
# طريقي إلى الاشتقاق

**منصة طريقي التعليمية**

**#المستقبل_بيدا_بطريقي**

## المحتوى

**يحتوي هذا الملف على ترتيب كامل لأفكار بحثي الاشتقاق مع حل أغلب مسائل الكتاب و أسئلة الدورات السابقة بالإضافة إلى تمارين خارجية محلولة و غير محلولة لتكون عوناً للطالب في إنجاز هذا البحث باتقان و كفاءة**

### مدرس المادة

نذير تيناوي

## دراسة قابلية اشتقاق تابع

**أولاً: عند نقطة :**

نقول إن التابع $f$ قابل للاشتقاق عند النقطة $a$

إذا كانت النهاية

$$f'(a) = lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

موجودة ومحدودة ووحيدة وندعو ذلك ($f$ قابل للاشتقاق عند $a$أو$f$ اشتقاقي عند $a$)

**تمرين1:**

اثبت ان التابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ قابل للاشتقاق عند $a = 0$

**الحل:**

$$f'(a) = lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$= lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$f$ اشتقاقي عند الصفر و إنّ

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

**تمرين2:**

اثبت ان التابع $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$ قابل للاشتقاق عند $a = 2$

**الحل:**

........................................................................

........................................................................

........................................................................

........................................................................

........................................................................

........................................................................

........................................................................

........................................................................

........................................................................

........................................................................

........................................................................

............................................................

**تمرين3 : أثبت أن التابع $f(x) = x|x|$ اشتقاقي عند $a = 0$**

**الحل:**

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

**تمرين4 : ادرس قابلية اشتقاق التابع**

$f(x) = \sqrt{x}$ عند $a = 0$

**الحل:**

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

**تمرين 5: ادرس قابلية اشتقاق التابع**

$f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ عند $a = 1$

**الحل:**

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

................

....................................................

**تمرين 6 : ادرس قابلية اشتقاق التابع**

$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$ عند $a = 0$

**الحل:**

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

....................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

..............................................................

....................................................

**ثانياً : على مجال :**

**مبرهنة 1:**

1- كل تابع صحيح اشتقاقي على $R$

2- التابعان $x \mapsto sinx$ و $x \longmapsto cosx$ اشتقاقيان على $R$

3- التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$

4- التابع الكسري اشتقاقي على $R$ ما عدا القيم التي تعدم مقامه

5- مجموع و فرق تابعين اشتقاقين على $I$ هو اشتقاقي على $I$

## مجال اشتقاق تابع جذري :

إن أي تابع جذري معرف على مجال من النمط $[a,+\infty[$ أو $]-\infty,a]$ اشتقاقي حتماً على المجال $]a,+\infty[$ أو $]-\infty,a[$ ثم ندرس قابلية الاشتقاق عند الطرف $a$

فإذا كان قابلاً للاشتقاق . نغلق مجال الاشتقاقية

## تدرب :

أوجد مجال اشتقاقية كلاً من التوابع التالية ثم أوجد $f'(x)$

| | |
|---|---|
| 1 | $f(x)=x^2+2x+1$ |
| | |
| 2 | $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ |
| 3 | $f(x)=\sqrt{2x-4}$ |
| | |

| | |
|---|---|
| | |
| 4 | $f(x)=x\sqrt{2-x}$ |
| | |
| 5 | $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ |
| | |
| 6 | $f(x)=x\sqrt{x}$ |
| | |
| 7 | $f(x)=(3-x)\sqrt{3-x}$ |

**نتيجة :**

**كل تابع جذري مضروب بمضمونه يكون اشتقاقي عند طرف المجال**

## قواعد الاشتقاق:

**جدول الاشتقاقات الشهيرة: جدول (1)**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $k$ | $0$ |
| $x$ | $1$ |
| $k.x$ | $k$ |
| $x^n$ | $n.x^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{-1}{x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x$<br>$=1/\cos^2 x$ |
| $\cot x$ | $-(1+\cot^2 x)$<br>$=-1/\sin^2 x$ |

## أمثلة :

| | |
|---|---|
| $f(x)=3x$ | |
| $f(x)=-2x$ | |
| $f(x)=\frac{x}{2}$ | |
| $f(x)=-x$ | |
| $f(x)=x^3$ | |
| $f(x)=x^4$ | |
| $f(x)=x^2$ | |
| $f(x)=x^{-3}$ | |
| $f(x)=\frac{3x}{4}$ | |
| $f(x)=\sqrt{2}\,x$ | |
| $f(x)=\cos x$ | |
| $f(x)=\sin x$ | |
| $f(x)=\sqrt{x}$ | |

**جدول الاشتقاقات الشهيرة: جدول (2)**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ |
| $u-v$ | $u'-v'$ |
| $\lambda.u$ | $\lambda.u'$ |
| $u.v$ | $u'v+v'u$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-v'u}{v^2}$ |

## أمثلة وتمارين:

اوجد مشتق كلاً من التوابع التالية:

$f(x) = 2x + sinx$

$f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$f(x) = x^2 + 4x + 1$

$f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5$

$f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \sqrt{x}$

$f(x) = cosx - 2sinx + \frac{3}{x}$

$f(x) = x\sqrt{x}$

$f(x) = xsinx$

$f(x) = x^2cosx$

$f(x) = \frac{1+x}{2x}$

$f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$f(x) = \frac{x^2-2}{2x}$

$f(x) = \frac{sinx}{x}$

$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

| |
|---|
| |
| $f(x)=x-\frac{2}{x+1}$ |
| |

## الاشتقاق المركب:

التابع المركب: ليكن $g,f$ تابعان بحيث $f$ معرف على $D_f$ و $g(x)\in D_f$ مهما يكن $x\in D_g$

عندئذٍ التابع المركب $fog$ هو التابع المعرف بالشكل:

$$x\mapsto (fog)=f\big(g(x)\big)$$

اشتقاق التابع المركب:

$$\big(f(u(x))\big)'=f'\big(u(x)\big).u'(x)$$

مثال:

$$(sin(x^2))'=cos(x^2)\,.\,(x^2)'$$
$$=2x\,cos(x^2)$$

جدول الاشتقاقات الشهيرة: جدول (3)

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $U^n(x)$ | $n\,U^{n-1}(x).U'(x)$ |
| $sin\big(U(x)\big)$ | $U'(x)cos\,\big(U(x)\big)$ |
| $cos\big(U(x)\big)$ | $-U'(x)sin\,\big(U(x)\big)$ |
| $\frac{1}{U(x)}$ | $-\frac{U'}{U^2}$ |
| $\sqrt{U(x)}$ | $\frac{U'}{2\sqrt{U(x)}}$ |
| $f(ax+b)$ | $af'(ax+b)$ |

## تدريب:

اوجد مشتقات كل من التوابع التالية:

| |
|---|
| $f(x)=(x^2+3x+1)^4$ |
| |
| $f(x)=cos(3x)-sin(2x)$ |
| |
| $f(x)=\frac{x+3}{(x^2-1)^2}$ |
| |
| $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| |
| $f(x)=\cos(x^2)$ |
| |

| |
|---|
| |
| $f(x) = \sin(3x+1)$ |
| |
| $f(x) = 1 + tan^2 x$ |
| |
| $f(x) = (x^2-1)^3$ |
| |
| $f(x) = \sqrt{x^2+3x-1}$ |
| |
| $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ |
| |

## تدريب :

ليكن لدينا التابع , $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

$D = R \backslash \{1\}$

1- احسب مشتقه

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

2- استنتج مشتق التابع

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$$

## الحل

نلاحظ أن:

$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

**حسب قاعدة الاشتقاق المركب:**

$$\Rightarrow g'(x) = f'(\sqrt{x}).(\sqrt{x})'$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{x-2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}}$$

3- استنتج مشتق: $h(x) = \frac{x^4+1}{x^2-1}$

$$h(x) = f(x^2)$$

**وحسب قاعدة اشتقاق تابع مركب:**

$$h'(x) = f'(x^2).(x^2)'$$

$$= \frac{x^4-2x^2-1}{(x^2-1)^2}.2x$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{2x^5-4x^3-2x}{(x^2-1)^2}}$$

4- استنتج مشتق $k(x) = \frac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

$$k(x) = f(\sin x)$$

$$k'(x) = f'(\sin x).(\sin x)'$$

$$\boxed{k'(x) = \frac{\sin^2 x-2\sin x-1}{(\sin x-1)^2}.\cos x}$$

5- استنتج مشتق: $l(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

$$l(x) = \sqrt{f(x)}$$

$$l'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$=\frac{\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$=\frac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}}$$

$$\boxed{l'(x)=\frac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}}$$

## تدريب:

$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

1- عين $D_f$

2- احسب $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع
$g(x)=f(\sqrt{x})\ ,\ h(x)=f(\sin x)$
$l(x)=f(x^4)$

## الحل

$f$ معرف على $R\backslash\{1\}$

واشتقاقي على $R\backslash\{1\}$

-1 $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-1(2x+3)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$=-\frac{5}{(x-1)^2}$$

$$\left(f(U(x))\right)'=f'(U(x)).U'$$

$$f'(\sqrt{x})=\frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2}.(\sqrt{x})'$$

$$g'(x)=\frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x)=f'(\sin x)(\sin x)'$$

$$=\frac{-5}{(\sin x-1)^2}.\cos x$$

$$l'(x)=f'(x^4).4x^3$$

$$=\frac{-5}{(x^4-1)^2}.4x^3$$

## تدريب:

لدينا التابع $f(x)=\frac{x+1}{x}$

1) احسب $f'(x)$

2) استنتج مشتق التابع $f(f(x))$

3) احسب بشكل مباشر $f(f(x))$ ومشتقه ثم استنتج تطابق الحلين.

## الحل

1) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

2) $[f(f(x))]'=f'(f(x)).f'(x)$

$$=\frac{-1}{f^2(x)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{(x+1)^2}$$

3) $f(f(x))=\frac{f(x)+1}{f(x)}=\frac{\frac{x+1}{x}+1}{\frac{x+1}{x}}$

$$= \frac{\frac{x+1+x}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{2x+1}{x+1}$$

$$[f(f(x))]' = \frac{2(x+1)-1(2x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

متطابقان.

## تدرب:

$f(x) = x^2 + 3x$

1- احسب $f'(x)$

2- استنتج $[f(f(x))]'$

3- احسب $f(f(x))$ بشكل مباشر واشتقه.

## الحل:

1- $f'(x) = 2x + 3$

2- $[f(f(x))]' = f'(f(x)).f'(x)$

$$= [2(f(x)) + 3](2x+3)$$

$$= [2(x^2+3x)+3](2x+3)$$

$$= [2x^2+6x+3](2x+3)$$

$$= 4x^3 + 6x^2 + 12x^2 + 18x + 6x + 9$$

$$= 4x^3 + 18x^2 + 24x + 9$$

3- $f(f(x)) = (f(x))^2 + 3(f(x))$

$$= (x^2+3x)^2 + 3(x^2+3x)$$

$$= x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 3x^2 + 9x$$

$$= x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x$$

$$[f(f(x))]' = 4x^3 + 18x^2 + 24x + 9$$

## تدرب :

في كل من الحالات الآتية . أوجد مشتق التابع $f$ ثم احسب $f'(a)$ عند $a$ الموافقة

| | |
|---|---|
| $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$ | $a = 1$ |
| $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ | $a = -1$ |
| $f(x) = \sqrt{2x+4}$ | $a = 2$ |
| $f(x) = xsinx$ | $a = 0$ |
| $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ | $a = 0$ |

## مبرهنة 2: (مجال اشتقاقية تابع مركب) :

ليكن $g$ تابعاً اشتقاقياً على مجال $J$ و $u$ تابع اشتقاقي على مجال $I$ و بفرض أنه أياً كان $x \in I$ فإن $u(x) \in J$ عندئذٍ يكون التابع $f: x \mapsto g(u(x))$ اشتقاقي على $I$

## تدرب :

ليكن التابع $f$ المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

1- عين $f'(x)$

2- نرمز بالرمز $g$ للتابع المعرف على $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ وفق $g(x) = f(sinx)$ . أثبت أن $g$ اشتقاقي على $I$ ثم احسب $g'(x)$ على $I$

3- نرمز بالرمز $h$ للتابع المعرف على $J = ]1,+\infty[$ وفق $h(x) = f(\sqrt{x})$

4- أثبت أن $h$ اشتقاقي على $J$ ثم أوجد $h'(x)$ على $J$

**الحل :**

## التفسير الهندسي للاشتقاق

**تمهيد :**

إن معادلة أي مستقيم تكتب بالشكل :

$$y = ax + b$$

و لكن يمكن أن نأخذ شكلاً آخر للمعادلة فإذا كان $d$ مستقياً مار من النقطة $A(x_0, y_0)$ و ميله $m$ فإن معادلة المستقيم تصبح :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

**تمرين :** أوجد معادلة المستقيم المار من النقطة $A(1,3)$ و ميله $m = 2$

**الحل :**

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 3 = 2(x - 1)$$
$$y - 3 = 2x - 2$$
$$y = 2x - 2 + 3$$
$$y = 2x + 1$$

لاحظ أن أمثال $x$ هي نفسها ميل المستقيم

**مثال :** إن ميل المستقيم $y = 3x - 4$ هو 3

**ملاحظة:** لمعرفة ميل مستقيم من معادلته يجب كتابته بالشكل القانوني أي $y = ax + b$

..............................................................
..............................................................
..............................................................
..............................................................
..............................................................
..............................................................

