)$</td><td>نحافظ على ترتيب وراقم النقطة ونجعل فاصلة النقطة هو صفر أيّ: $(0, y, z)$</td></tr>
</table>

التمرين الأول: في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نتأمل النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,0,1)$ و

$C(1,5,5)$ والمطلوب:

يطلب تعيين D' المسقط القائم للنقطة

$D(-11,9,-4)$ على المستوي ABC

التمرين الثاني: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(2,4,3)$ و $B(4,-2,3)$ و $C(1,-1,1)$ و $D(3,3,-3)$ المطلوب:

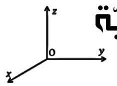
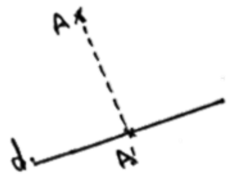
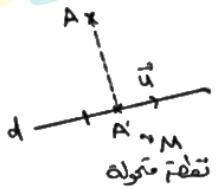
١. أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة

٢. عين إحداثيات D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي ABC

التمرين الثالث: لدينا النقطتان $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$ والمستوي $P: 3x - y - 3z - 8 = 0$ والمطلوب:

١. أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P
٢. اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (AB)
٣. عين إحداثيات A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P

المسقط القائم لنقطة على مستقيم:

مستقيم عشوائي			مستقيم معلم		
لا تعتمد فكرته على الرّسم إنّما تحتاج مهارة، لدينا ثلاثة أساليب، حيث نستخدم دائماً الأسلوب الثّاني إلّا في حال تدريج الطّلّاب نستخدم المناسب: الأساليب الثّلاثة:			هو المستقيم المرسوم على أحد المحاور الإحداثيّة تعتمد فكرته على الرّسم، ونميّز فيه: 		
الأسلوب الأوّل	الأسلوب الثّاني	الأسلوب الثّالث	المحور (OX)	المحور (OY)	المحور (OZ)
- نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه) - نكتب معادلة المستوي P المارّ من النّقطة A (المراد إيجاد مسقطها) والعمودي على المستقيم d - يكون المسقط القائم هي نقطة تقاطع المستوي P والمستقيم d 	- نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه) - نأخذ نقطة M من المستقيم d (بحيث إحداثيّات M هي نفسها معادلات المستقيم) يتحقّق: $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0$ - بالتعويض نحصل على قيمة الوسيط t نعوّض قيمة t في التمثيلات الوسيطيّة للمستقيم d فنحصل على إحداثيّات - النّقطة $\acute{A}$ المسقط القائم للنّقطة A على المستقيم d 	- نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه) - نأخذ نقطة M من المستقيم d (بحيث إحداثيّات M هي نفسها معادلات المستقيم) - نوجد AM^2 بدلالة t (الإتمام إلى مربّع كامل) نحدّد قيمة t التي تجعل AM^2 أصغر ما يمكن - نعوّض قيمة t في إحداثيّات النّقطة M - فتكون هي ذاتها إحداثيّات النّقطة $\acute{A}$ المطلوبة.	نحافظ على فاصلة النّقطة ونجعل كلّ من الترتيب والراقم هي أصفار، أيّ: $(x,0,0)$	نحافظ على ترتيب النّقطة ونجعل كلّ من الفاصلة والرّاقم هي أصفار، أيّ: $(0,y,0)$	نحافظ على راقم النّقطة ونجعل كلّ من الفاصلة والترتيب هي أصفار، أيّ: $(0,0,z)$

التمرين الأول: لتكن لدينا النقاط $A(2,3,0)$ و $B(2,3,6)$ و $M(4,-1,2)$ والمطلوب:

١. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

٢. اكتب معادلة المستوي P المار من M والعمودي على المستقيم (AB)

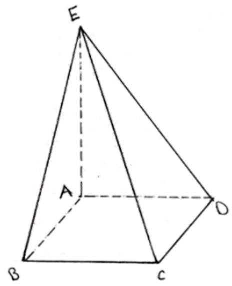
٣. استنتج إحداثيات M' المسقط القائم للنقطة M على المستقيم (AB)

٤. أوجد إحداثيات M' المسقط القائم لـ M على المستقيم (AB) بطريقة ثانية

التمرين الثاني: ليكن لدينا المستويان:

$$P: 2x - y + z - 4 = 0$$
$$Q: x + y + 2z - 5 = 0$$

١. أثبت تقاطع المستويان P و Q
٢. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك لـ P و Q
٣. أوجد إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d



تمرين شامل: في الشكل

المجاور ليكن الهرم $EABCD$

رأسه E فيه: $ABCD$ مربع

طول ضلعه 3 و $[EA]$ عمودي

على $ABCD$ حيث: $EA = 4$

ليكن المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

حيث:

$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = 3\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$

1. **أوجد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم**
2. **أوجد إحداثيات النقطة F التي تحقق العلاقة: $3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE}$**
3. **أوجد إحداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة F على المستوي $(ABCD)$**
4. **أوجد إحداثيات النقطة R المسقط القائم للنقطة N على المستقيم AB**
5. **احسب المسافة FR**
6. **أوجد إحداثيات النقطة G منتصف القطعة المستقيمة $[EC]$**
7. **أثبت أن النقاط A و B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها G ثم عين نصف قطر هذه الكرة**
8. **هل النقطة G تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CD]$**

بعد نقطة عن مستقيم في الفراغ
(لا يوجد قانون مباشر)

لإيجاد بُعد نقطة A عن مستقيم d في الفراغ فإننا:

- نوجد إحداثيّات النّقطة A' (المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d)
- يكون بُعد A عن المستقيم d هو المسافة بين النّقطة A ومسقطها A'

أيّ:

بعد النقطة عن المستقيم يعطى بالعلاقة:

$$dist(\text{النقطة} \backslash \text{المستقيم}) = AA'$$

التمرين الأول: ليكن لدينا النقطة $A(2,2,3)$ والمستقيم d تمثيله الوسيطي:

$$d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \quad ; t \in R \\ z = t + 2 \end{cases}$$

احسب بعد النقطة A عن المستقيم d

التمرين الثاني: لتكن لدينا النقطة $A(2,1,-1)$

والمستقيم Δ حيث:

$$\Delta:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-2t \quad ;t\in R \\ z=2-t \end{cases}$$

احسب بعد النقطة A عن المستقيم Δ

التمرين الثالث: ليكن لدينا المستويان:

$$P: x - 2y - 3z = 0$$
$$Q: 2x + y - z - 10 = 0$$

١. أثبت أن P و Q متقاطعان
٢. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك لـ P و Q
٣. احسب بعد النقطة $A(2, -1,2)$ عن المستقيم d

التمرين الرابع: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لدينا النقطة $A(3,-1,2)$ والمستويان P و Q

$$P: 2x - y + z - 4 = 0$$

$$Q; x + y + 2z - 5 = 0$$

أثبت تقاطع المستويان P و Q واحسب بعد A عن المستقيم d الذي يمثل الفصل المشترك للمستويان P و Q

