طريقي إلى المتتاليات

منصة طريقي التعليمية

#المستقبل_بيبدا_بطريقي

المحتوى

يحتوي هذا الملف على ترتيب كامل لأفكار بحثي المتتاليات و نهاية متتالية مع حل أغلب مسائل الكتاب و أسئلة الدورات السابقة بالإضافة إلى تمارين خارجية محلولة و غير محلولة لتكون عوناً للطالب في إنجاز هذا البحث باتقان و كفاءة

مدرس المادة

نذير تيناوي

تعريف المتتالية :

هي تابع مجموعة تعريفه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو مجموعة جزئية منها من النمط

$\{\mathbf{n_0}, \mathbf{n_0}+\mathbf{1}, \mathbf{n_0}+\mathbf{2}, \dots\}$

نرمز للمتتالية بالرمز $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\geq\mathrm{n_0}}$ أو $(v_n)_{n\geq n_0}$ أو $(x_n)_{n\geq 0}$ أو $(y_n)_{n\geq 0}$ أو $(\mathrm{w_n})_{n\geq 0}$ أو....

مثال1

لنضع $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية الأعداد الزوجية التي تبدأ بالصفر.

$$u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, \dots$$

مثال2 :

لنضع $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية الأعداد الفردية الموجبة.

$$v_0 = 1, v_1 = 3, v_2 = 5, \dots$$

طرائق التعريف عن متتالية :

a-طريقة الحد العام : $\boldsymbol{u_n = f(n)}$

في هذه الحالة نُعطى u_n بدلالة n

مثال1 :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2n}{n+1}$

عندئذٍ تكون الحدود الأولى :

$$u_0 = \frac{2(0)}{0+1} = 0$$
$$u_1 = \frac{2(1)}{1+1} = 1$$
$$u_2 = \frac{2(2)}{2+1} = \frac{4}{3}$$
$$\dots \dots$$
$$u_{20} = \frac{2(20)}{20+1} = \frac{40}{21}$$

مثال2

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالشكل $u_n = 2^{n-1}$

$$u_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$
$$u_2 = 2^{2-1} = 2^1 = 2$$
$$u_3 = 2^{3-1} = 2^2 = 4, \dots$$

مثال3

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة $u_0 = (-1)^n$

$$u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = +1, \dots$$

b-التعريف بالتدريج :

$\boldsymbol{u_0 = a}$ و $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$

أي أن كل حد u_{n+1} ينتج عن سابقه u_n بتعويضه في صيغة التابع f (أي إذا أردنا حساب u_6 في العلاقة التدريجية نعوض u_5 في عبارة u_{n+1} و إذا أردنا u_1 نعوض u_0 و هكذا.....)

مثال1 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

لنوجد بعض الحدود الأولى :

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 2(2) + 1 = 5$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2(5) + 1 = 11$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2(11) + 1 = 23$$

مثال2

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + u_n} \end{cases}$$

احسب الحدود u_1 , u_2, u_3

الحل:

....

....

....

C. متتالية المجاميع :

تكون المتتالية معطاة على شكل مجموع منتهٍ بدلالة n أي :

$$\boldsymbol{u_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

و هي تعني أنه مجموع الحدود a_i ابتداءً من $i = 1$ و حتى a_n

مثال1

لنتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

نلاحظ هنا أن أول حد في المتتالية هو

$$u_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$$

و الحد الثاني : $u_2 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}$ و الحد الثالث هو $u_3 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$

و الحد الرابع $u_4 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$

مثال2 :

لنأخذ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$v_1 = 1 + \frac{1}{1}$$

$$v_2 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$v_3 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

مثال 3

لنأخذ المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$:

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

(من n و حتى ضعفها 2n)

$$x_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$x_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

مثال 4

لنأخذ المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$:

$y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ (من n و حتى ضعف n ناقص واحد 2n-1)

مثلاً لإيجاد y_5 فهي بدءاً من الكسر $\frac{1}{5}$ و حتى الكسر $\frac{1}{9}$:

$$y_5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$$

متتاليات شهيرة

المتتالية الحسابية :

تعريفها : هي متتاليةٌ كل حدٍ فيها ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت r ندعوه أساس المتتالية أي :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

مثلاً :

المتتالية .... 2,4,6,8,10, متتالية حسابية لأن كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت $r =$ 2 فهي تعرف تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = u_n + 2 \quad , u_0 = 2$$

كذلك المتتالية $5,0,-5,-10,-15,\dots$ متتالية حسابية لأن كل حدٍ فيها ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت $r = -5$ وحدها الأول 5

$$u_{n+1} = u_n - 5 \quad , u_0 = 5$$

حدها العام : يعطى الحد العام للمتتالية الحسابية بالشكل

$$u_n = u_0 + rn$$

مثال 1

الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول2 و أساسها 3 :

$$u_n = u_0 + rn$$
$$u_n = 2 + 3n$$

مثال2

الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول 5 و أساسها -5 هو

$$u_n = u_0 + rn$$
$$u_n = 5 - 5n$$

مثال3

الحد العام لمتتالية الحسابية التي حدها الأول 1 و أساسها 1

$$u_n = u_0 + rn$$
$$u_n = 1 + n$$

معيار الكشف عنها :

لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية :

1- نحسب u_{n+1} بأن نبدل كل n بـ (n+1) في عبارة u_n

2- نشكل الفرق $u_{n+1} - u_n$

فإذا كان الناتج عدداً ثابتاً لا يحوي n تكون حسابية أي :

$$u_{n+1} - u_n = constant = r$$

ويكون ناتج الطرح هو أساس المتتالية آنذاك.

مثال1

أثبت أن المتتالية التي حدها العام $u_n = 3n - 4$ حسابية و عين أساسها

الحل

نوجد u_{n+1} :

$$u_{n+1} = 3(n+1) - 4 = 3n + 3 - 4$$
$$u_{n+1} = 3n - 1$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = 3n - 1 - (3n - 4) = 3 = r$$

فهي حسابية و أساسها $r = 3$

مثال 2

أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{1-n}{4}$ حسابية وعين أساسها

الحل

نوجد u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \frac{1-(n+1)}{4} = \frac{1-n-1}{4} = -\frac{n}{4}$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-n}{4} - \frac{1-n}{4} = \frac{-n-1+n}{4}$$
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4} = r$$

حسابية أساسها $r = -\frac{1}{4}$

مثال3

أثبت أن المتتالية المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 12 \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

حسابية و عين أساسها

الحل

$$u_{n+1} = u_n + 12$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 12 - u_n = 12 = r$$

حسابية واساسها $r = 12$

علاقة الحدين : إذا كانت $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فإنه يوجد علاقة تربط بين أي حدين من هذه المتتالية تُعطى بالشكل :

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

و تستخدم هذه العلاقة في الحالات التالية :

✍معنا حدين من المتتالية و مطلوب حساب الأساس

✌معنا حدٌ من المتتالية و الأساس و المطلوب تعيين حد آخر

👌معنا حدين من المتتالية و المطلوب تعيين حد آخر مختلف عنهما . (يجب إيجاد r أولاً

👌✍لتعيين الحد العام u_n بدلالة n و لكن u_0 غير معلوم.

مثال1

لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فيها $u_4 = 12$ و $u_2 = 4$ ' عين أساس هذه المتتالية

الحل

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_4 = u_2 + (4-2)r$$
$$12 = 4 + 2r$$
$$2r = 12 - 4$$
$$2r = 8$$
$$r = 4$$

مثال2

لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابيا فيها $u_3 = 7$ و أساسها 2 , احسب u_{100}

الحل

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_{100} = u_3 + (100-3)2$$
$$u_{100} = 7 + 194 = 201$$

مثال3

لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ حسابية فيها $u_3 = 10$ و $u_7 = 30$ احسب u_{10}

الحل

المرحلة الأولى إيجاد r

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_3 = u_7 + (3-7)r$$
$$10 = 30 - 4r$$
$$4r = 20 \quad \Rightarrow r = 5$$

المرحلة الثاني إيجاد u_{10}

$$u_{10} = u_3 + (10-3)5$$
$$u_{10} = 10 + 35 = 45$$

ملاحظة : لقد استخدمنا u_3 و قد كان بالإمكان استخدام u_7 و نصف إلى نفس النتيجة : شاهد:

$$u_{10} = u_7 + (10-7)5$$
$$u_{10} = 30 + 15 = 45$$

مثال4

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ و فيها $u_4 = -11$ و $u_1 = -2$ احسب u_n بدلالة n (أو عين الحد العام بدلالة n)

الحل

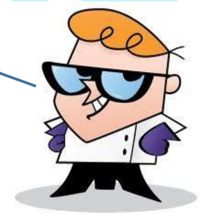
المرحلة الأولى :إيجاد الأساس :

$$u_4 = u_1 + (4-1)r$$
$$-11 = -2 + 3r$$
$$-9 = 3r \quad \Rightarrow r = -3$$

المرحلة الثانية : حساب u_n :

$$u_n = u_1 + (n-1)(-3)$$
$$u_n = -2 - 3n + 3$$
$$u_n = -3n + 1$$

إن الله يعطي أقوى معاركه
لأقوى جنوده
فكن على قدر المسؤولية



مجموع حدود متتالية حسابية :

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية و طُلب حساب مجموع الحدود :

$$S = u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots + u_j$$

فإنه يحسب من القانون :

$$S = \frac{a+l}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

حيث :

$a = u_i$ أول حد في المجموع

$l = u_j$ آخر حد في المجموع

عدد الحدود = $j - i + 1$

(آخر دليل ناقص أول دليل +1)

مثال 1

لتكن لدينا المتتالية $u_n = 2n + 2$ و

المطلوب :

1- **أثبت أنها حسابية**
2- **احسب قيمة المجموع** $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{10}$
3- **احسب المجموع :** $S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$

الحل

1 – إثبات أنها حسابية :

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 4 - (2n+2) = 2 = r$$

2-حساب المجموع:

$$S = \frac{a+l}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

$$a = u_2 = 2(2) + 2 = 6$$
$$l = u_{10} = 2(10) + 2 = 22$$

عدد الحدود : $10 - 2 + 1 = 9$

$$S = \frac{6+22}{2} \times 9 = 126$$

3-حساب المجموع :

$$S_n = \frac{a+l}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

$$a = u_0 = 2$$
$$l = u_n = 2n+2$$

عدد الحدود : $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = \frac{2+2n+2}{2}(n+1)$$

$$S_n = \frac{4+2n}{2}(n+1)$$

$$S_n = (2+n)(n+1)$$

مجموع كسور :

قانون:

$$\boxed{1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

مثال1

احسب المجموع

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + 10$$

الحل

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + 10$$

نضرب الطرفين بـ 2

$$2S = 1+2+3+4+\dots+20$$

$$2S = \frac{20(21)}{2} \Rightarrow S = \frac{20(21)}{4} = 5.21$$
$$= 105$$

مثال2

جد قيمة المجموع

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \dots + 15$$

الحل

نضرب الطرفين بـ 3 :

$$3S = 1+2+3+4+\dots+45$$
$$3S = \frac{45 \times 46}{2} = 1035$$

المتتالية الهندسة :

تعريفها : هي متتاليةٌ كل حدٍ فيها ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت q ندعوه أساس المتتالية أي :

$$u_{n+1} = q.u_n$$

مثلاً : المتتالية .... 2,4,8,16,32, متتالية هندسية لأن كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت $q = 2$ فهي تعرف تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = 2u_n \quad , u_0 = 2$$

كذلك المتتالية ... $5, -25, 125, -625$

متتالية هندسية لأن كل حدٍ فيها ينتج عن سابقه بضربه عدد ثابت $r = -5$ وحدها الأول 5

$$u_{n+1} = -5u_n \quad , u_0 = 5$$

حدها العام : يعطى الحد العام للمتتالية الحسابية بالشكل

$$u_n = u_0 . q^n$$

مثال 1

الحد العام للمتتالية الهندسية التي حدها الأول 2 و أساسها 3 :

$$u_n = 2.3^n$$

مثال2

الحد العام للمتتالية التي حدها الأول 5 و أساسها -5 هو $u_n = 5(-5)^n$

معيار الكشف عنها : لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية :

1- نحسب u_{n+1} بأن نبدل كل n بـ n+1 في عبارة u_n

2- نشكل النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ فإذا كان الناتج عدداً ثابتاً لا يحوي n تكون هندسية أي:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = constant = q$$

ويكون ناتج القسمة هو أساس المتتالية آنذاك.