سيكون العوض جميلاً
واصل المسير .. واستبشر بكل
خير فهو آتٍ

مثال : حدد ميل المستقيمفي الحالات التالية

1- $y - 2x = 1$

نصلح شكل المعادلة:

$$y = 2x + 1$$

و بالتالي $m = 2$

2- $2y - 4x = 0$

نصلح شكل المعادلة $2y = 4x$

$$y = 2x$$

و بالتالي $m = 2$

3- $x + 2y = 5$

نصلح :

$$2y = -x + 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

و بالتالي $m -\frac{1}{2}$

## استنتاج معادلة المماس

ليكن $c_f$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف و المستمر و الاشتقاقي عند $a$ و ليكن $x$ من جوار ما لـ $a$

و ليكن $T$ المستقيم القاطع للخط البياني $c_f$ في النقطتين:

$$(a, f(a) \quad , \quad (x, f(x))$$

نعلم -تعريفاً- أن $m$ ميل المستقيم $T$ يساوي $tan(\theta)$ حيث $\theta$ الزاوية التي يصنعها $T$ مع محور الفواصل

ضع رسمتك هنا :

نلاحظ أن :

المقابل = $f(x) - f(a)$

المجاور = $x - a$

و لما كان :

$$m = tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

و لكن عندما $x \to a$ يسعى المستقيم $T$ ليكون مماساً للخط $C_f$ في النقطة التي فاصلتها $a$ و بالتالي يكون ميل هذا المماس :

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

ضع رسمتك هنا :

و بالتالي : التفسير الهندسي للعدد المشتق $f'(a)$ هو ميل المماس عند النقطة التي فاصلتها $a$

## معادلة المماس :

نعلم أن أي مستقيم ميله $m$ و يمر من النقطة $A(x_0, y_0)$ تعطى بالشكل :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

فإذا كان المستقيم المطلوب هو المماس في النقطة التي فاصلتها $a$

فيكون :

فاصلة نقطة التماس $a$

تراتيب نقطة التماس $y_0 = f(a)$

و ميل المماس $m = f'(a)$

نعوض:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$
$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

**إذن : لإيجاد معادلة المماس :**

1- نحدد الفواصل $a$
2- نحدد التراتيب $f(a)$
3- نوجد الميل $m = f'(a)$
4- نعوض في القانون

**تمرين :**

أثبت أن التابع $f(x) = x^2 + 3x + 1$

قابل للاشتقاق عند $a = 2$

ثم استنتج معادلة المماس في النقطة

التي فاصلتها $a = 2$

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

..........................................................

**مثال :** أوجد ميل المماس للخط $c_f$ عند

حيث $x = 1$ :

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

**الحل :** $f$ اشتقاقي على $R$ :

$$f'(x) = 4x - 4$$
$$m = f'(1) = 4 - 4 = 0$$

**(((إذا كان الميل يساوي الصفر**
**فالمستقيم أفقي )))**

**مثال :** أوجد ميل المماس للتابع

$f(x) = sinx$ في النقطة التي فاصلتها $\frac{\pi}{3}$

**الحل :** $f$ اشتقاقي على $R$ :

$$f'(x) = cosx$$
$$m = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

قانون معادلة المماس عند $x = a$ :

$$T: y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**تدرب :**

أوجد معادلة المماس للخط $c_f$ عند قيمة

$a$ الموافقةفي كلٍ من الحالات الآتية :

1- $a = 1$ : $f(x) = \frac{x}{x+1}$

2- $a = 10$ : $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

3- $a = 0$ : $f(x) = xsinx$

4- $a = 1$ : $f(x) = x\sqrt{x}$

5- $a = \frac{\pi}{4}$ $f(x) = sin(2x)$

**الحل :**

1- $a = 1$ ; $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$f$ اشتقاقي على $R\backslash\{-1\}$:

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

لدينا فاصلة نقطة التماس $a = 1$

نوجد التراتيب :

$$❖ f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

نوجد الميل :

$$❖ f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

**فمعادلة المماس :**

$$T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$y = \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

**2- $f(x) = \sqrt{2x-4} \quad a = 10$**

$f$ اشتقاقي على $]2, +\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$$

لدينا الفواصل $a = 10$

نوجد التراتيب :

$$❖ f(10) = \sqrt{20-4} = 4$$

نوجد الميل :

$$❖ f'(10) = \frac{1}{\sqrt{20-4}} = \frac{1}{4}$$

**فمعادلة المماس :**

$$T: y = f'(10)(x-10) + f(10)$$
$$y = \frac{1}{4}(x-10) + 4$$
$$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} + 4$$
$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

**3- $f(x) = xsinx \quad : \quad a = 0$**

$f$ اشتقاقي على $R$ :

$$f'(x) = sinx + xcosx$$

لدينا الفواصل : $a = 0$

نوجد التراتيب :

$$❖ f(0) = 0$$

نوجد الميل :

$$❖ f'(0) = 0$$

**فمعادلة المماس :**

$$T: y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 0(x-0) + 0$$
$$y = 0$$

**4- $f(x) = x\sqrt{x} \quad : a = 1$**

$f$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}x = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

لدينا الفواصل $a = 1$

نوجد التراتيب :

$$❖ f(1) = 1$$

نوجد الميل :

$$❖ f'(1) = \frac{3}{2}$$

**فمعادلة المماس :**

$$T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$y = \frac{3}{2}(x-1) + 1$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 1$$
$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

-5 $a = \frac{\pi}{4}$ $f(x) = sin(2x)$

**$f$ اشتقاقي على $R$ :**

$$f'(x) = 2\,cos(2x)$$

لدينا الفواصل $a = \frac{\pi}{4}$

نوجد التراتيب :

$$❖ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

نوجد الميل :

$$❖ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\,cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 2\,cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 0$$

**فمعادلة المماس :**

$$T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$y = 0\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$
$$y = 1$$

## حالات خاصة لطلبات المماس :

**الحالة الأولى : الفواصل معلومة**

**و هي ما تدربنا عليه سابقاً**

**الحالة الثانية : التراتيب معلومة $b$:**

1- نضع $f(x) = b$

2- بحل المعادلة نحصل على الفواصل
$a = 1$

3- نشتق

4- نوجد الميل $m = f'(a)$

5- نعوض في القانون

## تدرب :

**ليكن $c$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف وفق $f(x) = \frac{x}{x+1}$ . جد معادلة المماس للخط $C$ في النقطة التي ترتيبها $\frac{3}{4}$**

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

.................................................................

.................................................................

**تدرب :**

ليكن $c$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف وفق $f(x)=\frac{1}{x+2}$ . جد معادلة المماس للخط $C$ في النقطة التي ترتيبها $-1$

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.........................................

**ملاحظة :** قد يوجد أكثر من مماس يحقق الشرط

**تدرب :**

ليكن $c$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف وفق $f(x)=x^2+3x$ . جد معادلة المماس للخط $C$ في النقطة التي ترتيبها $-2$

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.................................................................

.........................................

**الحالة الثالثة :** الميل معلوم $m$ :

1- نشتق
2- نضع $f'(x)=m$
3- نحل المعادلة فنحصل على الفواصل $a$
4- نوجد التراتيب $f(a)$
5- نعوض في القانون

**تدرب :**

ليكن $c$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف وفق $f(x)=x^2+3x$ . جد معادلة المماس للخط $C$ الذي ميله 2

..............................................................................
..............................................................................
..............................................................................
..............................................................................
..............................................................................
..............................................................................
..............................................................................
..................................................
..............................................................................
.......................................................

**تدرب :**

ليكن $c$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف وفق $f(x)=\frac{2+x}{x}$ . جد معادلة المماس للخط $C$ الذي ميله $-\frac{1}{2}$

..............................................................................
.......................................................
..............................................................................
.......................................................
..............................................................................
.......................................................
..............................................................................
.......................................................

..............................................................................
.......................................................
..............................................................................
.......................................................
..............................................................................
.......................................................
.................................................................

**الحالة الرابعة : مستقم موازي**

1- نكتب معادلة المستقيم بالشكل $y=mx+p$

2- نشتق

3- نضع $f'(x)=m$

4- نُرد إلى الحالة السابقة

**تدرب :**

ليكن $c$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف وفق $f(x)=x^2+5$ . جد معادلة المماس للخط $C$ الموازي للمستقيم الذي معادلته

$$y-2x=0$$

..............................................................................
..............................................................................
..............................................................................
..............................................................................
..............................................................................

..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
............

**الحالة الخامسة : مماسّ أفقي**

1- نشتق

2- بما أن المماس أفقي فإن ميله
$m = 0$
فنضع $f'(x) = 0$

3- نكمل كما الحالة السابقة

**تدرب :**

ليكن $c$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف وفق $f(x) = x^2 + 6x$ . جد معادلة المماس الأفقي للخط $C$

..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................

..................................................................
..................................................................
..................................................................
..................................................................
............

**أضف إليها الحالة المميزة التالية :**

إذا أعطانا تابع ومستقيم معامد للمماس عندئذ نتبع الخطوات التالية :

1- نكتب معادلة المماس بالشكل القانوني
$y = ax + b$

2- نرمز لميل المستقيم المعطى $m'$

3- شرط التعامد $m.m' = -1$

4- نشتق ثم نضع $f(x) = -\frac{1}{m'}$
ثم نعزل $x$ فنحصل على الفواصل
$x = a$

5- نوجد معادلة المماس كما تعلمنا سابقاً .

**مثال :** أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع $f$ المعرف بالشكل :

$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

و المعامد للمستقيم $y + \frac{x}{4} = 1$

**الحل :**

1- نكتب معادلة المستقيم بالشكل القانوني :

$$y = -\frac{1}{4}x + 1$$

2- لدينا $m' = -\frac{1}{4}$

3- فميل المماس المطلوب هو :

$$m = -\frac{1}{m'}$$

$$m = -\frac{1}{-\frac{1}{4}} = 4$$

4- و بالتالي يكون :

$$f'(x) = 4$$
$$4x - 4 = 4$$
$$4x = 8 \quad \rightarrow x = 2$$

ثم نحسب $f(2) = 3$ فنجد أن

معادلة المماس :

$$T: y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
$$y = 4(x-2) + 3$$
$$y = 4x - 5$$

## تمارين :

<u>التمرين الأول</u>: ليكن $c$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $R \ \backslash\{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$

1- اكتب معادلة لمماس $C$ في النقطة التي تساوي فاصلتها 1

2- هل يقبل $C$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -4x$

3- هل يقبل $C$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$

<u>التمرين الثاني</u> : ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $R$ وفق $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

1- أعطِ معادلة لمماس $C$ في النقطة التي تساوي فاصلتها 1

2- هل يقبل $C$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4y + x = 0$

3- هل يقبل $C$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x - y = 0$

<u>التمرين الثالث</u> : ليكن لدينا التابع $f$ المعرف على $R$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

اكتب معادلة لمماس الخط البياني للتابع $f$ في النقطة التي فاصلتها $x = -2$

## الحل:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$f(-2) = \sqrt{(-2)^2+5} = \sqrt{9} = 3$$

$$f'(-2) = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+5}} = -\frac{2}{3}$$

فمعادلة المماس :

$$T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y = -\frac{2}{3}(x+2)+3$$
$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 3$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

**ملاحظات الشغف ^_^ :**

**ملاحظة1 : قد يرد السؤال بالشكل : أوجد معادلة المماس للخط البياني في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب**

**لإيجاد نقطة التقاطع مع محور التراتيب**

**نضع $x = 0$ أي نحسب $f(0)$ فتكون نقطة التماس $(0, f(0))$**

**مثال : أوجد معادلة لمماس الخط البياني للتابع $f$ المعرف بالشكل $f(x) = x^2 - 3x + 4$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب**

**الحل :**

- إيجاد نقطة التماس : نضع $x = 0$ :

$$f(0) = 4$$

فنقطة التماس $(0, 4)$

- إيجاد الميل :

$$f'(x) = 2x - 3$$
$$m = f'(0) = -3$$

- و عليه تكون معادلة المماس :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = -3x + 4$$

**ملاحظة2: في حال كان الطلب إيجاد معادلة المماس في نقطة التقاطع مع محور الفواصل عندئذٍ لإيجاد نقطة التماس نضع $y = 0$**

**أي $f(x) = 0$ ونحل المعادلة للوصول إلى فواصل نقطة التماس $x = a$**

**مثال : أوجد معادلة لمماس الخط البياني للتابع $f$ المعرف بالشكل :**

$$f(x) = \sqrt{2x-4} - 1$$

**في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل .**

**الحل :**

نضع $y = 0$ أي:

$$f(x) = 0$$
$$\sqrt{2x-4} - 1 = 0$$
$$\sqrt{2x-4} = 1$$
$$2x - 4 = 1$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}$$

و بالتالي نقطة التماس $(\frac{5}{2}, 0)$

لنوجد الميل :

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$$

$$m = f'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5-4}} = 1$$

فمعادلة المماس :

$$y = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$y = x - \frac{5}{2}$$

**الملاحظة3** : أحياناً يكون السؤال أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع $f$ في النقطة التي تعدم مشتقه الثاني

عندئذٍ :

1- نحسب $f'(x)$
2- نحسب $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$
3- نعدم المشتق الثاني $f''(x) = 0$ فنحصل على فواصل نقطة التماس $x = a$
4- نحسب $f(a), f'(a)$ و نعوض في القانون .

**مثال :** أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع $f$ المعرف بالشكل $f(x) = 3x^2 - x^3$ في النقطة التي تعدم مشتقه الثاني .

**الحل :**

1- نوجد المشتق الاول :
$$f'(x) = 6x - 3x^2$$
2- نوجد المشتق الثاني :
$$f''(x) = 6 - 6x$$
3- نعدم المشتق الثاني :
$$6 - 6x = 0$$
$$x = 1$$
و بالتالي فواصل نقطة التماس $a = 1$

4- نحسب $f(1) = 3 - 1 = 2$
$$f'(1) = 6 - 3 = 3$$
5- فمعادلة المماس هي :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$y = 3(x-1) + 2$$
$$y = 3x - 3 + 2$$
$$y = 3x - 1$$

**الملاحظة4** : إيجاد معادلة مماس يمر من المبدأ للخط البياني للتابع $f$ ( تُدرس في بحث التابع اللوغارتمي لاحقاً)

## التقريب التآلفي :

لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $f(a+h)$ باستخدام التقريب التآلفي :

1- نفرق المضمون إلى مجموع عددين :
الأول : $a$ سهل الحساب
الباقي : $h$
2- نشتق التابع $f$
3- نعوض في القانون :
$$f(a+h) \approx hf'(a) + f(a)$$

مثال1 : ليكن $f(x) = \frac{x}{x+1}$ , جد قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

.....................................................................

