تعريف المتتالية :

هي تابع مجموعة تعريفه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو مجموعة جزئية منها من النمط $\{\mathbf{n_0}\,,\mathbf{n_0}+\mathbf{1}\,,\mathbf{n_0}+\mathbf{2}\,,\dots\}$

نرمز للمتتالية بالرمز $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\geq \mathrm{n_0}}$ أو $(v_n)_{n\geq n_0}$ أو $(x_n)_{n\geq 0}$ أو $(y_n)_{n\geq 0}$ أو $(\mathrm{w_n})_{n\geq 0}$ أو . . . .

مثال1

لنضع $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية الأعداد الزوجية التي تبدأ بالصفر.

$$u_0 = 0\,, u_1 = 2\,, u_2 = 4\,, u_3 = 6\,, \dots$$

مثال2 :

لنضع $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية الأعداد الفردية الموجبة.

$$v_0 = 1\,, v_1 = 3\,, v_2 = 5\,, \dots$$

طرائق التعريف عن متتالية :

a-طريقة الحد العام : $\boldsymbol{u_n = f(n)}$

في هذه الحالة نُعطى u_n بدلالة n

مثال1 :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2n}{n+1}$

عندئذٍ تكون الحدود الأولى :

$$u_0 = \frac{2(0)}{0+1} = 0$$
$$u_1 = \frac{2(1)}{1+1} = 1$$
$$u_2 = \frac{2(2)}{2+1} = \frac{4}{3}$$
$$\dots\dots$$
$$u_{20} = \frac{2(20)}{20+1} = \frac{40}{21}$$

مثال2

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بالشكل $u_n = 2^{n-1}$

$$u_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

$$u_2 = 2^{2-1} = 2^1 = 2$$

$$u_3 = 2^{3-1} = 2^2 = 4 , \dots$$

مثال3

المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة
$u_0 = (-1)^n$

$$u_0 = 1 , u_1 = -1 , u_2 = +1 , \dots$$

b-التعريف بالتدريج :
$\boldsymbol{u_0 = a}$ و $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$

أي أن كل حد u_{n+1} ينتج عن سابقه u_n بتعويضه في صيغة التابع f (أي إذا أردنا حساب u_6 في العلاقة التدريجية نعوض u_5 في عبارة u_{n+1} و إذا أردنا u_1 نعوض u_0 و هكذا.....)

مثال1 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

لنوجد بعض الحدود الأولى :

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 2(2) + 1 = 5$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2(5) + 1 = 11$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2(11) + 1 = 23$$

مثال2

لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالشكل

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + u_n} \end{cases}$$

احسب الحدود u_1 , u_2 , u_3

الحل:

....

....

C. متتالية المجاميع :

تكون المتتالية معطاة على شكل مجموع منتهٍ بدلالة n أي :

$$\boldsymbol{u_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

و هي تعني أنه مجموع الحدود a_i ابتداءً من $i = 1$ و حتى a_n

مثال1

لنتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

نلاحظ هنا أن أول حد في المتتالية هو $u_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$

و الحد الثاني : $u_2 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}$ و الحد الثالث هو $u_3 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$

و الحد الرابع $u_4 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$

مثال2 :

لنأخذ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$v_1 = 1 + \frac{1}{1}$$

$$v_2 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$v_3 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

مثال 3

لنأخذ المتتالية $(x_n)_{n\geq0}$:

$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

(من n و حتى ضعفها 2n)

$$x_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$x_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

مثال 4

لنأخذ المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$:

(من n و حتى ضعف n ناقص واحد 2n-1) $y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$

مثلاً لإيجاد y_5 فهي بدءاً من الكسر $\frac{1}{5}$ و حتى الكسر $\frac{1}{9}$:

$$y_5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$$

متتاليات شهيرة

المتتالية الحسابية :

تعريفها : هي متتاليةٌ كل حدٍ فيها ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت r ندعوه أساس المتتالية أي :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

مثلاً :

المتتالية .... ,2,4,6,8,10 متتالية حسابية لأن كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت $r = 2$ فهي تعرف تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = u_n + 2 \quad , u_0 = 2$$

كذلك المتتالية $5, 0, -5, -10, -15, \ldots$

متتالية حسابية لأن كل حدٍ فيها ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت $r = -5$ وحدها الأول 5

$$u_{n+1} = u_n - 5 \quad , u_0 = 5$$

حدها العام : يعطى الحد العام للمتتالية الحسابية بالشكل

$$u_n = u_0 + rn$$

مثال 1

الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول2 و أساسها 3 :

$$u_n = u_0 + rn$$

$$u_n = 2 + 3n$$

مثال2

الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول 5 و أساسها -5 هو

$$u_n = u_0 + rn$$

$$u_n = 5 - 5n$$

مثال3

الحد العام لمتتالية الحسابية التي حدها الأول 1 و أساسها 1

$$u_n = u_0 + rn$$
$$u_n = 1 + n$$

معيار الكشف عنها :

لإثبات أن المتتالية $(\mathbf{u_n})_{n\geq 0}$ حسابية :

1- نحسب u_{n+1} بأن نبدل كل n بـ (n+1) في عبارة u_n
2- نشكل الفرق $u_{n+1} - u_n$
فإذا كان الناتج عدداً ثابتاً لا يحوي n تكون حسابية أي :

$$u_{n+1} - u_n = constant = r$$

ويكون ناتج الطرح هو أساس المتتالية آنذاك.

مثال1

أثبت أن المتتالية التي حدها العام

$$\mathbf{u_n = 3n - 4}$$

حسابية و عين أساسها

الحل

نوجد u_{n+1} :

$$u_{n+1} = 3(n+1) - 4 = 3n + 3 - 4$$
$$u_{n+1} = 3n - 1$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = 3n - 1 - (3n - 4) = 3 = r$$

فهي حسابية و أساسها $r = 3$

مثال 2

أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{1-n}{4}$ حسابية وعين أساسها

الحل

نوجد u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \frac{1-(n+1)}{4} = \frac{1-n-1}{4} = -\frac{n}{4}$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-n}{4} - \frac{1-n}{4} = \frac{-n-1+n}{4}$$
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4} = r$$

حسابية أساسها $r = -\frac{1}{4}$

مثال3

أثبت أن المتتالية المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 12 \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

حسابية و عين أساسها

الحل

$$u_{n+1} = u_n + 12$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 12 - u_n = 12 = r$$

حسابية واساسها $r = 12$

علاقة الحدين : إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فإنه يوجد علاقة تربط بين أي حدين من هذه المتتالية تُعطى بالشكل :

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

و تستخدم هذه العلاقة في الحالات التالية :

☝معنا حدين من المتتالية و مطلوب حساب الأساس

✌معنا حدٌ من المتتالية و الأساس و المطلوب تعيين حد آخر

👌معنا حدين من المتتالية و المطلوب تعيين حد آخر مختلف عنهما . (يجب إيجاد r أولاً)

☝👌لتعيين الحد العام u_n بدلالة n و لكن u_0 غير معلوم.

مثال1

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_4 = 12$ و $u_2 = 4$ ، عين أساس هذه المتتالية

الحل

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_4 = u_2 + (4-2)r$$
$$12 = 4 + 2r$$
$$2r = 12 - 4$$
$$2r = 8$$
$$r = 4$$

مثال2

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابيا فيها $u_3 = 7$ و أساسها 2 ، احسب u_{100}

الحل

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_{100} = u_3 + (100-3)2$$

$$u_{100} = 7 + 194 = 201$$

مثال3

لـتـكـن $(u_n)_{n\geq 0}$ حسـابـيـة فـيـهـا
$u_3 = 10$ و$u_7 = 30$ احسب u_{10}

الحل

المرحلة الأولى إيجاد r

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_3 = u_7 + (3-7)r$$
$$10 = 30 - 4r$$
$$4r = 20 \quad \Rightarrow r = 5$$

