طريقي إلى العقدية

منصة طريقي التعليمية

#المستقبل_بيدا_بطريقي

المحتوى

يحتوي هذا الملف على ترتيب كامل لأفكار بحث الأعداد العقدية و تطبيقاتها مع حل أغلب مسائل الكتاب و أسئلة الدورات السابقة بالإضافة إلى تمارين خارجية محلولة و غير محلولة لتكون عوناً للطالب في إنجاز هذا البحث باتقان و كفاءة . و نعتذر سلفاً في حال ورود أي خطأ طباعي فجلّ من لا يخطئ و نرجو مراجعتنا في حال وروده

تعريف الوحدة التخيلية:

سنصطلح انه يوجد عدد تخيلي i يحقق ان $\boxed{i^2 = -1}$ ولذلك تطبيقات عددية وهندسية وواقعية ستتعرف عليها ولاسيما في الهندسة وبالتالي اذا كان b عدداً حقيقياً ما فإن أي عدد من الشكل bi هو تخيلي بحت مثلاً $3i\,, -2i\,, \frac{i}{2}$

مجموعة الاعداد العقدية C: هي مجموعة جديدة تعد توسيعاً لمجموعة الاعداد الحقيقية R

حيث نضيف لها الاعداد التخيلية فيكون كل عدد عقدي هو من الشكل $z = a + bi$

وبالتالي يكون العدد العقدي z مكون من قسمين:

قسم حقيقي هو a نرمز له بالرمز $Re(z)$

وقسم تخيلي هو b نرمز له بالرمز $Im(z)$

إذن:

الشكل الجبري للعدد العقدي

هو $z = a + ib$ ويكون

$$Re(z) = a \quad , \quad Im(z) = b$$

أمثلة

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$3+2i$	3	2
$4-2i$	4	-2
$1+\frac{i}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
4	4	0
$-i$	0	-1

تسمية:

❖ اذا كان $Im(z) = 0$ فإننا نسمي z عدد حقيقي.

❖ اذا كان $Re(z) = 0$ نسمي z عدد تخيلي بحت.

مرافق عدد عقدي:

اذا كان $z = a + ib$ فإننا نرمز لمرافقه بالرمز $\bar{z}$ ويكون $\boxed{\bar{z} = a - ib}$

أي نغير إشارة القسم التخيلي فقط.

أمثلة:

z	$\bar{z}$
$3+2i$	
$1-i$	
$1+\sqrt{2}i+3i$	
$i-3$	

	$2i+3$
	$3i$
	2

ملاحظة هامة

لإثبات أن العدد Z حقيقي	نثبت أنّ: $\bar{Z}=Z$
لإثبات أن العدد Z تخيلي بحت	نثبت أنّ: $\bar{Z}=-Z$

العمليات على الاعداد العقدية بالشكل الجبري:

1)الجمع والطرح: يتم جمع (طرح) القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي.

أمثلة :

في كلٍ من الحالات الآتية اكتب قيمة

z_1+z_2 و z_1-z_2

1	$z_1=3+4i$	$z_2=1-i$
2	$z_1=4+3\text{i}$	$z_2=2i$
3	$z_1=2-i$	$z_3=4+3i$
4	$z_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	$z_2=\frac{4}{3}+i$
5	$z_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$	$z_2=1+\sqrt{3}i$

الحل :

1	
$z_1-z_2=$	$z_1+z_2=$

2	
$z_1-z_2=$	$z_1+z_2=$

3	
$z_1-z_2=$	$z_1+z_2=$

4	
$z_1-z_2=$	$z_1+z_2=$

5	
$z_1-z_2=$	$z_1+z_2=$

2)الضرب: يتم الضرب بشكل عادي مع مراعاة ان $i^2 = -1$

أمثلة :

في كلٍ مما يلي احسب جداء العددين z_1 و z_2

1	$z_1 = 3 + 4i$	$z_2 = 1 - i$
2	$z_1 = 4 + 3i$	$z_2 = 2i$
3	$z_1 = 2 - i$	$z_3 = 4 + 3i$
4	$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$	$z_2 = \frac{4}{3} + i$
5	$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$	$z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

الحل :

1	
2	
3	
4	
5	

3)القسمة لقسمة عددين عقديين نضرب البسط و المقام بمرافق المقام ثم نستفيد من المطابقة

$$z.\bar{z} = x^2 + y^2$$

أمثلة :

احسب $\frac{z_1}{z_2}$ في الحالات التالية:

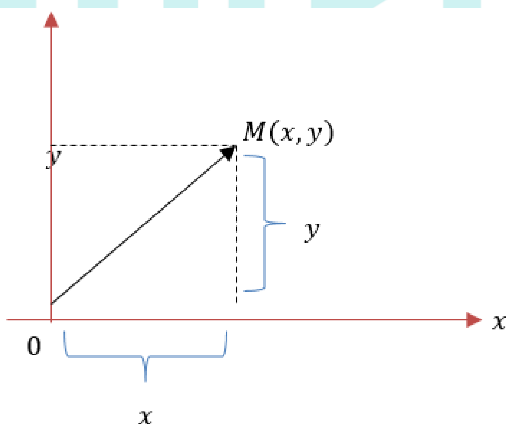
$z_2 = 1 - i$	$z_1 = 3 + 2i$

$z_2 = \sqrt{2} + i$	$z_1 = 1$

$z_1 = 6 + 8i$	$z_2 = 3 + 4i$

التفسير الهندسي للعدد العقدي:

ليكن $z = x + iy$ عدداً عقدياً ما ولنقرن بالعدد z النقطة $M(z)$ حيث $M(x, y)$، أي ان فواصل النقطة M هي القسم الحقيقي للعدد z و تراتيب النقطة M هي القسم التخيلي للعدد z



وليكن $\overrightarrow{oM}$ الشعاع الموضع الذي بدايته o نقطة المبدأ ونهايته النقطة $M(z)$ الذي يمثلها العدد العقدي $z = x + iy$

عندئذٍ وحسب نظرية فيثاغورث يكون:

$oM = \sqrt{x^2 + y^2}$ ومن هنا يأتي **تعريف طويلة عدد عقدي** كما يلي:

طويلة عدد عقدي: إن طويلة العدد العقدي $z = x + iy$ التي نرمز لها بالرمز $|z|$ أو r وتحسب كما يلي:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

أمثلة:

1) $|3 - 2i| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

2) $|3 + 5i| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

3) $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

ملاحظة: عندما نقول $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ فهنا نحن نربع أمثال i

دوووووووون i

خواص الطويلة:

I. $|z_1 \pm z_2| \neq |z_1| \pm |z_2|$

II. $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

III. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

خواص المرافق:

1- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

2- $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

3- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4- $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n$

5- $\bar{\bar{z}} = z$

6- $\bar{z} = z \Leftrightarrow Im(z) = 0$

7- $\bar{z} = -z \Leftrightarrow R_e(z) = 0$

8- $z.\bar{z} = |z|^2$

العدد ضرب مرافقه= مربع الطويلة

$$\boxed{z.\bar{z} = x^2 + y^2}$$

تدرب :

1- اكتب بالشكل الجبري مرافق العدد

$z = \frac{3+4i}{2+3i}$

2- اكتب بدلالة $\bar{z}$ كلاً من مرافق الأعداد العقدية التالية :

$Z_1 = \frac{3+iz-i}{5+i}$	$Z_2 = iz + i + 1$
$Z_3 = (z-1)(z+i)$	$Z_4 = \frac{3z^2 - 2iz + 4}{2z - 3i}$

معاً نحو الاتقان

السؤال الأول: اكتب بالشكل الجبري كلاً من الأعداد الآتية :

$z = \frac{1-i}{3+2i}$

$z = \frac{2-4i}{2i-1}$

لا يكفي أن تفهم المعلومة – عليك الإكثار من التطبيق

السؤال الثاني

اكتب في كلٍ من الحالات الآتية العدد Z بدلالة $\bar{z}$

$$Z = 2iz - \frac{3}{z+i}$$

$$Z = \frac{z-1+i}{z-(1+i)}$$

بسط العبارتين:

1) $z_1 = \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$

نوحد المقامات:

$$z_1 = \frac{\left(\sqrt{2}+i\right)^2 + \left(\sqrt{2}-i\right)^2}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2}i + i^2 + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2}i + i^2}{\sqrt{2}^2 + 1^2}$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2}i - 1 + 2 - 2\sqrt{2}i - 1}{2+1} = \frac{2}{3}$$

2) $z_2 = (1+i)^2$

$$= 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

1- اعط الشكل الجبري للأعداد العقدية التالية:

1) $z_1 = (2+i)(3-2i)$

$$= 6 - 4i + 3i - 2i^2$$

$$= 6 - 4i + 3i + 2 = 8 - i$$

2) $z_2 = (1+2i)(1-2i)$

$$= 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

3) $z_3 = (3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})$

$$= 3^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$= 9 + 5 = 14$$

4) $z_4 = (4-3i)^2$

$$= 16 - 2(4)(3i) + (3i)^2$$
$$= 16 - 24i - 9 = -24i$$

5) $z_5 = \frac{4-6i}{3+2i}$

$$= \frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$= \frac{12 - 8i - 18i + 12i^2}{3^2 + 2^2}$$

$$= \frac{-26i}{9+4} = -2i$$

6) $z_6 = \frac{1}{2-i}$

$$= \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{4+1}$$

$$= \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

7) $z_7 = \frac{4-6i}{3+2i}$

$$= \frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$= \frac{12-8i+18i+12}{9+4}$$

$$= \frac{24+10i}{13} = \frac{24}{13} + \frac{10}{13}i$$

8) $z_8 = \frac{3-6i}{3+i} + \frac{4}{3-i}$

$$= \frac{(3-6i)(3-i)+4(3+i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{9-3i-18i+6i^2+12+4i}{9+1}$$

$$= \frac{9-3i-18i-6+12+4i}{10}$$

$$= \frac{15-17i}{10} = \frac{15}{10} - \frac{17}{10}i$$

9) $z_9 = \left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)$

$$= \left(\frac{2(2-3i)}{(2-3i)}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right) = 2\frac{1+3i}{3+2i}$$

$$= 2\frac{(1+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$= 2\frac{3-2i+9i-6i^2}{9+4}$$

$$= 2\frac{9+7i}{13} = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$$

القسم الحقيقي والقسم التخيلي:

النوع الأول من المسائل: أثبت ان العدد Z حقيقي, أو اثبت ان العدد Z تخيلي بحت.

- لإثبات ان Z حقيقي نحسب $\bar{Z}$ ونثبت ان $\bar{Z} = Z$
- لإثبات أن Z تخيلي بحت نحسب $\bar{Z}$ ونثبت ان $\bar{Z} = -Z$

خواص مساعدة: إذا كان W عدداً عقدياً طويلته واحد فإننا نعلم أنّ:

$$W.\bar{W} = |W|^2$$

$$W.\bar{W} = 1^2$$

$$\Rightarrow \bar{W} = \frac{1}{W}$$

حصرا عندما $|w| = 1$ تكون

مثال (1):

أولاً: ليكن Z عدداً عقدياً ما, وليكن u طويلته 1 وهو مختلف عن الواحد $(u \neq 1)$ أثبت أن العدد $Z = \frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ حقيقي.

الحل:

$$\bar{Z} = \left(\overline{\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}}\right) = \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}}$$

لكن $|u| = 1$ ونعلم أن:

$$u.\bar{u} = |u|^2$$

$$u.\bar{u} = 1 \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{u}$$

نعوض:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{z} - \frac{1}{u}z}{1 - \frac{1}{u}} = \frac{\frac{\bar{z}u - z}{u}}{\frac{u - 1}{u}} = \frac{\bar{z}u - z}{u - 1}$$

نخرج من البسط و المقام (-1) عامل مشترك

$$\bar{Z} = \frac{-(z - u\bar{z})}{-(1 - u)} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = Z$$

$$\Rightarrow \bar{Z} = Z$$

$\Leftarrow Z$ حقيقي.