التمرين الخامس: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لدينا النقطة $A(2,2,-1)$ والمستويان P و Q

$$P: x - y + z = 0$$

$$Q; 3x + y - 1 = 0$$

احسب بعد A عن المستقيم d

الفصل المشترك للمستويان P و Q

بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويان متعامدان

إذا كان لدينا مستويان P وQ متعامدان وكان المطلوب هو إيجاد بُعد نقطة A عن المستقيم d الفصل المشترك لـ P وQ فإننا نتبع الخطوات الآتية:

- نوجد بُعد النّقطة A عن المستوي الأوّل P ويكون: $\mathrm{dist}(\mathrm{A},\mathrm{P}) = m_1$
- نوجد بُعد النّقطة A عن المستوي الثّاني Q ويكون: $\mathrm{dist}(\mathrm{A},Q) = m_2$.
- استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث يكون بعد A عن المستقيم d مُعطى وفق:

$$\mathrm{dist}(\mathrm{A},d) = \sqrt{{m_1}^2 + {m_2}^2}$$

تمرين: في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,1,2)$ والمستويان P و Q

$$P: x + y - 2z - 1 = 0$$

$$Q; x + y + z = 0$$

١. أثبت أن المستويان P و Q متعامدان

٢. احسب بعد A عن كل من المستويان P و Q

٣. استنتج بعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويان P و Q

مجموعات النقاط:

	الحالة	التفسير	نفهم
حالات المسافة بين نقطتين	إذا تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = k$ $MA = k$	مهما تحولت النقطة M فإن المسافة بين M و A هي قيمة ثابتة k	تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $R = k$
	إذا تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ $MA = AB$	مهما تحولت النقطة M فإن المسافة بين A و M هي ذاتها المسافة بين A و B	تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $R = AB$
	إذا تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right\|$ $MA = MB$	مهما تحولت النقطة M فإن المسافة بين M و A هي ذاتها المسافة بين M و B	تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
حالات الجداء السلمي	إذا تحقق: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 0$	مهما تحوّلت النّقطة M فإنّ المستقيمان (MA) و (AB) متعامدان	تمثّل مستوي ناظمه الشّعاع $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$
	إذا تحقق: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$	مهما تحوّلت النّقطة M فإنّ المستقيمان (MA) و (MB) متعامدان	تمثّل كرة قطرها هو $[AB]$

لسهولة الحفظ:

	مسافة	جداء سلمي
M موجودة مرة	كرة	مستوي
M موجودة مرتين	مستوي محوري	كرة

ملاحظة هامة جداً:

أحياناً يكون المعطى هو مساواة من الشّكل:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

والمطلوب:

ماذا تمثل مجموعة النّقاط $M(x, y, z)$.

☜ الخطوات:

بالإتمام إلى مربّع كامل نحصل على العلاقة:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = K$$

نميّز:

- إذا كان $K < 0$: تمثل مجموعة خالية.
- إذا كان $K = 0$: تمثل النّقطة $\Omega(x_0, y_0, z_0)$
- إذا كان $K > 0$: تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها R

التمرين الأول: $ABCD$ رباعي وجوه, G مركز ثقل المثلث (DBC) و M نقطة من الفراغ
جد مجموعة النقاط التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

التمرين الثاني: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

1. $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$
2. $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$
3. $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$
4. $x^2+y^2+z^2-4x+5=0$

التمرين الثالث: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
نتأمل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$

١. أعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق أن $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

٢. ما طبيعة المجموعة ε

التمرين الرابع: تتأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ نضع $r = \frac{1}{2}AB$ ونعرف I منتصف $[AB]$ والمطلوب:

١. أثبت أنه في حالة نقطة ما M من الفراغ تتحقق المساواة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - r^2$

٢. أثبت أن مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق أن:

٣. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها

التمرين الخامس: في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

تتأمل النقطتان $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$

١. أعط معادلة للمجموعة ε مكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $MA = 2MB$

٢. ما طبيعة المجموعة ε

٣. أعط معادلة للمجموعة p المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA = MB$

٤. ما طبيعة المجموعة p

سفينتي ان أرادت فلا سلطة للرياح..♡

المساحات:

الشكل	القانون
المثلث	مساحة المثلّث $=$ طول القاعدة $\times$ طول الارتفاع المتعلق به $\times \frac{1}{2}$
المثلث القائم	مساحة المثلّث القائم $= \frac{\text{جداء الضّلعين القائمتين}}{2}$
المثلث متساوي الأضلاع	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ وارتفاعه $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ حيث طول الضلع $= a$
متوازي الأضلاع	مساحة متوازي الأضلاع $=$ طول القاعدة $\times$ طول الارتفاع المتعلق به
المستطيل	مساحة المستطيل $=$ الطّول $\times$ العرض
المربع	مساحة المربّع $= (\text{طول الضلع})^2$
المعين	مساحة المعيّن $= \frac{\text{جداء طولي قطريه}}{2}$ أو مساحة المعيّن $=$ جداء الضّلعين القائمتين $\times 2$
شبه المنحرف	مساحة شبه المنحرف $=$ ارتفاع شبه المنحرف $\times$ مجموع طولي القاعدتين $\times \frac{1}{2}$
الدائرة	$S = \pi r^2$; حيث نصف القطر $= r$

الحجوم:

المجسمات ذات القاعدة الواحدة	
الشكل	القانون
(هرم/ رباعي وجوه/ مخروط/ .....)	حجم المجسّم $= \frac{1}{3}$(ارتفاع المجسّم) (مساحة القاعدة)

المجسمات ذات القاعدتين	
الشكل	القانون
(المكعّب/ متوازي المستطيلات/ متوازي السّطوح/ الموشور القائم/ الأسطوانة)	حجم المجسّم $=$ (ارتفاع المجسّم) (مساحة القاعدة)

ملاحظة: لإيجاد حجم الهرم أو رباعي الوجوه فإننا نتبع الخطوات:

الخطوة ①: نحدّد قاعدة الهرم ونحسب مساحتها (نصيحة: اختر القاعدة التّي يكون حساب مساحتها سهلاً (ممكناً).

الخطوة ②: نحدّد رأس الهرم ونوجد ارتفاع الهرم، حيث ارتفاع الهرم: هو بُعد رأس الهرم عن مستوي قاعدته،

ولإيجاد ارتفاع الهرم، نميّز حالتين:

الحالة ❶:

قاعدة الهرم هي مستوي معلم، فإننا: نوجد مسقط رأس الهرم على مستوي القاعدة.