المرحلة الثاني إيجاد u_{10}

$$u_{10} = u_3 + (10-3)5$$
$$u_{10} = 10 + 35 = 45$$

ملاحظة : لقد استخدمنا u_3 و قد كان بالإمكان استخدام u_7 و نصف إلى نفس النتيجة : شاهد:

$$u_{10} = u_7 + (10-7)5$$
$$u_{10} = 30 + 15 = 45$$

مثال4

لـتـكـن $(u_n)_{n\geq 0}$ و فـيـهـا $u_4 = -11$

و $u_1 = -2$ احسب u_n بـدلالـة n) أو عين الـحد الـعـام بـدلالـة n (

الحل

المرحلة الأولى :إيجاد الأساس :

$$u_4 = u_1 + (4-1)r$$
$$-11 = -2 + 3r$$
$$-9 = 3r \quad \Rightarrow r = -3$$

المرحلة الثانية : حساب u_n :

$$u_n = u_1 + (n-1)(-3)$$
$$u_n = -2 - 3n + 3$$

$$u_n = -3n + 1$$

مجموع حدود متتالية حسابية :

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية و طُلب حساب مجموع الحدود :

$$S = u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots + u_j$$

فإنه يحسب من القانون :

$$S = \frac{a+l}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

حيث :

$a = u_i$ أول حد في المجموع

$l = u_j$ آخر حد في المجموع

عدد الحدود $= j - i + 1$

(آخر دليل ناقص أول دليل +1)

مثال 1

لتكن لدينا المتتالية $u_n = 2n + 2$ و المطلوب :

1- أثبت أنها حسابية

2- احسب قيمة المجموع

$$S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{10}$$

3- احسب المجموع :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$$

الحل

1 – إثبات أنها حسابية :

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 4 - (2n + 2) = 2 = r$$

2-حساب المجموع:

$$S = \frac{a+l}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

$$a = u_2 = 2(2) + 2 = 6$$
$$l = u_{10} = 2(10) + 2 = 22$$

عدد الحدود : $10 - 2 + 1 = 9$

$$S = \frac{6+22}{2} \times 9 = 126$$

3-حساب المجموع :

$$S_n = \frac{a+l}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

$$a = u_0 = 2$$
$$l = u_n = 2n + 2$$

عدد الحدود : $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = \frac{2 + 2n + 2}{2}(n+1)$$

$$S_n = \frac{4 + 2n}{2}(\text{n} + 1)$$
$$S_n = (2+n)(n+1)$$

مجموع كسور :

قانون:

$$\boxed{\boldsymbol{1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}}$$

مثال1

احسب المجموع

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \cdots + 10}$$

الحل

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \cdots + 10$$

نضرب الطرفين بـ 2

$$2S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 20$$

$$2S = \frac{20(21)}{2} \Rightarrow S = \frac{20(21)}{4} = 5\,.\,21 = 105$$

مثال2

جد قيمة المجموع

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 15$$

الحل

نضرب الطرفين بـ 3 :

$$3S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 45$$

$$3S = \frac{45 \times 46}{2} = 1035$$

المتتالية الهندسة :

تعريفها : هي متتاليةٌ كل حدٍ فيها ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت q ندعوه أساس المتتالية أي :

$$u_{n+1} = q.u_n$$

مثلاً : المتتالية .... ,2,4,8,16,32 متتالية هندسية لأن كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت $q = 2$ فهي تعرف تدريجياً
بالشكل :

$$u_{n+1} = 2u_n \quad , u_0 = 2$$

كذلك المتتالية ... $5, -25, 125, -625$

متتالية هندسية لأن كل حدٍ فيها ينتج عن سابقه بضربه عدد ثابت $r = -5$ وحدها الأول 5

$$u_{n+1} = -5u_n \quad , u_0 = 5$$

حدها العام : يعطى الحد العام للمتتالية الحسابية بالشكل

$$u_n = u_0 . q^n$$

مثال 1

الحد العام للمتتالية الهندسية التي حدها الأول2 و أساسها 3 :

$$u_n = 2.3^n$$

مثال2

الحد العام للمتتالية التي حدها الأول 5 و أساسها -5 هو $u_n = 5(-5)^n$

معيار الكشف عنها : لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية :

1- نحسب u_{n+1} بأن نبدل كل n بـ n+1 في عبارة u_n
2- نشكل النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ فإذا كان الناتج عدداً ثابتاً لا يحوي n تكون هندسية أي:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = constant = q$$

ويكون ناتج القسمة هو أساس المتتالية آنذاك.

مثال1

أثبت أن المتتالية التي حدها العام

$$u_n = 4 \times 3^n$$

هندسية و عين أساسها

الحل

نوجد u_{n+1} :

$$u_{n+1} = 4 \times 3^{n+1}$$

نشكل النسبة :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 3^{n+1}}{4 \times 3^n} = \frac{4 \times 3^n.3}{4 \times 3^n} = 3 = q$$

فهي هندسية و أساسها $q = 3$

مثال 2

أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{1}{5^{n-1}}$ هندسية وعين أساسها

الحل

نوجد u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5^n}$$

نشكل النسبة: :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{5^{n-1}}} = \frac{1}{5^n} \times \frac{5^{n-1}}{1}$$

$$= \frac{1}{5^n} \times \frac{5^n . 5^{-1}}{1} = 5^{-1} = \frac{1}{5} = q$$

هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

مثال

أثبت أن المتتالية المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 12u_n \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

هندسية و عين أساسها

الحل

$$u_{n+1} = 12u_n$$

نشكل النسبة :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{12u_n}{u_n} = 12 = q$$

هندسية واساسها $q = 12$

مثال3

أثبت أن المتتالية المعرفة وفق : $u_n = \frac{1}{2^n}$ هندسية

الحل

....

....

.....

علاقة الحدين : إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فإنه يوجد علاقة تربط بين أي حدين من هذه المتتالية تُعطى بالشكل :

$$u_n = u_m . q^{(n-m)}$$

و تستخدم هذه العلاقة في الحالات التالية :

✌معنا حدين من المتتالية و مطلوب حساب الأساس

✌معنا حدٌ من المتتالية و الأساس و المطلوب تعيين حد آخر

👌معنا حدين من المتتالية و المطوب تعيين حد آخر مختلف عنهما .(هنا يجب حساب q أولاً)

✌👌لتعيين الحد العام u_n بدلالة n و لكن u_0 غير معلوم.

مثال1

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_4 = 16$ و $u_2 = 4$ ، عين أساس هذه المتتالية

الحل

$$u_n = u_m . q^{(n-m)}$$
$$u_4 = u_2 . q^{(4-2)}$$
$$16 = 4 . q^2$$
$$q^2 = 4$$
$$q = 2$$

مثال2

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_3 = 27$ و أساسها 3، احسب u_5

الحل

$$u_n = u_m . q^{(n-m)}$$
$$u_5 = u_3 . 3^{(5-3)}$$
$$u_5 = 27 \times 9 = 243$$

مثال3

لتكن $(u_n)_{n.\geq 0}$ هندسية فيها

$u_3 = 8$ و $u_7 = 128$ احسب u_{10}

الحل

المرحلة الأولى إيجاد q

$$u_n = u_m . q^{(n-m)}$$
$$u_7 = u_3 . q^{(7-3)}$$
$$128 = 8 . q^4$$
$$q^4 = 16 \quad \Longrightarrow q = 2$$

المرحلة الثانية إيجاد u_{10}

$$u_{10} = u_7 . 2^{(10-7)}$$
$$u_{10} = 128 \times 2^3 = 128 \times 8 = 1024$$

ملاحظة : لقد استخدمنا u_7 و قد كان بالإمكان استخدام u_3 و نصف إلى نفس النتيجة : شاهد:

$$u_{10} = u_3 + 2^{(10-3)}$$
$$u_{10} = 8 \times 2^7 = 1024$$

مثال4

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية و فيها $u_4 = 81$
و $u_2 = 9$ احسب u_n بدلالة n (أو عين الحد العام بدلالة n)

الحل

المرحلة الأولى :إيجاد الأساس :

$$u_4 = u_2 . q^{(4-2)}$$
$$81 = 9 . q^2$$
$$9 = q^2 \quad \Longrightarrow q = 3$$

المرحلة الثانية : حساب u_n :

$$u_n = u_2 . q^{(n-2)}$$
$$u_n = 9 \times 3^{n-2}$$
$$u_n = 9 \, . 3^n . 3^{-2}$$
$$u_n = 3^n$$

مجموع حدود متتالية هندسية :

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية و طُلب حساب مجموع الحدود :

$$S = u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots + u_j$$

فإنه يحسب من القانون :

$$S = a\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

حيث :

$\mathrm{a} = \mathrm{u_i}$ أول حد في المجموع

عدد الحدود $= j - i + 1$

(آخر دليل ناقص أول دليل +1)

مثال1

لتكن لدينا المتتالية $u_n = 2 \times 3^n$ و المطلوب :

1- أثبت أنها هندسية

2- احسب قيمة المجموع

$$S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{10}$$

3- احسب المجموع :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$$

الحل

1 – إثبات أنها هندسية :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3 = q$$

2-حساب المجموع:

$$S = a\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$a = u_2 = 2 \times 3^2 = 18$$

عدد الحدود : $10 - 2 + 1 = 9$

$$S = 18 . \frac{1-3^9}{1-3} = -9(1-3^9)$$

3-حساب المجموع :

$$S_n = a\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

$$a = u_0 = 2$$
$$l = u_n = 2 \times 3^n$$

عدد الحدود : $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = 2\frac{1-3^{n+1}}{1-3}$$
$$S_n = -1(1-3^{n+1}) = 3^{n+1} - 1$$

مثال2

بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = 2$ و فيها $u_1 = 3$

1- اكتب u_n بدلالة n

2- احسب المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

....