<u>ثانياً</u>: نفترض أن $u \neq 1$ وأن $Z = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ عددٌ حقيقي, أثبت أنه إما ان يكون Z حقيقي أو ان $|u| = 1$

الحل:

لدينا Z حقيقي وبالتالي:

$$\bar{Z} = Z$$

$$\left(\overline{\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}}\right) = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$$

$$\frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$$

$$(\bar{z} - \bar{u}z)(1 - u) = (z - u\bar{z})(1 - \bar{u})$$

$$\bar{z} - u\bar{z} - \bar{u}z + u.\bar{u}z = z - \bar{u}z - u\bar{z} + u.\bar{u}\bar{z}$$

$$\bar{z} - u.\bar{u}\bar{z} = z - u.\bar{u}z$$

لكن: $u.\bar{u} = |u|^2$

$$\bar{z} - |u|^2\bar{z} = z - |u|^2 z$$

$$\bar{z}(1 - |u|^2) = z(1 - |u|^2)$$

نخرج المقدار $1 - |u|^2$

$$\bar{z}(1 - |u|^2) - z(1 - |u|^2) = 0$$

$$(\bar{z} - z)(1 - |u|^2) = 0$$

إما $1 - |u|^2 = 0$

$$\Rightarrow |u|^2 = 1$$

$$|u| = 1$$

أو: $\bar{Z} - Z = 0$

$\bar{Z} = Z \Rightarrow Z$ حقيقي

مثال (2) :

نتأمل عددين عقديين w, z يحققان $|w| = |z| = 1$, $zw \neq -1$ أثبت ان العدد العقدي $Z = \frac{z + w}{1 + zw}$ عدداً حقيقي.

الحل:

$$\bar{Z} = \left(\overline{\frac{z + w}{1 + zw}}\right) = \frac{\bar{z} + \bar{w}}{1 + \bar{z}\bar{w}}$$

لكن بما ان $|z| = 1$, $|w| = 1$ فإن :

$$z.\bar{z} = |z|^2$$

$$w.\bar{w} = |w|^2$$

$$w.\bar{w} = 1 \qquad z.\bar{z} = 1$$

$$\Rightarrow \bar{w} = \frac{1}{w} \qquad \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

نعوض:

$$\bar{Z} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{zw}} = \frac{\frac{w+z}{zw}}{\frac{zw+1}{zw}}$$

$$= \frac{z+w}{1+zw} = Z$$

$\Leftarrow$ Z حقيقي ☺

مثال (3) :

ليكن t عدداً عقدياً يحقق أن $|t| = 1$ ومختلف عند الواحد وليكن العدد $Z = \frac{Z-t\bar{Z}}{2i-2it}$

الحل:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{z}-\bar{t}z}{-2i+2i\bar{t}}$$

لكن: $|t| = 1$ عندها: $t.\bar{t} = |t|$

$$t.\bar{t} = 1 \Rightarrow \bar{t} = \frac{1}{t}$$

نعوض: $\bar{Z} = \frac{\bar{z}-\frac{1}{t}z}{-2i+\frac{2i}{t}}$

$$= \frac{\frac{t\bar{z}-z}{t}}{\frac{-2it+2i}{t}}$$

$$= \frac{t\bar{z}-z}{-2it+2i} = \frac{t\bar{z}-z}{2i-2it}$$

نخرج ناقص من البسط عامل مشترك :

$$\bar{Z} = -\frac{z-t\bar{z}}{\underbrace{2i-2it}_{Z}} = -Z$$

$\Leftarrow$ تخيلي بحت.

النوع الثاني من المسائل:

تمرين:

في حالة عدد عقدي $z \neq -1$ نتأمل العدد العقدي $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ وبفرض أن $z = x+iy$ و $Z = X+iY$ و المطلوب :

1- اكتب X, Y بدلالة x, y

2- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل العدد Z حقيقي هي مستقيم محذوف منه نقطة

3- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل العدد Z تخيلي بحت هي دائرة محذوف منها نقطة

الحل :

أولاً بما أنه في نص المسألة أشار إلى أن $z = x+iy$ و $Z = X+iY$ فيمكن أن نبدل في الكسر المعطى فنضع :

$$Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$$

$$X + iY = \frac{2 + x - iy}{1 + x - iy}$$

لكن الطرف الأيسر كسر فيجب أن نضرب بالمرافق و إذا لاحظنا أن المقام $1 + x - iy$ فيكون مرافقه $1 + x + iy$ إذن لنضرب البسط و المقام بـ $1 + x + iy$:

$$X + iY = \frac{(2 + x - iy)(1 + x + iy)}{(1 + x - iy)(1 + x + iy)}$$

في المقام لدينا العدد ضرب مرافقه فيمكن أن نضع جوابه مباشرة $\boxed{\text{تخيلي}^2 + \text{حقيقي}^2}$.

و الحقيقي هو $1+x$ و التخيلي y

$$X + iY = \frac{(2 + x - iy)(1 + x + iy)}{(1 + x)^2 + y^2}$$

و ننشر البسط :

$$X + iY = \frac{2 + 2x + 2iy + x + x^2 + iyx - iy - ixy - \underbrace{i^2}_{-1} y^2}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$X + iY = \frac{x^2 + 3x + y^2 + iy}{(1 + x)^2 + y^2}$$

نفرق الكسر لجزأيه الحقيقي و التخيلي

$$X + iY = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1 + x)^2} + i\frac{y}{(1 + x)^2 + y^2}$$

بالمقارنة بين الطرفين نجد أنّ:

$$X = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$Y = \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2}$$

الطلب الثاني : حتى يكون العدد $Z = X +$ iY حقيقي يجب أن يكون قسمه التخيلي معدوم أي :

$$Y = 0$$

$$\frac{y}{(1 + x)^2 + y^2} = 0$$

ينعدم الكسر إذا انعدم البسط :إذن $y = 0$ و هي تمثل معادلة مستقيم أفقي

و لكن بما أن Y تابع كسري فيجب أن نحذف النقاط التي تعدم المقام

و ينعدم المقام إذا كان $(1 + x)^2 + y^2 = 0$ أي $x = -1$ و $y = 0$ فالنقطة التي يجب حذفها $A(-1,0)$

الخلاصة : مجموعة النقاط التي تجع العدد Z تخيلي هي المستقيم $y = 0$ محذوف منه النقطة $A(-1, 0)$

الطلب3 : حتى يكون العدد $Z = X + iY$ تخيلي بحت يجب أن يكون قسمه الحقيقي معدوم أي :

$$X = 0$$

$$\frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1 + x)^2 + y^2} = 0$$

$$x^2 + 3x + y^2 + 2 = 0$$

و نعلم من دراستنا للأشعة أنه لإصلاح معادلة تحوي x^2, y^2 نقوم بالاتمام لمربع كامل (الكتابة بالشكل القانوني) لذلك نضيف و نطرح مربع نصف أمثال x :

أمثال x هي 3 و نصفها $\frac{3}{2}$ فمربعها $\frac{9}{4}$ إذن نضيف و نطرح $\frac{9}{4}$:

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 + 2 =$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

وهي من الشكل :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

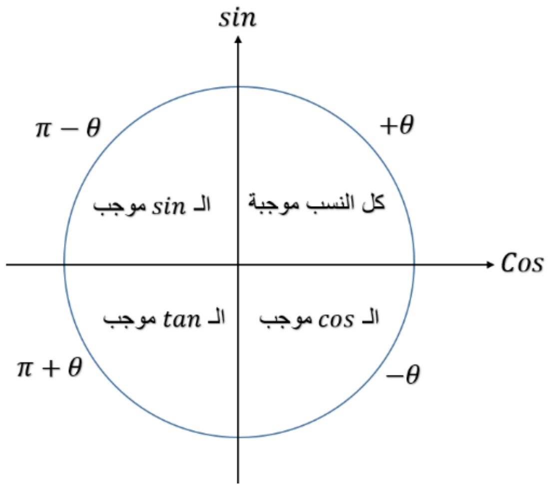
فهي تمثل دائرة مركزها $B(-\frac{3}{2}, 0)$ و نصف قطرها $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ و كذلك محذوف منها النقطة $A(-1, 0)$

مراجعات هامة

1- جدول الزوايا الشهيرة:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

2- الارباعفي الدائرة المثلثية:



لتحديد زاوية ما إذا علمنا نسبها المثلثية

1- نحدد الزاوية الموافقة للنسب (دون مراعاة الإشارات)

2- باعتماد الإشارات نحدد الزاوية في أي ربع موجودة.

3- نعرض الزاوية بأحد الاشكال التالية:
$-\theta\ ,\pi + \theta\ \ ,\pi - \theta\ \ ,\theta$

وذلك حسب الربع.

مثال: إذا كان

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} \quad , \quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نلاحظ أنّ الزاوية الشهيرة الموافقة للنسب دون إشارات هي: $\frac{\pi}{6}$ ولكن بما أنّ $\sin\theta$ سالب و $\cos\theta$ سالب إذن نحن في الربع الثالث

$$\Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

مثال: اذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

فإن النسب هذه للزاوية $\frac{\pi}{4}$ ولكن الإشارات

تدل على اننا في الربع الرابع أي : $\theta = -\frac{\pi}{4}$

الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد العقدي:

الشكل المثلثي للعدد $z = x + iy$ هو

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

و الشكل الأسي له

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

ولكتابة أي عدد عقدي بالشكل المثلثي أو الأسي نتبع الخطوات:

1- نتأكد ان z مكتوب بالشكل الجبري أي:

$$z = x + iy$$

2- نحسب الطويلة: $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

3- نضع:

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r}\end{aligned}\right\}$$

نستنتج الزاوية θ

4- إذا كان المطلوب الشكل المثلثي

فنعوض في القانون:

$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ و إذا كان

المطلوب الشكل الأسي نعوض في

القانون $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$

مثال 1:

اكتب العدد $z = \sqrt{3} + i$ بالشكل المثلثي

$x = \sqrt{3} \quad , \quad y = 1$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

فالشكل المثلثي

$$\Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

مثال 2 :

اكتب العدد $z = -1 - i$ بالشكل المثلثي

$x = -1 \qquad y = -1$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = -\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

مثال 3:

اكتب العدد $z = 2i - 2\sqrt{3}$ بالشكل المثلثي:

$$r = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (2)^2} = 4$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

تدرب : اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد الآتية

$Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$	$Z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$
$Z_3 = 4 - 4i$	$Z_4 = -2i$
$Z_5 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$	$Z_6 = \frac{4}{1-i}$

تحويلات سريعة إلى الشكل المثلثي :

الحالة الأولى : العدد الحقيقي

$z = a$ هنا نميز حالتين			
$a < 0$		$a > 0$	
$r = \|a\|$	$\theta = \pi$	$r = a$	$\theta = 0$
$z = \|a\|[cos\pi + isin\pi\ ]$		$z = a[\cos(0) + isin(0)]$	

أمثلة :

الشكل الجبري	الشكل المثلثي
$z = 3$	$z = 3[\cos(0) + isin(0)]$
$z = 2$	$z = 2[\cos(0) + isin(0)]$
$z = -3$	$z = 3[\cos(\pi) + isin(\pi)]$
$z = \frac{1}{2}$	$z = \frac{1}{2}[\cos(0) + isin(0)]$

الحالة الثانية : العدد تخيلي بحت:

$z = bi$ هنا نميز حالتين			
$b < 0$		$b > 0$	
$r = \|b\|$	$\theta = -\frac{\pi}{2}$	$r = b$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
$z = \|b\|[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)]$		$z = b\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$	

أمثلة :

الشكل الجبري	الشكل المثلثي
$z = 3i$	$z = 3[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)]$
$z = 2i$	$z = 2[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)]$
$z = -3i$	$z = 3[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)]$
$z = \frac{1}{2}$	$z = \frac{1}{2}[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)]$

العمليات على الشكل المثلثي :

1) الضرب :

$$Z_1.Z_2 = r_1.r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

نضرب الطويلات ونجمع الزوايا

مثال :

$$Z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$Z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

فيكون جادؤهما:

$$Z_1.Z_2 = 2\times 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$Z_1.Z_2 = 6\left[\cos\left(\frac{8\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{15}\right)\right]$$

2) <u>القسمة</u> :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

نقسم الطويلات ونطرح الزوايا

مثال:

$$Z_1 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$Z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{3}{6}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

3) <u>القوة</u> :

$$Z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$$
$$Z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

مثال :

$$Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$
$$Z^4 = \sqrt{2}^4\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^4$$
$$Z^4 = 4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{12}\right)\right)$$
$$Z^4 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

<u>دستور دوموافر:</u>

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

4) <u>المرافق</u> :

$$\overline{(\cos\theta + i\sin\theta)}$$
$$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