مثال1

أثبت أن المتتالية التي حدها العام

$$u_n = 4 \times 3^n$$

هندسية و عين أساسها

الحل

نوجد u_{n+1} :

$$u_{n+1} = 4 \times 3^{n+1}$$

نشكل النسبة :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 3^{n+1}}{4 \times 3^n} = \frac{4 \times 3^n . 3}{4 \times 3^n} = 3 = q$$

فهي هندسية و أساسها $q = 3$

مثال 2

أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{1}{5^{n-1}}$ هندسية وعين أساسها

الحل

نوجد u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5^n}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{5^{n-1}}} = \frac{1}{5^n} \times \frac{5^{n-1}}{1}$$

$$= \frac{1}{5^n} \times \frac{5^n . 5^{-1}}{1} = 5^{-1} = \frac{1}{5} = q$$

هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

مثال

أثبت أن المتتالية المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 12u_n \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

هندسية و عين أساسها

الحل

$$u_{n+1} = 12u_n$$

نشكل النسبة :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{12u_n}{u_n} = 12 = q$$

هندسية واساسها $q = 12$

مثال3

أثبت أن المتتالية المعرفة وفق : $u_n = \frac{1}{2^n}$ هندسية

الحل

....
....
....
....

علاقة الحدين : إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فإنه يوجد علاقة تربط بين أي حدين من هذه المتتالية تُعطى بالشكل :

$$u_n = u_m . q^{(n-m)}$$

و تستخدم هذه العلاقة في الحالات التالية :

✌معنا حدين من المتتالية و مطلوب حساب الأساس

✌معنا حدّ من المتتالية و الأساس و المطلوب تعيين حد آخر

✌معنا حدين من المتتالية و المطوب تعيين حد آخر مختلف عنهما .(هنا يجب حساب q أولاً)

✌لتعيين الحد العام u_n بدلالة n و لكن u_0 غير معلوم.

مثال1

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_4 = 16$ و $u_2 = 4$ ، عين أساس هذه المتتالية

الحل

$$u_n = u_m . q^{(n-m)}$$
$$u_4 = u_2 . q^{(4-2)}$$
$$16 = 4 . q^2$$
$$q^2 = 4$$
$$q = 2$$

مثال2

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_3 = 27$ و أساسها 3, احسب u_5

الحل

$$u_n = u_m . q^{(n-m)}$$
$$u_5 = u_3 . 3^{(5-3)}$$
$$u_5 = 27 \times 9 = 243$$

مثال3

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية فيها

$u_3 = 8$ و $u_7 = 128$ احسب u_{10}

الحل

المرحلة الأولى إيجاد q

$$u_n = u_m . q^{(n-m)}$$
$$u_7 = u_3 . q^{(7-3)}$$
$$128 = 8 . q^4$$
$$q^4 = 16 \quad \Rightarrow q = 2$$

المرحلة الثانية إيجاد u_{10}

$$u_{10} = u_7 . 2^{(10-7)}$$
$$u_{10} = 128 \times 2^3 = 128 \times 8 = 1024$$

ملاحظة : لقد استخدمنا u_7 و قد كان

بالإمكان استخدام u_3 و نصف إلى نفس

النتيجة : شاهد:

$$u_{10} = u_3 + 2^{(10-3)}$$
$$u_{10} = 8 \times 2^7 = 1024$$

مثال4

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية و فيها
$u_4 = 81$

و $u_2 = 9$ احسب u_n بدلالة n (أو عين الحد العام بدلالة n)

الحل

المرحلة الأولى :إيجاد الأساس :

$$u_4 = u_2 . q^{(4-2)}$$
$$81 = 9 . q^2$$
$$9 = q^2 \quad \Rightarrow q = 3$$

المرحلة الثانية : حساب u_n :

$$u_n = u_2 . q^{(n-2)}$$
$$u_n = 9 \times 3^{n-2}$$
$$u_n = 9 . 3^n . 3^{-2}$$
$$u_n = 3^n$$

مجموع حدود متتالية هندسية :

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية و طُلب حساب

مجموع الحدود :

$$S = u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots + u_j$$

فإنه يحسب من القانون :

$$S = a \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

حيث :

$a = u_i$ أول حد في المجموع

عدد الحدود = $j - i + 1$

(آخر دليل ناقص أول دليل 1+)

مثال1

لتكن لدينا المتتالية $u_n = 2 \times 3^n$ و

المطلوب :

1- **أثبت أنها هندسية**
2- **احسب قيمة المجموع**
$S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{10}$
3- **احسب المجموع :**

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$

الحل

1 – إثبات أنها هندسية :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3 = q$$

2-حساب المجموع:

$$S = a\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$a = u_2 = 2 \times 3^2 = 18$$

عدد الحدود : $10 - 2 + 1 = 9$

$$S = 18 \,.\frac{1 - 3^9}{1 - 3} = -9(1 - 3^9)$$

3-حساب المجموع :

$$S_n = a\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$a = u_0 = 2$$
$$l = u_n = 2 \times 3^n$$

عدد الحدود : $n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = 2\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}$$
$$S_n = -1(1 - 3^{n+1}) = 3^{n+1} - 1$$

مثال2

بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها

$q = 2$ و فيها $u_1 = 3$

-1 اكتب u_n بدلالة n

2- احسب المجموع

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

....

....

....

....

....

....

....

....

فائدة هامة (مجموع مع قفزات) :

أحياناً نواجه تمارين تطلب جمع حدود من متتالية ما و لكنها ليست متعاقبة (يوجد قفزات في الأدلة) مثلاً :

$v_2 + v_4 + v_6 + \cdots v_{2n}$ فهنا نلاحظ أن الأدلة ليست اعداد طبيعية متتالية و إنما هنالك قفزات كل منها 2

و كذلك لو نظرنا للمجموع $u_3 + u_6 + u_9 + \cdots + u_{3n}$ فهنا القفزة قدرها 3 .

و لحساب مثل هذه المجاميع نتبع الخطوات التالية التي ستوضح على المثال التالي :

$$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$$

نلاحظ أن قيمة القفزة 2 و بالتالي نصطنع متتالية جديدة و ذلك بتقسيم كل دليل على قيمة القفزة (أي على 2 هنا)

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

من أخر حد في كلٍ من المجموعين نلاحظ ان $\boxed{v_n = u_{2n}}$ و هنا نلاحظ ما يلي :

إذا كانت المتتالية الأصلية u_n هندسية و أساسها q فإن المتتالية الجديدة v_n هندسية و أساسها $q' = q^{\text{القفزة}}$

فيكون المجموع المطلوب هو :

$$S = \underbrace{u_2}_{\text{الحد الأول}} \frac{1 - q'^n}{1 - \underbrace{q'}_{\text{الأساس الجديد}}}$$

مثال1

متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq 0}$ أساسها 3 و فيها $u_1 = -2$

1. **احسب u_n بدلالة n**
2. **احسب قيمة المجموع $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$**
3. **احسب قيمة المجموع $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$**

الحل

من قانون الحدين

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \Rightarrow \frac{u_n}{u_1} = q^{n-1} \Rightarrow \frac{u_n}{-2} = 3^{n-1}$$

$$u_n = -2.(3)^{n-1}$$

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7 = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a = u_1 = -2.(3)^{1-1} = -2$$

$$q = 3$$

$$n = 7 - 1 + 1 = 7$$

$$S = -2\frac{1-3^7}{1-3} = 1 - 3^7 = -2186$$

نلاحظ أن المجموع المطلوب هنا عبارة عن مجموع لحدود ليست متعاقبة (يوجد قفزة قدرها 2 بين كل دليل و الآخر) : لذا نتبع الخطوات التالية :

نفرض متتالية جديدة $(v_n)_{n\geq 0}$ بحيث $v_n = u_{2n}$

يصبح المجموع المطلوب :

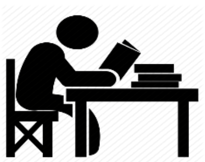
$$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n} = v_1 + v_2 + u_3 + \cdots .. + v_n$$

إذن $(v_n)_{n\geq n_0}$ هندسية و أساسها

$\boxed{q' = q^{\text{القفزة}}}$ إذن $q' = q^2 = 3^2 = 9$

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$
$$= u_2.\frac{1-(q')^n}{1-q'}$$
$$= -6 \times \frac{1-9^n}{1-9} = -6\frac{1-9^n}{-8}$$
$$= \frac{6}{8}(1-9^n) = \frac{3}{4}(1-9^n)$$

الجهد المستمر
مصيره الإنجاز
و الصبر المستمر
مصيره النجاح



مثال2

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{\pi^{\frac{n}{3}}}{2}$

1- أثبت أنها هندسة و عين أساسها

2- احسب قيمة المجموع $u_3+u_6+u_9+\cdots+u_{3n}$

الحل

1-لإثبات أنها هندسة:

- نحسب الحد u_{n+1} : $u_{n+1} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{3}}}{2}$
- نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\pi^{\frac{n+1}{3}}}{2}}{\frac{\pi^{\frac{n}{3}}}{2}} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{3}}}{\pi^{\frac{n}{3}}} = \pi^{\frac{n+1}{3}-\frac{n}{3}} = \pi^{\frac{1}{3}} = q$$

هندسة و أساسها $q = \pi^{\frac{1}{3}}$

2-لإيجاد قيمة المجموع $u_3+u_6+\cdots+u_{3n}$ نلاحظ أن الأدلة ليست متعاقبة و إنما تشتمل على قفزات قدر كل منها (3) :

لذلك نعرف متتالية جديدة v_n بحيث $v_n = u_{3n}$

نلاحظ أن المتتالية الجديدة $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها $q' = q^3 = \left(\pi^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \pi$ و بالتالي المجموع :

$$S = u_3\frac{1-q'^n}{1-q'} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-\pi^n}{1-\pi}$$