.....................................................................

..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................

مثال 2 : ليكن $f(x) = x^2 - 3x + 1$

جد قيمة تقريبية للعدد $f(1.9)$

..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................

**مثال3** : جد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{9.2}$

..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................

**ملاحظة :**

في حال كان لدينا معادلة المماس عند النقطة $a$ فإن تعويض القيمة $a + h$ في معادلة المماس يعطي نفس القيمة التقريبية

مثال : ليكن $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

1- جد معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها 1

2- جد قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................
..........................................................................

## تطبيقات الاشتقاق

يستخدم الاشتقاق في دراسة سلوك تابع و معرفة مجالات تزايده و تناقصة

و لذلك سنبدأ بأول التطبيقات

## دراسة اطراد تابع

مبرهنات :

- إذا كان $f'(x) > 0$ على المجال $I$ فإن $f$ متزايد تماماً على $I$
- إذا كان $f'(x) < 0$ على المجال $I$ فإن $f$ متناقص تماماً على $I$
- إذا كان $f'(x_0) = 0$ و غير التابع $f'$ إشارته عندها قلنا أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلياً للتابع $f$

## دراسة تغيرات تابع

**تهدف دراسة تغيرات تابع لمراقبة سلوك تابع و مراقبة فترات تزايده و تناقصه و قيمه الحدية**

**و أعلى قيمة يبلغها التابع أو أصغر قيمة**

**و خطوات دراسة التغيرات هي كالتالي :**

1- نوجد مجموعة التعريف و نكتبها على شكل مجال أو اجتماع مجالات

2- نوجد نهايات التابع عند أطراف المجالات المفتوحة و الصور عند أطراف المجالات المغلقة

3- نذكر ما له من مقاربات و نتوقع جهة التقارب ( إضافي)

4- $f$ اشتقاقي على.....................:

5- نشتق التابع لنوجد $f'(x)$

6- نعدم المشتق أي نضع $f'(x) = 0$

7- في حال وجود قيم تعدم المشتق فإننا نوجد صور هذه النقاط فقط في حال انتمت لمجموعة التعريف و إلا لا نصورها و لا نستخدمها

8- ننظم جدول التغيرات الذي يأخذ الشكل التالي :

| | |
|---|---|
| $x$ | مجموعة التعريف – القيم التي عدمت المشتق إن وجدت |
| $f'(x)$ | أصفار تحت القيم التي عدمت المشتق و إشارات بينها |
| $f(x)$ | النهايات وصور القيم التي عدمت المشتق (القيم الحدية) و أسهم وفق الإشارات في حقل $f'(x)$ |

**أشكال مميزة :**

**الشكل الاول : في حال كان التابع غير معرف عند نقطة فقط (يستثني نقطة)**

مثل $D_f = ]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ عندئذٍ يكون الجدول من الشكل :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | |
| $f(x)$ | | | |

حيث أن مرور من حقل $f'$ يعني أن $f$ غير اشتقاقي عن النقطة المقابلة

و متابعته للوصول لحقل $f$ يعني أن $f$ غير معرف عند هذه النقطة

**الشكل الثاني**:أما إذا كان شكل الجدول :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | |
| $f(x)$ | | | |

فهذا يعني أن مجموعة التعريف هي $R$ اي $f$ معرف عند $1$ ( لأن $f$ ليس لديه في حقل $f(x)$ ) و بالتالي لا يعاني مشكلة فهو معرف عند $x = 1$ و ليس اشتقاقي عندها

وهذه الحالة نصادفها في التابع الجذري غالباً

((هذا يعطينا معلومة في غاية الأهمية و هي إذا كان $f$ غير معرف عند نقطة فهو حتماً غير اشتقاقي عندها ))

**الشكل الثالث**: إذا كانت مجموعة التعريف تستثني مجالاً مثلاً $D_f = ]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ فهنا يأخذ المجال الشكل :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | |
| $f(x)$ | | | | |

هذا يعني أن التابع غير موجود بين الصفر و ال4

**الشكل الرابع** : التابع يستثني نقطتين مثلاً :

$$D_f = ]-\infty, 1[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$$

فيكون شكل الجدول عندئذٍ :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | |
| $f(x)$ | | | | |

**خطوات رسم التوابع :**

1. نرسم المقاربات (ونتوقع جهة التقارب ) و في حال عدم وجود مقاربات نحدد الأرباع
2. القيم الحدية
3. نقاط مساعدة :

النقاط مع $xx'$ ⇐ نضع $y = 0$

النقاط مع $yy'$ ⇐ نضع $x = 0$

## مسائل متنوعة في دراسة التغيرات

التمرين 1 : ادرس تغيرات التابع

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

و ارسم خطه البياني

## الحل :

1- مجموعة التعريف :

$f$ تابع صحيح معرف على $R$

$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$

2- النهايات و المقاربات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{3}(-\infty)^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{3}(+\infty)^3 = -\infty$$

ولا يوجد مقاربات

3- الاشتقاق:

$f$ اشتقاقي على $R$ :

$$f'(x) = -\frac{1}{3}3x^2 + 4x - 3$$

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$$

4- نعدم المشتق :

$$f'(x) = 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

نضرب الطرفين بـ $-1$ :

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 , x = 3$$

نلاحظ أن كل من النقطتين تنتمي إلى مجموعة تعريف , لذلك نوجد صورة كل منهما

5- $f(1) = -\frac{1}{3} + 2 - 3 + 1 = -\frac{1}{3}$

و $f(3) = 1$

6- نشكل جدول التغيرات الآن :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{3}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**انتبيه:**

لو طُلب معرفة المستقر الفعلي فإنه من جدول التغيرات يمكن أن نقول إن المستقر الفعلي يؤخذ من حقل $f(x)$ على شكل مجال بدايته أصغر قيمة في هذا الحقل و نهايته أكبر قيمة من هذا الحقل

و هذه الأطراف إذا كانت تقابل أعداداً في حقل $x$ من $D_f$ فنأخذها مجالات مغلقة

أما إذا كانت تقابل قيماً لا تنتمي إلى $D_f$ فنضع الأقواس مفتوحة

**في المثال السابق : إن المستقر الفعلي:**

$$E_f = ]-\infty, +\infty[$$

**التمرين 2 :**

ادرس تغيرات التابع $f$ ثم استنتج مستقره الفعلي

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

**الحل :**

لدينا $f$ معرف على $]-\infty, +\infty[$ و إنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow 2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

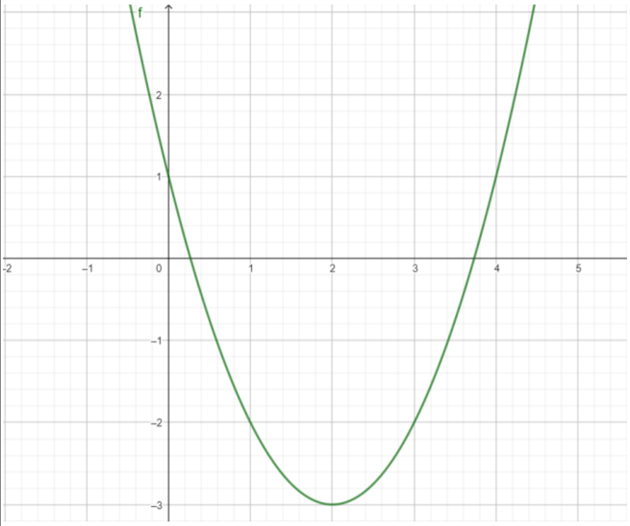
$$\boxed{x = 2}$$

$$f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $- - -$ | $0$ | $+ + +$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

من جدول التغيرات يمكن ملاحظة أن المستقر الفعلي هو :

$$E_f = [-3, +\infty[$$



**التمرين 3 :**

ليكن لدينا $C_f$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف بالشكل

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها .

**الحل :**

① $f$ تابع صحيح معرف على $\mathbb{R}$

$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$

②

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2) = +\infty$$

③ $f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ :

④ $f'(x) = 2x - 4$

⑤ نعدم المشتق

$$f'(x) = 0$$
$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$
$$f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

بالتقاطع مع $yy'$ نضع $x = 0$ :

$$y = f(0) = 3$$

التقاطع مع $xx'$ نضع $y = 0$ :

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-3)(x-1) = 0$$
$$x = 3 \quad , \quad x = 1$$

الرسم:

التمرين 4 :

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$f$ كسري يعرف بشرط المقام $0 \neq$

$$x + 1 = 0$$
$$x = -1$$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$
$$= ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

$$\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

و $C$ يقع على يسار مقاربه

$$\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

و $C$ يقع على يمين مقاربه

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ :

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x)}{(x+1)^2}$$

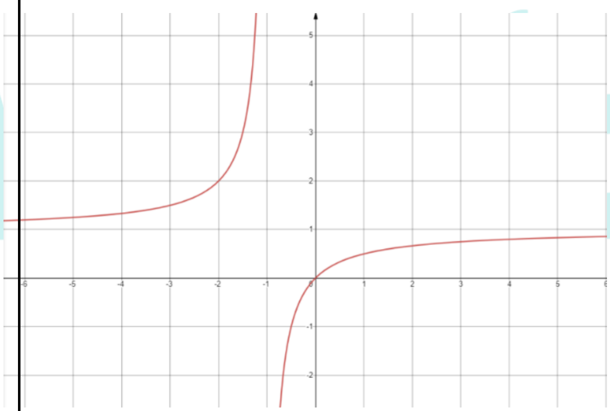
$$= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{c} f'(x) = 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0 \\ 1 \neq 0 \end{array}\right\}$$ مستحيلة

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | ‖ | $+$ |
| $f(x)$ | $1 \nearrow +\infty$ | ‖ | $-\infty \nearrow 1$ |

التقاطع مع $yy'$ نضع $x = 0$ :

$$y = f(0) = 0$$



التمرين5 :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$$

**الحل :**

$f$ معرف على $\mathbb{R} : ]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{1}{3}.3.x^2 - 4x$$

$$f'(x) = x^2 - 4x$$

نعدم المشتق

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

إما $x = 4$ أو $x = 0$

$$f(0) = 0$$

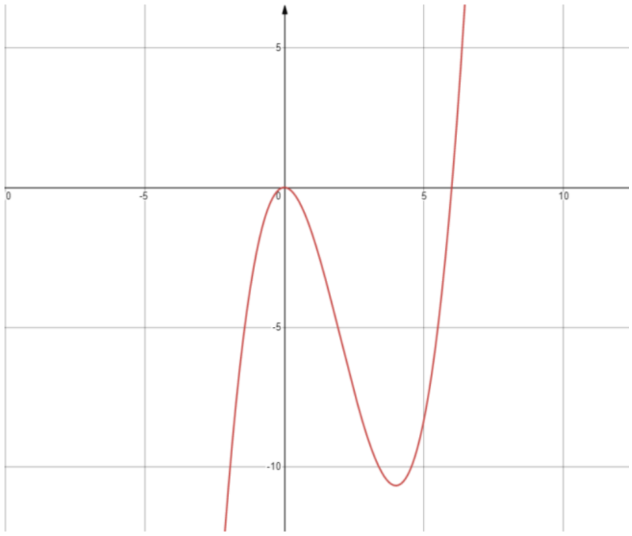
$$f(4) = \frac{1}{3}(4)^3 - 2(4)^2 = \frac{64}{3} - \frac{32}{1}$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{96}{3} = -\frac{32}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{32}{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(0) = 0$ قيم حدية كبرى

$f(4) = -\frac{32}{3}$ قيمة حدية الصغرى




## تمرين 6 :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

## الحل :

$f$ كسري معرف على

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$D_f = ]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

**النهايات :**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

$$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{+2}{0^-} = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

و $C$ يقع على يسار مقاربه

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{+2}{0^+} = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

و $C$ يقع على يمين مقاربه

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ :

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x+1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ‖ | $-$ |
| $f(x)$ | $1 \searrow -\infty$ | ‖ | $+\infty \searrow 1$ |

التقاطع مع $yy'$ نضع $x = 0$ :

$$y = f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

التقاطع مع $xx'$ نضع $y = 0$ :

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

تمرين 7 :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$$

1- جد مجموعة تعريف التابع

2- احسب نهايات $f$ عند أطراف مجموعة تعريفه و اذكر ما له من مقاربات

3- ادرس تغيرات $f$ و نظم جدول تغيرات بها

4- جد معادلة مقارب مائل للخط $c_f$ و ادرس الوضع النسبي لهما

**الحل :**

$$D_f = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

**النهايات :**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - 2 + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 2 + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 - 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

و $C$ يقع على يسار مقاربه

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0 - 2 + \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

و $C$ يقع على يمين مقاربه

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

نعدم المشتق

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2-1}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

نجذر

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 - 2 - 1 = -4$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-4$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

نضع $\Delta: y = x - 2$ فيكون :

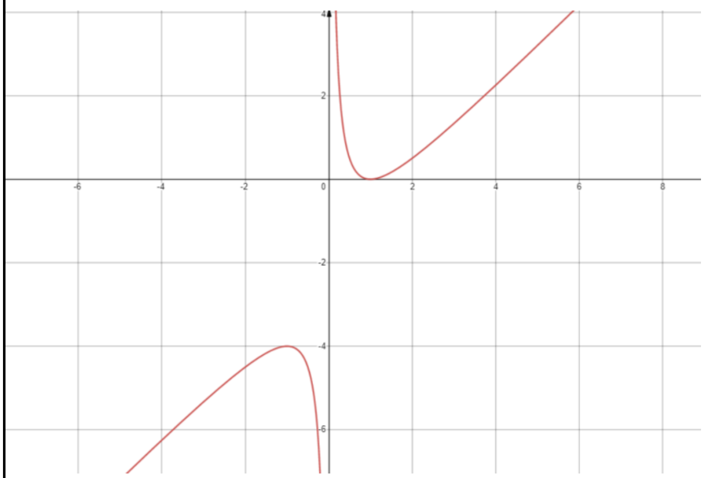
$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