....

....

....

....

فائدة هامة (مجموع مع قفزات) :

أحياناً نواجه تمارين تطلب جمع حدود من متتالية ما و لكنها ليست متعاقبة (يوجد قفزات في الأدلة) مثلاً :

$v_2 + v_4 + v_6 + \cdots v_{2n}$ فهنا نلاحظ أن الأدلة ليست اعداد طبيعية متتالية و إنما هنالك قفزات كل منها 2

و كذلك لو نظرنا للمجموع $u_3 + u_6 + u_9 + \cdots + u_{3n}$ فهنا القفزة قدرها 3 .

و لحساب مثل هذه المجاميع نتبع الخطوات التالية التي ستوضح على المثال التالي :

$$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$$

نلاحظ أن قيمة القفزة 2 و بالتالي نصطنع متتالية جديدة و ذلك بتقسيم كل دليل على قيمة القفزة (أي على 2 هنا)

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

من أخر حد في كلٍ من المجموعين نلاحظ ان $\boxed{v_n = u_{2n}}$ و هنا نلاحظ ما يلي :

إذا كانت المتتالية الأصلية u_n هندسية و أساسها q فإن المتتالية الجديدة v_n هندسية و أساسها $q' = q^{\text{القفزة}}$

فيكون المجموع المطلوب هو :

$$S = \underbrace{u_2}_{\text{الحد الأول}} \frac{1 - q'^n}{1 - \underbrace{q'}_{\text{الأساس الجديد}}}$$

مثال1

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها 3 و فيها $u_1 = -2$

1- احسب u_n بدلالة n

2- احسب قيمة المجموع

$u_1 + u_2 + \cdots + u_7$

3- احسب قيمة المجموع

$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$

الحل

من قانون الحدين

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \Rightarrow \frac{u_n}{u_1} = q^{n-1} \Rightarrow \frac{u_n}{-2} = 3^{n-1}$$

$$u_n = -2.(3)^{n-1}$$

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7 = a.\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$a = u_1 = -2.(3)^{1-1} = -2$$

$$q = 3$$

$$n = 7 - 1 + 1 = 7$$

$$S = -2\frac{1 - 3^7}{1 - 3} = 1 - 3^7 = -2186$$

نلاحظ أن المجموع المطلوب هنا عبارة عن مجموع لحدود ليست متعاقبة (يوجد قفزة قدرها 2 بين كل دليل و الآخر) : لذا نتبع الخطوات التالية :

نفرض متتالية جديدة $(v_n)_{n\geq 0}$ بحيث $v_n = u_{2n}$

يصبح المجموع المطلوب :

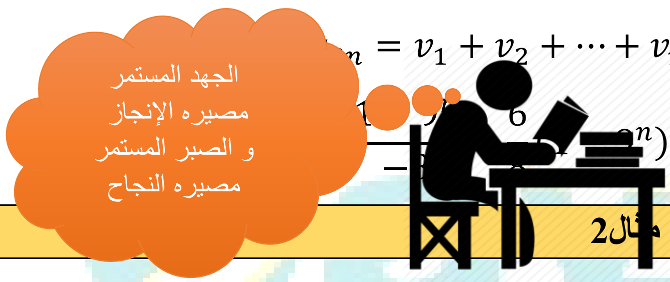
$$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n} = v_1 + v_2 + u_3 + \cdots .. + v_n$$

إذن $(v_n)_{n\geq n_0}$ هندسية و أساسها

$\boxed{q' = q^{\text{القفزة}}}$ إذن $q' = q^2 = 3^2 = 9$

$$\dots = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = u_2 . \frac{1-(q')^n}{1-q'} = -6 \times \frac{1-9^n}{1-9}$$

$$\dots (1-9^n) = \frac{3}{4}(1-9^n)$$



مثال2

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{\pi^{\frac{n}{3}}}{2}$

1- أثبت أنها هندسة و عين أساسها

2- احسب قيمة المجموع

$$u_3 + u_6 + u_9 + \cdots + u_{3n}$$

الحل

1-لإثبات أنها هندسة:

- نحسب الحد u_{n+1} : $u_{n+1} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{3}}}{2}$

- نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\pi^{\frac{n+1}{3}}}{2}}{\frac{\pi^{\frac{n}{3}}}{2}} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{3}}}{\pi^{\frac{n}{3}}} = \pi^{\frac{n+1}{3}-\frac{n}{3}} = \pi^{\frac{1}{3}} = q$$

هندسة و أساسها $q = \pi^{\frac{1}{3}}$

2-لإيجاد قيمة المجموع $u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n}$ نلاحظ أن الأدلة ليست متعاقبة و إنما تشتمل على قفزات قدر كل منها (3) :

لذلك نعرف متتالية جديدة v_n بحيث $v_n = u_{3n}$

نلاحظ أن المتتالية الجديدة $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q' = q^3 = \left(\pi^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \pi$ و بالتالي المجموع :

$$S = u_3 \frac{1 - q'^n}{1 - q'} = \frac{\pi}{2} \frac{1 - \pi^n}{1 - \pi}$$

حيث تم حساب u_2 (أول حد في المجموع) من الحد العام

$$u_3 = \frac{\pi^{\frac{3}{3}}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

مجموع كسور :

إذا صادفنا مجموع من الشكل :

$$S = q + q^2 + \cdots + q^n$$

ففوراً يمكن الحكم عليه أنه مجموع متتالية هندسية أساسها q و نطبق قانون المجموع .

مثال 1

احسب قيمة المجموع

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

الحل

نلاحظ أن المجموع يُكتب بالشكل :

$$S = \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

و هو مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و $a = \frac{1}{3}$

فحسب قانون المجموع :

$$S=\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S=\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

مثال2

احسب المجموع

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

الحل

يمكن كتابة المجموع بالشكل :

$$s=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

و هو مجموع متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و $a=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

نعوض في قانون المجموع

$$S=1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

مثال3

بسط المجموع

$$S_n=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-..-\frac{1}{2^n}$$

الحل

$$S_n = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right]$$

$$S_n = 1 - \left[\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$S_n = 1 - \left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$S_n = 1 - 2\left[1 - \frac{1}{2^n}\right]$$

$$S_n = 1 - 2 + \frac{2}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} - 1$$

مثال (دورة 2022- تكميلي)

بـفـرض $u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n}$

أثـبـت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

الحل

المجموع :

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

هو مجموع متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{5}$ و $a = \frac{1}{5}$

$$u_n = \frac{1}{5}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}$$

$$u_n = \frac{1}{5}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}}$$
$$u_n = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

ثلاث حدود متعاقبة

يرد في نص السؤال العبارة التالية (بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية (أو حسابية)

و أحياناً يذكر لنا أساسها و أحياناً لا يذكر الأساس فهنا يجب التفريق :

1- إذا ذكر الأساس فإننا نكتب القوانين التالية :

حسابية أساسها r	
$b = a + r$ $c = a + 2r$	

2- إذا لم يذكر الأساس فإننا نكتب القوانين التالية :

حسابية لم يذكر أساسها	...ها
$2b = a + c$ **و تقرأ : الأول + الأخير =ضعفي النصاني**	$b^2 = ac$ و تقرأ : الأول بالأخير يساوي مربع النصاني