حيث تم حساب u_2 (أول حد في المجموع) من الحد العام

$$u_3 = \frac{\pi^{\frac{3}{3}}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

مجموع كسور :

إذا صادفنا مجموع من الشكل :

$$S = q+q^2+\cdots+q^n$$

ففوراً يمكن الحكم عليه أنه مجموع متتالية هندسية أساسها q و نطبق قانون المجموع

مثال 1

احسب قيمة المجموع

$$S = \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$$

الحل

نلاحظ أن المجموع يُكتب بالشكل :

$$S = \left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

و هو مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و $a = \frac{1}{3}$

فحسب قانون المجموع :

$$S = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S = \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

مثال2

احسب المجموع

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

الحل

يمكن كتابة المجموع بالشكل :

$$s = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

و هو مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و $a = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

نعوض في قانون المجموع

$$S = 1\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 1\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

مثال3

بسط المجموع

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - .. - \frac{1}{2^n}$$

الحل

$$S_n = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right]$$

$$S_n = 1 - \left[\frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$S_n = 1 - \left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$S_n = 1 - 2\left[1 - \frac{1}{2^n}\right]$$

$$S_n = 1 - 2 + \frac{2}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} - 1$$

مثال (دورة 2022- تكميلي)

بفرض $u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n}$

أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

الحل

المجموع :

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

هو مجموع متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{5}$ و $a = \frac{1}{5}$

$$u_n = \frac{1}{5}\,\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}$$

$$u_n = \frac{1}{5}\,\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}}$$

$$u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$$

ثلاث حدود متعاقبة

يرد في نص السؤال العبارة التالية (بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية (أو حسابية)

و أحياناً يذكر لنا أساسها و أحياناً لا يذكر الأساس فهنا يجب التفريق :

1- إذا ذكر الأساس فإننا نكتب القوانين التالية :

حسابية أساسها r	هندسية أساسها q
$b = a + r$ $c = a + 2r$	$b = aq$ $c = aq^2$

2- إذا لم يذكر الأساس فإننا نكتب القوانين التالية :

حسابية لم يذكر أساسها	هندسية لم يذكر أساسها
$2b = a + c$ و تقرأ : الأول + الأخير =ضعفي النصاني	$b^2 = ac$ و تقرأ : الأول بالأخير يساوي مربع النصاني

☺ غالباً ما تكون الحالة الثانية يُطلب فيها إيجاد a,b,c لذلك نعوض قيمة b بدلالة a,c وفق القوانين المكتوبة للوصول إلى معادلتين بمجهولين a,c ثم نحلهما حلاً مشتركاً

مثال 1

بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية تحقق :

$$3a + b - c = 12$$
$$a + 2b + c = 32$$

احسب a و b و c

الحل

بما أنه لم يذكر الأساس فسنستخدم القانون الموجود في الجدول(2) :

لدينا $b = \frac{a+c}{2}$

نعوض في المعادلتين :

$$\begin{cases} 3a + \frac{a+c}{2} - c = 12 \\ a + 2\left(\frac{a+c}{2}\right) + c = 32 \end{cases}$$

نضرب الأولى ب2 :

$$\begin{cases} 6a + a + c - 2c = 24 \\ a + a + c + c = 32 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 7a - c = 24 \\ 2a + 2c = 32 \end{cases}$$

نقسم الثانية على 2 :

$$\begin{cases} 7a - c = 24 \dots (1) \\ a + c = 16 .. (2) \end{cases}$$

بالجمع :

$$8a = 40 \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

نعوض في (2): $5 + c = 16$ و منه $\boxed{c = 11}$

و لما كان $b = \frac{a+c}{2}$ فإن $b = \frac{5+11}{2}$ و من يكون $\boxed{b = 8}$ و هو المطلوب .

مثال2

بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من هندسية و تحقق :

$$\begin{cases} a.b.c = -27 \\ 3a + 2b + c = -18 \end{cases}$$

احسب a,b,c

الحل

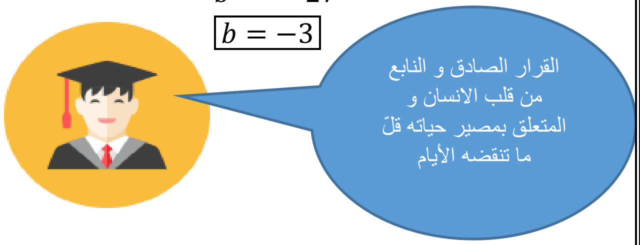
بما أنه لم يذكر أساس المتتالية سنتطبق قوانين الجدول (2) : و لدينا :

$$b^2 = a.c \dots (*)$$

و بالنظر إلى المعادلة الاولى $a.b.c = -27$ نجد أنه يمكن استبدال $a.c$ بالمقدار b^2 حسب القانون (*)

فيصبح :

$$b^2.b = -27$$
$$b^3 = -27$$
$$\boxed{b = -3}$$



نعوض في المعادلتين :

$$\begin{cases} -3ac = -27 \\ 3a - 6 + c = -18 \end{cases}$$

نصلح المعادلتين :

$$\begin{cases} ac = 9 \dots (1) \\ 3a + c = -12 \dots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أن :

$$c = -12 - 3a$$

نعوض في (1) :

$$a(-12 - 3a) = 9$$
$$-12a - 3a^2 = 9$$
$$3a^2 + 12a + 9 = 0$$

نقسم على 3 :

$$a^2 + 4a + 3 = 0$$
$$(a + 1)(a + 3) = 0$$

و منه إما $a = -1$ أو $a = -3$

نعوض في (1) :

$$a = -1 \Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow -c = 9 \Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow \boxed{c = -9}$$

$$a = -3 \Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow -3c = 9 \Longrightarrow\Longrightarrow \boxed{c = -3}$$

☺ غالباً ما يكون المطلوب في الحالة الاولى حساب أساس .

مثال

بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q و $q \neq 0$.

و $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية .

احسب q

الحل

أولاً : لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من هندسية أساسها q (ذكر الأساس فنستخدم قوانين الجدول 1) :

$$b = aq \quad , \quad c = aq^2 \dots\dots (1)$$

ثانياً : $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متعاقبة من حسابية (لم يذكر الأساس) فنستخدم الجدول (2) :

$$\underbrace{3a + c}_{\text{الأول+الأخير}} = \underbrace{2(2b)}_{\text{ضعفي النصاني}}$$

$$\Longrightarrow 3a + c = 4b \dots (2)$$

نعوض (1)في (2) :

$$3a + aq^2 = 4aq$$
$$aq^2 - 4aq + 3a = 0$$
$$a(q^2 - 4q + 3) = 0$$
$$q^2 - 4q + 3 = 0$$

(حيث $a \neq 0$ لأنه لا يمكن أن تكون لدينا متتالية هندسية حدها الأول صفر وإلا كانت جميع حدودها اصفار)

$$(q - 3)(q - 1) = 0$$
$$\boxed{q = 3} \quad or \quad \boxed{q = 1}$$

مسائل و تمرينات

التمرين 1

ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$, أثبت أنها هندسية .

الحل

نحسب u_{n+1} وذلك باستبدال كل n بـ $n+1$

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$$

نحسب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right)}{\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n}$$

$$= \frac{2^n.2^1}{3^n.3^2} \cdot \frac{3^n.3^1}{2^n}$$

$$\frac{u_{(n+1)}}{u_n} = \frac{2}{3} = q$$

هندسية وأساسها $q = \frac{2}{3}$

التمرين2

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $u_n = 3 - n$, أثبت أنها حسابية .

الحل

نحسب u_{n+1}

$$u_{n+1} = 3 - (n+1) = 2 - n$$

نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = (2-n) - (3-n) = -1 = r$$

حسابية وأساسها $r = -1$

التمرين3

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$, احسب u_{20}

الحل :

من العلاقة بين حدين

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

$$u_5 = u_2 + (5-2)r$$

$$\Rightarrow -13 - 41 = 3r$$

$$-54 = 3r$$

$$\Rightarrow r = -\frac{54}{3} = -18$$

مرة أخرى

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

$$u_{20} = u_2 + (20-2)r$$

$$\Rightarrow u_{20} = 41 - 324$$

$$\Rightarrow u_{20} = -324 + 41 = -283$$

التمرين4

$(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية فيها $u_4 = 16$ و $u_1 = 2$, احسب u_3 .

الحل

من قانون الحدين $u_n = u_m q^{n-m}$

$$u_4 = u_1 . q^{4-1} \Rightarrow \frac{16}{2} = q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

مرة أخرى :

$$u_n = u_m . q^{n-m}$$
$$u_3 = u_1 . 2^{3-1}$$
$$u_3 = 2 \times 4 \Rightarrow u_3 = 8$$

التمرين 5

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$

-1 احسب u_n بدلالة n

-2 احسب المجموع $u_{30} + u_{31} + u_{32}$

-3 احسب المجموع $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$

الحل

من قانون الحدين

$$u_n = u_m + (n-m)r$$
$$u_n = u_1 + (n-1)3$$
$$u_n = 2 + 3n - 3$$
$$u_n = 3n - 5$$

من قانون مجموع حدود متتالية حسابية :

$$u_{30} + u_{31} + u_{32} = n\frac{(a+l)}{2}$$

حيث $a = u_{30} = 3(30) - 5 = 85$ (تم حسابه من تعويض n=30 في الحد العام)

و $l = u_{32} = 3(32) - 5 = 91$ (تم حسابه من تعويض $n = 32$ في الحد العام)

وعدد الحدود $n = 32 - 30 + 1 = 3$ (آخر دليل ناقص أول دليل + 1)

بالتعويض:

$$u_{30} + u_{31} + u_{32} = 3\frac{(85+91)}{2} = 264$$

أيضاً من قانون مجموع حدود متتالية حسابية :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = n\frac{(a+l)}{2}$$
$$a = u_1 = -2$$
$$l = u_{20} = 3(20) - 5 = 55$$
$$n = 20 - 1 + 1 = 20$$
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = 20\frac{(-2+55)}{2} = 530$$

التمرين6

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 و $u_0 = 1$,

احسب $u_3 + u_4 + \cdots + u_{10}$

الحل

لنوجد الحد العام أولاً

$$u_n = u_0 . q^n = 1.2^n = 2^n$$

$$\Rightarrow u_n = 2^n$$

$$S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{10} = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a = u_3 = 2^3 = 8$$

$$q = 2$$

$$n = 10 - 3 + 1 = 8$$

$$S = 8.\frac{1-2^8}{1-2} = 8\frac{1-2^8}{-1} = 8(2^8 - 1) = 2040$$

التمرين7

aوbوc ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية و $a \neq 0$ وأساس المتتالية q ونعلم أن $3a$ و $2b$ وc هي ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية , احسب q