تدرب:

1) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد الآتية :

-1 $Z = (1-i)^2$

نضع

$$W = 1 - i$$

نكتبه بالشكل المثلثي

$$x = 1 \;\&\; y = -1$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow W = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نعوض:

$$Z = W^2$$
$$= \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^2$$
$$Z = \sqrt{2}^2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{4}\right)\right)$$
$$Z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

-2 $Z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$

نضع

$$W_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

نكتبه بالشكل المثلثي

$$x = 1 \ \& \ y = -\sqrt{3}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow W_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

نضع

$$W_2 = 1 + i$$

ونكتبه بالشكل المثلثي

$$W_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$z = \frac{W_1}{W_2}$$
$$= \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$
$$z = \sqrt{2}\left[\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$
$$z = \sqrt{2}\left[\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)\right]$$

-3 $Z = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{i}\right)^5$

نضع

$$W_1 = \sqrt{3} - i$$

نكتبه بالشكل المثلثي

$$x = \sqrt{3} \ \& \ y = -1$$
$$r = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$
$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow W_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

نضع

$$W_2 = i$$

ونكتبه بالشكل المثلثي

$$W_2 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$z = \left(\frac{W_1}{W_2}\right)^5$$
$$= \left[\frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}\right]^5$$
$$z = 2^5\left[\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right]^5$$
$$z = 32\left[\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{6}\right)\right)\right]^5$$
$$z = 32\left[\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right]^5$$
$$z = 32\left[\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)\right]$$

فائدة هامة : تفيد العمليات السابقة في إيجاد النسب المثلثية لزوايا غير شهيرة :

1- إذا كانت θ زاوية العدد العقدي الناتج عن جداء $z_1 z_2$ فإن :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a_{\text{الجداء}}}{r_{\text{الجداء}}}} \quad \text{و} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{b_{\text{الجداء}}}{r_{\text{الجداء}}}}$$

2- إذا كانت θ زاوية العدد العقدي الناتج عن القسمة z_1/z_2 فإن :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a_{\text{القسمة}}}{r_{\text{القسمة}}}} \quad \text{و} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{\text{b}_{\text{القسمة}}}{r_{\text{القسمة}}}}$$

مثال:

نعطى العددين :

$$Z_1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}\quad \&\quad Z_2=1-i$$

1- اكتب بالشكل المثلثي

$$Z_1\ ,\ Z_2\ ,\frac{Z_1}{Z_2}$$

الحل:

$$\boldsymbol{Z_1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{2}\quad \&\quad y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r=\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta&=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Z_1}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{Z_2=1-i}$$

$$x=1\quad \&\quad y=-1$$

$$r=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{\boldsymbol{Z_1}}{\boldsymbol{Z_2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

2- اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الجبري

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}i}{2}}{1-i}$$

نضرب بالمرافق

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}{2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i}{2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

3- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{a_{\text{المسقط}}}{r_{\text{المسقط}}}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{1}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{b_{\text{المسقط}}}{r_{\text{المسقط}}}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{1}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

أشكال مثلثية ناقصة:

الشكل الناقص	الشكل الصحيح
$z = r(cos\theta - isin\theta)$	$z = r(\cos(-\theta) + isin(-\theta))$
$z = -r(cos\theta + isin\theta)$	$z = r(\cos(\pi+\theta) + isin(\pi+\theta))$
$z = r(sin\theta + icos\theta)$	$z = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

تمارين :

في كلٍ من الحالات الآتية اكتب الشكل المثلثي للعدد العقدي z

1) $z = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

2) $z = -2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3) $z = sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + icos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4) $z = 3\left(sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + icos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2$

5) $z = \left[2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{12}$

الشكل الأسي :

$$z = re^{i\theta}$$

أمثلة :

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالشكل الأسي

1	$z = 1 - i$
2	$z = 3 + \sqrt{3}i$
3	$z = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$
4	$z = -5 - i$
5	$z = 1 + \sqrt{3}i$
6	$z = \sqrt{3} - i$

تحويلات سريعة للشكل الأسي :

الحالة الأولى : العدد الحقيقي

<table>
<tr><td colspan="4">$z = a$
هنا نميز حالتين</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a > 0$</td><td colspan="2">$a < 0$</td></tr>
<tr><td>$\theta = 0$</td><td>$r = a$</td><td>$\theta = \pi$</td><td>$r = |a|$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$z = ae^{i0}$</td><td colspan="2">$z = |a|e^{\pi}$</td></tr>
</table>

أمثلة :

الشكل المثلثي	الشكل الجبري
$z = 3e^{i0}$	$z = 3$
$z = 2e^{i0}$	$z = 2$
$z = 3e^{i\pi}$	$z = -3$
$z = \frac{1}{2}e^{i0}$	$z = \frac{1}{2}$

الحالة الثانية : العدد تخيلي بحت:

$z = bi$ هنا نميز حالتين			
$b > 0$		$b < 0$	
$\theta = \frac{\pi}{2}$	$r = b$	$\theta = -\frac{\pi}{2}$	$r = \lvert b\rvert$
$z = be^{\frac{i\pi}{2}}$		$z = \lvert b\rvert e^{-\frac{i\pi}{2}}$	

أمثلة :

الشكل المثلثي	الشكل الجبري
$z = 3e^{\frac{i\pi}{2}}$	$z = 3i$
$z = 2e^{\frac{i\pi}{2}}$	$z = 2i$
$z = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$z = -3i$
$z = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$	$z = \frac{1}{2}$

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

$$-1 = e^{i\pi}$$

العمليات على الشكل الأسي للعدد العقدي :

$$Z = r.e^{i\theta}$$

بشكل مماثل للشكل المثلثي

1) ضرب عددين عقديين بالشكل الأسي :
نضرب الطويلات ونجمع الزوايا
2) قسمة عددين عقديين بالشكل الأسي :
نقسم الطويلات ونطرح الزوايا
3) دستور دوموافر:

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n}$$

تدرب :

1) نضع

$Z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $Z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $Z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

جد الشكل الأسي للأعداد الآتية :

-1 $Z_1.Z_2$

$$Z_1.Z_2 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$Z_1.Z_2 = 3e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 3e^{i\frac{\pi}{12}}$$

-2 $\frac{Z_1}{Z_2}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

-3 $\boldsymbol{Z_1.Z_2.Z_3}$

$$Z_1.Z_2.Z_3 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$Z_1.Z_2.Z_3 = 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$Z_1.Z_2.Z_3 = 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

2) اكتب بالشكل الأسي الأعداد التالية

-1 $Z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$

$$x = 2\sqrt{3} \quad \& \quad y = 6$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48}$$

$$= \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow Z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

-2 $Z_2 = (1+i)\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

لدينا $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$Z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$Z_2 = \sqrt{6}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$Z_2 = \sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

-3 $Z_3 = \frac{6}{(1+i)}$

$$Z_3 = \frac{6(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{6(1-i)}{2}$$

$$Z_3 = 3 - 3i$$

$$x = 3 \quad \& \quad y = -3$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow Z_3 = 3\sqrt{2}e^{\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}$$

-4 $Z_4 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$

$$W = 1 + i\sqrt{3}$$

$$x = 1 \quad \& \quad y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow W = 2e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow Z_4 = \left(2e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)}\right)^4 = 16\, e^{\left(i\frac{4\pi}{3}\right)}$$

-5 $Z_5 = (1 - \sqrt{2})e^{\left(i\frac{\pi}{4}\right)}$

$$Z_5 = -(\sqrt{2}-1)e^{\left(i\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$Z_5 = e^{i\pi}(\sqrt{2}-1)e^{\left(i\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_5 = (\sqrt{2}-1)e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$$

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

6- $Z_6 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$

7- $Z_7 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$

$W_1 = 1 + i = \sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$

$W_2 = \sqrt{3} + i = 2.e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$Z_7 = \left(\frac{\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}}{2.e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^5$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}\right]^5$$

$$Z_7 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 e^{i5\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$Z_7 = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$

8- $Z_8 = \frac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4}$

$W_1 = 2\sqrt{3} + 2i$

$x = 2\sqrt{3} \quad \& \quad y = 2$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow W_1 = 4e^{\left(i\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$W_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_8 = \frac{\left(4e^{\left(i\frac{\pi}{6}\right)}\right)^5}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4}$$

$$Z_8 = \frac{4^5.e^{\left(i\frac{5\pi}{6}\right)}}{4e^{-i\pi}}$$

$$Z_8 = 4^4.e^{\left(i\frac{5\pi}{6}-\pi\right)}$$

$$Z_8 = 64.e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

9- $Z_9 = \underbrace{-12}_{\text{أنا لست } r} \; e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$Z_9 = e^{i\pi}.12.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 12e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$Z_9 = 12\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

10- $Z_{10} = \underbrace{3i}_{\text{أنا لست } r} \; e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$Z_{10} = 3e^{\frac{i\pi}{2}}\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

3) نضع $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي من الخواص التالية صحيحة

1- $|Z| = 1$

2- $Z = -(1 - i)e^{i\frac{\pi}{3}}$

3- $\arg Z = -\frac{\pi}{12}$

4- $Z = e^{i\frac{13\pi}{12}}$

الحل :

نضرب بالمرافق

$$Z = \frac{-\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

⇐ الخاصة ال 2 خاطئة

نكتبه بالشكل الأسي

$$Z = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$Z = e^{i\pi}.\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$Z = \frac{2}{2}e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$Z = e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$$

$|Z| = 1$ ⇐ الخاصة 1 صحيحة

$\arg Z = -\frac{\pi}{12}$ ⇐ الخاصة ال 4 صحيحة

الخاصة 3 خاطئة

دستورا أويلر :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

نتائج هامة :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

تمرين:

بسط كتابة العدد العقدي

$$Z = \frac{1+\cos x - i\sin x}{1+\cos x + i\sin x}$$

موضحاً قيم x التي يكون عندها Z موجوداً

الحل :

$$\cos x - i\sin x = e^{-ix}$$

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}} = \frac{1+\frac{1}{e^{ix}}}{1+e^{ix}} = \frac{\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}}}{1+e^{ix}} = e^{-ix}$$

ويكون Z موجوداً بشرط المقام لا يساوي الصفر

$$1+e^{ix} = 0$$

$$\Rightarrow e^{ix} = -1 \Rightarrow e^{ix} = e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow x = \pi + 2\pi k \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

إذاً Z موجود بشرط $x \neq \pi + 2\pi k$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

تمرين

اكتب بالشكل الجبري

$$Z = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{i2x}$$

$$Z = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

المعادلات في $\mathbb{C}$

النوع الأول : معادلات في z فقط:

نعزل Z

النوع الثاني :معادلات في $\overline{Z}$ فقط :

1- نأخذ مرافق للطرفين

2- نعزل Z

مثال:

حل المعادلة $i\overline{Z} + 1 = 2i$

الحل :

نأخذ مرافق للطرفين

$$-iZ + 1 = -2i$$

$$iZ = 1 + 2i$$

$$Z = \frac{1+2i}{i} = \frac{(1+2i)(-i)}{i(-i)}$$

$$Z = \frac{-i-2}{1} = -2 - i$$

النوع الثالث :معادلات في Z و $\overline{Z}$:

1- نفرض $Z = x + yi \Leftarrow \overline{Z} = x - yi$

2- نعوض ونكتب الطرفين بالشكل الجبري

3- حقيقي = حقيقي

تخيلي = تخيلي

مثال:

حل المعادلات التالية :

1) $Z - 2\overline{Z} = 2$

نضع $Z = x + yi \Leftarrow \overline{Z} = x - yi$

نعوض

$$x + yi - 2(x - yi) = 2$$
$$-x + 3yi = 2$$

حقيقي = حقيقي :

$$-x = 2 \Rightarrow x = -2$$

تخيلي = تخيلي :

$$3y = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$Z = x + yi \Rightarrow Z = -2$$

2) $2iZ + \overline{Z} = 3 + 3i$

نضع $Z = x + yi \Leftarrow \overline{Z} = x - yi$

نعوض

$$2i(x + yi) + (x - yi) = 3 + 3i$$
$$2xi - 2y + x - iy = 3 + 3i$$
$$(x - 2y) + i(2x - y) = 3 + 3i$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 & (1) \\ 2x - y = 3 & (2) \end{cases}$$