☺ **غالباً ما تكون الحالة الثانية يُطلب فيها إيجاد a,b,c لذلك نعوض قيمة b بدلالة a, c وفق القوانين المكتوبة للوصول إلى معادلتين بمجهولين a, c ثم نحلهما حلاً مشتركاً**

مثال 1

بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية تحقق :

$$3a + \boldsymbol{b} - c = 12$$
$$a + 2\boldsymbol{b} + c = 32$$

احسب a و b و c

الحل

بما أنه لم يذكر الأساس فسنستخدم القانون الموجود في الجدول(2) :

لدينا $b = \frac{a+c}{2}$

نعوض في المعادلتين :

$$\begin{cases} 3a + \dfrac{\boldsymbol{a+c}}{\boldsymbol{2}} - c = 12 \\ a + 2\left(\dfrac{\boldsymbol{a+c}}{\boldsymbol{2}}\right) + c = 32 \end{cases}$$

نضرب الأولى ب2 :

$$\begin{cases} 6a + a + c - 2c = 24 \\ a + a + c + c = 32 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 7a - c = 24 \\ 2a + 2c = 32 \end{cases}$$

نقسم الثانية على 2 :

$$\begin{cases} 7a - c = 24 \ldots (1) \\ a + c = 16 .. (2) \end{cases}$$

بالجمع :

$$8a = 40 \Longrightarrow \boxed{a = 5}$$

نعوض في (2): $5 + c = 16$ و منه $\boxed{c = 11}$

و لما كان $b = \frac{a+c}{2}$ فإن $b = \frac{5+11}{2}$ و من يكون $\boxed{b = 8}$ و هو المطلوب .

مثال2

بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من هندسية و تحقق :

$$\begin{cases} a.b.c = -27 \\ 3a + 2b + c = -18 \end{cases}$$

احسب a,b,c

الحل

بما أنه لم يذكر أساس المتتالية سنتطبق قوانين الجدول (2) : و لدينا :

$$b^2 = a.c \ldots (*)$$

و بالنظر إلى المعادلة الاولى $a.b.c = -27$ نجد أنه يمكن استبدال $a.c$ بالمقدار b^2 حسب القانون $(*)$

فيصبح :

$$b^2 . b = -27$$
$$b^3 = -27$$
$$\boxed{b = -3}$$

نعوض في المعادلتين :

$$\begin{cases} -3ac = -27 \\ 3a - 6 + c = -18 \end{cases}$$

نصلح المعادلتين :

$$\begin{cases} ac = 9 .. (1) \\ 3a + c = -12 \ldots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أن :

$$c = -12 - 3a$$

نعوض في (1) :

$$a(-12-3a)=9$$
$$-12a-3a^2=9$$
$$3a^2+12a+9=0$$

نقسم على 3 :

$$a^2+4a+3=0$$
$$(a+1)(a+3)=0$$

و منه إما $a=-1$ أو $a=-3$

نعوض في (1) :

$$a=-1 \Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow -c=9 \Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow \boxed{c=-9}$$

$$a=-3 \Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow -3c=9 \Longrightarrow\Longrightarrow \boxed{c=-3}$$

☺ غالباً ما يكون المطلوب في الحالة الاولى حساب أساس .

مثال

بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q و $q \neq 0$.

و $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية . احسب q

الحل

أولاً : لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من هندسية أساسها q (ذكر الأساس فنستخدم قوانين الجدول 1) :

$$b=aq \quad , \quad c=aq^2 \ldots..(1)$$

ثانياً : $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متعاقبة من حسابية (لم يذكر الأساس) فنستخدم الجدول (2) :

$$\underbrace{3a+c}_{\text{الأول+الأخير}} = \underbrace{2(2b}_{\text{ضعفي النصاني}})$$

$$\Longrightarrow 3a+c=4b \ldots(2)$$

نعوض (1)في (2) :

$$3a+aq^2=4aq$$
$$aq^2-4aq+3a=0$$
$$a(q^2-4q+3)=0$$
$$q^2-4q+3=0$$

(حيث $a \neq 0$ لأنه لا يمكن أن تكون لدينا متتالية هندسية حدها الأول صفر وإلا كانت جميع حدودها اصفار)

$$(q-3)(q-1)=0$$

$$\boxed{q = 3} \quad or \quad \boxed{q = 1}$$

اعمل للحظة يقال فيها يا ليتني اجتهدت كما اجتهد و نلت ما نال

مسائل و تمرينات

التمرين 1

ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ ، أثبت أنها هندسية .

الحل

نحسب u_{n+1} وذلك باستبدال كل n بـ $n+1$

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

نحسب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right)}{\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n.2^1}{3^n.3^2} \cdot \frac{3^n.3^1}{2^n}$$

$$\frac{u_{(n+1)}}{u_n} = \frac{2}{3} = q$$

هندسية وأساسها $q = \frac{2}{3}$

التمرين2

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $u_n = 3 - n$ ، أثبت أنها حسابية .

الحل

نحسب u_{n+1}

$$u_{n+1} = 3 - (n+1) = 2 - n$$

نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = (2-n) - (3-n) = -1 = r$$

حسابية وأساسها $r = -1$

التمرين3

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$ ، احسب u_{20}

الحل :

من العلاقة بين حدين

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

$$u_5 = u_2 + (5-2)r$$

$$\Rightarrow -13 - 41 = 3r$$

$$-54 = 3r$$

$$\Rightarrow r = -\frac{54}{3} = -18$$

مرة أخرى

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

$$u_{20} = u_2 + (20-2)r$$

$$\Rightarrow u_{20} = 41 - 324$$

$$\Rightarrow u_{20} = -324 + 41 = -283$$

التمرين4

$(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية فيها $u_4 = 16$ و
$u_1 = 2$ ، احسب u_3 .

الحل

من قانون الحدين $u_n = u_m q^{n-m}$

$$u_4 = u_1.q^{4-1} \Rightarrow \frac{16}{2} = q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

مرة أخرى :

$$u_n = u_m.q^{n-m}$$

$$u_3 = u_1.2^{3-1}$$

$$u_3 = 2 \times 4 \Rightarrow u_3 = 8$$

التمرين 5

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1- احسب u_n بدلالة n

2- احسب المجموع

$u_{30} + u_{31} + u_{32}$

3- احسب المجموع

$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$

الحل

من قانون الحدين

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

$$u_n = u_1 + (n-1)3$$

$$u_n = 2 + 3n - 3$$

$$u_n = 3n - 5$$

من قانون مجموع حدود متتالية حسابية :

$$u_{30} + u_{31} + u_{32} = n\frac{(a+l)}{2}$$

حيث $a = u_{30} = 3(30) - 5 = 85$ (تم حسابه من تعويض n=30 في الحد العام)

و $l = u_{32} = 3(32) - 5 = 91$ (تم حسابه من تعويض $n = 32$ في الحد العام)

وعدد الحدود $n = 32 - 30 + 1 = 3$ (آخر دليل ناقص أول دليل + 1)

بالتعويض:

$$u_{30} + u_{31} + u_{32} = 3\frac{(85+91)}{2} = 264$$

أيضاً من قانون مجموع حدود متتالية حسابية :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = n\frac{(a+l)}{2}$$

$$a = u_1 = -2$$

$$l = u_{20} = 3(20) - 5 = 55$$

$$n = 20 - 1 + 1 = 20$$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = 20\frac{(-2+55)}{2} = 530$$

التمرين6

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 و $u_0 = 1$ ،

احسب $u_3 + u_4 + \cdots + u_{10}$

الحل

لنوجد الحد العام أولاً

$$u_n = u_0 . q^n = 1.2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow u_n = 2^n$$

$$S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{10} = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a = u_3 = 2^3 = 8$$

$$q = 2$$

$$n = 10 - 3 + 1 = 8$$

$$S = 8.\frac{1-2^8}{1-2} = 8\frac{1-2^8}{-1} = 8(2^8 - 1) = 2040$$

التمرين7

aوbوc ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية و $a \neq 0$ وأساس المتتالية q ونعلم أن $3a$ و $2b$ وc هي ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية ، احسب q