الحل

حسب تعريف المتتالية الهندسية فكل حد فيها ينتج عن سابقه بضربه بالأساس q

إذن لدينا الحد b ينتج عن سابقه a بضربه بـ q

أي: $b = aq$

و الحد c ينتج عن سابقه b بضربه بـ q أي:

$$c = bq = (aq)q = aq^2$$

إذن لدينا

$$a \quad , \quad b = aq \quad , \ c = aq^2$$

الآن : بما أن 3a , 2b ,c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فحسب قانون "ثلاث حدود متعاقبة" في المتتالية الحسابية (فضعفي الأوسط يساوي مجموع الأول و الثالث) :

$$2(2b) = 3a + c$$

$$4b = 3a + c$$

$$4aq = 3a + aq^2$$

$$aq^2 - 4aq + 3a = 0$$

نقسم على $a \neq 0$:

$$q^2 - 4q + 3 = 0$$

$$(q-1)(q-3) = 0$$

$$\Rightarrow q = 1 \ or \ q = 3$$

المتتاليات المتداخلة

نُعطى متتالية تدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$

ثم نُعطى متتالية أخرى v_n بدلالة u_n

$$v_n = g(u_n)$$

ندعو العبارة الأخيرة : العلاقة المتداخلة

و غالباً ما يطلب على هذه المتتالية: ☝إثبات أن الأخيرة هندسية أو حسابية :

1- نوجد v_{n+1} بدلالة u_{n+1}
2- نطبق المعيار المناسب

✌إيجاد الحد العام لـ v_n :

1- نوجد v_0 بتعويض u_0 بالعبارة المتداخلة

2- نضع قانون الحد العام

3- نعوض

✍استنتاج الحد العام لـ u_n :

1- نكتب العبارة المتداخلة

2- نعزل u_n بدلالة v_n

3- نعوض الحد العام لـ v_n

أمثلة و تمارين :

التمرين 1

بفرض $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2u_n + 3$

و نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالشكل:

$$v_n = u_n + 3$$

1- أثبت أن (v_n) هندسية و عين أساسها

2- اكتب v_n بدلالة n

3- استنتج u_n بدلالة n

التمرين 2

بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$$
$$u_0 = 2$$

و نتأمل المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$x_n = u_n + 2$$

1- أثبت أن المتتالية (x_n) هندسية

2- اكتب x_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3- احسب المجموع $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

4- استنتج المجموع : $S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

التمرين 3

بفرض $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$ و $v_0 = 1$

و لتكن $u_n = \frac{1}{v_n}$

1- أثبت أن u_n حسابية

2- اكتب u_n بدلالة n

3- استنتج v_n بدلالة n

4- احسب المجموع :

$$S = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}$$

التمرين الرابع

نعطى عددين حقيقيين a و b و $a \neq 0$

تأمل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق

$$v_{n+1} = av_n + b$$

1- عين تابعاً f يحقق أن $v_{n+1} = f(v_n)$

2- احسب l حل المعادلة $f(x) = x$

3- نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالشكل $u_n = v_n - l$ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية واستنتج u_n بدلالة n و a و b

الحل

نحن نبحث عن تابع f إذا استبدلنا فيه كل x بـ v_n نحصل على $av_n + b$

⇐نعرف التابع f بالشكل

$$f(x) = ax + b$$

حساب l :

$$f(x) = x$$
$$ax + b = x$$
$$ax - x = -b$$
$$(a-1)x = -b$$
$$x = \frac{-b}{a-1}$$

وبالتالي $l = \frac{-b}{a-1}$

لدينا :

$$u_n = v_n - l$$
$$u_n = v_n - \frac{-b}{a-1}$$
$$u_n = v_n + \frac{b}{a-1}$$

نحسب u_{n+1} :

$$\Rightarrow u_{n+1} = v_{n+1} + \frac{b}{a-1}$$

نعوض $v_{n+1} = av_n + b$

$$u_{n+1} = av_n + b + \frac{b}{a-1}$$

نوحد المقامات

$$u_{n+1} = av_n + \frac{ba - b + b}{a-1}$$
$$u_{n+1} = av_n + \frac{ba}{a-1}$$
$$u_{n+1} = a\left[v_n + \frac{b}{a-1}\right]$$

نشكل النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a\left[v_n + \frac{b}{a-1}\right]}{v_n + \frac{b}{a-1}}$$
$$= a = q$$

هندسية وأساسها $q = a$

$$\Rightarrow v_n = v_0 . a^n$$

وبما أن $u_n = v_n - l$ فنعوض :

$$u_n = \underbrace{v_0 . a^n}_{v_n} + \frac{b}{a-1}$$

وهي عبارة u_n بدلالة a و b و n و v_0

الإثبات بالتدريج

إذا كانت $E(n)$ قضية متعلقة بالعدد الطبيعي n حيث $n \geq n_0$ وأردنا إثبات أنها صحيحة مهما تكن $n \geq n_0$ فإن أفضل الطرق لذلك هي "الإثبات بالتدريج" أو ما يعرف بال " الاستقراء الرياضي" .

طريقة الإثبات بالتدريج :

1. نرمز للقضية $E(n)$
2. نثبت صحة القضية من أجل أول قيمة لـn ولتكن n_0
3. نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة … (الفرض)

④ نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ ....)

الطلب) مستفيدين من (الفرض)

النمط الأول من التمارين:المضاعفات

① أثبت صحة الخاصة

$E(n)$:"3 مضاعف للعدد 4^n+5 العدد

$; n \geq 1$

الحل

نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$4^1+5=4+5=9$$

من مضاعفات العدد 3

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة :

$$4^n+5=3k \ldots (\text{الفرض})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$4^{n+1}+5=3k' \ldots (\text{الطلب})$$

حيث $k' \in \mathbb{Z}$

البرهان :لدينا من الفرض :

$$4^n+5=3k$$

نضرب الطرفين بـ 4^1

$$4^{n+1}+20=12k$$

نضيف للطرفين 5 :

$$4^{n+1}+5+20=12k+5$$

$$4^{n+1}+5=12k+5-20$$

$$4^{n+1}+5=12k-15$$

$$4^{n+1}+5=3\underbrace{(4k-5)}_{k'}$$

$$4^{n+1}+5=3k'$$

وهو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة مهما يكن $n \geq 1$

② أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: " 7 مضاعف للعدد $2^{3n}-1$"

الحل

نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$2^3-1=8-1=7$$

من مضاعفات العدد 7

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$2^{3n}-1=7k \ldots (\text{الفرض})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$2^{3(n+1)}-1=7k'$$

$$2^{3n+3}-1=7k' \ldots (\text{الطلب})$$

حيث $k' \in \mathbb{Z}$

✍البرهان : لدينا من الفرض

$$2^{3n} - 1 = 7k$$

نضرب الطرفين بـ 2^3 :

$$2^{3n+3} - 2^3 = 2^3(7k)$$
$$2^{3n+3} - 8 = 56k$$

نطرح 1 من الطرفين :

$$2^{3n+3} - \mathbf{1} - 8 = 56k - 1$$
$$2^{3n+3} - 1 = 56k - 1 + 8$$
$$2^{3n+3} - 1 = 56k + 7$$
$$2^{3n+3} - 1 = 7\underbrace{(8k+1)}_{k'}$$
$$2^{3n+3} - 1 = 7k'$$

وهو المطلوب .فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall\, n \geq 1$

③ أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: " $n^3 + 2n$ مضاعف للعدد 3 "

الحل

☝نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$1^3 + 2(1) = 3$$

مضاعف للعدد 3

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

✌نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$n^3 + 2n = 3k \ldots (\text{الفرض})$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = 3k' \ldots (\text{الطلب})$$

حيث $k' \in \mathbb{Z}$

✍البرهان :

$$l_1 = (n+1)^3 + 2(n+1)$$
$$l_1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2$$
$$l_1 = (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3$$

ولكن حسب (الفرض) لدينا

$$n^3 + 2n = 3k$$

نعوض:

$$l_1 = 3k + 3n^2 + 3n + 3$$
$$l_1 = 3(k + n^2 + n + 1)$$
$$l_1 = 3m$$

وهو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall\, n \geq 1$

④ أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: "$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 "

الحل

☝نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$3^{2(1)+1} + 2^{1+2} = 27 + 8 = 35$$

من مضاعفات العدد 7

⇐ الخاصة $E(1)$ صحيحة

✌نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي

$$3^{2n+1}+2^{n+2}=7k \dots (\text{الفرض})$$

حيث $k\in\mathbb{Z}$

✍نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$3^{2n+3}+2^{n+3}=7k \dots (\text{الطلب})$$

حيث $k\in\mathbb{Z}$

✍البرهان : لدينا من الفرض :

$$3^{2n+1}+2^{n+2}=7k'$$

نضرب الطرفين بـ 3^2 :

$$3^{2n+3}+3^2(2^{n+2})=3^2\times 7k$$
$$3^{2n+3}+9(2^{n+2})=63k$$

نضيف للطرفين 2^{n+3}

$$3^{2n+3}+2^{n+3}+9(2^{n+2})=63k+2^{n+3}$$
$$3^{2n+3}+2^{n+3}=63k+2^{n+3}-9(2^{n+2})$$
$$3^{2n+3}+2^{n+3}=63k+2(2^{n+2})-9(2^{n+2})$$
$$3^{2n+3}+2^{n+3}=63k-7(2^{n+2})$$
$$3^{2n+3}+2^{n+3}=7(9k-2^{n+2})$$
$$3^{2n+3}+2^{n+3}=7k'$$

وهو المطلوب

فالخاصة $E(n)$ صحيحة $\forall\, n\geq 1$

تمارين إضافية

التمرين 1

أثبت بالتدريج أن المقدار 5^n-3^n زوجي مهما يكن العدد $n\geq 1$

التمرين 2

أثبت بالتدريج أن $3^{2n}-1$ من مضاعفات العدد 8

النمط الثاني : صحة مساواة

① **أثبت بالتدريج صحة القضية :**

$$\boldsymbol{E(n): 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

✌نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$l_1=1 \quad , \quad l_2=\frac{1(1+1)}{2}=1 \quad \Longrightarrow l_1=l_2$$

فالخاصة محققة من أجل n=1

✌نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

✍نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

✍البرهان :

"دائماً في المجاميع ننطلق من (الفرض) ثم نضيف للطرفين الحد الناقص للوصول للطلب , ثم نصلح الطرف الثاني "

لدينا من (الفرض) :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

نضيف للطرفين $(n+1)$:

$$1+2+3+\cdots+\mathrm{n}+(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})=\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}+(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$$

نوحد المقامات :

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

و هو المطلوب.

❷ **أثبت بالتدريج صحة القضية :**

$$\boldsymbol{E(n)}:\ \mathbf{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$l_1=1^3=1 \qquad l_2=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1 \Rightarrow l_1=l_2$$

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة أي:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نضيف للطرفين $(\mathrm{n}+1)^3$:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^3$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^3=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

و هو المطلوب .

النمط الثالث من التمارين المتراجحات :

و هي نوعان :

<u>النوع الأول : متراجحات متعلقة بـ n</u>

❶ $$\boldsymbol{E(n)}:\boldsymbol{(1+x)^n\geq 1+nx}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$1+x\geq 1+x$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$(1+x)^n\geq 1+nx \ldots \text{(الفرض)}$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x$$

أي : $(1+x)^n\geq 1+nx+x$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$(1+x)^n\geq 1+nx$$

نضرب الطرفين ب $(1+x)$

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$
$$= 1 + x + nx + nx^2$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 \geq 1 + x + nx$$

حيث nx^2 يمكن إهمالها لنحصل على مقدار أصغر

$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x$ وهو المطلوب .