نضرب (1) ب (2) :

$$2x - 4y = 6 \dots (1)$$
$$2x - y = 3 \dots (2)$$

نطرح :

$$-3y = 3 \Rightarrow y = -1$$

نعوض في ①

$$x + 2 = 3$$
$$x = 1$$
$$\Rightarrow Z = 1 - i$$

النوع الرابع :المعادلات من الشكل:

$$Z^2 = -k^2$$

عندئذٍ نضع $-1 = i^2$

$$\Rightarrow Z^2 = i^2k^2$$

$$\Rightarrow Z = ki \;\; or \;\; Z = -ki$$

مثال :

حل المعادلة $Z^2 = -9$

$$Z^2 = 9i^2 \Rightarrow \begin{cases} Z = 3i \\ Z = -3i \end{cases}$$

مثال :

حل المعادلة $Z^2 = -2$

$$Z^2 = 2i^2 \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{2}i \\ Z = -\sqrt{2}i \end{cases}$$

النوع الخامس :المعادلات من الشكل

$$Z^2 = a + ib:$$

1- نفرض $Z = x + iy$

2- نضع المعادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & \dots ① \\ x^2 - y^2 = a & \dots ② \\ 2xy = b & \dots ③ \end{cases}$$

3- نجمع ① و ② فنحسب x_1 و x_2

4- نطرح ① و ② فنحسب y_1 و y_2

5- من المعادلة ③ نميز حالتين :

أ- $2xy = b > 0$ فنأخذ x وy من نفس الإشارة و نضعها بالشكل الجبري

ب- $2xy = b < 0$ فنأخذ x وy من إشارتين متعاكستين و نضعها بالشكل الجبري

تمارين:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1)

$$Z^2 = 3 + 4i$$

نفرض

$$Z = x + iy$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{9 + 16} = 5 & \dots ① \\ x^2 - y^2 = 3 & \dots ② \\ 2xy = 4 & \dots ③ \end{cases}$$

نجمع ① و ②

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

نطرح ① و ②

$$2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

من المعادلة ③ نجد أن

$$2xy = 4 > 0$$

فإذاً x وy من نفس الإشارة

$$Z_1 = 2 + i$$

$$Z_2 = -2 - i$$

(2

$$Z^2 + 7 + 24i = 0$$

$$Z^2 = -7 - 24i$$

نضع $Z = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{49 + 576} = 25 \; \dots ① \\ x^2 - y^2 = -7 \; \dots ② \\ 2xy = -24 \; \dots ③ \end{cases}$$

نجمع ① و ②

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

نطرح ① و ②

$$2y^2 = 32 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

من المعادلة ③ نجد أن

$$2xy = -24 < 0$$

فإذاً x وy متعاكسين بالإشارة

$$Z_1 = 3 - 4i$$

$$Z_2 = -3 + 4i$$

ملاحظة :

قد يأتي السؤال بصيغة " أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $w = a + ib$ " :

1) نصطنع المعادلة $Z^2 = a + ib$

2) نحلها مثل الطريقة السابقة

مثال :

أوجد الجذران التربيعيان للعدد i

الحل :

نشكل المعادلة $Z^2 = i$ ونفرض $Z = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \; \dots ① \\ x^2 - y^2 = 0 \; \dots ② \\ 2xy = 1 \; \dots ③ \end{cases}$$

نجمع ① و ②

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

نطرح ① و ②

$$2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

من المعادلة ③ نجد أن

$$2xy = 1 > 0$$

فإذاً x وy لهما نفس الإشارة

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

النوع السادس :المعادلاتفي Z و Z^2

1) نخرج Z عامل مشترك
2) إما / أو

مثال :

أوجد جذر المعادلة

$$2iZ + Z^2 = 0$$

الحل:

$$Z(2i + Z) = 0$$

إما $Z = 0$

أو $2i + Z = 0$

$$Z = -2i$$

النوع السابع :المعادلات من الشكل $aZ^2 + bZ + c = 0$

1) نحسب المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

2) نميز الحالات :

أ- حالة $\Delta > 0$:

للمعادلة حلان حقيقيان

$$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب-حالة $\Delta = 0$:

للمعادلة حل وحيد :

$$Z = -\frac{b}{2a}$$

ت-حالة $\Delta < 0$: أي $\Delta = -k^2$

عندها للمعادلة حلان عقديان

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ث-حالة $\Delta = a + ib$:

عندئذٍ نفرض $w = x + iy$ هو الجذر التربيعي لـΔ عندها

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$x^2 - y^2 = a$$
$$2xy = b$$

ونوجد الحلول فنحصل على جذري المميز Δ :

$$w_1 , w_2$$

نختار أحد الجذور (مثلاً w_1):

$$Z_1 = \frac{-b - w}{2a}$$

$$Z_2 = \frac{-b + w}{2a}$$

مثال :

حل المعادلة :

$$Z^2 + Z + 1 = 0$$

الحل:

$$a = 1 , b = 1 , c = 1$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$$

للمعادلة جذران عقديان

$$Z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$Z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال :

اكتب حلول المعادلة

$$(Z^2+3\sqrt{3}Z+9)(Z^2-3\sqrt{3}Z+9)=0$$

بالشكل الأسي

الحل :

لنوجد الحلول :

إما

$$Z^2+3\sqrt{3}Z+9=0$$
$$\Delta=27-4(1)(9)=-9<0$$

للمعادلة حلان عقديان

$$Z_1=\frac{-3\sqrt{3}-i\sqrt{9}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$
$$Z_2=\frac{-3\sqrt{3}+i\sqrt{9}}{2a}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

أو

$$Z^2-3\sqrt{3}Z+9=0$$
$$\Delta=27-4(9)=-9<0$$

للمعادلة حلان عقديان

$$Z_1=\frac{3\sqrt{3}-i\sqrt{9}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$
$$Z_2=\frac{3\sqrt{3}+i\sqrt{9}}{2a}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

الكتابة بالشكل الأسي:

$$Z_1=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$
$$r=\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{-\frac{3}{2}}{3}=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta$$
$$=\frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow Z_1=3e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

وبما أن Z_2 مرافق Z_1 فقط نعكس الزاوية

$$\Rightarrow Z_2=3e^{-i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

ونجد

$$Z_1'=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i=3e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$Z_2'=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=3e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

تمرين

حل في C المعادلات الآتية :

1. $Z^2+(1+4i)Z-5-i=0$

$$a=1\ ,b=1+4i\ \ ,c=-5-i$$

نحسب المميز

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta = (1+4i)^2 - 4(1)(-5-i)$$

$$\Delta = 1 + 8i - 16 + 20 + 4i = 5 + 12i$$

نلاحظ أن Δ عبارة عن عدد عقدي وبالتالي

لإيجاد جذوره التربيعية نحل المعادلات

$$x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \ldots (1)$$
$$x^2 - y^2 = 5 \quad \ldots (2)$$
$$2xy = 12 \quad \ldots (3)$$

نجمع (1) و (2)

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

نطرح (1) و (2)

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

من المعادلة (3) نجد أن

$$2xy = 12 > 0$$

فإذاً x وy لهما نفس الإشارة

$$W_1 = 3 + 2i$$

$$W_2 = -3 - 2i$$

الآن لنوجد حلول المعادلة

$$Z_1 = \frac{-b - W_1}{2a}$$
$$= \frac{-(1+4i) - (3+2i)}{2}$$
$$= \frac{-1 - 4i - 3 - 2i}{2}$$

$$= \frac{-4 - 6i}{2}$$

$$Z_1 = -2 - 3i$$

$$Z_2 = \frac{-b + W_1}{2a}$$

$$Z_2 = \frac{-(1+4i) + (3+2i)}{2}$$

$$Z_2 = \frac{-1 - 4i + 3 + 2i}{2}$$

$$Z_2 = \frac{2 - 2i}{2}$$

$$Z_2 = 1 - i$$

$$2iZ^2 + (3+7i)Z + 4 + 2i = 0 \quad (2)$$

$$a = 2i \,, b = (3+7i) \ \,, c = 4 + 2i$$

نحسب المميز

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (3+7i)^2 - 4(2i)(4+2i)$$

$$\Delta = 9 + 42i - 49 - 8i(4+2i)$$

$$= -40 + 42i - 32i + 16$$

$$= -24 + 10\mathrm{i}$$

نلاحظ أن Δ عبارة عن عدد عقدي وبالتالي

لإيجاد جذوره التربيعية نحل المعادلات

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(-24)^2 + 10^2} = \sqrt{625} = 25 \ldots (1)$$
$$x^2 - y^2 = -24 \quad \ldots (2)$$
$$2xy = 10 \quad \ldots (3)$$

نجمع ① و ②

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

نطرح ① و ②

$$2y^2 = 50 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

من المعادلة ③ نجد أن

$$2xy = 10 > 0$$

فإذاً x وy لهما نفس الإشارة

$$W_1 = 1 + 5i$$

$$W_2 = -1 - 5i$$

الآن لنوجد حلول المعادلة

$$Z_1 = \frac{-b - W_1}{2a}$$

$$= \frac{-(3+2i) - (1+5i)}{4i}$$

$$= \frac{-3 - 2i - 1 - 5i}{4i}$$

$$= \frac{-4 - 12i}{4i}$$

ملاحظة: عند وجود i بالمقام يمكن أن نرفعها إلى البسط ونضرب ب(-1) أي

$$\frac{\text{عدد}}{i} = -i(\text{عدد})$$

$$\Rightarrow Z_1 = \frac{-i(-4 - 12i)}{4}$$

$$Z_1 = \frac{4i - 12}{4}$$

$$\Rightarrow Z_1 = -3 - i$$

$$Z_2 = \frac{-b + W_1}{2a}$$

$$Z_2 = \frac{-(3+2i) + (1+5i)}{4i}$$

$$Z_2 = \frac{-3 - 2i + 1 + 5i}{4i}$$

$$Z_2 = \frac{-2 - 2i}{4i}$$

$$Z_2 = \frac{-i(-2 - 2i)}{4}$$

$$Z_2 = \frac{2i + 2}{4}$$

$$\Rightarrow Z_2 = -\frac{1}{2} + i$$

③ $Z^2 + (1 + 8i)Z - 17 + i = 0$

خواص جذور المعادلة من الدرجة الثانية :

إذا كانت المعادلة

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

وكان Z_1 و Z_2 حلول هذه المعادلة , عندئذٍ:

① $Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$

② $Z_1 . Z_2 = \frac{c}{a}$

③ إذا كانت المعاملات a و b و c حقيقية

فإن Z_1 و Z_2 مترافقان أي

$$Z_1 = \overline{Z_2}$$

تمرين:

جد عددين عقديين q و p كي تقبل المعادلة $Z^2 + pZ + q = 0$ العددين $1 + 2i$ و $3 - 5i$ جذرين لها .