ارتفاع الهرم يكون هو المسافة بين رأس الهرم ومسقطه على مستوي القاعدة

الحالة ❷:

قاعدة الهرم هي مستوي عشوائي فإننا: نطبّق دستور الـ $dist$

الخطوة ③: نضع القانون:

$$V = \frac{1}{3} S_b . h$$

الخطوة ④: نعوّض

المسألة الأولى:

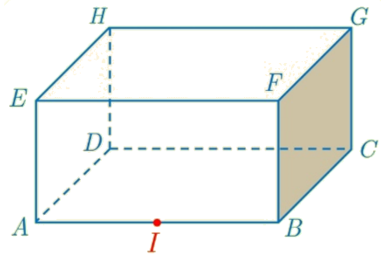
في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط:

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$

و $D(-4,2,1)$ والمطلوب:

1. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته
2. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)
3. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه (DABC)

المسألة الثانية:



ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$ والنقطة I هي منتصف [AB] و J هي منتصف [CG]

نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

1. احسب المسافتين IJ و DJ
2. أثبت أن المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان , واحسب $\cos(\widehat{IJD})$
3. أعط معادلة للمتسوي (DIJ)
4. احسب بعد H عن المستوي (DIJ)
5. احسب حجم رباعي الوجوه HDIJ
6. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوي (HDI)
7. احسب إحداثيات النقطة J' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI)
8. جد بطرائق مختلفة بعد النقطة J عن المستوي (HDI)

المسألة الثالثة:

تتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط $A(3,2,6)$ و $B(1,2,4)$ و $C(4,-2,5)$ و $D(1,1,-1)$ والمستوي P الذي معادلته $P: 2x+y-2z=-4$ والمطلوب:

١. أثبت أن A و B و C تعين مستوياً وبين أن هذا المستوي هو P

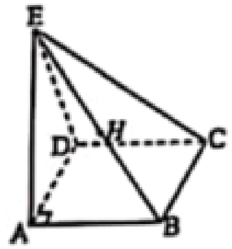
٢. أثبت أن المثلث ABC قائم في A واحسب مساحته

٣. عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من D والعمودي على P

٤. استنتج إحداثيات K المسقط القائم لـ D على المستوي P

٥. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

المسألة الرابعة:



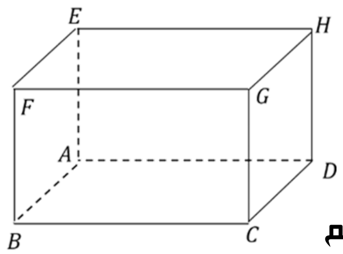
$EABCD$ هرم رباعي رأسه E
وقاعدته مربع طول ضلعه 3
ولدينا $[AE]$ عمودي على
المستوي $ABCD$ و $EA = 3$

نختار المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

والمطلوب:

١. عين إحداثيات E و D و C و B و A
٢. جد معادلة المستوي EBC
٣. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي EBC
٤. استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC)
٥. احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$

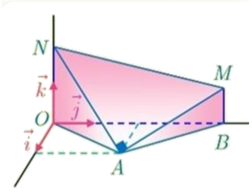
المسألة الخامسة:



ليكن $ABCDEFGH$ مكعباً طول حرفه 4 ولتكن I منتصف $[AB]$ والنقطة J تحقق العلاقة: $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$ نتأمل المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. جد إحداثيات رؤوس المكعب والنقطتين I و J
٢. أثبت أن معادلة المستوي (EIJ) هي: $6x + 4y + 3z - 12 = 0$
٣. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A والعمودي على المستوي (EIJ)
ثم أوجد إحداثيات النقطة K نقطة تقاطع المستقيم d مع (EIJ)
٤. احسب مساحة المثلث AEJ ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $IAEJ$
٥. احسب بعد النقطة A عن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة المثلث (EIJ)

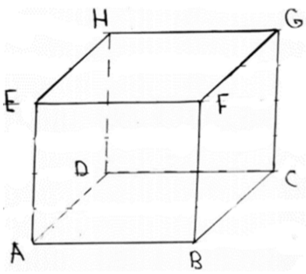
المسألة السادسة:



m و n عددان حقيقيان موجبان يحققان $0 < m < n$ نتأمل النقاط $A(\sqrt{3},3,0)$ و $B(0,6,0)$ و $M(0,6,m)$ و $N(0,0,n)$ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عين n و m ليكون المثلث MAN قائماً في A وحجم المجسم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$

مجموعة من التمارين الشاملة:

التمرين الأول:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه: $AB = 2$ و $BC = 1$ و $CG = 1$ والمطلوب:

١. أعط معلماً متجانساً مبدؤه A ثم حدد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات
٢. أوجد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[BG]$
٣. أوجد إحداثيات النقطة J التي تجعل الرباعي $(ABIJ)$ متوازي أضلاع
٤. أوجد إحداثيات النقطة K نظيرة F بالنسبة إلى النقطة H
٥. حدد نوع المثلث (BIC)
٦. هل النقاط C و F و I تقع على استقامة واحدة؟؟

التمرين الثاني: جد على محور الفواصل نقطة C متساوية البعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1)$

التمرين الثالث: ليكن α عدداً حقيقياً ولنتأمل النقاط $A(3,1,-3)$ و $B(-1,5,-3)$ و $C(-1,1,\alpha)$ أثبت أن المثلث (ABC) متساوي الساقين أياً كان α , أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع؟؟

التمرين الرابع: في معلم متجانس نتأمل النقطتين $A(2,1,0)$ و $B(-1,4,2)$ والمطلوب:

١. أوجد نقطة متساوي البعد عن A و B
٢. أوجد العدد الحقيقي λ الذي يجعل $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A و B
٣. أثبت أن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$3x - 3y - 2z + 8 = 0$$

التمرين الخامس: تتأمل في معلم متجانس النقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$ والمطلوب:

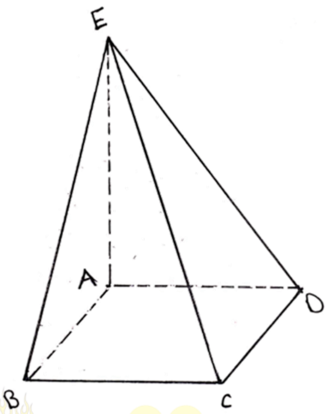
١. أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة
٢. عند أي قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC)
٣. ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستو واحد
٤. احسب بعد النقطة $K(1,1,3)$ عن المستوي (ABC)
٥. اكتب معادلة الكرة التي مركزها النقطة K وتمس المستوي (ABC)

التمرين السادس: نتأمل المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(2,-2,3)$ والمطلوب:

١. أوجد نقطة تنتمي لمحور الفواصل متساوية البعد عن A و B
٢. اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
٣. اكتب معادلة الكرة التي يكون $[AB]$ قطراً بها

التمرين السابع: نتأمل في معلم متجانس النقاط $A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$ والمطلوب:

١. أثبت أن C و D و E تشكل مستوي
٢. أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE)
٣. عين إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي (CDE)
٤. عند أي قيمة للوسيطة m تنتمي النقطة $M(m,1,0)$ للمستوي (CDE)