الحل

حسب تعريف المتتالية الهندسية فكل حد فيها ينتج عن سابقه بضربه بالأساس q

إذن لدينا الحد b ينتج عن سابقه a بضربه بـ q أي : $b = aq$

و الحد c ينتج عن سابقهb بضربه بـ q أي:

$$c = bq = (aq)q = aq^2$$

إذن لدينا

$$a \quad , \quad b = aq \quad , \; c = aq^2$$

الآن : بما أن 3a , 2b ,c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فحسب قانون "ثلاث حدود متعاقبة" في المتتالية الحسابية (فضعفي الأوسط يساوي مجموع الأول و الثالث) :

$$2(2b) = 3a + c$$

$$4b = 3a + c$$

$$4aq = 3a + aq^2$$

$$aq^2 - 4aq + 3a = 0$$

نقسم على $a \neq 0$:

$$q^2 - 4q + 3 = 0$$

$$(q-1)(q-3) = 0$$

$$\Rightarrow q = 1 \; or \; q = 3$$

المتتاليات المتداخلة

نُعطى متتالية تدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$

ثم نُعطى متتالية أخرى v_n بدلالة u_n

$$v_n = g(u_n)$$

ندعو العبارة الأخيرة : العلاقة المتداخلة

و غالباً ما يطلب على هذه المتتالية: ☝إثبات أن الأخيرة هندسية أو حسابية :

1- نوجد v_{n+1} بدلالة u_{n+1}
2- نطبق المعيار المناسب

✌إيجاد الحد العام لـ v_n :

1- نوجد v_0 بتعويض u_0 بالعبارة المتداخلة
2- نضع قانون الحد العام
3- نعوض

👌استنتاج الحد العام لـ u_n :

1- نكتب العبارة المتداخلة
2- نعزل u_n بدلالة v_n
3- نعوض الحد العام لـ v_n

أمثلة و تمارين :

التمرين 1

بفرض $u_{n+1} = 2u_n + 3$ و $u_0 = 1$

و نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالشكل:

$$v_n = u_n + 3$$

1- أثبت أن (v_n) هندسية و عين أساسها
2- اكتب v_n بدلالة n
3- استنتج u_n بدلالة n

التمرين 2

بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$$
$$u_0 = 2$$

و نتأمل المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$x_n = u_n + 2$$

1- أثبت أن المتتالية (x_n) هندسية
2- اكتب x_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
3- احسب المجموع

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

4- استنتج المجموع :

$$S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

التمرين 3

بفرض $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$ و $v_0 = 1$

و لتكن $u_n = \frac{1}{v_n}$

1- أثبت أن u_n حسابية
2- اكتب u_n بدلالة n
3- استنتج v_n بدلالة n
4- احسب المجموع :

$$S = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}$$

التمرين الرابع

نعطى عددين حقيقيين a وb و $a \neq 0$ تأمل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق $v_{n+1} = av_n + b$

1- عين تابعاً f يحقق أن $v_{n+1} = f(v_n)$
2- احسب l حل المعادلة $f(x) = x$
3- نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالشكل $u_n = v_n - l$ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية واستنتج u_n بدلالة n و a و b

الحل

نحن نبحث عن تابع f إذا استبدلنا فيه كل x بـ v_n نحصل على $av_n + b$

⟸نعرف التابع f بالشكل

$$f(x) = ax + b$$

حساب l :

$$f(x) = x$$

$$ax + b = x$$

$$ax - x = -b$$

$$(a-1)x = -b$$

$$x = \frac{-b}{a-1}$$

وبالتالي $l = \frac{-b}{a-1}$

لدينا :

$$u_n = v_n - l$$

$$u_n = v_n - \frac{-b}{\mathrm{a} - 1}$$

$$u_n = v_n + \frac{b}{a - 1}$$

نحسب u_{n+1} :

$$\Rightarrow u_{n+1} = v_{n+1} + \frac{b}{\mathrm{a} - 1}$$

نعوض $v_{n+1} = av_n + b$

$$u_{n+1} = av_n + b + \frac{\mathrm{b}}{a - 1}$$

نوحد المقامات

$$u_{n+1} = av_n + \frac{ba - b + b}{a - 1}$$

$$u_{n+1} = av_n + \frac{ba}{a - 1}$$

$$u_{n+1} = a\left[v_n + \frac{b}{a - 1}\right]$$

نشكل النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a\left[v_n + \frac{b}{a - 1}\right]}{v_n + \frac{b}{a - 1}}$$

$$= a = q$$

هندسية وأساسها $q = a$

$$\Rightarrow v_n = v_0 . a^n$$

وبما أن $u_n = v_n - l$ فنعوض :

$$u_n = \underbrace{v_0 . a^n}_{v_n} + \frac{\mathrm{b}}{a - 1}$$

وهي عبارة u_n بدلالة a و b و n و v_0

الإثبات بالتدريج

إذا كانت $E(n)$ قضية متعلقة بالعدد الطبيعي n حيث $n \geq n_0$ وأردنا إثبات أنها صحيحة مهما تكن $n \geq n_0$ فإن أفضل الطرق لذلك هي "الإثبات بالتدريج" أو ما يعرف بال " الاستقراء الرياضي" .

طريقة الإثبات بالتدريج :

① نرمز للقضية $E(n)$

② نثبت صحة القضية من أجل أول قيمة لـn ولتكن n_0

③ نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة ... (الفرض)

④ نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ .... (الطلب) مستفيدين من (الفرض)

النمط الأول من التمارين:المضاعفات

1 أثبت صحة الخاصة

$E(n)$:"3 مضاعف للعدد 4^n+5 العدد "

$; n \geq 1$

الحل

☝نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$4^1 + 5 = 4 + 5 = 9$$

من مضاعفات العدد 3

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

✌نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة :

$$4^n + 5 = 3k \ldots (\text{الفرض})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$4^{n+1} + 5 = 3k' \ldots (\text{الطلب})$$

حيث $k' \in \mathbb{Z}$

✍البرهان :لدينا من الفرض :

$$4^n + 5 = 3k$$

نضرب الطرفين بـ 4^1

$$4^{n+1} + 20 = 12k$$

نضيف للطرفين 5 :

$$4^{n+1} + \mathbf{5} + 20 = 12k + 5$$

$$4^{n+1} + 5 = 12k + 5 - 20$$

$$4^{n+1} + 5 = 12k - 15$$

$$4^{n+1} + 5 = 3\underbrace{(4k - 5)}_{k'}$$

$$4^{n+1} + 5 = 3k'$$

وهو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة مهما يكن $n \geq 1$

2 **أثبت صحة الخاصة :**

$$E(n) : "\ 2^{3n} - 1 \text{ مضاعف للعدد } 7\ "$$

الحل

☝نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

من مضاعفات العدد 7

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

✌نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$2^{3n} - 1 = 7k \ldots (\text{الفرض})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$2^{3(n+1)} - 1 = 7k'$$

$$2^{3n+3} - 1 = 7k' \ldots (\text{الطلب})$$

حيث $k' \in \mathbb{Z}$

✍البرهان : لدينا من الفرض

$$2^{3n} - 1 = 7k$$

نضرب الطرفين بـ 2^3 :

$$2^{3n+3} - 2^3 = 2^3(7k)$$
$$2^{3n+3} - 8 = 56k$$

نطرح 1 من الطرفين :

$$2^{3n+3} - \mathbf{1} - 8 = 56k - 1$$
$$2^{3n+3} - 1 = 56k - 1 + 8$$
$$2^{3n+3} - 1 = 56k + 7$$
$$2^{3n+3} - 1 = 7\underbrace{(8k+1)}_{k'}$$
$$2^{3n+3} - 1 = 7k'$$

وهو المطلوب .فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall\, n \geq 1$

3 أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: " $n^3 + 2n$ مضاعف للعدد 3 "

الحل

☝نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$1^3 + 2(1) = 3$$

مضاعف للعدد 3

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

✌نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$n^3 + 2n = 3k \ldots (\text{الفرض})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = 3k' \ldots (\text{الطلب})$$

حيث $k' \in \mathbb{Z}$

✍البرهان :

$$l_1 = (n+1)^3 + 2(n+1)$$

$$l_1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$$

$$l_1 = (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3$$

ولكن حسب (الفرض) لدينا

$$n^3 + 2n = 3k$$

نعوض:

$$l_1 = 3k + 3n^2 + 3n + 3$$

$$l_1 = 3(k + n^2 + n + 1)$$

$$l_1 = 3m$$

وهو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall\, n \geq 1$

4 **أثبت صحة الخاصة :**

$E(n)$: "7 مضاعف للعدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ "

الحل

☝نتثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$3^{2(1)+1} + 2^{1+2} = 27 + 8 = 35$$

من مضاعفات العدد 7

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

✌نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k \ldots \text{(الفرض)}$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

👌نتثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7k' \ldots (\text{الطلب})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

✍البرهان : لدينا من الفرض :

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$$

نضرب الطرفين بـ 3^2 :

$$3^{2n+3} + 3^2(2^{n+2}) = 3^2 \times 7k$$

$$3^{2n+3} + 9(2^{n+2}) = 63k$$

نضيف للطرفين 2^{n+3}

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} + 9(2^{n+2}) = 63k + 2^{n+3}$$

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 63k + 2^{n+3} - 9(2^{n+2})$$

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 63k + 2(2^{n+2}) - 9(2^{n+2})$$

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 63k - 7(2^{n+2})$$

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7(9k - 2^{n+2})$$

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7k'$$

وهو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall\, n \geq 1$

تمارين إضافية

التمرين 1

أثبت بالتدريج أن المقدار $5^n - 3^n$ زوجي مهما يكن العدد $n \geq 1$

التمرين 2

أثبت بالتدريج أن $3^{2n} - 1$ من مضاعفات العدد 8

النمط الثاني : صحة مساواة

① أثبت بالتدريج صحة القضية :

$$E(n): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

☝نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$l_1 = 1 \quad , \quad l_2 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \Longrightarrow l_1 = l_2$$

فالخاصة محققة من أجل n=1

✌نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

✍البرهان :

"دائماً في المجاميع ننطلق من

(الفرض) ثم نضيف للطرفين الحد الناقص للوصول للطلب ، ثم نصلح الطرف الثاني "

لدينا من (الفرض) :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نضيف للطرفين $(n+1)$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (\mathbf{n+1}) = \frac{n(n+1)}{2} + (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$$

نوحد المقامات :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

و هو المطلوب.

2 أثبت بالتدريج صحة القضية :

$$\boldsymbol{E(n)}:\ \mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

☝نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$l_1 = 1^3 = 1 \qquad l_2 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \Longrightarrow l_1 = l_2$$

✌نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

✍البرهان : لدينا من (الفرض)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نضيف للطرفين $(n+1)^3$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + \boldsymbol{(n+1)^3} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \boldsymbol{(n+1)^3}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + \boldsymbol{(n+1)^3}$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + \boldsymbol{(n+1)^3}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

و هو المطلوب .

النمط الثالث من التمارين المتراجحات :

و هي نوعان :

النوع الأول : متراجحات متعلقة بـn

1 $\boldsymbol{E(n): (1+x)^n \geq 1 + nx}$

☝نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$1 + x \geq 1 + x$$

محققة.

✌نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \ldots (\text{الفرض})$$

✍نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

أو : $(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x$

✍البرهان : لدينا من (الفرض)

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

نضرب الطرفين ب $(1+x)$

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+\mathrm{x}+\mathrm{nx}+\mathrm{nx}^2 \geq 1+x+nx$$

حيث nx^2 يمكن إهمالها لنحصل على مقدار أصغر

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x$$

وهو المطلوب .

العاملي :

$$\mathrm{n}! = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\ldots .2.1$$

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$
$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$
$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

و لدينا اصطلاحاً :

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1$$

ومن الخواص المهمة :

$$(\mathrm{n}+1)! = (\mathrm{n}+1)\mathrm{n}!$$

2 $\boldsymbol{E(n): n! \geq 2^{n-1}}$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left.\begin{array}{r} l_1 = 1! = 1 \\ l_2 = 2^{1-1} = 1 \end{array}\right\} l_1 \geq l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$n! \geq 2^{n-1} \ldots (\text{الفرض})$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$(n+1)! \geq 2^n$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$n! \geq 2^{n-1}$$

نضرب الطرفين ب $(n+1)$

$$(n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}$$

$$(n+1)! \geq (n+1)2^n.2^{-1}$$

$$(n+1)! \geq 2^n\frac{(n+1)}{2} \geq 2^n$$

حيث $\frac{(n+1)}{2}$مهملة فنحصل على مقدار أصغر

$$(n+1)! \geq 2^n$$

و هو المطلوب

النوع الثاني : متراجحات متعلقة بـ u_n

أي تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة بعلاقة تدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$

و هنا نميز حالتين :

أ- الحالة الأولى :

وu_n ذكرت مرة واحدة فقط في عبارة u_{n+1}

عندها ننطلق من (الفرض) ونطبق عمليات جبرية (ضرب ، جمع ، طرح) للوصول لشكل u_{n+1}

1 **لتكن $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ و $u_0 = 1$**

أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$ أيا كان $n \geq 0$

نعرف القضية

$$E(n): "\ 0 \leq u_n \leq 2\ "$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 \leq u_0 = 1 \ \leq 2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$0 \leq u_n \leq 2 \ldots \text{(الفرض)}$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2 \ldots . \text{(الطلب)}$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$0 \leq u_n \leq 2$$

نضيف للطرفين 2

$$2 \leq 2 + u_n \leq 4$$

نجذر

$$0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$$

$$0 \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

وهو المطلوب

2 نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = 2u_n + 3 \quad , u_0 = 1$$

أثبت بالتدريج أن $u_n \geq 1$ و ذلك مهما يكن $n \geq 0$

....

....

....

....

....

....

....

3 بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1 + u_n}$$

$$u_0 = 1$$

أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ مهما يكن $n \geq 0$

الحل

....

....

....

....

....

....

4 بفرض $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

و $u_0 = \frac{3}{2}$ أثبت بالتدريج أن :

$1 \leq u_n \leq 2$

....

ب- الحالة الثانية : $u_{n+1} = f(u_n)$ و u_n ذكرت أكثر من مرة عندها

1. نعرف التابع $f(x)$
2. نحسب $f'(x)$
3. نثبت أن f متزايد أي $f'(x) \geq 0$
4. نصور به أطراف المتراجحة

تمرين1

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \geq 0$

أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً كان العدد n .

الحل

في الطلب الأول تم تعريف التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ وهو مستخلص من شكل المتتالية في نص التمرين (قد لا يأتي التابع في نص التمرين ويكون من المفروض أن تصطنعه أنت ...)

إن f اشتقاقي على المجال $]0\,,+\infty[$ ومشتقه $f'(x)=\frac{14}{(2x+6)^2}$ مهما تكن $x \geq 0$ وبالتالي التابع f تابع متزايد

الآن لنفرض الخاصة :

$$\boldsymbol{E(n): "\ \frac{1}{2} < u_n \leq 1"}$$

✌نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$$

✌نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$\frac{1}{2} < u_n \leq 1 \ldots \text{(الفرض)}$$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

✍البرهان :

نلاحظ أننا لا نستطيع الانطلاق من الفرض والحصول على الهدف بعمليات جبرية ، لذلك سيكون من المفيد الاستفادة من التابع f المتزايد لدينا من الفرض

$$\frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

و f متزايد إذاً :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1)$$

$$\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)+2}{2\left(\frac{1}{2}\right)+6} < \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \leq \frac{3(1)+2}{2(1)+6}$$

$$\frac{7}{14} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

وهو المطلوب .

تمرين2

بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n} \quad , \quad u_0 = 1$$

أثبت أن $0 < u_n \leq 1$

الحل

نسمي القضية

$$E(n): "0 < u_n \leq 1"$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 < u_0 \leq 1$$

$$0 < 1 \leq 1$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$0 < u_n \leq 1$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$0 < u_{n+1} \leq 1$$

البرهان :

نعرف التابع f على المجال $]0,1]$ وفق : $f(x) = \frac{x}{2+x}$

نشتق : $f'(x) = \frac{2}{(2+x)^2} > 0$

نلاحظ أن $f'(x) > 0$ على المجال $]0,1]$ و بالتالي f متزايد على المجال $]0,1]$

الآن من الفرض :

$$0 < u_n \leq 1$$

و لما كان f متزايد على $]0,1]$:

$$f(0) < f(u_n) \leq f(1)$$

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{3} < 1$$
$$0 < u_{n+1} \leq 1$$

فالقضية صحيحة .