الحل:

لدينا $a = 1 , b = p , \ c = q$

$$\left.\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= \frac{-b}{a} \\ Z_1 . Z_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$3 - 5i + 1 + 2i = -p \Rightarrow p = -2 + 3i$$

$$(3 - 5i)(1 + 2i) = q$$

$$3 + 6i - 5i + 10 = q$$

$$13 + i = q$$

تمرين:

حل المعادلات الآتية :

$$Z^2 - 2(1 + \sqrt{2})Z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0 \quad (1)$$

$$a = 1 , b = -2(1 + \sqrt{2}) , c = 2(\sqrt{2} + 2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \left(-2(1 + \sqrt{2})\right)^2 - 4(1)\left(2(\sqrt{2} + 2)\right)$$

$$\Delta = 4(1 + 2\sqrt{2} + 2) - 8\sqrt{2} - 16$$

$$\Delta = 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 8\sqrt{2} - 16$$

$$\Delta = 12 - 16 = -4 < 0$$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان :

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$Z_1 = \frac{2(1 + \sqrt{2}) - i\sqrt{4}}{2}$$

$$Z_1 = 1 + \sqrt{2} - i$$

$$Z_2 = \overline{Z_1} = 1 + \sqrt{2} + i$$

$$Z^2 - 2\cos\theta \, Z + 1 = 0 \quad (2)$$

$$a = 1 , b = -2\cos\theta \ , c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4$$

$$\Delta = 4(\cos^2\theta - 1)$$

$$\Delta = -4(1 - \cos^2\theta)$$

$$\Delta = -4\sin^2(\theta) < 0$$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان :

$$Z_1 = \frac{2\cos\theta - i\sqrt{4\sin^2(\theta)}}{2}$$

$$Z_1 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

$$Z_2 = \overline{Z_1} = Z_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

وظيفة

$$Z^2 - 2Z + 3 = 0 \quad (3)$$

تمرين:

احسب الجداء

$(Z^2+2Z-3)(Z^2+2Z+5)$ ثم حل في $\mathbb{C}$

المعادلة

$$Z^4+4Z^3+6Z^2+4Z-15=0$$

الحل: النشر

$$(Z^2+2Z-3)(Z^2+2Z+5)$$

$$=Z^4+2Z^3+5Z^2+2Z^3+4Z^2+10Z-3Z^2-6Z-15$$

$$=Z^4+4Z^3+6Z^2+4Z-15$$

حل المعادلة :

$$(Z^2+2Z-3)(Z^2+2Z+5)=0$$

إما

$$Z^2+2Z-3=0$$

أو

$$Z^2+2Z+5=0$$

تمرين:

نتأمل كثير الحدود :

$$P(Z)=Z^4-19Z^2+52Z-40$$

1 عين عددين حقيقيين a و b يحققان أن

$P(Z)=(Z^2+aZ+b)(Z^2+4Z+2a)$

$Z^2-5Z+9=0$ 4

$2Z^2-6Z+5=0$ 5

2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$

الحل :

1 ننشر :

$$P(Z)=Z^4+4Z^3+2aZ^2+aZ^3+4aZ^2+2a^2Z+bZ^2+4bZ+2ab$$

$$=Z^4+(4+a)Z^3+(6a+b)Z^2+(2a^2+4b)Z+2ab$$

بالمطابقة بين شكلي $P(Z)$ نجد أن :

$4+a=0$ (1)

$6a+b=-19$ (2)

$2a^2+4b=52$ (3)

$2ab=-40$ (4)

من (1) نجد أن $a=-4$

نعوض في (2) $b=5$

نعوض في باقي المعادلات للتحقق :

(3) $\Rightarrow 32+20=52$ صحيحة

(4) $\Rightarrow 2(-4)(5)=-40$ صحيحة

2 نستفيد من الشكل الجديد :

$$(Z^2-4Z+5)(Z^2+4Z-8)=0$$

إما

$$Z^2-4Z+5=0$$

أو $Z^2+4Z-8=0$

النوع السابع من المعادلات :المعادلات من الدرجة الثالثة فما فوق:

مثال:

لتكن المعادلة :

$$Z^3-3Z^2+3Z+7=0$$

1 أثبت أن $Z=-1$ حل للمعادلة

2 اكتب المعادلة بالشكل :
$(Z+1)Q(Z)=0$

3 أوجد حلول هذه المعادلة

الحل:

1

$$(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=0$$

$$-1-3-3+7=0$$

$$0=0$$

إذن $z=-1$ حلٌ لها .

2 نقسم على $Z+1$

$$\begin{array}{r|l} Z^3-3Z^2+3Z+7 & Z+1 \\ \hline Z^3+Z^2 & Z^2-4Z+1 \\ -4Z^2+3Z+7 & \\ -4Z^2-4Z & \\ \hline 7Z+7 & \\ 7Z+7 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

3 وبالتالي المعادلة تكتب بالشكل :

$$(Z+1)(Z^2-4Z+1)=0$$

إما

$$Z+1=0$$

$$Z=-1$$

أو

$$Z^2-4Z+1=0$$

إضافي : لتكن $A\ ,B\ ,C$ نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة السابقة

أثبت أن ABC مثلث متساوي الأضلاع

مثال:

$Z^4-6Z^3+24Z^2-18Z+63=0$

1 أثبت أن $Z=i\sqrt{3}$ حل للمعادلة

2 أوجد الحلول الأربعة للمعادلة

3 بفرض $A\ ,B\ ,C, D$ النقاط التي تمثل حلول المعادلة

أثبت أن هذه النقاط تقع على دائرة واحدة وعين مركزها ونصف قطرها

الحل :

1

$$\left(i\sqrt{3}\right)^4-6\left(i\sqrt{3}\right)^3+24\left(i\sqrt{3}\right)^2-18\left(i\sqrt{3}\right)+63=0$$

$$9+6\left(3\sqrt{3}\right)i-24(3)-18\sqrt{3}i+63=0$$

$$0=0$$

2

$$Z=i\sqrt{3}$$

$$Z^2=-3$$

$$\begin{array}{r|l} & Z^2-6Z+21 \\ \hline Z^2+3 & Z^4-6Z^3+24Z^2-18Z+63 \\ & \underline{Z^4+3Z^2} \\ & -6Z^3+21Z^2-18Z+63 \\ & \underline{-6Z^3 \qquad -18Z} \\ & 21Z^2+63 \\ & \underline{21Z^2+63} \\ & 00 \end{array}$$

فالمعادلة تصبح من الشكل

$$(Z^2+3)(Z^2-6Z+21)=0$$

إما :

أو :

تمرين:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$Z^3 - (3+4i)Z^2 - 6(3-2i)Z + 72i = 0$

إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً

الحل:

بفرض w هو الحل التخيلي عندئذٍ $\bar{w} = -w$ ويكون

$$w^3 - (3+4i)w^2 - 6(3-2i)w + 72i = 0 \ldots (1)$$

بأخذ مرافق الطرفين

$$-w^3 - (3+4i)w^2 + 6(3-2i)w - 72i = 0 \ldots (2)$$

بجمع (1) و (2)

$$-w^2 + 24iw = 0$$

$$6w(-w+4i) = 0$$

إما $w = 0$

أو $w = 4i$

لكن $w = 0$ ليس تخيلياً (مرفوض)

فالحل المنشور هو $w = 4i$ (مقبول) و بالتالي :

$z = 4i$ حل للمعادلة ولأن الأمثال ليست حقيقية , نقسم على

$z - 4i$

$$\begin{array}{r|l} z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i & z-4i \\ \hline z^3 - 4iz^2 & z^2 - 3z - 18 \\ \hline -3z^2 - 6(3-2i)z + 72i & \\ -3z^2 + 12iz & \\ \hline -18z + 72i & \\ -18z + 72i & \\ \hline 00 & \end{array}$$

فالمعادلة تكتب بالشكل $(z-4i)(z^2 - 3z - 18) = 0$ ثم نكمل كما تعلمنا سابقاً

النوع الثامن :جملة معادلتين مجهولين:

مثال:

$$\begin{cases} 3Z + Z' = 5 + 2i \\ -Z + Z' = 1 - 2i \end{cases}$$

مثال:

$$\begin{cases} 2iZ + Z' = 2i \\ 3Z - iZ' = 1 \end{cases}$$

ويتم الحل بالحذف بالجمع أو بالتعويض

مسائل وتمرينات

1. لتكن النقاط A و B و C و D نقاطاً تمثل الأعداد العقدية :

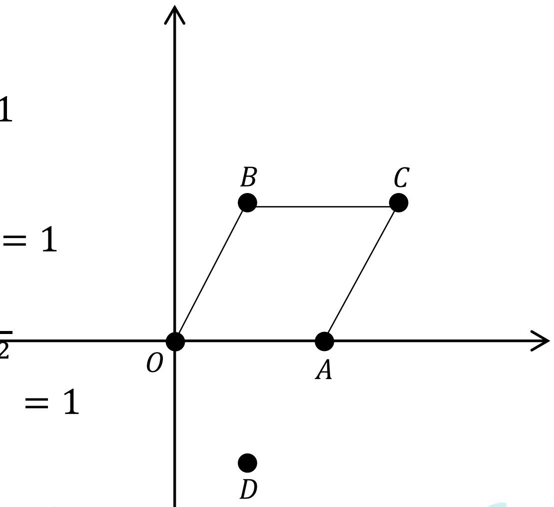
$a = 1$ و $b = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}$

① اكتب c بالشكل الأسي و d بالشكل الجبري

② ضع النقاط A و B و C و D في مستو مزود بمعلم متجانس ثم أثبت أن $OABC$ معين

الحل :

①



$$c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \& \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \mathrm{c} = \sqrt{3} e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{i\pi}{6}}$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i1}{2}\right]$$

$$d = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

② $A(1,0)\,, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,, C\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\,, D\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

لنحسب الطويلات

$$OA = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1$$

$$OB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} = 1$$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} = 1$$

الشكل معين لأن جميع أضلاعه متساوية (و واضح أن الزوايا ليست قائمة إذن ليس مربع)

❷ ليكن Z و Z' عددين عقديين أثبت أن :

$$|Z + Z'|^2 + |Z - Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$$

الحل :

نعلم أن $w = \bar{w} = |w|^2$

$$l_1 = |Z + Z'|^2$$
$$= (Z + Zi)(\overline{Z + Z'}) + (Z - Zi)(\overline{Z - Z'})$$

$$l_1 = (Z + Zi)(\bar{Z} + \bar{Z}') + (Z - Zi)(\bar{Z} - \bar{Z}')$$

بالنشر

$$l_1 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2 = l_2$$

3 ليكن $\alpha = e^{2i\frac{\pi}{5}}$ نضع

$A = \alpha + \alpha^4$ $\quad\quad$ $B = \alpha^2 + \alpha^3$

1 أثبت أن $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$

واستنتج أن A, B هما جذرا المعادلة $x^2 + x - 1 = 0 \ldots (*)$

2 عبر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

3 حل المعادلة $(*)$ واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

الحل :

1 لدينا مجموع متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها α وعدد حدودها 5

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0 = 1\,\frac{1 - \alpha^5}{1 - \alpha}$$

$$= 1\,\frac{1 - \left(e^{2i\frac{\pi}{5}}\right)^5}{1 - e^{2i\frac{\pi}{5}}}$$

$$= \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{2i\frac{\pi}{5}}}$$

$\alpha^5 = 1$

لكن $e^{2i\pi} = 1$

$$\Rightarrow 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$$

إذا كان A, B حلول المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ عندئذٍ

$$A + B = \frac{-b}{c} \Leftrightarrow A + B = -1$$

$$A.B = \frac{c}{a} \Leftrightarrow A.B = -1$$

البرهان :

$$A + B = (\alpha + \alpha^4) + (\alpha^2 + \alpha^3)$$

حسب الطلب السابق :

و هو المطلوب $A + B = -1$

$$A.B = (\alpha + \alpha^4)(\alpha^2 + \alpha^3)$$
$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7$$
$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5.\alpha + \alpha^5.\alpha^2$$
$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha + \alpha^2 = -1$$

إذاً A, B جذرا المعادلة $(*)$

2 $\alpha^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{10\pi - 2\pi}{5}} = e^{i\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)} = e^{-i2\pi 5} = \bar{\alpha}$

$$\Rightarrow A = \alpha + \alpha^4 = \alpha + \bar{\alpha} = 2Re\alpha$$
$$= 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

3

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$a = 1\,, b = 1\ \,, c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-1) = 5$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

بملاحظة أن $A > 0$ و $x_2 > 0$ هما الجذر الموجب للمعادلة $(*)$ نجد أن

$$A = x_2$$

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

المجموعات النقطية: يرد سؤال عن المجموعة النقطية $M(z)$ التي تحقق معادلة متعلقة بالمجهول z ، لذلك نميز الحالات التالية :

1- إذا كانت المعادلة من الشكل $imz = b$ فهذه المعادلة تكافئ أن $y = b$ أي أن مجموعة النقاط $M(z)$ هي مجموعة نقاط المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = b$

2- إذا كانت المعادلة من الشكل $Rez = a$ فهذه المعادلة تكافئ أن $x = a$ أي أن مجموعة النقاط $M(z)$ هي مجموعة نقاط المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = a$

3- إذا كانت المعادلة من الشكل $argz = \theta$ فهذه المعادلة تمثل نصف المستقيم الذي يصنع الزاوية θ مع محور الفواصل (دون المبدأ)

4- إذا كانت المعادلة من الشكل $|z-a| = r$ فهي معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $A(a)$ و نصف قطرها r

5- إذا كانت المعادلة من الشكل $|z-a| = |z-b|$ فهي تمثل معادلة محور القطعة المستقيمة التي طرفيها النقطتان $A(a)$ و $B(b)$

أمثلة :