التمرين الثامن:
في الشكل المجاور ليكن الهرم $EABCD$ رأسه E فيه: $ABCD$ مربع طول ضلعه $3[EA]$ عمودي على $ABCD$ حيث: $EA = 4$ ليكن المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث:
$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = 3\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$

١. أوجد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم
٢. أوجد إحداثيات النقطة F التي تحقق العلاقة:
$$3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE}$$
٣. أوجد إحداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة F على المستوي $(ABCD)$
٤. أوجد إحداثيات النقطة R المسقط القائم للنقطة N على المستقيم AB
٥. احسب المسافة FR
٦. أوجد إحداثيات النقطة G منتصف القطعة المستقيمة $[EC]$
٧. أثبت أن النقاط A و B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها G ثم عين نصف قطر هذه الكرة
٨. هل النقطة G تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CD]$

التمرين التاسع: ليكن لدينا المستويان:
$$P: 2x - y + z - 4 = 0$$
$$Q: x + y + 2z - 5 = 0$$
والمطلوب:

١. أثبت أن P و Q متقاطعان
٢. أوجد تمثيل وسيطي للمستقيم d_1 الفصل المشترك للمستويان P و Q
٣. ادرس الوضع النسبي لـ المستقيمان d_1 و d_2 حيث:
$$d_2: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \qquad ; t \in R \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$
٤. هل المستقيمان d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد؟؟ علل إجابتك
٥. أثبت أن المستقيمان d_1 و (AB) متعامدان حيث: $A(3,0,3)$ و $B(1,1,2)$
٦. ادرس تقاطع المستقيم d_2 والمستوي R
$$R: x - y + z = 1$$
وفي حال التقاطع عين إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيم d_2 والمستوي R
٧. هل المستقيم (CD) عمودي على المستوي R حيث $C(1,1,-1)$ و $D(3,-1,1)$
٨. لتكن لدينا النقطة $E(3,-1,2)$ ، أوجد إحداثيات النقطة E_1 المسقط القائم للنقطة E على المستوي P
٩. احسب بعد النقطة E عن المستوي P بطريقتين مختلفتين
١٠. أوجد إحداثيات النقطة E_2 المسقط القائم للنقطة E على المستقيم d_1
١١. احسب بعد النقطة E عن المستقيم d_1
١٢. هل النقاط $F(2,1,1)$ ، $G(1,1,-2)$ تنتمي إلى المستوي P
١٣. هل النقاط $F(2,1,1)$ ، $G(1,1,-2)$ تنتمي إلى المستقيم d_2
١٤. ادرس الوضع النسبي للمستويات P و Q و R
١٥. اكتب معادلة الكرة S_1 التي مركزها E ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$

التمرين العاشر: ليكن لدينا المستقيم d تمثيله الوسيطي:

$$d: \begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2 \quad ; t\in R \\ z=t \end{cases}$$

١. أوجد المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d حيث $A(3,-1,2)$

٢. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم d

التمرين العاشر: نتأمل في معلم متجانس لدينا النقطة $A(2,2-1)$ والمستويان:

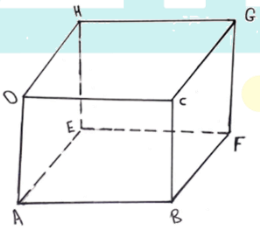
$$P: x+y-2z-1=0$$
$$Q: x+y+z=0$$

١. أثبت أن المستويان P و Q متعامدان

٢. احسب بعد النقطة A عن كل من المستويان P و Q

٣. استنتج بعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويان

التمرين الحادي عشر:



نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ لتكن I منتصف $[DC]$ و J منتصف $[HG]$ و K منتصف $[DH]$

ولتكن L من $[CD]$ تحقق $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

ولتكن M من $[BC]$ تحقق العلاقة: $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

نأخذ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ والمطلوب:

١. أعط إحداثيات K و E ة A

٢. جد إحداثيات O_1 مركز ثقل المثلث (AEK)

٣. أين تقع النقطة N التي تحقق العلاقة:

$$3\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO_1}$$

٤. احسب $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KE}$

٥. أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EM}$ غير مرتبطين خطياً

٦. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{HL}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EM}$ مرتبطة خطياً

٧. أثبت أن المستقيم (HL) يوازي المستوي (EGM)

٨. اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$

٩. احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$

١٠. احسب مساحة $(AIJE)$

١١. احسب حجم الهرم $(KAIJE)$

١٢. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K

١٣. أوجد إحداثيات النقطة K_1 نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$ ثم أثبت أن K_1 هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (I,β) و (E,γ)

١٤. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG)

١٥. أثبت أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (EDB)

١٦. أثبت أن المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في نقطة O_2 عينها

١٧. أثبت أن O_2 نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث (EDB)

١٨. أثبت أن النقطة O_2 هي مركز ثقل المثلث (EDB)

١٩. حدد نوع المثلث (EDB) واحسب مساحته

٢٠. احسب بعد النقطة A عن المستوي (EDB) ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $(AEDB)$

اذا نظرت حولك ولم ترى شيئاً يشبه النجاح أبداً..♡

التمرين الثاني عشر: في الفضاء المنسوب

إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا:

$A(-1,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(2,-1,1)$

و $D(2,0,-1)$

والمستوي P الذي معادلته $P: 2y+z+1=0$

والمستقيم Δ الذي تمثيله الوسيطي

$$\Delta: \begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$$

١. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $[BC]$ ثم تحقق أن المستقيم $[BC]$ محتوى في المستوي P

٢. بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا في نفس المستوي

٣. احسب المسافة بين النقطة A والمستوي P

٤. بين أن النقطة D نقطة من المستوي P وأن المثلث BCD قائم

٥. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

التمرين الواحد والعشرون: في الفراغ المنسوب

لمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان معرفان بتمثيلهما الوسيطي:

$$\Delta_1: \begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \end{cases} \quad ; t\in R$$

$$\Delta_2: \begin{cases} x=1 \\ y=1-t' \\ z=4+2t' \end{cases} \quad ; t'\in R$$

١. عين $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ شعاعا توجيه كل من Δ_1 و Δ_2 على الترتيب

٢. أثبت أن المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة B يطلب تعيين إحداثياتها

٣. اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي P المعين بالمستقيمان المتقاطعان Δ_1 و Δ_2

٤. أثبت أن النقطة $A(6,4,4)$ لا تنتمي إلى المستوي P

٥. أثبت أن النقطة B هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي P واحسب طول القطعة $[AB]$

٦. اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي Q الذي يمر بالنقطة $\vec{n}(5,1,-7)$ شعاع ناظمي له

٧. عين إحداثيات النقطة C (نقطة تقاطع المستقيم Δ_1 مع المستوي Q)