فالمستقيم $\Delta$ مقارب مائل في جوار

$+\infty,-\infty$



**تمرين 8 :**

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x-3)}$$

**الحل :**

$f$ تابع كسري معرف بشرط المقام لا ينعدم

$$x(x-3)=0$$

$$x=0$$

$$x-3=0\Rightarrow x=0$$

$$D_f=]-\infty,0[\cup]0,3[\cup]3,+\infty[$$

نصلح شكل التابع:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x}$$

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{+1}{0^-}=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

و $C$ يقع على يمين مقاربه

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\frac{+1}{0^+}=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

و $C$ يقع على يسار مقاربه

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\frac{+4}{0^-}=-\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

و $C$ يقع على يسار مقاربه

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\frac{+4}{0^+}=+\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

و $C$ يقع على يمين مقاربه

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$ :

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-3x)-(2x-3)(x^2-2x+1)}{(x^2-3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2-3x)-(2x-3)(x-1)^2}{(x^2-3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)[2x^2-6x-(2x-3)(x-1)]}{(x^2-3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)[2x^2-6x-2x^2+2x+3x-3]}{(x^2-3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(-x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

**نعدم المشتق**

$$f'(x) = 0$$

$$(x-1)(-x-3) = 0$$

إما $x-1=0 \Rightarrow x=1$

أو $-x-3=0 \Rightarrow x=-3$

$$f(1) = 0$$

$$f(-3) = \frac{16}{-3(-6)} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\cdot$ | $+$ | | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $\frac{8}{9}$ | ↗ | $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $1$ |

## تمرين 9 :

$$f(x) = x+1-\frac{1}{x+1}$$

① أوجد مجموعة تعريف $f$

② احسب نهايات $f$ عند أطراف مجال تعريفه

③ أثبت أن $\Delta: y = x+1$ مقارب مائل ل $C_f$ وادرس الوضع النسبي

④ ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها

⑤ ارسم $\Delta$ وارسم $C_f$

**الحل :**

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$

**النهايات :**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = 0 - \frac{+1}{0^-} = +\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

و $C$ يقع على يسار مقاربه

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = 0 - \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

و $C$ يقع على يمين مقاربه

**إثبات المقارب المائل :**

$$f(x)-y_\Delta = x+1-\frac{1}{x+1}-(x+1)$$

$$f(x)-y_\Delta = \frac{-1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0\end{array}\right\}$$

فالمستقيم $\Delta$ مقارب عند $+\infty$ و $-\infty$

$f(x)-y_\Delta = -\dfrac{1}{x+1} = 0$ مستحيلة

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y_\Delta$ | $+$ | ‖ | $-$ |
| الوضع النسبي | $\Delta$ فوق $C$ | ‖ | $\Delta$ تحت $C$ |

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f'(x)=1-\frac{0(x+1)-1(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=1+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2+1}{(x+1)^2}>0$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | ‖ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ | ‖ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

التقاطع مع $xx'$ نضع

$$y=0\Rightarrow f(x)=0$$

$$\frac{(x+1)}{1}-\frac{1}{x+1}=0$$

$$\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)}=0$$

$$(x+1)^2-1=0$$

$$(x+1)^2=1$$

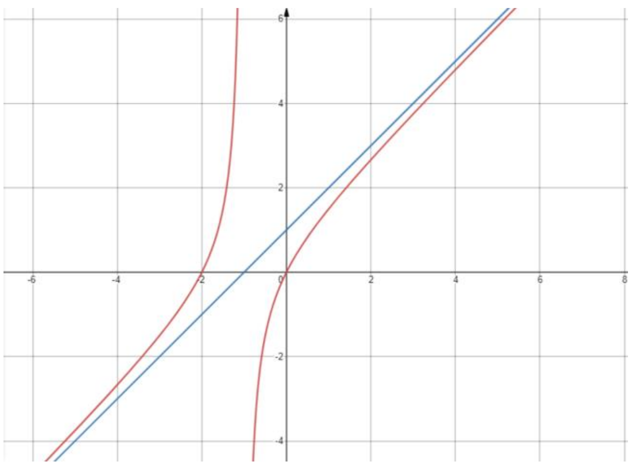
نجذر

$$x+1=+1\Rightarrow x=0$$
$$x+1=-1\Rightarrow x=-2$$

لنضع نقاطاً مساعدة لرسم المقارب

$y=x+1$

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $(0,1)$ |
| 1 | 2 | $(1,2)$ |



**التمرين 10 :**

$$f(x)=\sqrt{x+1}$$

## الحل :

$f$ معرف بشرط

$$x + 1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

$$D_f = [-1, +\infty[$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(-1) = 0$$

$f$ اشتقاقي على $]-1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

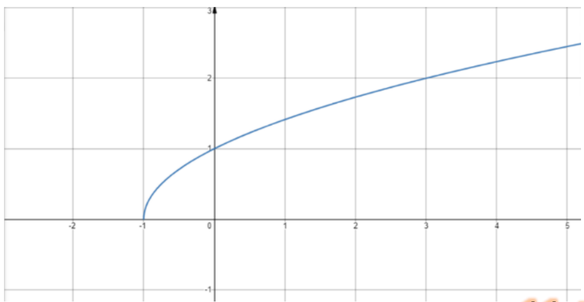
$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 = 0$ مستحيلة

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

التقاطع مع $yy'$ نضع

$$x = 0$$

$$f(0) = 1$$



## التمرين 11 :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$

النهايات :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

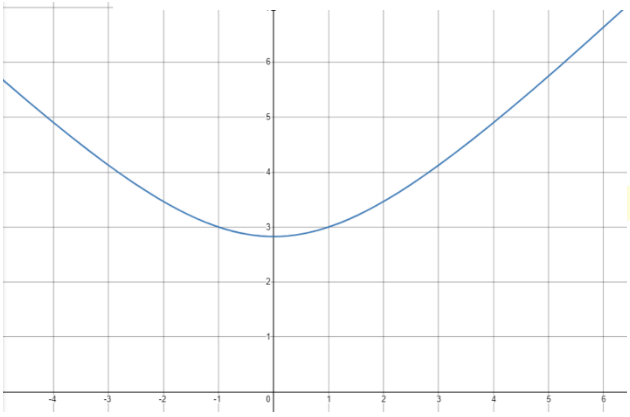
$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



## التمرين 12 :

$$f(x) = 2\sqrt{2 - x}$$

## الحل :

معرف بشرط

$$2 - x \geq 0$$
$$-x \geq -2$$
$$x \leq 2$$
$$D_f = ]-\infty , 2]$$

**النهايات :**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$f(2) = 2\sqrt{2-2} = 0$$

$f$ اشتقاقي على $]-\infty , 2[$

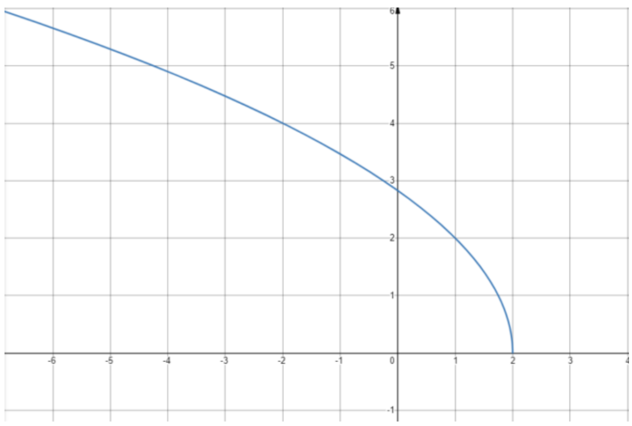
$$f'(x) = 2 . \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$$
$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2-x}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \; -1 = 0$ مستحيلة

| $x$ | $-\infty$ | | 2 |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | 0 |

**التقاطع مع محور $yy'$ نضع $x = 0$**

$$f(0) = 2\sqrt{2-0} = 2\sqrt{2}$$



**التمرين13**

$$f(x) = x\sqrt{3-x}$$

① أوجد مجموعة تعريفه واحسب النهايات من أطرافها المفتوحة .

② ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها .

③ ارسم $C_f$ .

**الحل :**

$$3 - x \geq 0$$
$$-x \geq -3$$
$$x \leq 3$$
$$D_f ]-\infty , 3]$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$f(3) = 3\sqrt{3-3} = 0$$

$f$ اشتقاقي على $]-\infty , 3[$

$$f'(x) = (1)(\sqrt{3-x}) + \left(\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}\right)(x)$$
$$f'(x) = \sqrt{3-x} - \frac{x}{2\sqrt{3-x}}$$

**نوحد المقامات**

$$f'(x) = \frac{2\left(\sqrt{3-x}\right)^2 - x}{2\sqrt{3-x}}$$
$$f'(x) = \frac{6 - 2x - x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{6 - 3x}{2\sqrt{3-x}}$$

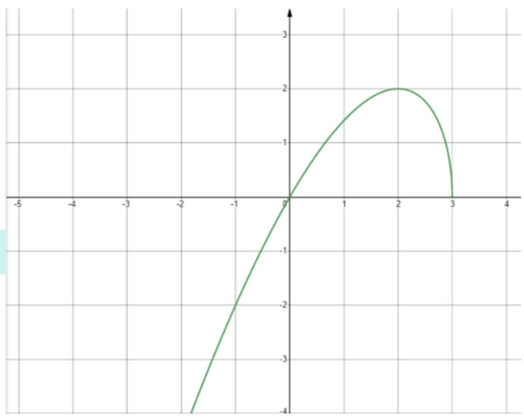
**نعدم المشتق**

$$f'(x) = 0$$
$$6 - 3x = 0$$
$$6 = 3x$$
$$x = \frac{6}{3} = 2$$
$$f(2) = 2\sqrt{3-2} = 2$$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ |

التقاطع مع $xx'$ نضع $y = 0$

$$x\sqrt{3-x} = 0$$
$$x = 0 \,, x = 3$$



تمرين 15 :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x^2}$$

1. أوجد $D_f$ .
2. احسب النهايات .
3. أثبت أن $\Delta: y = 2x - 1$ مقارب مائل وادرس الوضع النسبي .
4. ادرس تغيرات $f$ .
5. ارسم $\Delta$ وارسم $C_f$ .

**الحل :**

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$$
$$D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 - 1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

و $C$ يقع على يمين مقاربه

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

و $C$ يقع على يسار مقاربه

$$f(x) - y_\Delta = 2x - 1 + \frac{1}{x^2} - (2x - 1)$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x^2}$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) - y_\Delta$ | $+$ | \|\| | $+$ |
| الوضع النسبي | $C$ فوق $\Delta$ | \|\| | $C$ فوق $\Delta$ |

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$ :

$$f'(x) = 2 + \frac{0(x^2) - 2x(1)}{x^4}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{x^4}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0$$

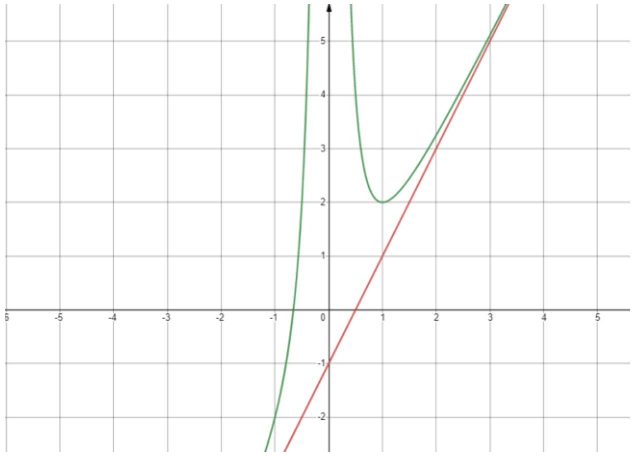
$$2x^3 - 2 = 0$$

$$2x^3 = 2$$

$$x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | \|\| | $-$ $0$ $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ | \|\| | $+\infty \searrow 2 \nearrow 1$ | |



التمرين 16 :

ليكن $f$ التابع المعرف بالشكل:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها.

التمرين17: ليكن التابع $f$ المعرف بالشكل:

$$f(x) = x^2 - 6x$$

ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها واذكر حالة من قيم حدية مبيناً نوعها

التمرين18: $f$ تابع معرف بالشكل:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 3}$$

حيث: $D_f = R$

1- ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها.

2- اوجد معادلة المماس للتابع $f$ عند النقطة التي فاصلتها صفر

**الحل :**

1- $D_f = ]-\infty, +\infty[$

$$lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ مقارب افقي بجوار $+\infty$

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ مقارب افقي بجوار $-\infty$

$f$ اشتقاقي على $R$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x+3) - (2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x+3-x^2-x)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$3(2x+1) = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4} + 3}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{11}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | |
| $f(x)$ | $1$ ↘ | $-\frac{1}{11}$ | ↗ $1$ |

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{11}$ قيمة صغرى محلياً

$$a = 0$$

2- $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

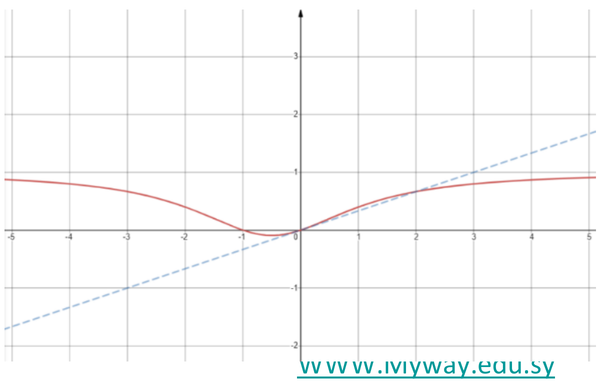
$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}(x) + 0$$

$$y = \frac{1}{3}x$$



التمرين 22: ليكن $f$ المعرف على $R/\{-1\}$ بالشكل:

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+1}$$

1- ادرس نهايات $f$ عند اطراف مجال تعريف

2- عين حاله من مقاربات افقية او شاقولية

3- احسب $f'(x)$ وادرس اشارته

4- ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها.