نتأمل النقطتين A, B اللتين يمثلهما العددان العقديان $a = 2 - i$ و $b = -3$

1- المعادلة $|z-2+i| = |z+3|$: تكتب بالشكل $|z-(2-i)| = |z-(-3)|$ فهي تمثل محور القطعة المستقيمة AB

2- المعادلة $|z-2+i| = 5$: تكتب بالشكل $|z-(2-i)| = 5$ و هي تمثل الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها

$r = 5$

مسألة :

صف مجموعة النقاط $M(z)$ في كل من الحالات التالية :

أ- $3 = |z|$ و هي التي تكتب بالشكل

$3 = |z - 0|$ فهي الدائرة التي

مركزها O ونصف قطرها $r=3$

ب- $argz = \frac{\pi}{4}$ و هي نصف المستقيم

الذي يصنع الزاوية $\frac{\pi}{4}$

مع محور الفواصل (دون المبدا)

مسألة: ليكن a عدداً عقدياً , و لتكن ع

مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق :

$$z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$$

عين المجموعة ع و مثلها في مستوٍ

تطبيقات الأعداد العقدية :

درسنا سابقاً أن كل عدد عقدي $Z = x + iy$

يمثل نقطة في المستوي $M(x\ ,y)$

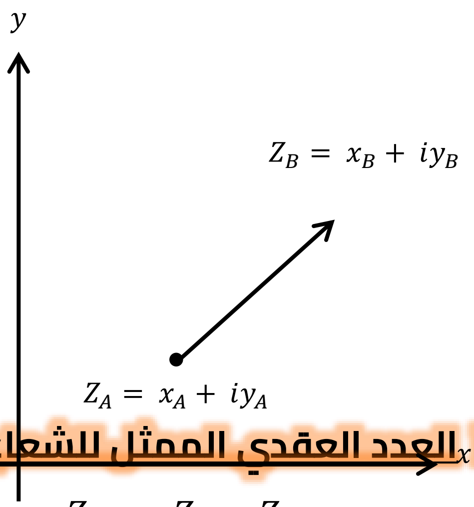
لذلك إذا كانت $A(x\ ,y)$ نقطة فإننا نرمز للعدد

العقدي الممثل لها

بأحد الرمزين :

$$a = x + iy \quad or \quad Z_A = x + iy$$

وعليه يمكن استخلاص التعاريف التالية :



1) العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$:

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$$

أو $Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a$

2) العدد العقدي الممثل للنقطة I منتصف النقطة $[AB]$:

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

أو $Z_I = \frac{a + b}{2}$

3) العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC :

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

أو $Z_G = \frac{a + b + c}{3}$

4) المسافة بين نقطتين :

$$AB = |Z_{\overrightarrow{AB}}| = |Z_B - Z_A|$$

5) شرط توازي شعاعين :

يكون الشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ متوازيان إذا تحقق أحد الشرطين :

① $Z_{\overrightarrow{AB}} = k.Z_{\overrightarrow{CD}}$

وهذا نفسه يكتب بالشكل :

$$\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}} = k$$

وهذا نفسه يؤول إلى المساواة:

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C} = k$$

حيث $k \in \mathbb{R}$

② الزاوية بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ هي 0 أو π

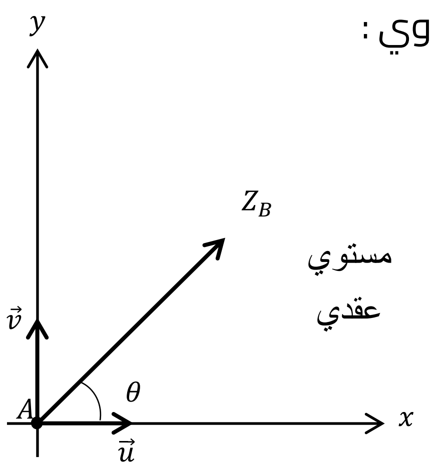
ولكن كيف نحسب هذه الزاوية ؟؟

6) الزوايا :

نرمز للزاوية الموجهة التي تنقل حامل الشعاع $\vec{u}$

إلى حامل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بالرمز : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

وهي تساوي :



$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \underbrace{\arg(b-a)}_{\text{زاوية العدد العقدي}}$$

$$Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a$$

تعميم

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$

ويتم إيجادها غالباً بإيجاد الشكل الأسي للعدد $\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$

تمرين :

نتأمل معلماً متجانساً $(o, \vec{u}, \vec{v})$ في المستوي العقدي :

والنقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية :

$a = 6 - i$

$b = -6 + 3i$

$c = -18 + 7i$

أثبت أن A و B و C على استقامة واحدة .

الحل:

لتكون النقاط A و B و C على استقامة واحدة يجب إثبات أن :

$\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-6+3i-(6-i)}{-18+7i-(6-i)}$$

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}$$

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{-12+4i}{-24+8i}=\frac{-12+4i}{2(-12+4i)}$$

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{1}{2}$$

$$(b-a)=\frac{1}{2}(c-a)$$

$$Z_{\overrightarrow{AB}}=\frac{1}{2}Z_{\overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً $\Leftarrow$ A و B و C على استقامة واحدة .

تدرب :

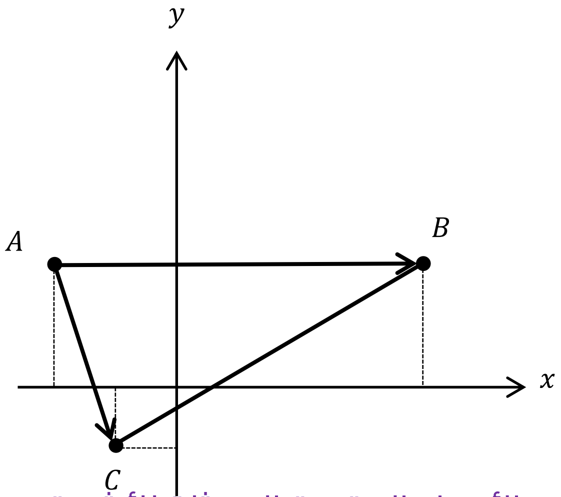
لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها

$Z_A=-1+i\ ,Z_B=2+i\ ,Z_C=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

① وضع النقاط A و B و C في المستوي العقدي

الحل:

$$A(-1\,,1)\,,B(2{,}1)\,,C\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$



② أوجد الأعداد العقدية الممثلة للأشعة $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$.

$$Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_B-Z_A$$

$$Z_{\overrightarrow{AB}}=2+i+1-i$$

$$Z_{\overrightarrow{AB}}=3$$

$$Z_{\overrightarrow{AC}}=Z_C-Z_A$$

$$Z_{\overrightarrow{AC}}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+1-i$$

$$Z_{\overrightarrow{AC}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$Z_{\overrightarrow{BC}}=Z_C-Z_B$$

$$Z_{\overrightarrow{BC}}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-2-i$$

$$Z_{\overrightarrow{BC}}=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$$

③ بين طبيعة المثلث ABC .

$$AB = |Z_{\overrightarrow{AB}}| = \sqrt{9} = 3$$

$$AC = |Z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}}$$

$$BC = |Z_{\overrightarrow{BC}}| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}}$$

نربع :

$$AB^2 = 9 \ , AC^2 = \frac{10}{4} \ , BC^2 = \frac{34}{4}$$

وحسب فيثاغورث :

$$AB^2 \stackrel{?}{=} AC^2 + BC^2$$

$$9 \stackrel{?}{=} \frac{10}{4} + \frac{34}{4}$$

$$9 \neq 11$$

المثلث مختلف الأضلاع وغير قائم

تمرين :

$Z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$

$Z_B = 2(1 - i\sqrt{3})$

① أثبت أن A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 4 .

② عين العدد العقدي الممثل للنقطة c التي تجعل 0 مركز ثقل المثلث ABC .

③ بين طبيعة المثلث ABC .

الحل : ط1)

$$Z_O = 0 = (0,0)$$

$$Z_{\overrightarrow{OA}} = Z_A - Z_O$$

$$Z_{\overrightarrow{OA}} = 2(1 + i\sqrt{3}) - 0$$

$$Z_{\overrightarrow{OA}} = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$Z_{\overrightarrow{OB}} = Z_B - Z_O$$

$$Z_{\overrightarrow{OB}} = 2(1 - i\sqrt{3}) - 0$$

$$Z_{\overrightarrow{OB}} = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$|Z_{\overrightarrow{OA}}| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$|Z_{\overrightarrow{OB}}| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$|Z_{\overrightarrow{OA}}| = |Z_{\overrightarrow{OB}}| = R = 4$$

A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 4.

ط2)

$$Z_O = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

$$0 = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$

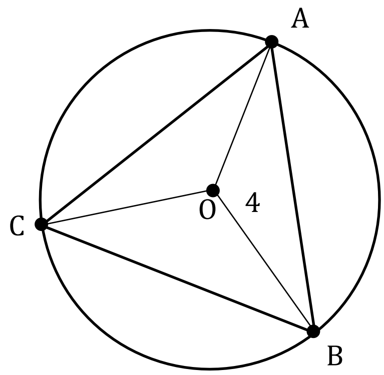
$$Z_A + Z_B + Z_C = 0$$

$$Z_C = Z_A - Z_B$$

$$Z_C = -2 - 2i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$Z_C = -4$$

ط3) بما أن مركز ثقل المثلث هو مركز الدائرة المارة برؤوسه فهو مثلث متساوي الأضلاع



غالباً ما نستفيد من تشكيل الكسر التالي :

$$Z = \frac{b-a}{c-a}$$

نحسب الكسر $\frac{b-a}{c-a}$ بالشكل الأسي

(1

$\frac{b-a}{c-a}$

طويلة

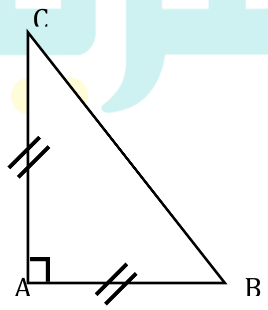
$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = 1$

المثلث متساوي الساقين في A

زاوية

$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \mp\frac{\pi}{2}$

المثلث قائم في A



⇐ ABC قائم ومتساوي الساقين

(2

$\frac{b-a}{c-a}$

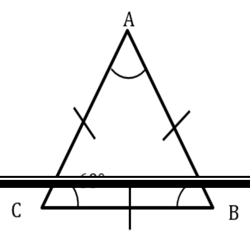
طويلة

$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = 1$

زاوية

$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \mp\frac{\pi}{3}$

⇐ المثلث ABC متساوي الأضلاع



(3

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) \in \{0, \pi, -\pi\}$$

وبالتالي A و B و C على استقامة واحدة

(4 $\frac{b-a}{c-a} \in R$ بالتالي :

A و B و C على استقامة واحدة

(5 $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) > \frac{\pi}{2}$ عندئذٍ :

المثلث ABC منفرج الزاوية A

ملاحظة : غالباً نحسب arg من الشكل

الأسي حيث : $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$, $-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$1 = e^{i0}$, $-1 = e^{i\pi}$

تمرين :