تمرين3

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \quad , u_0 = \frac{3}{2}$$

أثبت أن $1 \leq u_n \leq 2$

الحل

نسمي القضية $E(n): 1 \leq u_n \leq 2$

✍نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$1 \leq u_0 \leq 2$$
$$1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

محققة

✌نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

✍البرهان :

نعرف التابع f على المجال $[1,2]$ بالشكل :

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$
$$f'(x) = 2x - 2 \geq 0 \,; x \in [1,2]$$

إذن f متزايد على المجال $[1,2]$

لدينا من الفرض :

$$1 \le u_n \le 2$$

و بما أن f متزايد على [1,2] نصور الأطراف :

$$f(1) \le f(u_n) \le f(2)$$
$$1 \le u_{n+1} \le 2$$

و هو المطلوب

اطراد المتتالية

تعاريف و رموز:

المتتالية المتزايدة	$\boldsymbol{u_{n+1} \ge u_n}$
المتتالية المتزايدة تماماً	$u_{n+1} > u_n$
المتتالية المتناقصة	$u_{n+1} \le u_n$
المتتالية المتناقصة تماماً	$u_{n+1} < u_n$
المتتالية الثابتة	$u_{n+1} = u_n$

طرق دراسة إطراد متتالية :

<u>أولاً : طريقة الفرق (نقارن مع الصفر) :</u>

1- نحسب u_{n+1}
2- نشكل الفرق $u_{n+1} - u_n$
3- نميز حالتين :

❖إذا كان $u_{n+1} - u_n \ge 0$ ⇐ متزايدة

❖إذا كان $u_{n+1} - u_n \le 0$ ⇐ متناقصة

أمثلة

ادرس اطراد كل من المتتاليات الآتية

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{u_n = 2n + 5}$$

$$u_{n+1} = 2(n+1) + 5 = 2n + 8$$

نشكل الفرق $u_{n+1} - u_n = (2n+8) - (2n+5) = 3 \ge 0$

⇐ متزايدة

$$\mathbf{2)}\boldsymbol{u_n = \frac{n+1}{n+2}}$$

$$u_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}$$

نشكل الفرق

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - 3n - n - 3}{(n+3)(n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)} \geq 0$$

متزايدة $\Leftarrow$

$$\mathbf{3)}\boldsymbol{u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n =$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} \geq 0$$

$$\mathbf{4)}\boldsymbol{u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2n+1+2n+2}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{4n^2+3n-(2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{4n^2+3n-4n^2-4n-2n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{-(3n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$$

متناقصة .

ثانياً :طريقة النسبة (نقارن مع الواحد) :

1- نحسب u_{n+1}
2- نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

3- نميز حالتين :

- إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (متزايدة)
- إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (متناقصة)

"يجب أن يكون $u_n > 0$"

أمثلة

ادرس اطراد كل من المتتاليات الآتية

$$u_n = \frac{10^n}{n!}$$

$$u_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

نشكل النسبة

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{10^n}{n!}\right)} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10^n . 10}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{10^n}$$

$$= \frac{10}{(n+1)} \leq 1$$

وذلك بدءاً من $n = 9$

⇐ متناقصة بدءاً من الحد u_9

$$u_n = \frac{n}{3^n}$$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

نشكل النسبة

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n}{3^n}\right)} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^n} \leq 1$$

⇐ متناقصة

<u>ثالثاً : طريقة الاشتقاق :</u>

إذا كان $u_n = f(n)$ حيث $n \geq n_0$ وكان f اشتقاقي على المجال $[n_0 , +\infty[$ عندها

❖إذا كان $f'(x) \geq 0$ على المجال $[n_0 , +\infty[$ فإن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة $\forall n \geq n_0$.

❖إذا كان $f'(x) \leq 0$ على المجال $[n_0 , +\infty[$ فإن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة $\forall n \geq n_0$.

أمثلة

ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية

$$1)\quad u_n = \frac{3}{n^2}\ ;n \geq 1$$

نعرف التابع

$$f: [1\,,+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{x^3} \leq 0\ \ ,\forall x \in [1\,,+\infty[$$

$\Leftarrow$ $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة

$$2)\ u_n = \sqrt{3n+1}\ ;n \geq 0$$

نعرف التابع

$$f: [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{3x+1}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \geq 0\ \ ,\forall x \in [0\,,+\infty[$$

$\Leftarrow$ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

$$3)u_n = \frac{2n-1}{n+4}\ \ ;n \geq 0$$

نعرف التابع

$$f: [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+4)-(2x-1)}{(x+4)^2} = \frac{9}{(x+4)^2} \geq 0$$

$\Leftarrow$ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

$$4)u_n = \frac{1}{n^2+1}\ \ ;n \geq 0$$

$$5)u_n = \frac{3n+1}{n-1}\ \ ;n \geq 2$$

$$6)u_n = -3n+1\ \ ;n \geq 0$$

$$7)u_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad ; n \geq 0$$

$$8)u_n = \frac{n+1}{n+2} \quad ; n \geq 0$$

رابعاً : طريقة تعريف قضية :

إذا كانت المتتالية معرفة بالتدريج :

❖ لإثبات أنها متزايدة :

1- نعرف القضية

$$E(n): u_{n+1} \geq u_n$$

2- نثبت القضية بالتدريج

❖ لإثبات أنها متناقصة

1- نعرف القضية

$$E(n): u_{n+1} \leq u_n$$

2- نثبت القضية بالتدريج

❖ لدراسة الاطراد :

1- نحسب الحدود u_0, u_1, u_2

2- نتوقع جهة الاطراد و نعرف الفضية المناسبة

3- نثبت القضية بالتدريج .

أمثلة

ادرس اطراد المتتاليات التالية :

$$1)\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \ , u_0 = 2$$

نعوض بعض الحدود

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{7}{2}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{37}{8}$$

نلاحظ أن

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2$$

نعرف القضية :

$$\boldsymbol{E(n) : " u_n \leq u_{n+1} "}$$

✌نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$u_0 = 2 \leq u_1 = \frac{7}{2}$$

$E(0)$ محققة

✌نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$u_n \leq u_{n+1} \ldots \text{(الفرض)}$$

👌نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

✍البرهان : لدينا من (الفرض)

$$u_n \leq u_{n+1}$$

نضرب الطرفين ب $\frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}u_{n+1}$$

نضيف 2

$$\frac{3}{4}u_n + 2 \leq \frac{3}{4}u_{n+1} + 2$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

وهو المطلوب

$\Leftarrow$ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

$$\boldsymbol{2)\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \quad , \qquad u_0 = 1}$$

أثبت أنها متناقصة

نعرف القضية $E(n): u_{n+1} \leq u_n$

✌نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$u_1 \leq u_0$$
$$\frac{u_0}{1+u_0} \leq 1$$
$$\frac{1}{2} \leq 1$$

محققة .

✌نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_{n+1} \leq u_n$$

👌 نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

✍البرهان :

نعرف التابع f بالشكل $f(x) = \frac{x}{1+x}$

نشتق $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$

فالتابع f متزايد

لدينا من الفرض :

$$u_{n+1} \leq u_n$$

و بما أن f متزايد :

$$f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$
$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة والمتتالية متناقصة.

تمارين

التمرين الأول

ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية :

① $\boldsymbol{u_n = 2^n}$

الحل

$$u_{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$$

متزايدة

② $u_n = \frac{n^2}{n!}$

الحل:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \leq 1$$

متناقصة

③ $u_n = \left(\frac{-1}{n}\right)^n$

$$u_1 = -1 \ , u_2 = \frac{1}{4} \ , u_3 = -\frac{1}{27} \ , u_4 = \frac{1}{64}$$

نلاحظ أنها غير مطردة (متناوبة)

④ $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} \geq 0$$

متزايدة

التمرين الثاني

أثبت بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$:

$$" 1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1 "$$

الحل

☝نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left.\begin{array}{r} l_1 = 1 \\ l_2 = 2! - 1 = 1 \end{array}\right\} l_1 = l_2$$

الخاصة $E(1)$ محققة

✌نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$1 + 2 \times 2! + \cdots + n.n! + (n+1).(n+1)! = (n+2)! - 1$$

☝البرهان : لدينا من (الفرض)

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

نضيف $(n+1).(n+1)!$

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! + (n+1).(n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)!$$

$$= (n+1)!\,(1 + n + 1) - 1$$

$$= (n+2)(n+1)! - 1$$

$$= (n+2)! - 1$$

التمرين الثالث

في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$, ليكن

$v_n = u_{2n} - u_n$ و $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

أثبت أن المتتالية (v_n) متزايدة دوماً .