5- ارسم ماوجدته من مقاربات وارسم $c_f$

**الحل :**

$$D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$

$$lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$

$$lim_{x\to-\infty}f(x)=2$$

$y=2$ مقارب افقي في جوار $+\infty,-\infty$

$$lim_{x\to-1^+}f(x)=-\frac{6}{+0}=-\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و $c$ يقع على يمين مقاربه.

$$lim_{x\to-1^-}f(x)-\frac{6}{-0}=+\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و $c$ يقع على يسار مقاربه.

$f$ تابع اشتقاقي على $R/\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-(2x-4)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2x+2-2x+4}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{6}{(x+1)^2}>0$$

$f$ متزايد دوماً

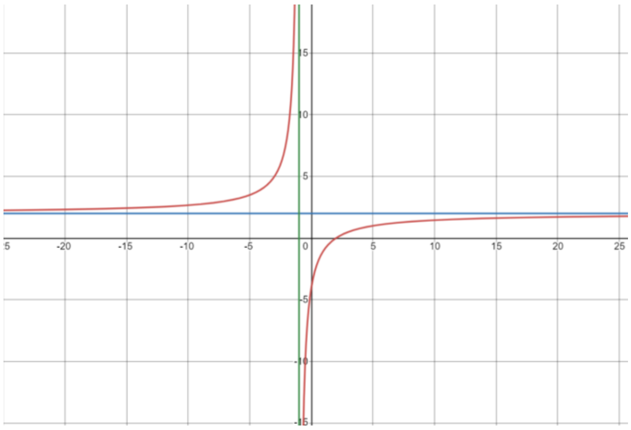
| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $\|\|$ | $+$ |
| $f(x)$ | $2 \nearrow +\infty$ | $\|\|$ | $-\infty \nearrow 2$ |

التقاطع مع $yy'$ نضع $x=0$

$$y=\frac{2(0)-4}{0+1}=-4\Rightarrow(0,-4)$$

التقاطع مع $xx'$ نجعل $y=0$

$$\frac{2x-4}{x+1}=0\Rightarrow x=2\quad M(2,0)$$



التمرين23:

ليكن $f$ المعرف على $R^*$ بالشكل:

$$f(x) = \frac{-2x+1}{x}$$

1- ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها.

2- عين ماله من مقاربات افقية او شاقولية وارسم $c_f$

**الحل :**

$f$ معرف على $R/\{0\}$

$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$

$lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$

$y = -2$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$y = -2$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x = 0$ مقارب افقي شاقولي نحو $+\infty$

ويقع $c_f$ على يمين مقاربه

$lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x = 0$ مقارب افقي شاقولي نحو $-\infty$

ويقع $c_f$ على يسار مقاربه

$f$ اشتقاقي على $R/\{0\}$

$$f'(x) = \frac{-2(x) - 1(-2x+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x+2x-1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2} < 0$$

متناقص دوماً

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-2 \searrow -\infty$ | $\|\|$ | $+\infty \searrow -2$ |

$$\frac{-2x+1}{x} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

التقاطع مع $yy'$ نضع $x = 0$

ولكن التابع غيرمعرف عند الصفر اذاً $c_f$ لايقطع محور $yy'$

**كيف نثبت فردية أو زوجية تابع :**

في كلتا الحالتين يجب أن يتحقق الشرط الآتي :

$$x \in D_f \quad \Rightarrow -x \in D_f$$

ثم نقول بما يلي:

1- نحسب $f(-x)$

( و ذلك بأن نستبدل كل $x$ بـ $-x$ )

2- نميز الحالات الآتية :

أ- إذا كان $f(-x) = f(x)$ عندئذٍ $f$ زوجي

ب- إذا كان $f(-x) = -f(x)$ فإن $f$ فردي

ت- إذا لم نصل إلى شكل بدلالة $f(x)$ فهو ليس فردياً و ليس زوجياً.

**الصفات التناظرية :**

- التابع الزوجي متناظر بالنسبة لمحور التراتيب
- التابع الفردي متناظر بالنسبة للمبدأ

أمثلة :في كل من الحالات التية ادرس زوجية أو فرديه التابع على مجموعة تعريفه .

1) $f(x) = x^4 - x^2 + 1 \quad , D_f = R$

الشرط الأول :

$$x \in R \Rightarrow -x \in R$$

الشرط الثاني :

$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 1 = x^4 - x^2 + 1 = f(x)$$

فهو تابع زوجي و خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

2) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \quad , \quad D_f = R^*$

الشرط الأول:

$$x \in R^* \quad \Rightarrow \quad -x \in R^*$$

الشرط الثاني :

$$f(-x) = \frac{-x}{2} + \frac{1}{-x} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

فهو تابع فردي و خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ .

3) $f(x) = x\sqrt{x^2+1} \quad , \quad D_f = R$

الشرط الاول : $x \in R \quad \Rightarrow \quad -x \in R$

الشرط الثاني :

$$f(-x) = -x\sqrt{(-x)^2+1} = -x\sqrt{x^2+1} = -f(x)$$

فهو تابع فردي و خطه البياني متناظر للمبدأ

4) $f(x) = sinx \quad , D_f = R$

الشرط الاول : $x \in R \quad \Rightarrow -x \in R$

الشرط الثانى:

$$f(-x) = sin(-x) = -sinx = -f(x)$$

**فهو تابع فردي خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ**

5) $f(x) = cosx \quad , \quad D_f = R$

**الشرط الأول :** $x \in R \quad \Rightarrow \quad -x \in R$

**الشرط الثاني :**

$$f(-x) = cos(-x) = cosx = f(x)$$

**فهو زوجي متناظر لمحور التراتيب**

6) $f(x) = tanx \quad , \quad D_f = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

**الشرط الأول :**

$$x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \quad \Rightarrow -x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

**الشرط الثاني :**

$$f(-x) = tan(-x) = \frac{sin(-x)}{cos(-x)} = \frac{-sin(x)}{cos(x)} = -tan(x) = -f(x)$$

**فهو فردي و متناظر للمبدأ.**

7) $f(x) = \frac{tanx}{x^2+4} \quad , \quad D_f = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

**الشرط الأول :**

$$x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \quad \Rightarrow -x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

**الشرط الثاني :**

$$f(-x) = \frac{tan(-x)}{(-x)^2 + 4} = \frac{-tanx}{x^2 + 4} = -f(x)$$

**فهو تابع فردي و خطه البياني متناظر للمبدأ**

## التابع الدوري :

**نقول عن التابع $f$ إنه دوري و دوره $T$ إذا تحقق أن :**

$$\forall x \in D_f \quad : f(x+T) = f(x)$$

**أمثلة :**

**$x \mapsto sinx$ دوري و دوره $2\pi$ ذلك أن :**

$$\forall x \in R \quad : sin(x+2\pi) = sinx$$

**$x \mapsto cosx$ دوري و دوره $2\pi$ ذلك أن :**

$$\forall x \in R : cos(x+2\pi) = cosx$$

**$x \mapsto tanx$ دوري و دوره $\pi$ ذلك أن :**

$$\forall x \in R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\} \quad :$$

$$tan(x+\pi) = \frac{sin(x+\pi)}{cos(x+\pi)} = \frac{-sinx}{-cosx} = tanx$$

**ملاحظة هامة : إذا كان $f$ دوري و دوره $T$ و كان $f$ معرف على $R$ فإنه تكفي دراسته على المجال $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$**

## مسألة دراسة تابع مثلثاتي :

ليكن لدينا التابع $f$ المعرف على $R$ بالشكل :

$$f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$$

① ادرس زوجية أو فردية التابع ثم استنتج الصفة التناظرية لخطه البياني .

الحل :

$$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x)$$

$$f(-x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$$

$$f(-x) = f(x)$$

زوجي وخطه متناظر ل $yy'$

② احسب $f(x+2\pi)$ ثم استنتج أنه يكفي دراسة التابع على المجال $[\,0,\pi\,]$

$$f(x+2\pi) = 3(\sin(x+2\pi))^2 + 4(\cos(x+2\pi))^3$$

$$f(x+2\pi) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

$$f(x+T) = f(x)$$

حيث $f$ دوري ودوره $2\pi$ إذن تكفي دراسته على المجال $[\,-\pi\,,\pi\,]$

ولأنه زوجي فيكفي دراسته على المجال $I = [\,0\,,\pi\,]$

③ ادرس تغيرات $f$ على المجال $[\,0\,,\pi\,]$

$$f(0) = 4$$

$$f(\pi) = -4$$

$f$ اشتقاقي على $[\,0\,,\pi\,]$ :

$$f'(x) = 6\sin x\,.\cos x + 12\cos^2 x\,.(-\sin x)$$

$$f'(x) = 6\cos x\,.\sin x\,(1 - 2\cos x)$$

نعدم المشتق

$$f'(x) = 0$$

إما

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ مقبول

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi$ مرفوض

أو

$$\sin x = 0$$

$$x = 0 + \pi k$$

$$x = \pi k$$

$k = 0 \Rightarrow x = 0$ مقبول

$k = 1 \Rightarrow x = \pi$ مقبول

أو

$$1 - 2\cos x = 0$$

$$2\cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

أو

$$x = \frac{\pi}{3}$$

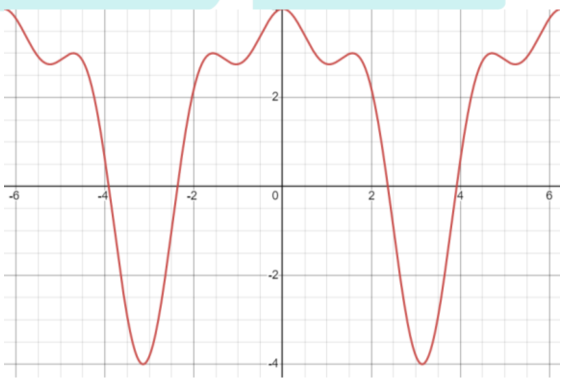
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3.\frac{3}{4} + 4.\frac{1}{8}$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{2}{4} = \frac{11}{4}$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $4$ | $\searrow$ | $\frac{11}{4}$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $4$ |

④ ارسم $C_f$ على المجال $[-2\pi\,, 2\,\pi]$



<u>مركز تناظر خط بياني لتابع $f$</u>

- ليكن $f$ تابعاً خطه البياني $c_f$ ولتكن النقطة $I(a,b)$ من المستوي، نقول ان $I$ مركز تناظر للخط البياني $c_f$

اذا حققت الشرطين التاليين:

$\forall x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f$ -1

$f(2a-x) + f(x) = 2b$ -2

**مثال:** $f(x) = \frac{1}{x-1}$

**اثبت ان $A(1,0)$ مركز تناظر للخط $c_f$**

الحل:

$f$ معرف على $R/\{1\}$

$$A(1,0) = (a.b)$$

$$a = 1 \quad , \quad b = 0$$

تكون $A$ مركز تناظر اذا حققت الشرطان

$\forall x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f$ -1

$$\forall x \in D_f \Rightarrow 2(1) - x \in D_f$$

البرهان: $x \in R/\{1\}$

نضرب ب

$$-x \in R/\{-1\} - 1$$

نضيف 2

$$2 - x \in \frac{R}{\{1\}} = D_f$$

$\Leftarrow$ الشرط الأول محقق.

$f(2a-x) + f(x) = 2b$ -2

الاثبات:

$$l_1 = f(2a-x) + f(x)$$

$$= f(2-x) + f(x) = \frac{1}{2-x-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 0 = 2b = l_2$$

$\Leftarrow$ $A(2,0)$ مركز تناظر ل $c_f$

**مسألة :** $f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$

1- عين $D_f$

2- ادرس نهايات $f$ عند اطراف مجموعة تعريفه.

3- اثبت ان $y = 2x-1$ مقارب مائل للخط $c_f$

4- ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها.

5- اثبت ان $I(-1,-3)$ مركز تناظر.

6- ارسم $c_f$

**الحل :**

$$f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

$f$ معرف على $R/\{-1\}$

$$]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$

$$lim_{x\to+\infty} f(x) = lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

$$lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و $c_f$ تقع على يمين مقاربه.

$$lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و $c_f$ تقع على يسار مقاربه.

$$f(x) - y_\Delta$$

$$\frac{2x^2+x+7}{x+1} - (2x-1)$$

$$\frac{2x^2+x+7}{x+1} - \frac{(2x-1)(x+1)}{x+1}$$

$$= \frac{2x^2+x+7}{x+1} - \frac{2x^2+2x-x-1}{x+1}$$

$$= \frac{8}{x+1}$$

$$lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x+1} = 0$$

$$lim_{x\to-\infty} \frac{8}{x+1} = 0$$

مقارب مائل في جوار $-\infty, +\infty$

$f$ اشتقاقي في $R/\{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(4x+1)(x+1) - (1)(2x^2+x+7)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2+4x+x+1-2x^2-x-7}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}=0$$

$$2x^2+4x-6=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$=16-4(2)(-6)$$

$$=16+48=64>0$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+8}{4}=1$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-8}{4}=-\frac{12}{4}=-3$$

$$f(1)=\frac{10}{2}=5$$

$$f(-3)=-11$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $\|\|$ | $-\quad 0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $-11$ ↘ $-\infty$ | $\|\|$ | $+\infty$ ↘ $5$ | ↗ $+\infty$ |

ليكن $I(-1,-3)$ مركز تناظر يجب تحقق الشروط الاتية:

-1 $\forall x\in D_f \Rightarrow 2a-x\in D_f$

$$\Rightarrow -2-x\in D_f$$

الاثبات:

$$x\in R/\{-1\}$$

$$-x\in R/\{1\}$$

$$-2x\in R/\{-1\}=D_f$$

محقق.