العاملي:

$$\mathrm{n}! = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\ldots.2.1$$

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$
$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$
$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

و لدينا اصطلاحاً :

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1$$

ومن الخواص المهمة :

$$(\mathrm{n}+1)! = (\mathrm{n}+1)\mathrm{n}!$$

2 $E(n): n! \geq 2^{n-1}$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = 1! = 1 \\ l_2 = 2^{1-1} = 1 \end{array}\right\} l_1 \geq l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$n! \geq 2^{n-1} \ldots \text{(الفرض)}$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$(n+1)! \geq 2^n$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$n! \geq 2^{n-1}$$

نضرب الطرفين ب $(n+1)$

$$(n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}$$
$$(n+1)! \geq (n+1)2^n.2^{-1}$$
$$(n+1)! \geq 2^n \frac{(n+1)}{2} \geq 2^n$$

حيث $\frac{(n+1)}{2}$ مهملة فنحصل على مقدار أصغر

$$(n+1)! \geq 2^n$$

وهو المطلوب

النوع الثاني : متراجحات متعلقة بـ u_n

أي تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بعلاقة تدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$

و هنا نميز حالتين :

أ- الحالة الأولى :

و u_n ذكرت مرة واحدة فقط في عبارة u_{n+1}

عندها ننطلق من (الفرض) ونطبق عمليات جبرية (ضرب , جمع , طرح) للوصول لشكل u_{n+1}

1 **لتكن $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ و $u_0 = 1$**

أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$ أياً كان $n \geq 0$

نعرف القضية

$E(n)$: " $0 \le u_n \le 2$ "

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 \le u_0 = 1 \le 2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$0 \le u_n \le 2 \ldots \text{(الفرض)}$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$0 \le u_{n+1} \le 2 \ldots \text{(الطلب)}$$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$$0 \le u_n \le 2$$

نضيف للطرفين 2

$$2 \le 2 + u_n \le 4$$

نجذر

$$0 \le \sqrt{2} \le \sqrt{2+u_n} \le 2$$

$$0 \le \sqrt{2+u_n} \le 2$$

$$0 \le u_{n+1} \le 2$$

وهو المطلوب

2 نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = 2u_n + 3 \quad , u_0 = 1$$

أثبت بالتدريج أن $u_n \ge 1$ و ذلك مهما يكن $n \ge 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3 بفرض المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1+u_n}$$
$$u_0 = 1$$

أثبت أن $0 < u_n \le 1$ مهما يكن $n \ge 0$

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4 بفرض $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

و $u_0 = \frac{3}{2}$ أثبت بالتدريج أن :

$1 \le u_n \le 2$

....

ب-الحالة الثانية : $u_{n+1} = f(u_n)$ و u_n ذكرت أكثر من مرة عندها

① نعرف التابع $f(x)$

② نحسب $f'(x)$

③ نثبت أن f متزايد أي $f'(x) \ge 0$

④ نصور به أطراف المتراجحة

تمرين1

متتالية معرفة وفق $(u_n)_{n\ge0}$ و $u_0 = 1$

$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \ge 0$

أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً

واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \le 1$ أياً كان العدد n .

الحل

في الطلب الأول تم تعريف التابع $f(x) =$ $\frac{3x+2}{2x+6}$ وهو مستخلص من شكل المتتالية في نص التمرين (قد لا يأتي التابع في نص التمرين ويكون من المفروض أن تصطنعه أنت ...)

إن f اشتقاقي على المجال $]0\,,+\infty[$

ومشتقه $f'(x) = \frac{14}{(2x+6)^2}$ مهما تكن $x \ge 0$

وبالتالي التابع f تابع متزايد

الآن لنفرض الخاصة :

$$E(n): "\frac{1}{2} < u_n \le 1"$$

☝نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\frac{1}{2} < u_0 = 1 \le 1$$

✌نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$\frac{1}{2} < u_n \le 1 \ldots \text{(الفرض)}$$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \le 1$$

✍البرهان :

نلاحظ أننا لا نستطيع الانطلاق من الفرض والحصول على الهدف بعمليات جبرية , لذلك سيكون من المفيد الاستفادة من التابع f المتزايد لدينا من الفرض

$$\frac{1}{2} < u_n \le 1$$

و f متزايد إذاً :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \le f(1)$$

$$\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)+2}{2\left(\frac{1}{2}\right)+6} < \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \le \frac{3(1)+2}{2(1)+6}$$

$$\frac{7}{14} < u_{n+1} \le \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \le \frac{5}{8} \le 1$$

وهو المطلوب .

تمرين2

بفرض $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n} \quad , \quad u_0 = 1$$

أثبت أن $0 < u_n \le 1$

الحل

نسمي القضية

$$E(n): "0 < u_n \le 1"$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 < u_0 \le 1$$
$$0 < 1 \le 1$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$0 < u_n \le 1$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$0 < u_{n+1} \le 1$$

البرهان :

نعرف التابع f على المجال $]0,1]$ وفق :

$$f(x) = \frac{x}{2+x}$$

نشتق : $f'(x) = \frac{2}{(2+x)^2} > 0$

نلاحظ أن $f'(x) > 0$ على المجال $]0,1]$ و بالتالي f متزايد على المجال $]0,1]$

الآن من الفرض :

$$0 < u_n \le 1$$

و لما كان f متزايد على $]0,1]$:

$$f(0) < f(u_n) \le f(1)$$
$$0 < u_{n+1} \le \frac{1}{3} < 1$$
$$0 < u_{n+1} \le 1$$

فالقضية صحيحة .

تمرين3

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالشكل :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \quad , u_0 = \frac{3}{2}$$

أثبت أن $1 \le u_n \le 2$

الحل

نسمي القضية $E(n): 1 \le u_n \le 2$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$1 \le u_0 \le 2$$

$$1 \le \frac{3}{2} \le 2$$

محققة

✌نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$1 \le u_n \le 2$$

✌ نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$1 \le u_{n+1} \le 2$$

✍البرهان :

نعرف التابع f على المجال $[1,2]$ بالشكل :

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$
$$f'(x) = 2x - 2 \ge 0 \, ; x \in [1,2]$$

إذن f متزايد على المجال $[1,2]$

لدينا من الفرض :

$$1 \le u_n \le 2$$

و بما أن f متزايد على $[1,2]$ نصور الأطراف :

$$f(1) \le f(u_n) \le f(2)$$
$$1 \le u_{n+1} \le 2$$

و هو المطلوب

اطراد المتتالية

تعاريف و رموز:

المتتالية المتزايدة	$u_{n+1} \ge u_n$
المتتالية المتزايدة تماماً	$u_{n+1} > u_n$
المتتالية المتناقصة	$u_{n+1} \le u_n$
المتتالية المتناقصة تماماً	$u_{n+1} < u_n$
المتتالية الثابتة	$u_{n+1} = u_n$

طرق دراسة إطراد متتالية :

أولاً : طريقة الفرق (نقارن مع الصفر) :

1- نحسب u_{n+1}

2- نشكل الفرق $u_{n+1} - u_n$

3- نميز حالتين :

❖إذا كان $u_{n+1} - u_n \ge 0$ ⇐ متزايدة

❖إذا كان $u_{n+1} - u_n \le 0$ ⇐ متناقصة

أمثلة

ادرس اطراد كل من المتتاليات الآتية

1) $u_n = 2n + 5$

$$u_{n+1} = 2(n+1) + 5 = 2n + 8$$

نشكل الفرق $u_{n+1} - u_n = (2n+8) - (2n+5) = 3 \geq 0$

$\Leftarrow$ متزايدة

$$2) u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$u_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}$$

نشكل الفرق

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^2+4n+4-n^2-3n-n-3}{(n+3)(n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)} \geq 0$$

$\Leftarrow$ متزايدة

$$3) u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} \geq 0$$

$$4) u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2n+1+2n+2}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{4n^2+3n-(2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{4n^2+3n-4n^2-4n-2n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{-(3n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$$

متناقصة .

ثانياً :طريقة النسبة (نقارن مع الواحد) :

1- نحسب u_{n+1}

2- نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

3- نميز حالتين :

- إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (متزايدة)
- إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (متناقصة)

يجب أن يكون $u_n > 0$

أمثلة

ادرس اطراد كل من المتتاليات الآتية

$$u_n = \frac{10^n}{n!}$$

$$u_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

نشكل النسبة

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{10^n}{n!}\right)} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10^n . 10}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{10^n}$$

$$= \frac{10}{(n+1)} \leq 1$$

وذلك بدءاً من $n = 9$

$\Leftarrow$ متناقصة بدءاً من الحد u_9

$$u_n = \frac{n}{3^n}$$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

نشكل النسبة

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n}{3^n}\right)} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^n} \leq 1$$

$\Leftarrow$ متناقصة

<u>ثالثاً : طريقة الاشتقاق :</u>

إذا كان $u_n = f(n)$ حيث $n \geq n_0$ وكان f اشتقاقي على المجال $]n_0 , +\infty[$ عندها

❖إذا كان $f'(x) \geq 0$ على المجال $[n_0 , +\infty[$ فإن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة $\forall n \geq n_0$.

❖إذا كان $f'(x) \leq 0$ على المجال $[n_0 , +\infty[$ فإن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة $\forall n \geq n_0$.

أمثلة

ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية

1) $u_n = \frac{3}{n^2}$; $n \geq 1$

نعرف التابع

$f : [1 , +\infty[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{x^3} \leq 0 \ , \forall x \in [1 , +\infty[$$

$\Leftarrow$ $(u_n)_{n \geq 1}$ متناقصة

2) $u_n = \sqrt{3n+1}$; $n \geq 0$

نعرف التابع

$f : [0 , +\infty[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{3x+1}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \geq 0 \ , \forall x \in [0 , +\infty[$$

$\Leftarrow$ $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة

3) $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$; $n \geq 0$

نعرف التابع

$f:[0\,,+\infty[\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+4)-(2x-1)}{(x+4)^2}=\frac{9}{(x+4)^2}\geq 0$$

$\Leftarrow$ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

$$\mathbf{4)}\,u_n=\frac{1}{n^2+1}\quad ;n\geq 0$$

$$\mathbf{5)}\,u_n=\frac{3n+1}{n-1}\quad ;n\geq 2$$

$$\mathbf{6)}\,u_n=-3n+1\quad ;n\geq 0$$

$$\mathbf{7)}\,u_n=1+\frac{1}{n^2}\quad ;n\geq 0$$

$$\mathbf{8)}\,u_n=\frac{n+1}{n+2}\quad ;n\geq 0$$

<u>رابعاً : طريقة تعريف قضية :</u>

إذا كانت المتتالية معرفة بالتدريج :

❖لإثبات أنها متزايدة :

1- نعرف القضية

$E(n): u_{n+1}\geq u_n$

2- نثبت القضية بالتدريج

❖لإثبات أنها متناقصة

1- نعرف القضية

$E(n): u_{n+1}\leq u_n$

2- نثبت القضية بالتدريج

❖لدراسة الاطراد :

1- نحسب الحدود u_0, u_1, u_2

2- نتوقع جهة الاطراد و نعرف القضية المناسبة

3- نثبت القضية بالتدريج .