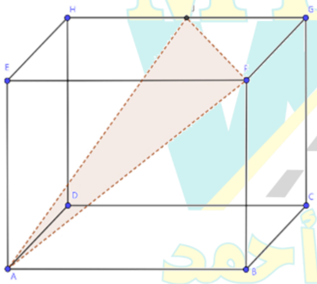
٨. عين إحداثيات النقطة D (نقطة تقاطع المستقيم Δ_2 مع المستوي Q)

٩. بين أن المثلث BCD قائم واحسب مساحة سطحه ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

١٠. استنتج مساحة سطح المثلث ACD

التمرين الثالث عشر:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=4$ و $AE=AD=2$ ولتكن J منتصف $[HG]$ ونتأمل معلماً متجانساً $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\frac{1}{2},\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:



١. أوجد إحداثيات النقاط A و F و C و J

٢. احسب المسافتين $[AJ]$ و $[JF]$

٣. أثبت أن المثلث AFJ قائم في J واحسب مساحته

٤. أثبت أن $\vec{n}(1,1,-2)$ ناظم المستوي AFJ ثم اكتب معادلته

٥. احسب بعد C عن المستوي AFJ ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $AFJC$

٦. أوجد إحداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة E على المستقيم (AF)

التمرين الرابع عشر: نتأمل في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,3,1)$ و $B(1,2,-2)$ وليكن d المستقيم الذي تمثيله الوسيطي

$$d:\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad ; t \in R$$

١. عين التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ الذي يمر بالنقطة A ويقبل $\vec{u}(1,2,-2)$ شعاع توجيه له

٢. عين إحداثيات النقطة C نقطة تقاطع المستقيمان (Δ) و (d)

٣. ليكن P المستوي المعين بالمستقيمين (Δ) و (d) , أثبت أن $\vec{n}(2,-2,-1)$ ناظم المستوي P ثم اكتب معادلته

٤. اكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطة B ويعامد المستقيم (Δ)

٥. عين إحداثيات النقطة E المسقط القائم للنقطة B على المستقيم (Δ)

٦. احسب بعد النقطة B عن المستقيم (Δ)

٧. تأكد أن المستويين P و Q متعامدين

٨. احسب بعد النقطة $M(1,4,5)$ عن المستويين P و Q

٩. استنتج بعد النقطة M عن الفصل المشترك لتقاطع المستويين P و Q

التمرين الخامس عشر: نتأمل في معلم متجانس $(O:\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(0,1,2)$ و $B(2,1,1)$ و $C(1,0,0)$ و $D(1,-2,\lambda)$ والمستويان $P: 2x - y + 3z = 9$ و $Q: 3x - 2y + 4z = 11$

١. جد العدد الحقيقي λ بحيث يكون المثلث ABD قائم في A

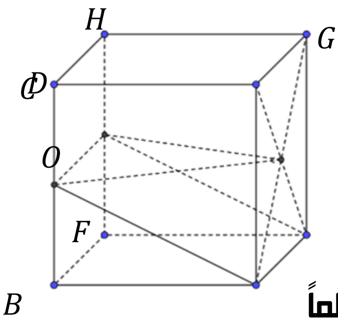
٢. أثبت أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي ABC ثم استنتج معادلة المستوي ABC

٣. اثبت أن المستويان P و Q متقاطعين وجد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d

٤. أوجد نقطة تقاطع المستويات P و Q و ABC

٥. أثبت أن النقطة $A'\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d ثم استنتج بعد A عن d

التمرين السادس عشر: $ABCDEFGH$ مكعب فيه I و J منتصفا $[AD]$ و $[EH]$ و O مركز الوجه $(BCGF)$ نتخذ $(A,\vec{AB},\vec{AE},\vec{AD})$ معلماً متجانساً والمطلوب:



١. أوجد إحداثيات النقاط B و F و I و J

٢. تأكد أن $\vec{n}(1,0,2)$ ناظم على المستوي $(BFJI)$ ثم اكتب معادلته

٣. احسب بعد O عن المستوي $(BFJI)$ وحجم الهرم $(OBFJI)$

٤. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(BFJI)$ والمار بالنقطة O

٥. احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(BFJI)$

٦. أثبت أن النقطة N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (B,β) و (I,α) و (F,γ) حيث α و β و γ ثوابت يطلب تعيينها

التمرين السابع عشر: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، المستوي P الذي يشمل النقطة $A(1,-2,1)$ و $\vec{n}(-2,1,5)$ شعاع ناظم له وليكن المستوي Q معادلته:

$$Q: x+2y-7=0$$

١. اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي P
٢. تحقق أن النقطة $B(-1,4,-1)$ مشتركة بين المستويين P و Q
٣. بين أن المستويين P و Q متقاطعان وفق مستقيم Δ يطلب تعيين تمثيله الوسيطي
٤. أثبت أن المستويين P و Q متعامدان

٥. لتكن لدينا النقطة $C(5,-2,-1)$ والمطلوب:
a) احسب المسافة بين النقطة C والمستوي P ثم المسافة بين النقطة C والمستوي Q
b) استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم Δ

التمرين الثامن عشر: في الفراغ المنسوب لمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا النقاط $A(4,5,3)$ و $B(4,0,-2)$ و $C(2,6,0)$ والمستقيم D المعرف بالتمثيل الوسيطي:

$$D:\begin{cases} x=6-2\lambda \\ y=-1+6\lambda \quad ,\lambda\in R \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

١. أثبت أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم D
٢. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (CB)
٣. ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (CB) و (D)
٤. اكتب معادلة المستوي P الذي يمر بالنقطة A ويقبل $\vec{u}(-2,1,-3)$ و $\vec{v}(0,-5,-5)$ شعاعين موجهين له
٥. بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ ماذا تمثل مجموعة النقاط M في الفراغ والتي تحقق العلاقة:

$$\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{MA}\|$$

الدورات:

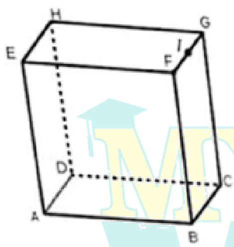
التمرين الأول: دورة 2017 امتحان نصفي 60 درجة

$ABCD$ رباعي وجوه فيه I و J منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ على الترتيب ولدينا E و F تحققان العلاقتين:

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

وأخيراً H هي منتصف $[EF]$
أثبت أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة

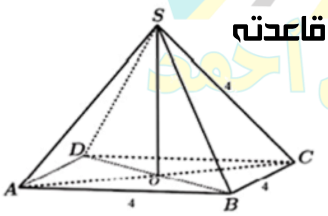
التمرين الثاني: دورة 2017 امتحان نصفي 40 درجة:



في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف FG والمطلوب: عين النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$$

التمرين الثالث: دورة 2017 امتحان نصفي 60 درجة:

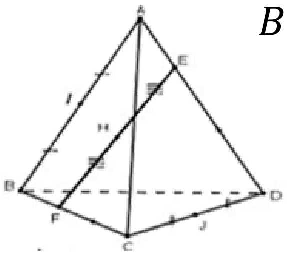


نتأمل هرم $S-ABCD$ قاعدته مربع طول ضلعه يساوي 4 ورأسه S وطول كل حرف من حروفه الجانبية يساوي 4 ولدينا النقطة O مرتسم S القائم على القاعدة والمطلوب:

١. احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$
٢. احسب طول القطر CA ثم احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}$
٣. عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$ و $(B,3)$ و $(S,1)$

التمرين الرابع: دورة 2017 امتحان نصفي 100 درجة

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقطتان $B(7,-2,0)$ و $A(2,1,-2)$ والشعاعين $\vec{u}(2,-1,0)$ و $\vec{v}(-3,1,2)$ والمطلوب:



١. أثبت أن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً

٢. اكتب معادلة المستوي الذي يقبل $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعي توجيه له

٣. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الذي يقبل $\vec{u}$ شعاعاً توجيهياً له ويمر بالنقطة A

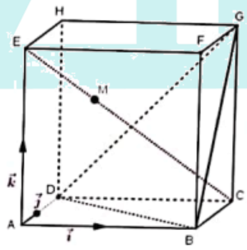
التمرين الخامس: دورة 2017 الأولى 40 درجة

١. اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$

٢. تحقق أن المستوي P الذي معادلته $P: x-y+z+3=0$ مماس للكرة S

التمرين السادس: دورة 2017 الأولى 100 درجة

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 , نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ في المعلم $\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$



١. اكتب معادلة للمستوي GBD

٢. اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (EC)

٣. جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي GBD

٤. جد إحداثيات النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

٥. أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC)

التمرين السابع: دورة 2017 الثانية 40 درجة

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقطتان $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الثامن: دورة 2017 الثانية 40 درجة

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d و d' حيث:

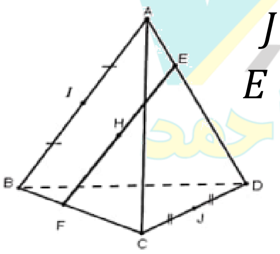
$$d:\begin{cases}x=t+1\\ y=-3t+2\,;t\in R\\ z=-3t+3\end{cases}$$

$$d':\begin{cases}x=s\\ y=-3s-3\,;s\in R\\ z=-s+1\end{cases}$$

هل المستقيمان d و d' يقعان في مستو واحد؟ علل إجابتك..

التمرين التاسع: دورة 2017 الثانية 60 درجة

ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه ويكن α عدد حقيقي و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ ولدينا النقطتان E و F معرفتان بالعلاقتين: $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ وأخيراً H منتصف $[EF]$



أثبت أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة

التمرين العاشر: دورة 2018 الاولى 40 درجة

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي:

$$P: x+2y+z-1=0$$

احسب بعد النقطة A عن المستوي P ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

التمرين الحادي عشر: دورة 2018 الاولى 100 درجة

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,1,0)$ و $B(1,2,1)$ و $C(4,0,0)$
والمطلوب:

١. أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة
٢. أثبت أن معادلة المستوي ABC تعطى بالعلاقة:

$$x+3y-3z-4=0$$

❖ ليكن المستويان P و Q معادلتهما:

$$P: x+2y-z-4=0$$
$$Q: 2x+3y-2z-5=0$$

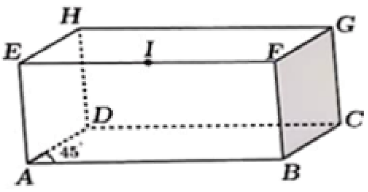
٣. أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases} ;t\in R$$

٤. ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و ABC
٥. احسب بعد A عن المستقيم d

التمرين الثاني عشر: دورة 2018 الثانية 40 درجة

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$ يساوي 45^0 والنقطة I منتصف $[EF]$ والمطلوب:



١. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
٢. عين موضع النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

التمرين الثالث عشر: دورة 2018 الثانية 100 درجة:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط: $A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$ والمطلوب:

١. جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$
٢. أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة
٣. أثبت أن (AB) يعامد المستوي CDE
٤. اكتب معادلة المستوي CDE
٥. احسب بعد B عن المستوي CDE
٦. اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي CDE

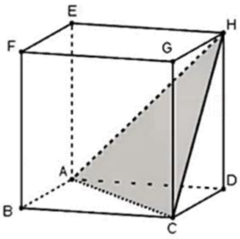
التمرين الرابع عشر: دورة 2019 الاولى 40 درجة:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$

١. اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$
٢. أثبت أن المستقيمان (AB) و d متعامدان

التمرين الخامس عشر: دورة 2019 الاولى 100 درجة

تتأمل في معلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$



١. اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A,C,H,F,D
٢. اكتب معادلة المستوي ACH
٣. أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P: -2x + 2y - 2z + 1 = 0$ يوازي المستوي ACH
٤. بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة
٥. اكتب معادلة كرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

التمرين الخامس عشر: دورة 20219 الثانية 40 درجة

تتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$ والمستوي P الذي معادلته:

$$P: 3x - y - 3z - 8 = 0$$

١. أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P
٢. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ثم عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P

التمرين السادس عشر: دورة 2019 الثانية 100 درجة

تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: x + y + z - 1 = 0$$
$$R: x - z - 1 = 0$$

١. أثبت أن المستويين P و Q متقاطعين بفصل مشترك Δ , اكتب تمثيلاً وسيطياً له
٢. تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A
٣. أثبت ان المستويات P و Q و R تتقاطع في نقطة I يطلب تعيين إحداثياتها
٤. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

التمرين السابع عشر: دورة2020 الأولى 40 درجة

تتأمل المستويات:

$$P_1: 2x - y + z + 1 = 0$$
$$P_2: x + y - z = 0$$

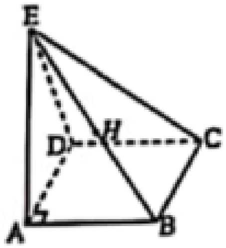
١. تيقن أن المستويان متعامدان
٢. اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك

التمرين الثامن عشر: دورة2020 الأولى 80 درجة

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لتكن النقاط $D(0,0,1)$ و $C(-1,1,2)$ و $B(4,3,-3)$ و $A(1,0,0)$ والمطلوب:

١. أثبت أن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً
٢. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً
٣. استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

التمرين التاسع عشر: دورة 2020 الأولى 100 درجة



$EABCD$ هرم رباعي رأسه E وقاعدته مربع طول ضلعه 3 ولدينا $[AE]$ عمودي على المستوي $ABCD$ و $EA = 3$ نختار المعلم المتجانس:

$\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. عين إحداثيات E و D و C و B و A
٢. جد معادلة المستوي EBC
٣. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي EBC
٤. استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC)
٥. احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$

التمرين العشرون: دورة 2020 الثانية 40 درجة

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستوي

$$P: 2x + y - 3z + 2 = 0$$

والنقطة $A(1,1,-2)$ والمطلوب:

١. أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P
٢. اكتب معادلة المستوي Q المار من A والموازي للمستوي P

التمرين الواحد والعشرون: دورة 2020 الثانية 80 درجة

المستقيمان d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \; ; t \in R \\ z = -t \end{cases}$$

$$d': \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s - 2 \quad ; s \in R \\ z = 3s - 2 \end{cases}$$

١. أثبت أن d و d' متقاطعان ثم عين إحداثيات نقطة التقاطع I
٢. جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمان d و d'

التمرين الثاني والعشرون: دورة 2020 الثانية 100 درجة

مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 2 , O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$ نختار المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O
٢. أعط معادلة للمستوي GOB
٣. احسب $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$
٤. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC)
٥. أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB)
٦. جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A, α) و (B, β) و (C, γ)

التمرين الثالث والعشرون: دورة 2021 الأولى 40 درجة

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط الآتية:

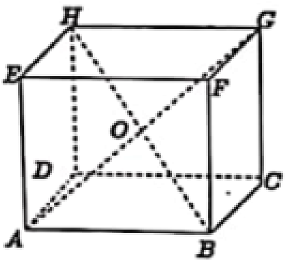
$A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,0,5)$ و $D(6,2,5)$

١. أثبت أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً
٢. عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

٣. واستنتج أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد

التمرين الرابع والعشرون: دورة 2021 الاولى 100 درجة



في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$A(-1,2,3)$ و $B(2,1,1)$ و $C(-3,4,-1)$ و $D(3,1,1)$ والمطلوب:

١. جد $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدين

٢. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي

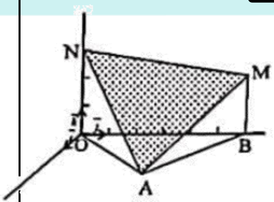
٣. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC)

٤. احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$

٥. بفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A;1)$ و $(B;-1)$ و $(C;2)$ أثبت أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان

التمرين الخامس والعشرون: دورة 2021 الثانية 70 درجة

في معلم متجانس لتكن لدينا النقاط



$M(0,6,2)$ و $N(0,0,3)$ و $B(0,6,0)$ و $A(1,3,0)$

والمطلوب:

١. اكتب معادلة المستوي AMN

٢. اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي AMN

٣. أثبت أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$

التمرين السادس والعشرون: دورة 2021 الثانية 40 درجة

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي P الذي معادلته:

$$P: 2x+y-2z-4=0$$

والمطلوب:

١. احسب بعد A عن المستوي P

٢. اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

التمرين السابع والعشرون: دورة 2022 الاولى 40 درجة

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$

والمطلوب:

احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ واستنتج $\cos(\widehat{BAC})$

إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة:

$$||2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}||=||\overrightarrow{AB}||$$

التمرين الثامن والعشرون: دورة 2022 الاولى 100 درجة

لدينا في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان P و Q :

$$P: x-y+2z-1=0$$
$$Q: 2x+y+z+1=0$$

١. أثبت أن المستويان P و Q متقاطعان بفصل مشترك d

٢. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d

٣. اكتب معادلة المستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويان P و Q

٤. جد إحداثيات النقطة B الناتجة من تقاطع المستقيم d والمستوي R

٥. احسب بعد النقطة A عن المستقيم d

٦. اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q

التمرين التاسع والعشرون: دورة 2022 الثانية 40 درجة

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-1,1)$ والمطلوب:
أعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة: $MA = MB$
وما طبيعة المجموعة S ؟

التمرين الثلاثون: دورة 2022 الثانية 100 درجة

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(2,-2,2)$ و $B(1,1,0)$ و $C(1,0,1)$ و $D(0,0,1)$ والمطلوب:

١. تحقق أن النقاط B و C و D لا تقع على استقامة واحدة
٢. أثبت أنّ: $y + z - 1 = 0$ هي معادلة المستوي (BCD)
٣. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من النقطة A ويعامد المستوي (BCD)
٤. عين إحداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)
٥. اكتب معادلة الكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها

الاختبارات:

الاختبار الأول صفحة 207 :

السؤال الثالث:

$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G ، I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$ أثبت أن النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة

السؤال الرابع:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,-1,0)$ والمستوي P الذي معادلته $2x + y - 2z + 9 = 0$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

الاختبار الثاني صفحة 208 و 209

السؤال الرابع:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

١. بين أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة
٢. بين أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد
٣. استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

الاختبار الثالث صفحة 210 و 211 :

السؤال الرابع:

تتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

1. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته
2. أثبت أن الشعاع $\vec{u}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC)
3. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$

الاختبار الرابع صفحة 212 و 213 و 214

السؤال الثالث:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط: $A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2,-1)$ و $D(0,4,-1)$ بين مع التعليل صحة أو خطأً كل من المقولات الآتية:

1. المثلث ABC قائم
2. المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)
3. حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V=81$

التمرين الثاني:

المستقيمان L و L' معرفان وسيطياً وفق:

$$L:\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

$$L':\begin{cases} x=4-5s \\ y=3-2s \\ z=-1+2s \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

1. أثبت أن L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إيجاد إحداثياتها
2. أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمان L و L'

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

$ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

التمرين الثاني:

ادرس وضع المستقيمان d و d' المعرفين كما يأتي:

$$d:\begin{cases} x=2t-5 \\ y=t-2 \\ z=-\frac{1}{2}t+3 \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

$$d':\begin{cases} x=s+5 \\ y=2 \\ z=2s+5 \end{cases} ;s\in\mathbb{R}$$

التمرين الثالث:

صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقات:

$x^2+z^2=16$ و $2\le y\le 5$

التمرين الرابع:

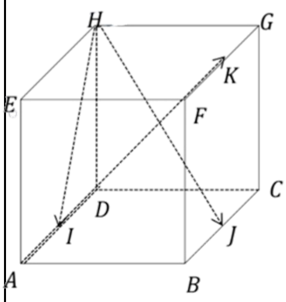
$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G فيه K مركز ثقل المثلث الوجه BCD أثبت أن النقاط G و A و K تقع على استقامة واحدة وعين موضع النقطة G على القطعة المستقيمة $[AK]$

التمرين الخامس:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$ والمستوي p الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$

1. أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي p في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها .
2. أكتب معادلة المستوي Q العمودي على p ويمر بالنقطتين A و B .