-2 $f(2a-x)+f(x)=2b$

$$f(-2-x)=f(x)$$

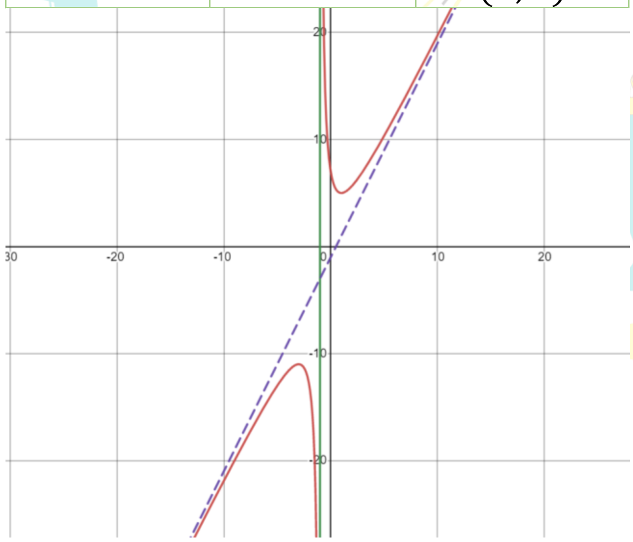
$$\frac{2(-2-x)^2-2-x+7}{-2-x+1}+\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

$$=\frac{8+8x+2x^2-2-x+7}{-1-x}+\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

$$=\frac{-6x-6}{x+1}=-6\frac{(x+1)}{x_{+1}}=-6=2b$$

لدينا $y=2x-1$ مقارب مائل

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| $0$ | $-1$ | $(0,-1)$ |
| $1$ | $1$ | $(1,1)$ |




**مسألة:**

ليكن التابع $f$ المعرف بالشكل:

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$$

1) ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها.

2) اوجد معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي

3) أثبت أن $f$ فردي

4) ارسم المقارب المائل وارسم $c_f$

الحل:

1) $f$ معرف على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$$lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$ و $-\infty$ و

$c_f$ يقع على يمين مقاربه.

$f$ اشتقاقي على $R^*$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-2}{2x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

ومنه $x = \sqrt{2} \in D$

$x = -\sqrt{2} \in D$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2+2}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

و بشكل مماثل :

$$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\|\|$ | $+\infty$ ↘ | $\sqrt{2}$ | ↗ $+\infty$ |

2) نضع $\Delta: y = \frac{x}{2}$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$\Delta \Leftarrow$ مقارب مائل عند $+\infty$ و كذلك

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$\Delta \Leftarrow$ مقارب مائل عند $-\infty$ و كذلك

أما عن دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x} \neq 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) - y_\Delta$ | $- - -$ | | $+ + +$ |
| الوضع النسبي | $C$ تحت $\Delta$ | | $C$ فوق $\Delta$ |

3) إثبات أن $f$ فردي:

$$\forall x \in R^* \implies -x \in R^*$$

$$f(-x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)$$

$$= -f(x)$$

4) الرسم:

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ |
| $(x,y)$ | $(0,0)$ | $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ |

**مسألة:** $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$

عين $D_f$ وادرس تغيرات $f$ وارسمه.

الحل:

$f$ معرف على $R/\{0\}$

$$D_f = ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

$y = 3$ مقارب افقي في جوار $+\infty, -\infty$

$$lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$

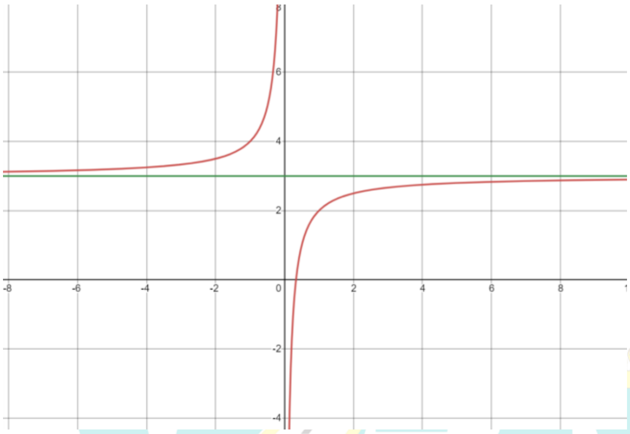
$$lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و $c$ يقع على يسار المقارب ونحو $-\infty$ و $c$ يقع على يمين مقاربه.

$f$ اشتقاقي على $R^*$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $\|\|$ | $+$ |
| $f(x)$ | $3 \nearrow +\infty$ | $\|\|$ | $-\infty \nearrow 3$ |



**إضافي:**

نعرف متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالشكل:

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad , \quad u_0 = 2$$

1- برهن بالتدريج أنّ:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$$

2- استنتج أنها متناقصة

## دراسة تغيرات توابع جذرية

1- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$f$ معرف على $R$

$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$

$$lim_{x\to-\infty} = +\infty \quad , \quad lim_{x\to+\infty} = +\infty$$

$f$ اشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

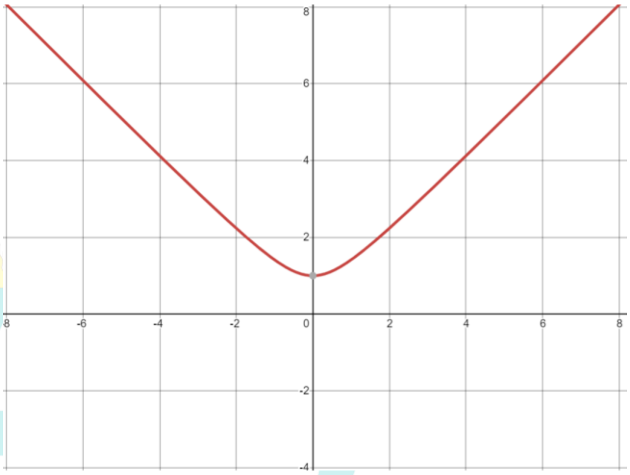
$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$$

$$f(0)=\sqrt{0+1}=1$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow$ | $1$ | $\nearrow +\infty$ |

$f(0)=1$ قيمة صغرى محلياً



**-2** $f(x)=\sqrt{x+1}$

$f$ معرف على $[-1,+\infty[$

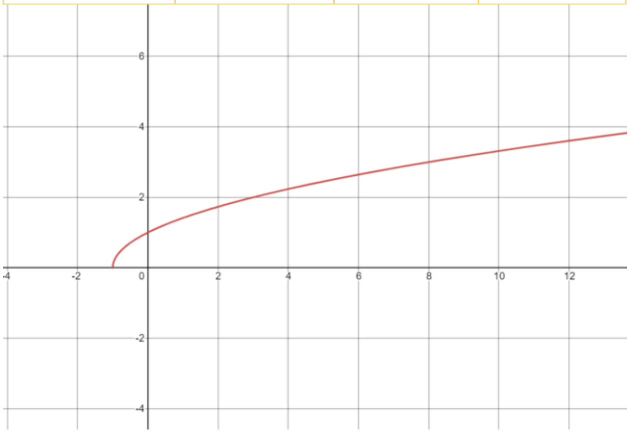
$lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ , $f(-1)=0$

$f$ اشتقاقي على $]-1,+\infty[$

لان أي تابع جذري يكون اشتقاقي على مجال تعريفه دون الأطراف.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$$

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



التقاطع مع $yy'$ نجعل $x=0$

$$\Rightarrow y=0$$

**-3** $f(x)=x\sqrt{3-x}$

$$3-x\geq 0$$

$$3\geq x$$

$$D_f=]-\infty,3]$$

$$lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\sqrt{+\infty}=-\infty$$

$$f(3)=0$$

$f$ اشتقاقي على $]-\infty,3[$

$$f'(x)=\sqrt{3-x}+\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}x$$

$$=\sqrt{3-x}-\frac{x}{2\sqrt{3-x}}$$

$$=\frac{2(3-x)-x}{3\sqrt{3-x}}$$

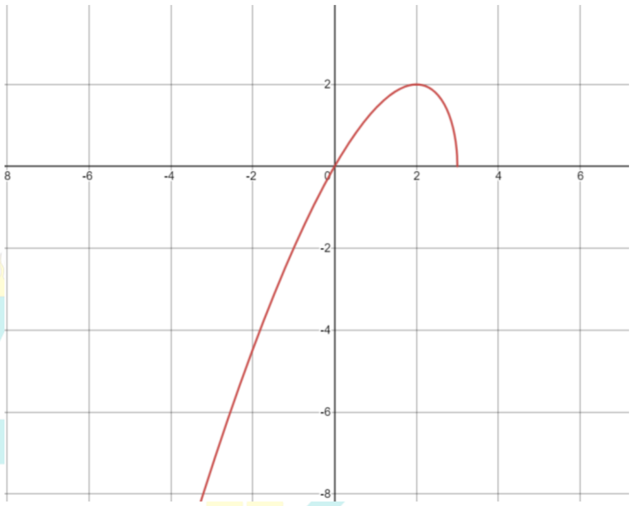
$$= \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6 - 3x = 0$$

$$3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2$$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $2$ | | $0$ |



التقاطع مع $yy'$ نجعل $x = 0$

$y = 0 \Rightarrow \sqrt{3-0}, 0$

-4 $f(x) = x - \sqrt{x^2+8}$

-1 ادرس تغيرات $f$

-2 اثبت ان $y = 2x$ مقارب مائل

-3 ارسم

الحل:

-1 $f$ معرف على $R$

$D_f = ]-\infty, +\infty[$

$lim_{x\to+\infty} f(x) =$ حالة عدم تعيين

نعيد صياغة التابع

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+8}$$

نضرب بالمرافق:

$$f(x) = \frac{\left(x-\sqrt{x^2+8}\right)\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$= \frac{x^2-(x^2+8)}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$= \frac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب افقي بجوار $+\infty$

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$f$ اشتقاقي في $]-\infty, +\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+8}-2x}{2\sqrt{x^2+8}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+8}-x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{\sqrt{x^2+8}-x}{\sqrt{x^2+8}}=0$$

$$\sqrt{x^2+8}-x=0$$

$$\sqrt{x^2+8}=x$$

**مستحيلة**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $++$ | $++$ | $++$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ |

$$f(x)-y_\Delta$$

$$x-\sqrt{x^2+8}-2x$$

$$=-x-\sqrt{x^2+8}$$

$$lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty-\infty$$

**حالة عدم تعيين**

$$\frac{(-x-\sqrt{x^2+8})(-x+\sqrt{x^2+8})}{-x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$=\frac{x^2-x^2+8}{-x+\sqrt{x^2+8}}=\frac{8}{-x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

**التقاطع مع $yy'$ نجعل $x=0$**

$$-2\sqrt{2}$$

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $(0,0)$ |
| $1$ | $2$ | $(1,2)$ |


**تعيين الثوابت:**

**الحالة الاولى : صيغ متكافئة**

نعطى صيغتين إحداهما معلومة و الأخرى تشتمل على ثوابت يُطلب تعيينها

نصلح إحدى الصيغ ( بنشرٍ أو قسمة اقليدية أو توحيد مقامات ) و نطابق الصيغتين

**مثال1:**

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{x+1}$$

عين $a,b$ إذا علمت $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

**الحل:**

بالقسمة الإقليدية

$$f(x)=x+2+\frac{2}{x+1}$$

بالمقارنة مع

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

نجد

$$a = 1\,, b = 2\,, c = 2$$

**مثال2** : بفرض $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$

أوجد عددين حقيقين $a, b$ يحققان أن :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

**الحل :**

نوجد مقامات :

$$f(x) = \frac{a(x-2) + b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{ax - 2a + bx - b}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{(a+b)x + (-2a-b)}{(x-1)(x-2)}$$

أصبح لدينا :

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b)x + (-2a-b)}{(x-1)(x-2)}$$

نطابق البسوط (أمثال $x$ مع أمثال $x$ و الثوابت مع الثواب في الطرفين )

$$a + b = 1 \ldots (1)$$
$$-2a - b = 0 \ldots . (2)$$

بالجمع :

$$-a = 1 \quad \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

نعو ض في (1) :

$$-1 + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

و بالتالي :

$$f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

**مثال (3) :** ليكن $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ , جد عددين حقيقين $a, b$ يحققان أن :

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

**الحل :**

لدينا :

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$$

بالقسمة الاقليدية داخل التربيع نجد :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^2$$

نفك المطابقة :

$$f(x) = 1^2 + 2(1)\left(\frac{1}{x-1}\right) + \left(\frac{1}{x-1}\right)^2$$
$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

و بالمقارنة مع :

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

نجد ان :

$$a = 1\,, \quad b = 2 \quad , c = 1$$

**مثال4 :** بفرض $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2+2x+3}$

عين عددين حقيقين $a, b$ و تابعاً $u(x)$ يحقق أن :

$$f(x) = ax + b + \frac{u(x)}{x^2 + 2x + 3}$$

**الحل :**

لدينا $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2+2x+3}$ بالقسمة الاقليدية :

$$f(x) = x - 2 + \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3}$$

بالمقارنة مع :

$$f(x) = ax + b + \frac{u(x)}{x^2 + 2x + 3}$$

نجد أن :

$$a = 1 \quad , \quad b = -2 \quad , \quad u(x) = x + 2$$

**مثال 5 :** ليكن $f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ . جد عددين $a, b, c$

تحقق أن :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

الحل : نوجد المقامات :

$$f(x) = \frac{a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{ax^2 - 2ax + ax - 2a + bx - 2b + cx + c}{x^2 - x - 2}$$

$$= \frac{ax^2 + (-a + b + c)x + (-2a - 2b + c)}{x^2 - x - 2}$$

نقارن مع الشكل :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$$

فنجد بمطابقة أمثال البسوط :

$$a = 3$$
$$-a + b + c = 6$$
$$-2a - 2b + c = 0$$

بالحل المشترك نجد أن :

$$a = 3 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = 8$$

و بالتالي :

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x+1} + \frac{8}{x-2}$$

**الحالة الثانية :** معطيات عددها يساوي عدد المجاهيل و يوضح الجدول الآتي كيف نترجم كلاً من المعطيات إلى عبارة رياضية

| المعطى | العلاقة المكافئة |
|---|---|
| الخط البياني للتابع يمر من نقطة $A(x_0, y_0)$ أو النقطة $A(x_0, y_0)$ تنتمي للخط البياني | بما ان النقطة تنتمي للخط البياني فإن : $f(x_0) = y_0$ |
| الخط البياني يقبل مماساً ميله $m$ في النقطة التي فاصلتها $x_0$ | من عبارة الميل : $f'(x_0) = m$ |
| الخط البياني للتابع يقبل مماساً ميله $m$ في نقطة منه $A(x_0, y_0)$ | هنا لدينا معلومتين : 1- النقطة $A$ تنتمي للتابع إذن : $f(x_0) = y_0$ 2- الميل عند $A$ هو $m$ : $f'(x_0) = m$ تذكر إذا ذكر أن المماس أفقي فإن $m = 0$ |
| للتابع قيمة حدية عند $x_0$ | بما أنها قيمة حدية فهي تعدم المشتق : $f'(x) = 0$ |
| للتابع قيمة حدية عند $x_0$ مساوية لـ $y_0$ | هنا لدينا معلومتين : $f'(x_0) = 0$ $f(x_0) = y_0$ |

**تدرب:**

① $f(x) = \frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$

عين $a, b$ لتكون $y = 4x + 3$ معادلة المماس للخط $C_f$ في النقطة التي فاصلتها 0.