أمثلة

ادرس اطراد المتتاليات التالية :

$$\mathbf{1)}\,u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2\quad ,u_0=2$$

نعوض بعض الحدود

$$u_0=2$$

$$u_1=\frac{3}{4}(2)+2=\frac{7}{2}$$

$$u_2=\frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right)+2=\frac{37}{8}$$

نلاحظ أن

$$u_0\leq u_1\leq u_2$$

نعرف القضية :

$$\boldsymbol{E(n)}:\ "\ \boldsymbol{u_n\leq u_{n+1}}"$$

☝نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$u_0=2\leq u_1=\frac{7}{2}$$

$E(0)$ محققة

✌نفرض صحة القضية $E(n)$:

$u_n\leq u_{n+1}\ \dots$ (الفرض)

👌نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$u_{n+1} \le u_{n+2}$

البرهان : لدينا من (الفرض)

$u_n \le u_{n+1}$

نضرب الطرفين ب $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}u_n \le \frac{3}{4}u_{n+1}$

نضيف 2

$\frac{3}{4}u_n + 2 \le \frac{3}{4}u_{n+1} + 2$

$u_{n+1} \le u_{n+2}$

وهو المطلوب

$\Leftarrow$ $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة

2) $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$, $u_0 = 1$

أثبت أنها متناقصة

نعرف القضية $E(n): u_{n+1} \le u_n$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$u_1 \le u_0$

$\frac{u_0}{1+u_0} \le 1$

$\frac{1}{2} \le 1$

محققة .

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$u_{n+1} \le u_n$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$u_{n+2} \le u_{n+1}$

البرهان :

نعرف التابع f بالشكل $f(x) = \frac{x}{1+x}$

نشتق $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$

فالتابع f متزايد

لدينا من الفرض :

$u_{n+1} \le u_n$

و بما أن f متزايد :

$f(u_{n+1}) \le f(u_n)$
$u_{n+2} \le u_{n+1}$

فالقضية صحيحة والمتتالية متناقصة.

تمارين

التمرين الأول

ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية :

① $u_n = 2^n$

الحل

$u_{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$

متزايدة

② $u_n = \frac{n^2}{n!}$

الحل:

$$u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n^2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)n!}\times\frac{n!}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}\leq 1$$

متناقصة

3) $u_n=\left(\frac{-1}{n}\right)^n$

$$u_1=-1\ ,u_2=\frac{1}{4}\ ,u_3=-\frac{1}{27}\ ,u_4=\frac{1}{64}$$

نلاحظ أنها غير مطردة (متناوبة)

4) $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

$$u_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2^{n+1}}\geq 0$$

متزايدة

التمرين الثاني

أثبت بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$:

$$"1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1"$$

الحل

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left.\begin{array}{r} l_1=1 \\ l_2=2!-1=1\end{array}\right\} l_1=l_2$$

الخاصة $E(1)$ محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n! = (n+1)!-1$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$1+2\times 2!+\cdots+n.n! + (n+1).(n+1)! = (n+2)!-1$$

البرهان: لدينا من (الفرض)

$$1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n! = (n+1)!-1$$

نضيف $(n+1).(n+1)!$

$$1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n! + (n+1).(n+1)!$$
$$=(n+1)!-1+(n+1).(n+1)!$$
$$=(n+1)!\,(1+n+1)-1$$
$$=(n+2)(n+1)!-1$$
$$=(n+2)!-1$$

التمرين الثالث

في حالة عدد طبيعي $n\geq 1$, ليكن
$u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ و $v_n=u_{2n}-u_n$
أثبت أن المتتالية (v_n) متزايدة دوماً.

الحل

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$u_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

بالطرح

$$v_n = u_{2n} - u_n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$
$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

نحسب v_{n+1}

$$v_{n+1} =$$
$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

بالطرح

$$v_{n+1} - v_n =$$
$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

$\Leftarrow$ (v_n) متزايدة

التمرين الرابع

نتأمل المتتالية $(u_n)_{(n \geq 0)}$ المعرفة تدريجياً وفق

$u_0 = 7$ و $u_{n+1} = 10u_n - 18$

① احسب u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5

الحل

$$u_0 = 7$$
$$u_1 = 10u_0 - 18 = 52$$
$$u_2 = 10u_1 - 18 = 502$$
$$u_3 = 10u_2 - 18 = 5002$$
$$u_4 = 10u_3 - 18 = 50002$$
$$u_5 = 10u_4 - 18 = 500002$$

② ما عدد الأصفار في كل من الحدود السابقة

في u_1 لا يوجد أصفار

في u_2 يوجد صفر واحد في u_3 يوجد صفران في u_4 يوجد 3 أصفار في u_5 يوجد 4 أصفار

③ ما عدد الأصفار في u_n بدلالة n

عدد الأصفار هو $n-1$ صفراً

④ نضع القضية

$E(n)$: "$u_n = 5 \times 10^n + 2$"

أثبت صحة القضية من أجل $n \geq 0$

☝نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\left.\begin{array}{r} l_1 = u_0 = 7 \\ l_2 = 5 \times 10^0 + 2 = 5 + 2 = 7 \end{array}\right\} l_1 = l_2$$

$E(0)$ محققة

✌نفرض صحة القضية $E(n)$:

$u_n = 5 \times 10^n + 2 \ldots$ (الفرض)

👌نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$u_{n+1} = 5 \times 10^{n+1} + 2$$

البرهان :

$$l_1 = u_{n+1} = 10u_n - 18$$
$$l_1 = 10[5 \times 10^n + 2] - 18$$
$$l_1 = 5 \times 10^{n+1} + 20 - 18$$
$$l_1 = 5 \times 10^{n+1} + 2 = l_2$$

وهو المطلوب

التمرين الخامس
متتالية هندسة متخفية:

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجياً وفق

$$(*) \ldots\ldots u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n$$
$$, \quad u_0 = s$$

1- عين كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث تُحقق المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ التي حدها العام $t_n = P(n)$ العلاقة التدريجية (*) نفسها أي :

$$t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$$

2- أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسية

3- اكتب عبارة v_n ثم u_n بدلالة n و s

الحل

$$t_n = an^2 + bn + c$$

و بالتالي: $t_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$

بالنشر و التجميع:

$$t_{n+1} = an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)$$

و لما كانت تحقق العلاقة التدريجية $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ ،

نعوض :

$$an^2 + (2a+b)n + (a+b+c) = \frac{1}{2}[an^2 + bn + c] + n^2 + n \Longrightarrow$$

$$an^2 + (2a+b)n + (a+b+C) = \left(\frac{a}{2} + 1\right)n^2 + \left(\frac{b}{2} + 1\right)n + \frac{c}{2}$$

بالمطابقة (وأمثال n^2 في الطرف الأيمن يساوي أمثال n^2 في الطرف الأيسر و أمثال n في الطرف الأيمن تساوي أمثال n في الطرف الأيسر و الحد الثابت في الطرف الأيمن يساوي الحد الثابت في الطرف الأيسر)

$$a = \frac{a}{2} + 1 \Rightarrow \quad \frac{a}{2} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{a = 2}$$
$$2a + b = \frac{b}{2} + 1 \Rightarrow\Rightarrow \boxed{b = -6}$$
$$a + b + c = \frac{c}{2} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \boxed{c = 8}$$
$$\boxed{t_n = 2n^2 - 6n + 8}$$

لدينا $v_n = u_n - t_n$:

$$v_n = u_n - 2n^2 + 6n - 8$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1}$$
$$= (2(n+1)^2 - 6(n+1) + 8)$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n - 2n^2 - 4n - 2 + 6n + 6 - 8$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-n^2+3n-4$$

لإثبات أنها هندسية :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{2}u_n-n^2+3n-4}{u_n-2n^2+6n-8}$$

نوحد المقامات في البسط:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{u_n-2n^2+6n-8}{2}}{u_n-2n^2+6n-8}=\frac{1}{2}=q$$

و حدها الأول : $v_0=\underbrace{u_0}_{s}-\underbrace{t_0}_{8}=s-8$ و

بالتالي :

$$v_n=v_0q^n=(s-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لإيجاد الحد العام لـ $v_n=u_n-t_n$ و بالتالي

$$u_n=v_n+t_n$$

$$u_n=(s-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n^2-6n+8$$

التمرين السادس

1) أثبت أياً كان العدد الطبيعي $n\ge 2$, فإن $3n^2\ge(n+1)^2$

2) نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n\ge 2^n+5n^2$ »

أ- ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم n تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟

ب- أثبت أن $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n\ge 5$

الحل

1) قد تعتقد أن الحل سيكون بطريقة الاثبات بالتدريج إلا أنه من السهل إثبات هذه الخاصة بالطريقة المباشرة إذ أن المتراجحة المطلوبة :

$$3n^2\ge(n+1)^2$$

تكافئ : $3n^2\ge n^2+2n+1$ و تكافئ :

الطرف الأيسر , $2n^2-2n-1\ge 0$:

$$2n^2-2n-1=2n(n-1)-1\underbrace{\ge}_{n\ge1}2(2)(2-1)-1=3\ge 0$$

فهي محققة .

لنسمي الخاصة

$E(n)$:« $3^n\ge 2^n+5n^2$ »

للبحث عن أول قيمة للعدد الطبيعي n نشكل الجدول :

n	3^n		2^n+5n^2
1	3	<	7
2	9	<	24
3	27	<	53
4	81	<	96
5	243	>	157

و بالتالي أول قيمة تجعل الخاصة $E(n)$ صحيحة هي $n=5$

لنبرهن صحتها باستخدام الاستقراء الرياضي:

➢نثبت صحة الخاصة من أجل $n = 5$ (تم اثباتها في الجدول السابق)

➢نفرض صحة الخاصة من أجل n , أي أن المتراجحة التالية صحيحة :

$$3^n \geq 2^n + 5n^2 \ldots (\text{الفرض})$$

➢نثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$: أي لنثبت صحة المتراجحة :

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$$

✍البرهان : لدينا من (الفرض) :

$$3^n \geq 2^n + 5n^2$$

نضرب الطرفين بـ 3 :

$$3^{n+1} \geq 3 \times 2^n + 5(3n^2) \underbrace{\geq}_{\text{حسب الطلب الأول}}$$

$$3 \times 2^n + 5(n+1)^2 \underbrace{\geq}_{3\geq 2} 2 \times 2^n + 5(n+1)^2 = 2^{n+1} + 5(n+1)^2 = l_2$$

التمرين السابع

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ ثم نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad , \quad u_0 = 2cos\theta$$

1- احسب u_1, u_2

2- أثبت بالتدريج أن $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

مساعدة تذكر أن $1 + cos2\theta = 2\cos^2\theta$

الحل

$$u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 + 2cos\theta} = \sqrt{2(1 + cos\theta)}$$

$$= \sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{2\left(1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{2}\right)\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

نعرف القضية :

$$E(n): \ll u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \gg$$

☝نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_0 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2cos\theta$$

✌نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \ldots . (\text{الفرض})$$

👌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي :

$$u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \ldots .. (\text{الطلب})$$

☝البرهان : لدينا من (الفرض) :

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

نضيف للطرفين2:

$$2+u_n = 2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$
$$2+u_n = 2\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$$
$$2+u_n = 2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right)$$
$$2+u_n = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

نجد :

$$\sqrt{2+u_n} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$
$$u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

وهو المطلوب .