التمرين السادس:



$ABCDEFGH$ مكعب و I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$ باختيار معلم متجانس $\left(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ والمطلوب:

١. احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$

٢. أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة: $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{HI}+b\overrightarrow{HJ}$ ثم استنتج أن الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً

التمرين السابع:

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4 فيه I منتصف $[CD]$

١. وضع النقطة M المحققة للعلاقة:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}$$

٢. احسب العدد $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

التمرين الثامن:

لتكن النقاط $A(1,-1,2)$ و $B(2,1,0)$ و $C(2,3,-1)$ و $D(0,0,2)$ والمطلوب:

١. عين إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,1)$

٢. حدد S مجموعة النقاط M في الفراغ التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=6$

٣. جد معادلة للمجموعة S

التمرين التاسع:

نتأمل النقاط $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ والمطلوب:

١. احسب إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$

٢. احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

٣. عين إحداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع

التمرين العاشر:

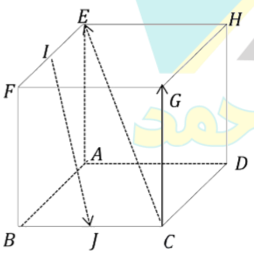
في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط: $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

١. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

٢. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC)

٣. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $(D-ABC)$

التمرين الحادي عشر:

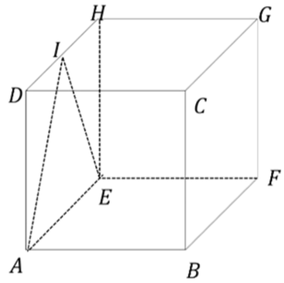


في الشكل المجاور مكعب و I و J منتصفات $[EF]$ و $[BC]$ والمطلوب:

١. أثبت أن $2\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}\right)=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$

٢. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً

التمرين الثاني عشر: نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1 مزوداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ حيث I منتصف $[DH]$



١. أعط إحداثيات النقاط I و E و A
٢. جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI
٣. أين تقع النقطة M التي تحقق:

$$3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EO}$$

٤. احسب $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}$

التمرين الثالث عشر:

$ABCDEFGH$ مكعب حيث K من CD تحقق: $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة $J \in BC$ بحيث: $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب:

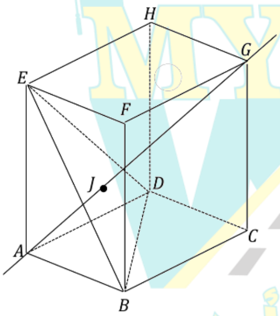
١. جد إحداثيات النقط H, E, J, K, G في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$.
٢. أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً .
٣. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيا
٤. أثبت أن المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ)

التمرين الرابع عشر:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطتين $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوي P الذي معادلته: $P: x - y + 3z - 4 = 0$
والمطلوب:

١. جد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P ويمر بالنقطتين A و B
٢. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة A ويعامد المستوي P
٣. عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P
٤. أعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط
٥. $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ مبيناً طبيعة المجموعة ε

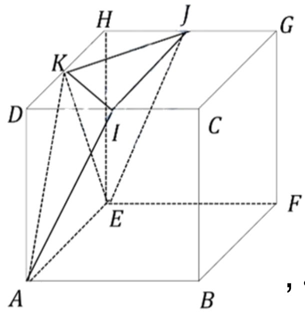
التمرين الخامس عشر:



$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3

١. عين إحداثيات النقاط E و G و B و D في المعلم $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$
٢. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG)
٣. أثبت أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (EDB)
٤. المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين إحداثياتها
٥. أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله

التمرين السادس عشر:



تتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب , تتخذ $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$ معلماً متجانساً في الفراغ والمطلوب:

1. أوجد إحداثيات النقاط A و I و E
2. اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$
3. احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$
4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K
5. احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$
6. أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (I,β) و (E,γ) حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

التمرين السابع عشر:

نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً وليكن المستوي Q الذي معادلته: $Q: x-y+2z+4=0$ وأخيراً لتكن S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB .

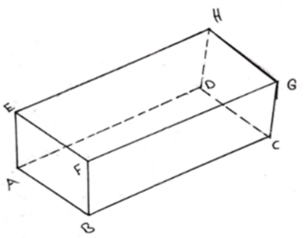
1. أثبت أن $2x+y-z+8=0$ هي معادلة المستوي P
2. جد معادلة الكرة S
3. أثبت أن المستوي Q مستوي مماس للكرة S
4. أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً:

$$d:\begin{cases} x=t \\ 12-5t \; ; t\in\mathbb{R} \\ 4-3t \end{cases}$$

5. أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P و Q
6. أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

التمرين الثامن عشر:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $AD=4$ و $AE=1$ و I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق العلاقة: $\overrightarrow{FJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$ نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

1. جد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات I و J
2. أثبت أن معادلة المستوي (EIB) هي $x+y+2z-2=0$

٣. بين نوع المثلث EIB ثم احسب مساحته

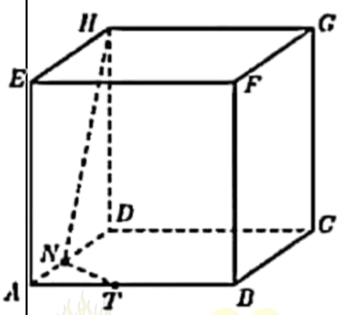
٤. احسب بعد G عن المستوي (EIB) واستنتج حجم رباعي الوجوه $GEIB$

٥. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J والعمودي على المستوي (EIB)

٦. استنتج إحداثيات النقطة J' المسقط القائم لـ J على المستوي EIB

٧. أثبت أن J' تقع على القطعة المستقيمة

التمرين التاسع عشر:



ليكن $ABCDEFGH$ مكعباً طول حرفه يساوي 4 ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة J تحقق العلاقة $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$ نتأمل المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب

١. جد احداثيات رؤوس المكعب والنقطتين I و J

٢. اثبت ان معادلة المستوي (EIJ) هي:

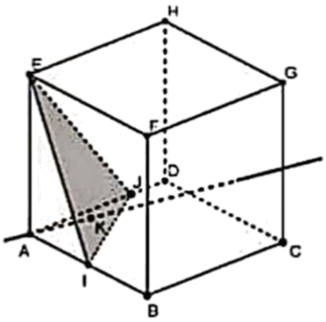
$$6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

٣. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A والعمودي على المستوي (EIJ) ثم جد احداثيات النقطة K نقطة تقاطع d مع (EIJ)

٤. احسب مساحة المثلث AEJ ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $I - AEJ$

٥. احسب بعد النقطة A عن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة المثلث EIJ

التمرين العشرون



ليكن لدينا المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 1 و T نقطة من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

و N نقطة من $[AD]$ وتحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

١. في المعلم المتجانس $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ جد احداثيات النقاط T و N و H و F

٢. جد الشعاعين $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة المستوي (HNT)

٣. جد تمثيل وسيطياً للمستقيم (EF)

٤. استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

٥. اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT) وما طبيعته

الأشعة في الفراغ

شيفرة الـ 600

- أوراق تم ترتيب الكتاب فيها بهيئة أسئلة بالصيغ المحتملة لورودها "وفقاً للتوصيف الوزاري" وخطوات الإجابة عنها
- مخططات وجداول لخصت الأفكار بطريقة احترافية مساعدة
- مسائل امتحانية جزئية ومسائل امتحانية شاملة

2023

إعداد: أ.خالد عامر