الحل

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

بالطرح

$$v_n = u_{2n} - u_n$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$v_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

نحسب v_{n+1}

$$v_{n+1} =$$
$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

بالطرح

$$v_{n+1} - v_n =$$
$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

$\Leftarrow$ (v_n) متزايدة

التمرين الرابع

نتأمل المتتالية $(u_n)_{(n\geq 0)}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = 10u_n - 18$

① احسب u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5

الحل

$$u_0 = 7$$

$$u_1 = 10u_0 - 18 = 52$$

$$u_2 = 10u_1 - 18 = 502$$

$$u_3 = 10u_2 - 18 = 5002$$

$$u_4 = 10u_3 - 18 = 50002$$

$$u_5 = 10u_4 - 18 = 500002$$

② ما عدد الأصفار في كل من الحدود السابقة

في u_1 لا يوجد أصفار

في u_2 يوجد صفر واحد   في u_3 يوجد صفران   في u_4 يوجد 3 أصفار   في u_5 يوجد 4 أصفار

③ ما عدد الأصفار في u_n بدلالة n

عدد الأصفار هو $n - 1$ صفراً

④ نضع القضية

$$\boldsymbol{E(n): "u_n = 5 \times 10^n + 2"}$$

أثبت صحة القضية من أجل $n \geq 0$

☝نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\left.\begin{array}{r} l_1 = u_0 = 7 \\ l_2 = 5 \times 10^0 + 2 = 5 + 2 = 7 \end{array}\right\} l_1 = l_2$$

$E(0)$ محققة

✌نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$u_n = 5 \times 10^n + 2 \ldots \text{(الفرض)}$$

👌نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$u_{n+1} = 5 \times 10^{n+1} + 2$$

البرهان :

$$l_1 = u_{n+1} = 10u_n - 18$$

$$l_1 = 10[5 \times 10^n + 2] - 18$$
$$l_1 = 5 \times 10^{n+1} + 20 - 18$$
$$l_1 = 5 \times 10^{n+1} + 2 = l_2$$

وهو المطلوب

التمرين الخامس
متتالية هندسة متخفية:

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق

$$(*) \dots\dots u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n$$

$$,\quad u_0 = s$$

1- عين كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث تُحقق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $t_n = P(n)$ العلاقة التدريجية (*) نفسها أي :

$$t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$$

2- أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسية

3- اكتب عبارة v_n ثم u_n بدلالة n و s

الحل

$$t_n = an^2 + bn + c$$

و بالتالي: $t_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$

بالنشر و التجميع:

$$t_{n+1} = an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)$$

و لما كانت تحقق العلاقة التدريجية $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ ،

نعوض :

$$an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)$$
$$= \frac{1}{2}[an^2 + bn + c] + n^2 + n$$

$$\Longrightarrow$$

$$an^2 + (2a+b)n + (a+b+C)$$

$$= \left(\frac{a}{2}+1\right)n^2 + \left(\frac{b}{2}+1\right)n + \frac{c}{2}$$

بالمطابقة (وأمثال n^2 في الطرف الأيمن يساوي أمثال n^2 في الطرف الأيسر و أمثال n في الطرف الأيمن تساوي أمثال n في الطرف الأيسر و الحد الثابت في الطرف الأيمن يساوي الحد الثابت في الطرف الأيسر)

$$a = \frac{a}{2} + 1 \Rightarrow \quad \frac{a}{2} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$2a + b = \frac{b}{2} + 1 \Longrightarrow\Longrightarrow \boxed{b = -6}$$

$$a + b + c = \frac{c}{2} \Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow \boxed{c = 8}$$

$$\boxed{t_n = 2n^2 - 6n + 8}$$

لدينا $v_n = u_n - t_n$:

$$v_n = u_n - 2n^2 + 6n - 8$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1}$$

$$= (2(n+1)^2 - 6(n+1) + 8)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n - 2n^2 - 4n - 2 + 6n + 6 - 8$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n^2 + 3n - 4$$

لإثبات أنها هندسية :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n - n^2 + 3n - 4}{u_n - 2n^2 + 6n - 8}$$

نوحد المقامات في البسط:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_n - 2n^2 + 6n - 8}{2}}{u_n - 2n^2 + 6n - 8} = \frac{1}{2} = q$$

و حدها الأول : $v_0 = \underbrace{u_0}_{s} - \underbrace{t_0}_{8} = s - 8$ و بالتالي :

$$v_n = v_0 q^n = (s-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لإيجاد الحد العام لـ $v_n = u_n - t_n$ و بالتالي $u_n = v_n + t_n$

$$u_n = (s-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n^2 - 6n + 8$$

التمرين السادس

1)أثبت أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$, فإن $3n^2 \geq (n+1)^2$

2)نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية

$\ll 3^n \geq 2^n + 5n^2 \gg$

أ - ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم n تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟

ب-أثبت أن $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$

الحل

1)قد تعتقد أن الحل سيكون بطريقة الاثبات بالتدريج إلا أنه من السهل إثبات هذه الخاصة بالطريقة المباشرة إذ أن المتراجحة المطلوبة :

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$

تكافئ : $3n^2 \geq n^2 + 2n + 1$ و تكافئ : $2n^2 - 2n - 1 \geq 0$ ، الطرف الأيسر :

$$2n^2 - 2n - 1 = 2n(n-1) - 1$$
$$\underbrace{\geq}_{n\geq 1} 2(2)(2-1) - 1 = 3 \geq 0$$

فهي محققة .

لنسمي الخاصة

$$E(n) \quad : \ll \quad 3^n \geq 2^n + 5n^2 \quad \gg$$

للبحث عن أول قيمة للعدد الطبيعي n نشكل الجدول :

n	3^n		2^n+5n^2
1	3	$<$	7
2	9	$<$	24
3	27	$<$	53
4	81	$<$	96
5	243	$>$	157

و بالتالي أول قيمة تجعل الخاصة $E(n)$ صحيحة هي $n = 5$

لنبرهن صحتها باستخدام الاستقراء الرياضي:

⮘نثبت صحة الخاصة من أجل $n = 5$ (تم اثباتها في الجدول السابق)

⮘نفرض صحة الخاصة من أجل n ، أي أن المتراجحة التالية صحيحة :

$3^n \geq 2^n + 5n^2$ ... (الفرض)

⮘نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$: أي لنثبت صحة المتراجحة :

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$$

✍البرهان : لدينا من (الفرض) :

$$3^n \geq 2^n + 5n^2$$

نضرب الطرفين بـ 3 :

$$3^{n+1} \geq 3 \times 2^n + 5(3n^2) \underbrace{\geq}_{\text{حسب الطلب الأول}}$$

$$3 \times 2^n + 5(n+1)^2 \underbrace{\geq}_{3\geq2} 2 \times 2^n + 5(n+1)^2 = 2^{n+1} + 5(n+1)^2 = l_2$$

التمرين السابع

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ ثم نعرف المتتالية

$(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \quad , \quad u_0 = 2cos\theta$$

1- احسب u_1, u_2

2- أثبت بالتدريج أن $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

مساعدة تذكر أن $1 + cos2\theta = 2\cos^2\theta$

الحل

$$u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2cos\theta}$$
$$= \sqrt{2(1+cos\theta)}$$
$$= \sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}$$
$$= \sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{2}\right)\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

نعرف القضية :

$$E(n): \ll u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \gg$$

☝نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_0 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2cos\theta$$

✌نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \text{....(الفرض)}$$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي :

$$u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \text{.....(الطلب)}$$

☝البرهان : لدينا من (الفرض) :

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

نضيف للطرفين2:

$$2+u_n = 2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

$$2+u_n = 2\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$$

$$2+u_n = 2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right)$$

$$2+u_n = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

نجذر :

$$\sqrt{2+u_n} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

$$u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

وهو المطلوب