**الحل:**

من الميل $\boxed{f'(0) = 4}$ والتابع يمر من النقطة $(x_0, y_0)$

حيث $x = 0$ لكن $y_0$ غير معلومة فنحسبها من المستقيم :

$$y_0 = 4(0) + 3 = 3$$

$$f(x_0) = y_0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 3}$$

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(9x^2 + a)(x^2 + 1) - 2x(3x^3 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2}$$

1) $f'(0) = 4 \Rightarrow a = 4$

2) $f(0) = 3 \Rightarrow b = 3$

② $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x + b$

**عين $a$ إذا علمت أنه يقبل قيمة حدية عند $x = -1$ مساوية للعدد 2 .**

**الحل:** لدينا معلومتان :

$$\boxed{f'(-1) = 0}, \boxed{f(-1) = 2}$$

$f$ اشتقاقي

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$$

$$f'(-1) = 0$$

$$3ax^2 + 6x + 3 = 0$$

$$3a - 3 = 0$$

$$a = 1$$

$$f(-1) = -a + 3 - 3 + b = 2$$

$$-a + b = 2$$

$$-1 + b = 2$$

$$b = 3$$

③ $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$

**عين $a, b$ إذا علمت أن $f(-1) = 0$ قيمة حدية.**

الحل:

$$\boxed{f(-1) = 0}$$

$$\frac{a - b + 1}{-2} = 0$$

$$a - b = -1 \dots ❶$$

$$\boxed{f'(-1) = 0}$$

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x - 1) - (ax^2 + bx + 1)}{(x - 1)^2}$$

$$f'(-1) = 0$$

$$\frac{(-2a + b)(-2) - (a - b + 1)}{4} = 0$$

$$4a - 2b - a + b - 1 = 0$$

$$3a - b = 1 \dots ❷$$

بالجمع بين ❶ و ❷ نجد

$$-2a = -2$$

$$a = 1$$

**حل المعادلات $f(x) = \lambda$:** عندما نقول أن للمعادلة $f(x) = \lambda$ حل , أي أن المستقيم الأفقي $y = \lambda$ يقطع منحني التابع $f$ في نقطة

وقد يكون للمعادلة أكثر من حل وقد لا يكون لها حلول " مستحيلة " .

**تأمل الأشكال التالية :**

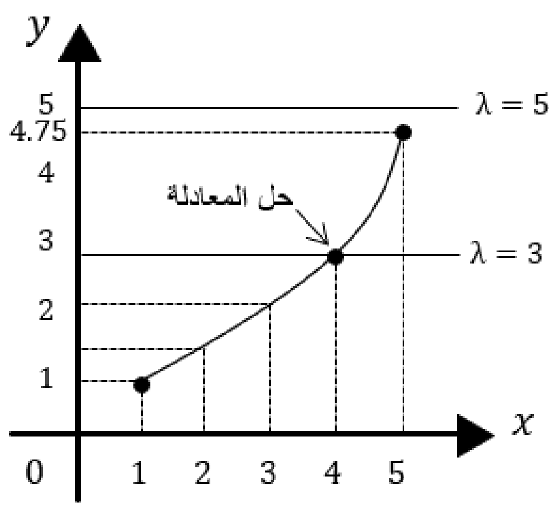
1) هنا نلاحظ أن $f$ مستمر على المجال $[1\,,5]$
ومتزايد عليه , وأن $f([1\,,5]) =$ $[1\,,4.75]$

للمعادلة $f(x) = 3$ حل وحيد على المجال $[1\,,5]$

<u>الحل موجود:</u> لأن التابع مستمر
$\lambda = 3 \in f([1\,,5]) = [1\,,4.75]$

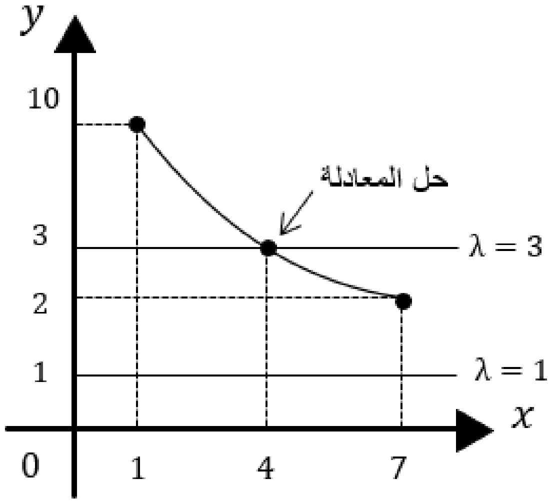
<u>الحل وحيد :</u> لأن $f$ متزايد $f'(x) > 0$
على المجال $[1\,,5]$

المعادلة $f(x) = 5$ مستحيلة الحل
لأن $\lambda = 5 \notin f([1\,,5]) = [1\,,4.75]$

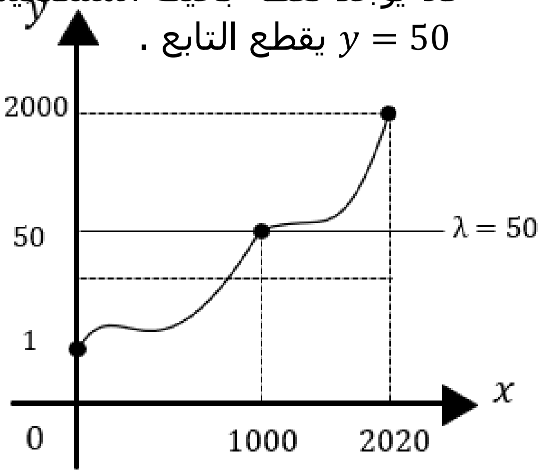



2) المعادلة $f(x) = 3$ حل وحيد هو $x = 4$
على المجال $[1\,,7]$
<u>الحل موجود:</u> لأن $f$ مستمرعلى $[1\,,7]$ و
$\lambda = 3 \in f([1\,,7]) = [2\,,10]$
<u>الحل وحيد :</u> لأن $f$ متناقص على المجال
على المجال $[1\,,7]$

المعادلة $f(x) = 1$ مستحيلة الحل
لأن $\lambda = 1 \notin f([1\,,7]) = [2\,,10]$



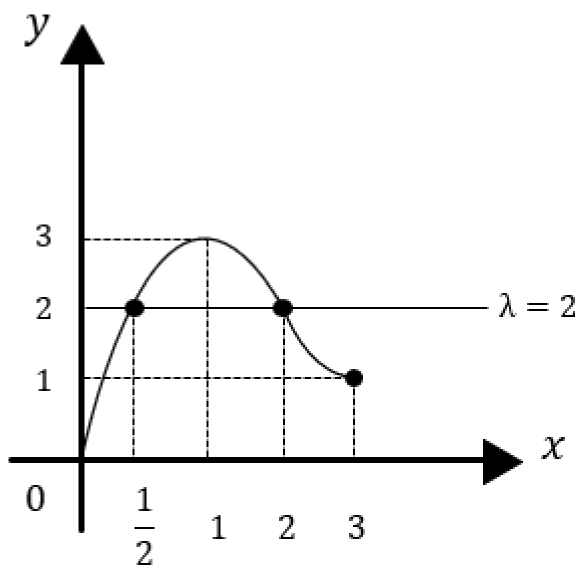

3) المعادلة $f(x) = 50$ مستحيلة لأن $f$ غير مستمر
عند $x = 1000$
فلا يوجد نقطة بحيث المستقيم
$y = 50$ يقطع التابع .




4) المعادلة $f(x) = 2$ حلان هما
$x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$

<u>الحل موجود:</u> لأن $f$ مستمرعلى $[0\,,3]$ و
$2 \in f([0\,,3]) = [0\,,3]$

<u>الحل غير وحيد :</u> لأن $f$ غير مطرد
على المجال $[0\,,3]$




## كيف ندرس حلول المعادلة $f(x) = \lambda$

- نثبت أن $f$ مستمر على المجال $[a,b]$
- نثبت أن $\lambda \in f([a,b])$ " فنضمن بذلك وجود الحل"
- لإثبات وحدانية الحل نحسب $f'(x)$ ونثبت أن $f$ مطرد على المجال

## سؤال كيف نوجد $f([a,b])$

- إذا كان $f$ متزايد فإن $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$
- إذا كان $f$ متناقص فإن $f'([a,b]) = [f(b), f(a)]$
- إذا كان غير مطرد نشكل جدول مثلاً :

| $x$ | $-3$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $7$ |

$$([-3,1]) = [-1,5]$$
$$f([1,2]) = [-2,5]$$
$$f([2,3]) = [-2,7]$$
$$f([-3,3]) = [-2,7]$$

**تمرين1 :**

ليكن $f$ التابع المعرف بالشكل $f(x) = x^3 + x - 1$

أثبت أن للمعادلة $f(x) = 3$ حل وحيد ضمن المجال $[1,2]$

**الحل :**

لدينا $[a,b] = [1,2]$ و$\lambda = 3$

$f$ تابع كثير حدود فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

وبالتالي على المجال $I = [1,2]$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

$$\forall\, x \in [1,2]$$

فهو متزايد على المجال $[1,2]$

$$\lambda = 3 \in f([1,2]) = [f(1), f(2)] = [1,9]$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 3$ حل وحيد على المجال $[1,2]$

**تمرين2 :**

ليكن $f$ التابع المعرف بالشكل $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

أثبت أن للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ ثلاث حلول فقط

**الحل:**

$f$ تابع كثير حدود فهو معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

نعدم المشتق

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$x(3x - 6) = 0$$

$$x = 0 \quad or \quad x = 2$$

$$f(0) = 1 \quad , \quad f(2) = -3$$

ننظم جدول تغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

1. $f$ مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty, 0[$
و $\lambda = -1 \in f(]-\infty, 0[) = ]-\infty, 1[$
2. $f$ مستمر و متناقص على $]0,2[$ فللمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد على المجال $]0,2[$
3. $f$ مستمر ومتزايد على المجال $]2, +\infty[$
و $\lambda = -1 \in f(]2, +\infty[) = ]-3, +\infty[$
فللمعادلة حل وحيد على المجال $]2, +\infty[$

$\Leftarrow$ للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$ .

### تدريبات على الدفتر : تدرب1

في كلٍّ من الحالات الآتية، أوجد عدد حلول المعادلة، ثمَّ احسب
يتعدى الخ

① $x^5 - x^3 + x - 5 = 0$ ② $x(2x+1)^2 = 5$

③ $x^4 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$ ④ $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$

## تتمات في الاشتقاق :

**قابلية اشتقاق تابع تُدرس باستخدام النهاية :**

$$lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**ثم نميز الحالات الآتية:**

**1- إذا كان الناتج عدد حقيقي وحيد $m$ فإننا نقول إن $f$ قابل للاشتاق عند $a$ و $f'(a) = m$**

**التفسير الهندسي : ميل المماس للتابع $f$ عند النقطة $a$ هو $m$**

**2- إذا كان الناتج $\infty$ فإن $f$ غير قابل للاشتقاق عند $a$**

**التفسير الهندسي : $c_f$ يقبل مماساً شاقولياً في النقطة منه التي فاصلتها $a$**

**و معادلة هذا المماس $x = a$**

**3- إذا كان التابع ذو فرعين و نقطة التفرع هي $x = a$ فإننا سنحتاج لدراسة النهاية السابقة بقيم أكبر و قيم أصغر**

**عندئذٍ نُرمّز :**

$$lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$

$$lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a^-)$$

فإذا كان $f'(a^+)\neq f'(a^-)$ فهو غير قابل للاشتقاق عند $a$

التفسير الهندسي: الخط $c_f$ يقبل نصفي مماسين عند النقطة منه التي فاصلتها
$x=a$

معادلة نصف المماس من اليمين :

$$y=f'(a^+)(x-a)+f(a)$$

ومعادلة نصف المماس من اليسار :

$$y=f'(a^-)(x-a)+f(a)$$

تمرين1:

ادرس قابلية اشتقاق التابع $f(x)=\sqrt{2x-4}$ عند النقطة التي فاصلتها $x=2$ و أعطِ التأويل الهندسي للنتيجة

**الحل :**

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\sqrt{2x-4}-0}{x-2}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$$