انتهت الوحدة الأولى

لن يضيع العمل و لن تخيب المساعي

طالما وراءها طالبٌ أدرك حقاً أن النجاح ليس حلماً و إنما خطة

لن يبلى الشغف ^_^

نهاية متتالية

نهاية متتالية و مفهوم التقارب

لننظر في المتتالية التالية :

5 , 0.5 , 0.05 , 0.005 , 0.0005 , ...

فإنه من الواضح أنها تصغر و تصغر وتصغر ... حتى تكاد أن تكون صفراً (لن تصبح أبداً صفر و لكن ستقترب جداً من الصفر و لكن لن تصله ... لن تصله .... أكرر لن تصله ^_^)

هنا يمكن أن نقول أن المتتالية متقاربة من الصفر و نكتب $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

عندما نتكلم عن المتتالية $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$ فنحن نعلم أن هذه المتتالية غير منتهية و لكن هل هذه المتتالية قيم حدودها تقترب من قيمة معينة l ؟أم أنها تتعاظم و تتعاظم نحو $+\infty$ مثل $1,2,3,4,5,6,7, \dots$?

أم أنها تتضاءل و تتضاءل حتى الـ $-\infty$

(هامش: فسر كتابة الهمزة على هذا الشكل في كلمة "تتضاءل") ^_^

و بالتالي نجد أنه من الممكن أن نواجه إحدى الحالات التالية :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad or$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad or$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

إذا كانت النهاية عدد فهي متقاربة من هذا العدد و إذا كانت النهاية غير ذلك فهي متباعدة (غير متقاربة)

النمط الأول من أسئلة التقارب

دراسة تقارب متتالية معطاة بحد عام $u_n = f(n)$

فإنه يكفي أن نوجد النهاية عندما $n \to +\infty$ كما كنا نفعل في التوابع (وكل ما كنت تفعله في التوابع مجازٌ من إحاطة و مقارنة و طرق لإزالة عدم التعيين....)

تدرب

في كل من الحالات الآتية , أوجد نهاية المتتالية u_n و هل هي متقاربة .

1	$u_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$	2	$u_n = n + 1 - \cos n$
3	$u_n = \dfrac{2n+1}{n-3}$	4	$u_n = \dfrac{5n-3}{3n-5}$
5	$u_n = n - \dfrac{1}{n+1}$	6	$u_n = \dfrac{5n^2-3n+1}{n^2-n+1}$
7	$u_n = \dfrac{-2n^2+n+1}{2(n+1)^2}$	8	$u_n = \dfrac{n}{4} + \dfrac{n^2}{n^2+1}$
9	$u_n = \dfrac{10n}{n+1}$	10	$u_n = \sqrt{\dfrac{4n-1}{n+1}}$
11	$u_n = \sqrt{\dfrac{n^2+1}{3n+1}}$	12	$u_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi+1}{3n+1}\right)$
13	$u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{3n}$	14	$u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \dfrac{1}{2}$
15	$u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2}$	16	$u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{n}{\sqrt{n+2}}$
17	$u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+1}$	18	$u_n = \dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$
19	$u_n = n^2\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$		
20	$u_n = \dfrac{n!-2}{n!}$		

معلومات مساعدة :

ملاحظات مساعدة :	
1	$-1 \le (-1)^n \le 1$
2	$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$

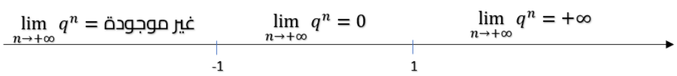
النمط الثاني من أسئلة التقارب

نهاية متتالية هندسية

مبرهنة :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & : -1 < q < 1 \\ +\infty & : q > 1 \\ 1 & : q = 1 \\ \text{غير موجودة} & : q \le -1 \end{cases}$$

و بالتالي عند مصادفة نهاية $(\text{عدد})^n$ يجب معرفة إلى أي مجال ينتمي هذا العدد و المخطط التالي يوضح الحالات السابقة بصورة أخرى .



تمارين :

التمرين الأول

احسب نهاية كل من المتتاليات التالية:

$$x_n = \frac{4^n}{3^n} \quad , \quad y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n}$$
$$, \quad t_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

الحل

سنحاول رد كل منها إلى الشكل q^n و الاستعانة بالفقرة السابقة :

$$x_n = \frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad then$$
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

$$because\ q^n\ \&\ q = \frac{4}{3} > 1$$

$$y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n} = \left(\frac{10}{10.1}\right)^n \quad then$$
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$$

$$because\ \ q^n\ \ \&\ q = \frac{10}{10.1} < 1$$

$$t_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3\times 3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$then$$
$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{1}{3}(0) = 0$$

$$because\ q^n \& q = \frac{2}{3} < 1$$

التمرين الثاني

ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل :

$$u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$$

الحل

نخرج صاحب الأساس الأكبر عاملاً مشتركاً من البسط و من المقام (أي نخرج 3^n عاملاً مشتركاً) :

$$u_n = \frac{3^n\left[1 - \frac{2^n}{3^n}\right]}{3^n\left[1 + \frac{2^n}{3^n}\right]} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

حيث أن $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

(لأن الأساس $q = \frac{2}{3} < 1$)

التمرين الثالث

ادرس تقارب المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل

$$v_n = \frac{10^n - 1}{10^n + 1}$$

تُحل بأسلوب مماثل للتمرين السابق (أخرج 10^n عامل مشترك) يترك للطالب

النمط الثالث من أسئلة التقارب

حصر المتتالية ضمن مجال

حصر المتتالية ضمن مجال من الشكل $]a, b[$

:

-نوجد نصف قطر المجال $r = \frac{b-a}{2}$

-نوجد مركز المجال $l = \frac{b+a}{2}$ (أو يُحسب المركز بطريقة أخرى حيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$)

-نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < r$$

ثم نوحد مقامات أو نصلح حتى نصل إلى الشكل $n > A$ فنختار $n_0 \geq A$ يتم المطلوب

(بدها مثال مو !!)

مثال1

أوجد عدداً طبيعياً n_0 بحيث يكون $u_n \in]1.9, 2.1[$ عندما $n > n_0$ حيث :

$$u_n = \frac{2n-1}{n+3}$$

الحل

نلاحظ أن الهدف هنا أن نحصر حدود المتتالية في مجال من الشكل $]a, b[$ حيث $a =$ 1.9 , $b = 2.1$

لنتبع الخطوات المذكورة قبل قليل :

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1 - 1.9}{2} = \frac{0.2}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$l = \frac{b+a}{2} = \frac{2.1 + 1.9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < r$$

$$\left|\frac{2n-1}{n+3} - 2\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{-7}{n+3}\right| < \frac{1}{10}$$

و بسبب القيمة المطلقة نكتب :

$$\frac{7}{n+3} < \frac{1}{10}$$

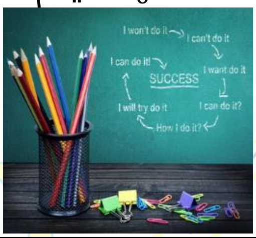
نقلب الطرفين :

$$\frac{n+3}{7} > 10$$

$$n + 3 > 70$$

$$n > 67$$

و بالتالي نأخذ $n_0 \geq 67$ فيتم المطلوب.



مثال 2

أوجد عدداً طبيعياً n_0 بحيث يكون $u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$ عندما $n > n_0$ حيث

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

الحل

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{10^{-3} - (-10)^{-3}}{2} = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

$$l = \frac{b+a}{2} = \frac{10^{-3} + (-10^{-3})}{2} = 0$$

نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < r$$

$$\left|\frac{1}{n\sqrt{n}}-0\right|<\frac{1}{1000}$$
$$\frac{1}{n\sqrt{n}}<\frac{1}{1000}$$
$$n\sqrt{n}>1000$$

نربع :

$$n^2(n)>10^6$$
$$n^3>10^6$$

نجذر من المرتبة الثالثة :

$$n>10^2$$
$$n>100$$

نختار $n_0 \geq 100$. فيتم المطلوب.

حصر المتتالية في مجال من النمط $]\boldsymbol{a},+\infty[$:

إن قولنا أن $u_n \in]a,+\infty[$ فهذا يعني أن u_n هي عدد أكبر تماماً من a لذلك ننطلق من المتراجحة:

$$u_n>a$$

و نعزل n لنصل لمتراجحة من الشكل $n \geq n_0$

مثال

لتكن المتتالية $u_n=n\sqrt{n}$, عين عدداً طبيعياً n_0 بحيث تنتمي حدود المتتالية إلى المجال $]10^3,+\infty[$ بدءاً من n_0

الحل

$$u_n>10^3$$
$$n\sqrt{n}>10^3$$
$$n^3>10^6 \qquad \text{نربع}$$

نجذر من المرتبة 3 $\qquad n>100$

و بالتالي من أجل $n \geq 100$ فإن $u_n \in]10^3,+\infty[$

المتتالية المحدودة :

المتتالية المحدودة من الأعلى : نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ إنها محدودة من الأعلى , إذا وجد عدد مناسب M بحيث تكون جميع عناصر المتتالية أصغر منه أي $u_n \leq M \quad ,\forall n \in N$ و ندعو M عندئذٍ عنصراً راجحاً على (u_n)

المتتالية المحدودة من الأدنى : نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ إنها محدودة من الأدنى , إذا وجد عدد مناسب m بحيث تكون جميع عناصر المتتالية أكبر منه أي $u_n \geq m \quad ,\forall n \in N$ و ندعو m عندئذٍ عنصراً قاصراً عن (u_n)

المتتالية المحدودة : نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ إنها محدودة , إذا كانت محدودةً من الأعلى و من الأدنى في آنٍ معاً

أي : $m \leq u_n \leq M \quad ,\forall n \in N$

و هذا يكافئ وجود عدد K بحيث $|u_n| \leq K$

(لأن $|u_n| \leq K$ تعني أن

$(\underbrace{-K}_{\text{قاصر}} \le u_n \le \underbrace{K}_{\text{راجح}}$

من كان قلبه عامراً بالأحلام
فعارٌ على الظروف إن لم
تتجند لخدمته .. و نعم الأقلام
الأقلام التي تخطُّ نجاحه

مبرهنات تقارب المتتاليات المطردة:

1- إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة

2- إذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي متقاربة

مثال 1

لنتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بشرط البدء $u_0 = 1$ و

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

1- أثبت أنها متزايدة

2- أثبت أن $u_n \le 2$

3- استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها

الحل

1- نعرف القضية :

$E(n): u_{n+1} \ge u_n$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2- نعرف القضية $E(n): u_n \le 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

3- بما أنها متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

فائدة هامة :

لتعيين نهاية متتالية $u_{n+1} = f(u_n)$ بعد ضمان تقاربها :

1- نوجد حل المعادلة $f(x) = x$

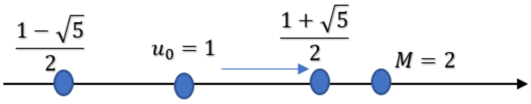
2- نقبل الحل المناسب

في المثال السابق لحساب نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$ حيث

$f(x) = \sqrt{1+x}$

$\sqrt{1+x} = x$

$$1 + x = x^2$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



فإننا نقبل الحل الموجب إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

مسائل :

المسألة الأولى

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \quad , u_0 = \frac{3}{2}$$

1- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ: $1 \leq u_n \leq 2$

أياً يكن $n \in N$

2-

A- أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$

B-استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

3- أهي متقاربة ؟ عين نهايتها .