$a = -2$, $b = 2$, $c = -1 + i$, $d = 1 - 3i$

① أثبت أن BCD قائم وهل هو متساوي الساقين

② أعد الطلب من أجل ACD

الحل : نشكل الكسر $\frac{c-b}{d-b}$:

$$\frac{c-b}{d-b}=\frac{-1+i-2}{1-3i-2}=\frac{-3+i}{-1-3i}$$

بالمرافق: $\frac{c-b}{d-b}=\frac{-3+i}{-1-3i}\cdot\frac{(-1+3i)}{(-1+3i)}$

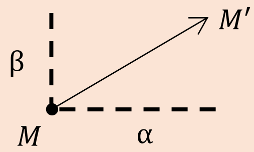
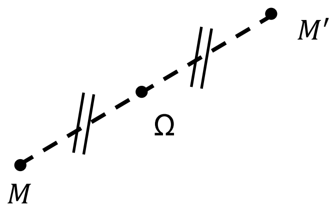
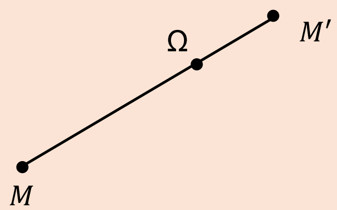
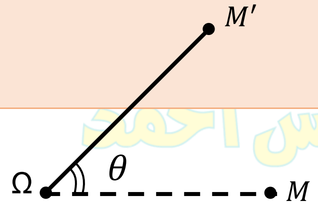
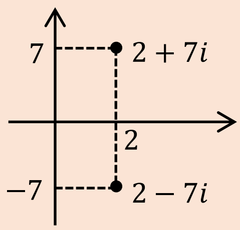
$$\frac{c-b}{d-b}=\frac{3-9i-i-3}{1+9}=\frac{-10i}{10}=-i$$

$$=e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

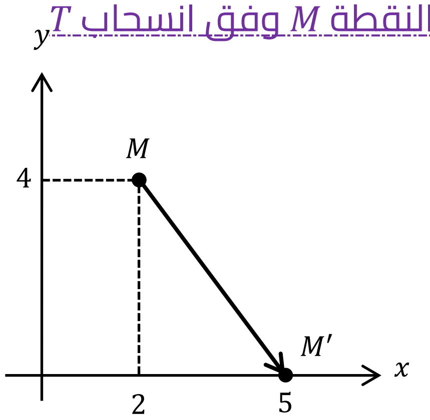
الطويلة =1 : متساوي الساقين

الزاوية : $-\frac{\pi}{2}$: قائم

التحويلات الهندسية و صيغها العقدية

التحويل	الوصف	القانون	الرسم
الانسحاب	M' صورة M وفق الانسحاب الذي شعاعه : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$	$Z' = Z + \alpha + i\beta$	
التناظر	M' صورة M وفق التناظر الذي مركزه Ω : $\Omega(w)$	$Z' - w = -(Z - w)$	
التحاكي	M' صورة M وفق التحاكي الذي مركزه Ω : ونسبته $k \in \mathbb{R}$	$Z' - w = \underbrace{k}(Z - w)$ نسبة التحاكي $\in \mathbb{R}$	
الدوران	M' صورة M وفق الدوران الذي مركزه Ω : وزاويته θ	$Z' - w = e^{i\theta}(Z - w)$ حيث $e^{i\theta}$ قد تكون بالشكل الجبري لعدد عقدي طويلته تساوي 1	
التناظر المحوري	M' نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل	$Z' = \overline{Z}$	

مثال: أوجد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة النقطة M وفق انسحاب T شعاعه $3\vec{u}-4\vec{v}$ حيث $Z=2+4i$



الحل:

$$Z' = Z + \alpha + i\beta$$
$$Z' = 2 + 4i + 3 - 4i$$
$$Z' = 5$$

مثال: ليكن $Z = 2 + 3i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M أوجد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر الذي مركزه $\Omega(5-2i)$

الحل:

$$Z' - w = -(Z - w)$$
$$Z' - (5 - 2i) = -\big(2 + 3i - (5 - 2i)\big)$$
$$Z' = -2 - 3i + 5 - 2i + 5 - 2i$$
$$Z' = 8 - 7i$$

مثال: ليكن $Z = 3 + 5i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M , أوجد M' صورة النقطة M وفق التحاكي الذي مركزه $\Omega(3-2i)$ ونسبته -2

الحل:

$$Z' - w = k(Z - w)$$
$$Z' - (3 - 2i) = -2\big(3 + 5i - (3 - 2i)\big)$$
$$Z' = -10i - 4i + 3 - 2i$$
$$Z' = 3 - 16i$$

مثال: ما هو التحويل الذي يقرن B بالنقطة A فيما يلي:

$b - 1 = -3(a - 1)$

B صورة A وفق تحاكٍ مركزه $\Omega(1)$ ونسبته $k = -3$.

$$b - 1 + i = \frac{1}{2}(a - 1 + i)$$
$$b - (1 - i) = \frac{1}{2}(a - (1 - i))$$

B صورة A وفق تحاكٍ مركزه $\Omega(1-i)$ ونسبته $k = \frac{1}{2}$.

$$b + 1 - 5i = 3(a + 1 - 5i)$$
$$b - (-1 + 5i) = 3\big(a - (-1 + 5i)\big)$$

B صورة A وفق تحاكٍ مركزه $\Omega(-1+5i)$ ونسبته $k = 3$.

مثال: ليكن العدد العقدي $Z = 3+5i$ الممثل للنقطة M ، أوجد M' وفق الدوران الذي مركزه $\Omega(3-2i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{6}$

الحل:

$$Z' - w = e^{i\theta}(Z-w)$$

$$Z' - 3 + 2i = e^{i\frac{\pi}{6}}(3+5i-3+2i)$$

$$Z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(7i) + 3 - 2i$$

مثال: ما هو التحويل الذي يقرن B بالنقطة A فيما يلي:

$$b - 1 = e^{\frac{i\pi}{2}}(a-1)$$

B صورة A وفق دوران مركزه $\Omega(1)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$b - 3 + 2i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(a - 3 + 2i)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad , y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$b - (3-2i) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a - (3-2i))$$

B صورة A وفق دوران مركزه $\Omega(3-2i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.

تدرب: لتكن النقطتان :

$G(3-\sqrt{3}i)$, $H(3+\sqrt{3}i)$

وليكن R الدوران الذي مركزه O وتحقق $R(G) = H$

احسب $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران .

الحل:

$$Z_G = 3 - i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad Z_H = 3 + i\sqrt{3}$$

$$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \arg\left(\frac{h-o}{g-o}\right)$$

بالمرافق $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\right)$

$$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \arg\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\right)$$

$$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \arg\left[\frac{(3+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{9+3}\right]$$

$$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \arg\left[\frac{9+6\sqrt{3}i-3}{12}\right]$$

$$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \arg\left[\frac{6}{12} + \frac{6\sqrt{3}}{12}i\right]$$

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

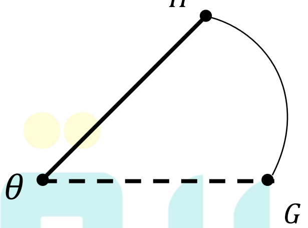
$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg\left(\frac{h-o}{g-o}\right) = \frac{\pi}{3}$$

الصيغة العقدية للدوران :

$$Z' - 0 = e^{\frac{i\pi}{3}}(Z - 0)$$

$$\underset{H}{Z'} = e^{\frac{i\pi}{3}}(Z)$$



ملاحظة :

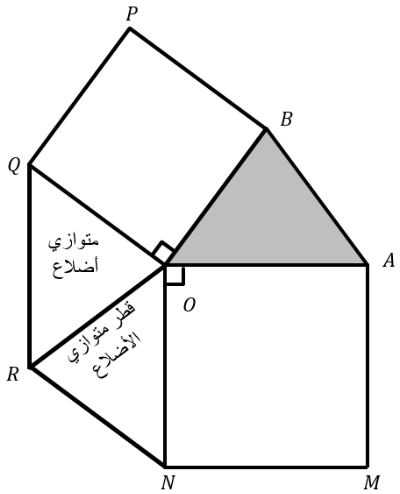
- الدوران الموجب هو عكس عقارب الساعة .
- الدوران السالب هو مع عقارب الساعة

تنويه : عندما يذكر أنه لدينا ربع أو أضلاع متساوية مشتركة في الرأس إذن يوجد دوران

مسألة هامة :

نتأمل مثلثاً OAB , ننشئ خارج هذا المثلث المربعين $OBPQ$, $OAMN$ و متوازي الأضلاع $NOQR$. نهدف في هذا التمرين إلى إثبات أن المستقيمين (OR) و (AB) متعامدان و أن $OR = AB$ و ذلك باستعمال الأعداد العقدية

' لنختر معلماً متجانساً مباشراً $(o, \vec{u}, \vec{v})$ و ليكن a, b العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين A, B



$OR \perp AB$?

$OR = AB$?

① صورة النقطة N وفق دوران ربع دورة مباشرة حول O ؟

هي النقطة A

☺صورة النقطة B وفق دوران ربع دورة مباشرة حول O ؟

هي النقطة Q

☺

أثبت أن $\begin{cases} n = -ia \\ q = ib \end{cases}$

من الطلب السابق نلاحظ :

$$a - o = e^{\frac{i\pi}{2}}(n - o)$$

$$a = e^{\frac{i\pi}{2}}(n)$$

حيث $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

$$a = in$$

نضرب ب i :

$$ia = i^2 n$$

$$ia = -n$$

$$\Rightarrow n = -ia \ldots \text{❶}$$

كذلك :

$$q - o = e^{\frac{i\pi}{2}}(b - o)$$

$$\Rightarrow q = ib \ldots \text{❷}$$

② - عبر عن الشعاع $\overrightarrow{OR}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{ON}$ و $\overrightarrow{OQ}$:

حسب خاصية متوازي الأضلاع

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON}$$

- عبر عن العدد العقدي r بدلالة a و b :

من $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON}$ نجد أن :

$$r - o = q - o + n - o$$

$$\Rightarrow r = q + n$$

$$r = ib - ia$$

$$\Rightarrow r = i(b - a)$$

- من هو العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ؟

هو $b - a$

إذن

$$\frac{r}{b - a} = i$$

- احسب الزاوية $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR})$ "الكسر الذهبي"

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \arg\left(\frac{r - o}{b - a}\right)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \arg\left(\frac{r}{b - a}\right)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \arg(i)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \arg\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow AB \perp OR$$

$$\left|\frac{r}{b - a}\right| = |i| = 1$$

$$OR = AB$$

ص141:مسألة هامة :

نتأمل في المستوي ABC مثلثاً مباشر التوجيه كيفياً و لتكن M منتصف $[AC]$ و ليكن $AB'B$ و ACC' مثلثين قائمين و متساويي الساقين مباشرين ، أثبت أن المتوسط (AM) في المثلث ABC هو ارتفاع

في المثلث $AB'B$ و أن
$B'C' = 2AM$

الطلب: $AM \perp B'C'$ و

$B'C' = 2AM$

لا ننسى تعريف المعلم إذا لم يذكر في المسألة $\left(\text{مركز} , \vec{u} , \vec{v}\right)$

نعرف معلماً متجانساً $(A,,\vec{u},\vec{v})$

① عبر بدلالة b و c عن الأعداد b' و c' و m

c' هي صورة c وفق دوران مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c' - a = e^{\frac{i\pi}{2}}(c - a)$$

$$c' = e^{\frac{i\pi}{2}}(c) \qquad \Rightarrow c' = ic \; ; \; e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

B' هي صورة B وفق دوران مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$b' - a = e^{-\frac{i\pi}{2}}(b - a)$$

$$b' = e^{-\frac{i\pi}{2}}(b)$$

$$\Rightarrow b' = -ib \; ; \; e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$$

M منتصف $[BC]$

$$m = \frac{b + c}{2}$$

② احسب الزاوية $(AM, B'C')$ واستنتج المطلوب:

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \arg\left(\frac{c' - b'}{m - a}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \arg\left(\frac{ic - (-ib)}{\left(\frac{b + c}{2}\right) - 0}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \arg\left(\frac{i(c + b)}{\frac{b + c}{2}}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \arg(2i)$$

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \arg\left(2e^{\frac{i\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$AM \perp B'C'$$

$$\left|\frac{c' - b'}{m - a}\right| = |2i| = 2$$

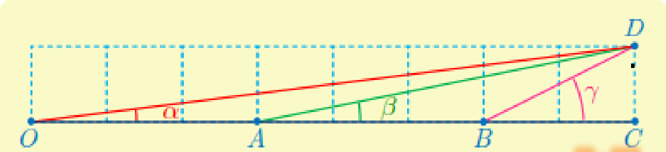
$$|c' - b'| = 2|m - a|$$

$$B'C' = 2AM$$

مسألة :

تأمل الشكل و احسب المجموع

$$\alpha + \beta + \gamma$$



الحل:

$$Z_A = 3 \;, Z_B = 6 \;, Z_o = 0 \;, Z_C = 8 \;, Z_D = 8 + i$$

أوجد الأعداد العقدية :

$$Z_{\overrightarrow{OD}} = Z_D - Z_o = 8 + i$$

$$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_B = 2 + i$$

اكتب بالشكل الجبري : $Z_{\overrightarrow{OD}} . Z_{\overrightarrow{AD}} . Z_{\overrightarrow{BD}}$

$$Z_{\overrightarrow{OD}} . Z_{\overrightarrow{AD}} . Z_{\overrightarrow{BD}} = (8 + i)(5 + i)(2 + i)$$

$$Z_{\overrightarrow{OD}} . Z_{\overrightarrow{AD}} . Z_{\overrightarrow{BD}} = (40 + 8i + 5i - 1)(2 + i)$$

$$Z_{\overrightarrow{OD}} . Z_{\overrightarrow{AD}} . Z_{\overrightarrow{BD}} = (39 + 13i)(2 + i)$$

$$Z_{\overrightarrow{OD}} . Z_{\overrightarrow{AD}} . Z_{\overrightarrow{BD}} = 78 + 39i + 26i - 13$$

$$Z_{\overrightarrow{OD}} . Z_{\overrightarrow{AD}} . Z_{\overrightarrow{BD}} = 65 + 65i$$