نضرب البسط و المقام بالجذر $\sqrt{2x-4}$ :

$$g(x)=\frac{\sqrt{2x-4}\,.\sqrt{2x-4}}{(x-2)\sqrt{2x-4}}=\frac{2x-4}{(x-2)\sqrt{2x-4}}$$

$$g(x)=\frac{2(x-2)}{(x-2)\sqrt{2x-4}}=\frac{2}{\sqrt{2x-4}}$$

$$lim_{x\to 2}g(x)=\infty$$

و بالتالي $f$ غير قابل للاشتقاق عند $x=2$

التأويل الهندسي: الخط البياني للخط $c_f$ يقبل مماساً شاقولياً عند $x=2$ معادلته $x=2$

تمرين2 : ليكن $c_f$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف بالشكل :

$$f(x)=\frac{|x|+1}{x^2+2}$$

1- اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن القيمة المطلقة

2- أثبت أن الخط $c_f$ يقبل نصفي مماسين عند $x=0$ و أوجد معادلة كل منهما

**الحل :**

1- نعلم أن :

$$|x|=\begin{cases}x & : x\geq 0\\ -x & : x<0\end{cases}$$

نعوض في عبارة $f(x)$ لنجد أن :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+2} & : x\geq 0\\[2mm] \dfrac{-x+1}{x^2+2} & : x<0\end{cases}$$

2- نشكل التابع :

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{|x|+1}{x^2+2}-\frac{1}{2}}{x}$$

و لكن بسبب وجود القيمة المطلقة فإننا يجب أن نحسب النهاية من اليمين ثم من اليسار:

❖من اليمين:

$$lim_{x\to 0^+} g(x)$$

$$= lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x+1}{x^2+2} - \frac{1}{2}}{x}$$

$$= lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x+2-x^2-2}{2(x^2+2)}}{x}$$

$$= lim_{x\to 0^+} \frac{2x - x^2}{2x(x^2+2)}$$

$$= lim_{x\to 0^+} \frac{x(2-x)}{2x(x^2+2)}$$

$$= lim_{x\to 0^+} \frac{2-x}{2(x^2+2)} = \frac{1}{2}$$

و بالتالي $\boxed{f'(0^+) = \frac{1}{2}}$

❖من اليسار :

$$lim_{x\to 0^+} g(x) = lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-x+1}{x^2+2} - \frac{1}{2}}{x}$$

$$= lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-2x+2-x^2-2}{2(x^2+2)}}{x}$$

$$= lim_{x\to 0^+} \frac{-2x - x^2}{2x(x^2+2)}$$

$$= lim_{x\to 0^+} \frac{x(-2-x)}{2x(x^2+2)}$$

$$= lim_{x\to 0^+} \frac{-2-x}{2(x^2+2)} = -\frac{1}{2}$$

و عليه فإن $\boxed{f'(0^-) = -\frac{1}{2}}$ و من ثم فإن $f$ غير قابل للاشتقاق عند $x = 0$ لأن :

$$f'(0^+) \neq f'(0^-)$$

التأويل الهندسي لذلك أن الخط البياني للتابع $f$ يقبل نصفي مماسين عند $x = 0$ :

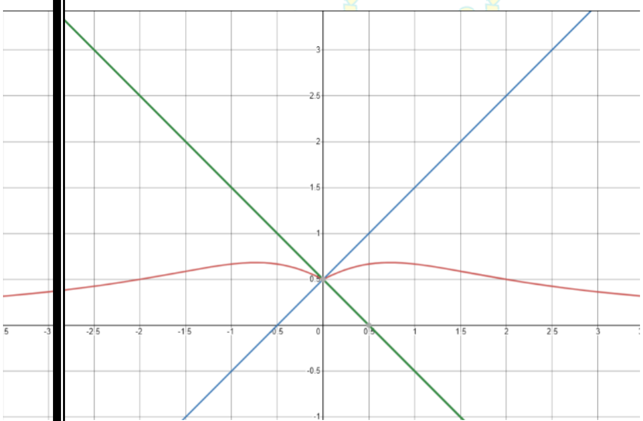
**معادلة نصف المماس اليميني:**

$$y = f'(0^+)(x-0) + f(0)$$
$$y = \frac{1}{2}(x-0) + \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

**معادلة نصف المماس اليساري:**

$$y = f'(0^-)(x-0) + \frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

الرسم التالي يوضح ما سبق :



تدرب: ادرس قابلية اشتقاق التابع $f$ عند $a = 1$

$$f(x) = \frac{x}{|x-1|+1}$$

## وفسر النتيجة هندسياً

**استخدام تعريف العدد المشتق في إزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ :**

نعلم أنه إذا كان $f$ اشتقاقي عند $a$ يكون :

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}f'(a)$$

**مثال:** ليكن $f$ التابع المعرف على $R$ بالشكل:

$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$$

1- احسب $f(0)$ , $f'(x)$ , $f'(0)$

2- استنتج قيمة النهاية

$$lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$$

**الحل:**

1- $f(0)=1$

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(0)=\frac{1}{2}$$

2- $lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

$$a=0$$

$$lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}=f'(0)$$

$$lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}=\frac{1}{2}$$

**مثال:** ليكن $f$ التابع المعرف على $R$ بالشكل:

$$f(x)=\cos x$$

1- احسب $f(0)$ , $f'(x)$ , $f'(0)$

2- استنتج قيمة النهاية

$$lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

1- $f(0)=\cos 0=1$

$$f'(x)=-sinx$$

$$f'(0)=-\sin 0=0$$

2- $lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$

نعلم حسب تعريف العدد المشتق:

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

$$lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$$lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

**تمرين:** باستخدام تعريف العدد المشتق أثبت ان

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

تعريف العدد المشتق للتابع $f$ عند $a$

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

لنضع $f(x)=\sin x$ المعرف والاشتقاقي على $R$

$$f'(x)=\cos x$$

لنضع $a=0$

$$f(0)=\sin 0=0$$

$$f'(0)=\cos 0=1$$

نعوض في التعريف:

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin x-0}{x-0}=1$$

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

بوجه عام:

$$lim_{*\to 0}\frac{\sin(*)}{*}=1$$

**تمرين:** باستخدام تعريف العدد المشتق احسب النهاية

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

تعريف العدد المشتق $f$ عند $a$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

لنضع $f(x) = \tan x$ المعرف والاشتقاق على $R$

$$a = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\frac{\pi}{4}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

نعوض في التعريف:

$$2 = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

مثال: احسب نهاية التابع $f$ المعرف بالشكل:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

عند $x = 0$ باستخدام تعريف قابلية الاشتقاق.

الحل:

$$g(x) = \sqrt{x+4}$$

$$g(0) = \sqrt{4} = 2$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

$$g(0) = \frac{1}{4}$$

تعريف قابلية الاشتقاق

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4}$$

مثال: $a = 0$ , $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

لنضع $g(x) = \tan x$ معرف واشتقاق على $R$

$$g'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$g(0) = \tan 0 = 0$$

$$g'(0) = 1 + \tan^2 0 = 1$$

نعوض في تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - 0}{x - 0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

تدريب: $a = 1$ , $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

لنضع $g(x) = \sqrt{x+1}$ معرف على $[0, +\infty[$ واشتقاق على $]0, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$g(1) = \sqrt{2}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

نعوض في تعريف العدد المشتق

$$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$$

مثال: ننوي دراسة نهاية التابع عند

$$f : x \to \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad , a = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين.

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................

مثال:

-1 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} \quad , \ a = 1$

لنضع $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................

-2 $f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

لنضع $g(x) = \cos x$ معرف واشتقاقي على $R$

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................

## المشتقات من مراتب عليا:

ليكن $f$ تابع اشتقاقي على $I$ و مشتقه $f'$

عندئذٍ إذا كان $f'$ اشتقاقي على $I$ نعرف المشتق من المرتبة الثانية للتابع $f$ وفق :

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

و هكذا فإننا نعرف المشتق من المرتبة $n$ بالشكل :

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

حيث أن الرمز $f^{(n)}$ لا يمثل قوة وإنما عدد مرات الاشتقاق هو $n$

## تمارين :

التمرين الأول :

ليكن $f$ التابع المعرف على $R$ وفق :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

1- تحقق أن $\sqrt{1+x^2}f'(x) = f(x)$

2- استنتج أن :

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$$

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

..............................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

..............................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

........................................

**التمرين الثاني :**

**ليكن $f$ التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :**

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

**1- احسب $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$**

**2- أثبت أنّ:**

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

**الحل :**

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

.......................................................................................

..............................

..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
................................

..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................

**فائدة :**

يوجد صيغ أخرى لمشتقات التوابع $sinx$ و $cosx$ فمثلاً يمكن كتابة :

$$(sinx)' = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$(cosx)' = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

أي أن المشتق هنا يعني إضافة ربع دورة مباشرة إلى الزاوية

**التمرين الثالث :**

ليكن $f$ التابع المعرف على $R$ وفق : $f(x) = xcosx$ و المطلوب :

1- احسب $f'(x), f''(x), f'''(x)$

2- أثبت مستخدماً البرهان بالتدريج أنه مهما تكن $n \geq 1$ يكون :

$$f^{(n)}(x) = xcos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + ncos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
................................

..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
................................

## استنتاج الخط البياني انطلاقاً من خط معلوم:

### الانسحاب:

إذا كان $g(x) = f(x) + b$ فإن $c_g$ ينتج عن $c_f$ بانسحاب شعاعه $b\vec{j}$ ( انسحاب شاقولي )

إذا كان $g(x) = f(x+a)$ فإن $c_g$ ينتج عن $c_f$ بانسحاب شعاعه $-a\vec{i}$ (انسحاب أفقي)

**التناظر :**

إذا كان $g(x) = f(-x)$ فإن $c_g$ نظير $c_f$ بالنسبة لمحور التراتيب

إذا كان $g(x) = -f(x)$ فإن $c_g$ نظير $c_f$ بالنسبة لمحور الفواصل

إذا كان $g(x) = -f(-x)$ فإن $c_g$ نظير $c_f$ بالنسبة للمبدأ

**القيمة المطلقة:**

إذا كان $g(x) = |f(x)|$ فإن $c_g$ ينتج عن $c_f$ باستبدال النقاط التي تحت محور الفواصل بنظائرها بالنسبة لمحور الفواصل

**أمثلة و تدريبات :**

استنتج في كلٍ من الحالات التالية الخط البياني $c_g$ للتابع $g$ انطلاقاً من الخط $c_f$ البياني للتابع $f$ المعرف بالشكل :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

-1 $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{(-x)^2+1} = \frac{(1-x)^2}{x^2+1}$$

$$\underset{\text{نخرج ناقص}}{=} \frac{\left(-(x-1)\right)^2}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = g(x)$$

و منه $c_g$ نظير $c_f$ بالنسبة لمحور التراتيب .

-2 $g(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(x-1) = \frac{(x-1+1)^2}{(x-1)^2+1} = \frac{x^2}{(x-1)^2+1} = g(x)$$

و بالتالي $c_g$ ينتج عن $c_f$ بانسحاب شعاعه $1\vec{i}$ .

-3 $g(x) = \frac{(x+1)^2+x^2+1}{x^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(x)+1 = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + 1 = \frac{(x+1)^2+x^2+1}{x^2+1} = g(x)$$

و بالتالي $c_g$ ينتج عن $c_f$ بانسحاب شعاعه $1\vec{j}$

## أسئلة دورات :

**السؤال الأول :** ليكن $f$ التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$

وفق $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ و المطلوب:

1- عين التابع المشتق $f'$ للتابع $f$
2- ليكن $g$ التابع المعرف وفق $g(x)=f(\sqrt{x})$
على $J=]1,+\infty[$ أثبت أن $g$ اشتقاقي على $J$ ثم احسب $g'(x)$ على $J$

**السؤال الثاني :** ليكن $f$ التابع المعرف وفق :

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

عين العددين الحقيقين $a,b$ لتكون $f(-1)=0$ قيمة حدية للتابع .

**السؤال الثالث :** ليكن $f$ التابع المعرف على $R$ وفق :

$$f(x)=x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad f(0)=0$$

و المطلوب :

1- أثبت أن $f$ اشتقاقي عند $x=0$
2- احسب $f'(x)$ على $R^*$
3- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**السؤال الرابع :** $f(x)=x-\sin x$ اثبت أن $f$ متزايد

**السؤال الخامس :** $f(x)=x-4+\sqrt{x-2}$ : $]2,+\infty[$

1- ادرس تغيرات $f$ على المجال $]2,+\infty[$ و نظم جدولاً بها
2- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد
3- اكتب معادلة المماس للخط $C$ في النقطة التي فاصلتها $x=3$

**السؤال السادس :**

ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$$

1- عين $a,b$ إذا علمتت ان المماس للخط $C$ في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم $d: y=3x$
2- من أجل $a=4, b=-4$ أثبت أن المستقيم $y=4x-4$ مقارب مائل للخط $C_f$ في جوار $+\infty$ و ادرس الوضع النسبي

**التمرين السابع: ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $R$ وفق : $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$**

**1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$**
**2- أثبت أن $\Delta$ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$**
**3- ادرس الوضع النسبي**

**السؤال الثامن : أولاً : ليكن التابع $g$ المعرف وفق $g(x)=\frac{x^2+bx+a}{x-1}$**

**جد العددين $a,b$ علماً أن التابع $g$ يقبل قيمة محلية عند $x=0$ قيمتها تساوي 2**

**ثانياً بفرض التابع $f(x)=x+3+\frac{1}{x-1}$**

**1- اثبت أن $\Delta: y=x+3$ مقارب مائل**
**2- ادرس نهايات عند حدود مجال تعريفه**
**3- ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها**
**4- استنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً حقيقياً**

واحداً $\alpha$ ينتمي إلى المجال
$]-3,-2[$

قاوم حتى لو وصلت ممزقاً... لذة الوصول سترممك

فالطريق لمن صدق لا لمن سبق

طالما لديك قرارٌ صادقفي تحقيق أحلامك و تجاوز عثراتك و بلوغ أهدافك .. فإنك بإذن الله ستصل ...

فقد سمعت معلمي ذات مرة يقول :

القرار الصادق و النابع من قلب الإنسان و المتعلق بمصير حياته ..... قلَّ ما تنقضه الأيام

#لن_يبلى_الشغف