بالشكل الأسي := $r = \sqrt{(65)^2 + (65)^2}$
$\sqrt{2(65)^2} = 65\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{65}{65\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{65}{65\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_{\overrightarrow{OD}} . Z_{\overrightarrow{AD}} . Z_{\overrightarrow{BD}} = 65\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \dots ❶$$

استنتج $\alpha + \beta + \gamma$

$$Z_{\overrightarrow{OD}} = |Z_{\overrightarrow{OD}}|. e^{i\alpha} = \sqrt{65}. e^{i\alpha}$$

$$Z_{\overrightarrow{AD}} = |Z_{\overrightarrow{AD}}|. e^{i\beta} = \sqrt{26}. e^{i\beta}$$

$$Z_{\overrightarrow{BD}} = |Z_{\overrightarrow{BD}}|. e^{i\gamma} = \sqrt{5}. e^{i\gamma}$$

نحسب الجداء :

$$Z_{\overrightarrow{OD}} . Z_{\overrightarrow{AD}} . Z_{\overrightarrow{BD}} = \sqrt{65}. \sqrt{26}. \sqrt{5}. e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$

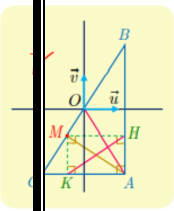
$$Z_{\overrightarrow{OD}} . Z_{\overrightarrow{AD}} . Z_{\overrightarrow{BD}} = \sqrt{65}. \sqrt{65}. 2. e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$Z_{\overrightarrow{OD}} . Z_{\overrightarrow{AD}} . Z_{\overrightarrow{BD}} = 65\sqrt{2}. e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} \dots ❷$$

بالمقارنة بين ❶ و ❷ $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$

مسألة :

مسألة تعامد



نتأمّل في المستوي الموجّه، مثلّثاً مباشراً ABC قائماً في A. النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) بالترتيب، و H و K هما المسقطان القائمان للنقطة M على (AB) وعلى (AC) بالترتيب. نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (OA) و (HK).

نختار معلماً متجانساً ومباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ بحيث تقع O في منتصف $[BC]$ ويكون $\vec{u}$ عمودياً على (AB) و $\vec{v}$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم (AB). ونرمز a,b,c,h,k,m إلى الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط A,B,C,H,K,M.

① علّل ما يأتي : $a = \overline{b}$ و $a - m = \overline{h - k}$.

② a. أثبت أنّ $\arg\left(\frac{a-m}{b}\right) = \frac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\frac{a-m}{b}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

b. استنتج أنّ $\arg\left(\frac{h-k}{a}\right) = -\frac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\frac{h-k}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$، ثُمّ أثبت المطلوب.

علل ما يلي :

①

$$a = \overline{b}$$

$$a - m = \overline{h - k}$$

الحل : إن محور الفواصل يقطع $[AB]$ في منتصفها

(المستقيم المار من المنتصف للضلع BC والموازي للضلع AC يقطع BA في منتصفها .

أي : $a = \overline{b}$ لأن A نظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل

$$a = x_a + iy_a$$

$$b = x_b + iy_b$$

$$h = x_h + iy_h$$

$$m = x_m + iy_m$$

$$k = x_k + iy_k$$

كما نلاحظ أن :

$$x_a = x_m \quad , \quad x_h = x_a$$
$$y_k = y_a \quad , \quad y_m = y_h$$

لنثبت العلاقة :

$$\underbrace{a - m}_{l_1} = \underbrace{\overline{h - k}}_{l_2}$$

$$l_1 = a - m$$

$$l_1 = (x_a - x_m) + i(y_a - y_m)$$

$$l_2 = \overline{h - k}$$

$$l_2 = \overline{(x_h - x_k) + i(y_h - y_k)}$$

$$l_2 = (x_h - x_k) - i(y_h - y_k)$$

نلاحظ أن :

$$(x_h - x_k) - i(y_h - y_k) = (x_a - x_m) - i(y_m - y_a)$$

$$l_2 = (x_a - x_m) + i(y_a - y_m) = l_1$$

$$l_1 = l_2$$

② أثبت أن :

$$\arg\left(\frac{a - m}{b}\right) = \mp\frac{\pi}{2}$$

بما أن M المسقط القائم للنقطة A على حامل الشعاع $\overrightarrow{OB}$ فيكون: $\arg\left(\frac{a-m}{b}\right) = \mp\frac{\pi}{2}$

③ استنتج أن :

$$\arg\left(\frac{h - k}{a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

إن المرافق يعكس إشارة الزاوية و بالتالي حسب الطلب السابق :

$$\arg\left(\frac{a - m}{b}\right) = \mp\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{\overline{h - k}}{\bar{a}}\right) = \mp\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \arg\left(\overline{\left(\frac{h - k}{a}\right)}\right) = \mp\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{h - k}{a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

عكس العلاقة السابقة بإشارة الزاوية

$$\arg\left(\frac{\overline{h - k}}{a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{HK}$$

سؤال دورة : نتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(o\,,\vec{u}\,,\vec{v})$:

بفرض أن :

α القياس الأساسي للزاوية : $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OA})$

و β القياس الأساسي للزاوية : $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OB})$

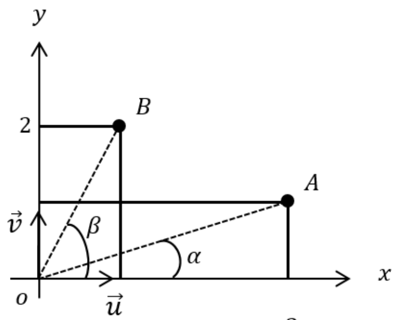
المطلوب :

① اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين Z_A و Z_B اللذين يمثلان النقطتين A و B

② اكتب العدد العقدي $\frac{Z_B}{Z_A}$ بالشكل الجبري والشكل الأسي, ثم استنتج قيمة $\beta - \alpha$

الحل:

①



$Z_A = 3 + i$ و $Z_B = 1 + 2i$

② بالمرافق

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{1+2i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}$$

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{(1+2i)(3-i)}{9+1} = \frac{3 - i + 6i + 2}{10}$$

الجبري :

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

الأسي :

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x = \frac{1}{2} \ , y = \frac{1}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

بالأسي :

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} \ldots ❶$$

استنتاج قيمة $\beta - \alpha$

$$Z_{\vec{B}} = |Z_B| = e^{i\beta}$$

$$Z_{\vec{A}} = |Z_A| = \sqrt{2} \, . \, e^{i\alpha}$$

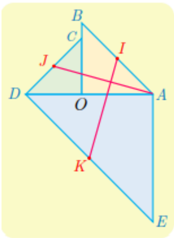
$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\beta - \alpha)} \ldots ❷$$

بالمقارنة بين ❶ و ❷ نجد :

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{4}$$

مسألة وظيفة :

مسألة :



نتأمل في المستوي الموجّه الشكل المجاور. المثلثات OAB و OCD و ADE مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة. النقاط I و J و K هي منتصفات أوتار هذه المثلثات. نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (AJ) و (IK) وأنّ $IK = AJ$. نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه O. ونرمز a و c إلى العددين العقديين المُمثّلين للنقطتين A و C.

① a عبّر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط B و D و E.

b استنتج الأعداد العقدية z_I و z_J و z_K التي تمثّل النقاط I و J و K.

② أثبت أنّ $z_K - z_I = i(z_J - a)$. ثُمّ استنتج الخواص المطلوبة.

مسألة

حساب النسب المثلثية للزاوية $\frac{3\pi}{8}$.

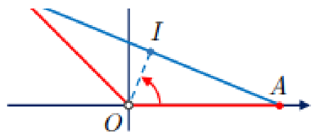
نتأمّل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان $a = 2$ و $b = 2e^{3i\pi/4}$. وليكن I منتصف $[AB]$.

① a. ارسم شكلاً مناسباً، وبيّن طبيعة المثلث OAB.

b. استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.

② a. احسب العدد العقدي z_I المُمَثّل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

b. استنتج كلّاً من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.



الحل: 1- العدد $a = 2$ عدد طويلته 2 , إذن $OA = 2$ و أن العدد $b = 2e^{\frac{3i\pi}{4}}$ أيضاً طويلته2 إذن $OB = 2$ فالمثلث متساوي الساقين

و لما كانت I منتصف $[AB]$ فإن OI متوسط في المثلث OAB , و لكن نعلم أن المتوسط في المثلث متساوي الساقين هو منصفٌ أيضاً و,,, وعليه يكون $\frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2} = (\vec{u}, \overrightarrow{OI})$

2- لحساب العدد العقدي z_I بالشكل الجبري :

$$z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}\left(2 + 2e^{\frac{i3\pi}{4}}\right)$$
$$= 1 + e^{\frac{i3\pi}{4}}$$

لكن هذا ليس شكلاً جبرياً , يجب أن نعود من الشكل $e^{\frac{3i\pi}{4}}$ إلى الشكل الجبري :

$$e^{\frac{i3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{4\pi - \pi}{4}\right) + isin\left(\frac{4\pi - \pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

فالزاوية هنا زاوية موجودة في الربع الثاني (راجع الدائرة المثلثية و ارسمها هنا)

$$\Rightarrow e^{\frac{i3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

نعوض في z_I :

$$z_I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

أما لكتابته بالشكل الأسي : فلدينا أولاً زاويته من الطلب الأول $\frac{3\pi}{8}$ و لنحسب الطويلة :

$$|z_I| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4} + \frac{2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

فالشكل الأسي له هو :

$$z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\, e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

لاستنتاج النسب المثلثية للزاوية $\frac{3\pi}{8}$ نضع :

$$\underbrace{z_I}_{\text{أسي}} = \underbrace{z_I}_{\text{جبري}}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\, e^{i\frac{3\pi}{8}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

نقسم على أمثال $e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$$e^{\frac{i3\pi}{8}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{i\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

نرد الأسي إلى مثلثي :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

بالمقارنة نجد أن :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

تَدرَّبْ

① لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ و $z_B = 2+i$ و $z_A = -1+i$

1. وضّع النقاط A و B و C في شكل.
2. احسب الأعداد العقدية التي تمثّل الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.
3. احسب أطوال أضلاع المثلث ABC وبيّن إذا كان مثلثاً قائماً في C.

المثلّثان ABC و $A'B'C'$ معرّفان بالأعداد العقدية التي تمثل رؤوسهما:

$$c = 3 + i, \quad b = 2 + 3i, \quad a = 1 - i,$$
$$c' = 4 + i, \quad b' = 3 - i, \quad a' = -2 + 3i,$$

1. احسب العدد الممثّل للشعاع $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.
2. جد العدد العقدي المُمثّل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC.
3. أثبت أنّ G هي مركز ثقل المثلث $A'B'C'$.

⑥ لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$c = 3 + \frac{7}{4}i \text{ و } b = 2 - \frac{5}{4}i \text{ و } a = 1 + \frac{3}{4}i$$

1. وضّع النقاط A و B و C في شكل. ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية المُمثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$؟
2. استنتج أنّ ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.
3. احسب العدد العقدي الممثل للنقطة A' التي تجعل $ABA'C$ مربعاً.

⑦ لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$a = 2-2i \text{ و } b = -1+7i \text{ و } c = 4+2i \text{ و } d = -4-2i$$

1. لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي $\omega = -1+2i$. أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها يساوي 5.
2. ليكن e العدد المُمثّل للنقطة E منتصف $[AB]$. احسب e وبرهن أنّ $\dfrac{c-e}{a-e} = \dfrac{a-e}{d-e}$.
3. ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC؟

هذا الملف تجميع لأهم الأفكار و يبقى المرجع الأساسي هو ما تشاهده في الدروس المسجلة ... الغاية من الدفتر هي تجميع الأفكار و تنظيمها