الحل

لنفرض القضية

$E(n): \ll 1 \leq u_n \leq 2 \gg$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$1 \leq u_0 \leq 2$$
$$1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$$

محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$1 \leq u_n \leq 2$ ... (الفرض)

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$1 \leq u_{n+1} \leq 2$ .... (الطلب)

البرهان : لنعرف التابع f على المجال $[1,2]$ بالشكل

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

فنلاحظ أن $f'(x) = 2x - 2 \geq 0$ لكل $x \in [1,2]$

فالتابع f متزايد على المجال $[1,2]$:

لدينا من $(*)$:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

و بما أن f متزايد فيمكن أن نصور أطراف المتراجحة وفقه :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$$
$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

و هو المطلوب . فالقضية صحيحة مهما تكن $n \in N$

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$$
$$= u_n^2 - 3u_n + 2$$

بالتحليل المباشر :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

و لاستنتاج أنها متناقصة نلاحظ من الطلب السابق :

$$1 \le u_n \le 2$$

$1 \le u_n$ | $u_n \le 2$

$u_n - 1 \ge 0$ | $u_n - 2 \le 0$

و بالتالي $u_n - 2$ سالب و $u_n - 1$ موجب فجداؤهما سالب :

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1) < 0$$

و هذا يعني أن المتتالية (u_n) متناقصة

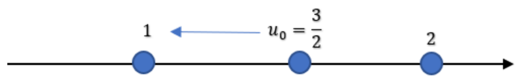
و لما كانت u_n محدودة من الأدنى بالعدد 1 فنستنتج أنها متقاربة لأنها متناقصة و محدودة من الأدنى

لإيجاد نهايتها:

نحل المعادلة $f(x) = x$

$$x^2 - 2x + 2 = x$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-1)(x-2) = 0$$

إما $x = 2$ أو $x = 1$



فالحل المقبول : $x = 1$ و بالتالي :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

المسألة الثانية

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

1- أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة

2- أثبت أن $u_n > 0$

3- استنتج أنها متقاربة و عين نهايتها.

جهزوا الأقلام و هيئوا الأوراق .. فإن الرياضيات لا تعطي أسرارها إلا لمن أشبع الأوراق محاولات

و استهلك الدفاتر إصراراً و شغفا

ستزهر أحلامك كلما سقيتها من حبر أقلامك و من خيوط شمس اصرارك

دراسة متتاليات المجاميع:

النوع الأول :

المقارنة مع مجموع هندسي:

مثال1

لتكن المتتالية

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

1- برهن أن $n \leq 2^n$

2- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأعلى

3- أثبت أ ن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

4- أهي متقاربة ؟

الحل

1- ....

....

....

....

....

....

....

....

2- من الطلب السابق نجد أن

$$n \leq 2^n$$

نقسم الطرفين على 3^n :

$$\frac{n}{3^n} \leq \frac{2^n}{3^n}$$

نوجد متتالية المجاميع لكل طرف:

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}}_{u_n}$$

$$\leq \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{a\frac{1-q^n}{1-q}}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن هو مجموع لحدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و عدد الحدود n

$$u_n \leq \frac{2}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$$

$$u_n \leq \frac{2}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}$$

$$u_n \leq 2\left[1-\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{نهمله}}\right] \leq 2$$

إذن محدودة من الأعلى

3- لإثبات أن المتتالية متزايدة (نطبق معيار الفرق و نقارن مع الصفر)

نحسب u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

بالطرح : $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} \geq 0$ فهي متزايدة

4- بما أنها متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

مثال2

لتكن المتتالية

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

1- أثبت أنها متزايدة
2- أثبت بالتدريج أن $n! \geq 2^{n-1}$ و ذلك مهما $n \geq 1$
3- استنتج أن العدد 3 عنصرٌ راجحٌ على u_n
4- أهي متقاربة ؟

الحل

1- نشكل الفرق :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

فهي متزايدة .

-2 ....
....
....
....
....
....
....
....
....

من الطلب السابق نجد :

$$n! \geq 2^{n-1}$$

نقلب :

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نوجد مجاميع لكل طرف:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{a\frac{1-q^n}{1-q}}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و عدد حدودها $n - 1 - 0 + 1 = n$

وحدها الأول $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ إذن :

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq 2$$

نضيف للطرفين 1 :

$$\underbrace{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}}_{u_n} \leq 3$$

فالعدد 3 عنصر راجح عليها

بما أنها متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

النوع الثاني : مجموع مباشر

هنا نحصر المتتالية بين متتاليتين مستفيدين من الملاحظة التالية :

إذا كان $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

و كان M اكبر حدود هذا المجموع

و كان m أصغر حدود هذا المجموع فإننا نكتب:

عدد الحدود $\times\, \mathbf{m} \le \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + .. + \boldsymbol{a_n} \le \boldsymbol{M} \times$ عدد الحدود

مثال1

لتكن المتتالية :

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$$

جد نهاية u_n

الحل

لدينا مجموع لحدود عددها n و

أصغر هذه الحدود هو $\frac{1}{n^2+n}$) لأن الكسور التي لها نفس البسوط يكون صاحب أكبر مقام هو الكسر الأصغر)

أكبر هذه الحدود $\frac{1}{n^2+1}$) لأن الكسور التي لها نفس البسوط يكون صاحب أصغر مقام هو الكسر الأكبر)

إذن :

$$\underbrace{n}_{\text{عدد الحدود}} \underbrace{\frac{1}{n^2+n}}_{\text{أصغرهم}} \le u_n \le \underbrace{n}_{\text{عدد الحدود}} \underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{\text{أكبرهم}}$$

$$\frac{n}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n}{n^2+1}$$

الآن نحسب نهاية طرفي المتراجحة :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+n} = 0$$

فحسب الإحاطة : تكون :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

مثال2

لتكن لدينا المتتالية

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

أوجد نهاية u_n

الحل

لدينا مجموع لحدود عددها n و

أصغر هذه الحدود هو $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$) لأن الكسور التي لها نفس البسوط يكون صاحب أكبر مقام هو الكسر الأصغر)

أكبر هذه الحدود $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$) لأن الكسور التي لها نفس البسوط يكون صاحب أصغر مقام هو الكسر الأكبر)

إذن :

$$\underbrace{n}_{\text{عدد الحدود}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\text{أصغرهم}} \le u_n \le \underbrace{n}_{\text{عدد الحدود}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{أكبرهم}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

الآن نحسب نهاية طرفي المتراجحة :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

و بشكل مماثل :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

فحسب الإحاطة يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

النوع الثالث : صيغ متكافئة :

أحياناً نعطى صيغتين متكافئتين لـ u_n

إحداهما من الشكل $u_n = b_n - b_{n+1}$

فنستبدل المجموع الأصلي بدلالة الفروق

$b_n - b_{n+1}$ فيتم **تشطيب كل الحدود** ما عدا

أول حد وآخر حد (صاحب اصغر دليل و أكبر دليل)

و بالمثال يتضح المقال :

التمرين 1

ليكن عند كل عدد طبيعي n

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

1- أوجد عددين حقيقين a, b يحققان عند كل عدد طبيعي n أن :

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

2- ليكن في حالة عدد طبيعي n :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

3- عبر عن S_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\ge0}$

الحل

لدينا :

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2b+1}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{a(2n+1)+b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2a+2b)n+a-b}{(2n-1)(2n+1)}$$

نحذف المقامات و نطابق البسوط فنجد:

$$2a+2b=0$$
$$a-b=1$$

بالحل المشترك نجد :

$$a=\frac{1}{2}\quad,\qquad b=-\frac{1}{2}$$

$$u_n=\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}-\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$

الآن :

$$s_n=u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$s_n=\frac{1}{2}\left[-1-\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\frac{1}{2}(-1+0)=-\frac{1}{2}$$

التمرين2

المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

1- أثبت أن $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ثم استنتج أنها متقاربة نحو الصفر

2- المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل $n\geq1$ وفق :

$$v_n=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

أ- استفد من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n

ب-استنتج نهاية v_n

الحل

بضرب البسط و المقام بالمرافق :

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

فهي متقاربة نحو الصفر

لدينا :

$$v_n=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

بالاستفادة من الصيغة الاخرى

$$v_n=1+[\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots\sqrt{n}-\sqrt{n-1}]$$

$$v_n=1+[-1+\sqrt{n}]=\sqrt{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$$

كيف نثبت محدودية متتالية

الأسلوب الأول:

نُعطى في الطلبات طلب لإثبات أن

$u_n\leq M$ أو $m\leq u_n$ بالتدريج

فنكون حصلنا على المطلوب

(مر معنا سابقاً)

الأسلوب الثاني:

المقارنة مع مجموع هندسي (مر سابقاً)

الأسلوب الثالث :

إذا كانت $u_n=f(n)$:

1- نعرف التابع الموافق f(x) على المجال $[n_0,+\infty[$

2- نستنتج من جدول التغيرات عنصراً راجحاً أو قاصراً .

مثال

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

أثبت أن $1 \leq u_n \leq 3$

الحل

نلاحظ أن المتتالية هنا معرفة بالحد الصريح

لذا نعرف التابع f على المجال $[0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

ندرس تغيراته على المجال $[0,+\infty[$:

$$f(0) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

f اشتقاقي على $[0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3-2x^2+2x+x^2-x+1-2x^3-2x^2-2x+x^2+x+1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$
$$-2x^2+2 = 0$$
$$x^2 = 1$$

$x = 1$ مقبول

$x = -1$ مرفوض

$$f(1) = 3$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+++$	0	$---$
$f(x)$	$1 \nearrow$	3	$\searrow 1$

من الجدول نلاحظ أن

العدد 3 عنصر راجح على التابع f و بالتالي على المتتالية u_n

العدد 1 عنصر قاصر عن التابع f و بالتالي عن المتتالية u_n

إذن :

$$1 \leq f(x) \leq 3$$
$$1 \leq u_n \leq 3$$

وهو المطلوب.

ملاحظة علماشي ^_^ :

1- إذا كان M عنصر راجح على u_n فإن كل عدد أكبر من M هو عنصر راجح على u_n

2- إذا كان m عنصراً قاصراً عن u_n فإن كل عدد أصغر من u_n هو عنصر قاصر آخر عن u_n

مثلاً في المثال السابق :

العدد 5 عنصر راجح على u_n لأن العدد 3 عنصر راجح على u_n و $5 > 3$

العدد $\frac{1}{2}$ قاصر عن u_n لأن العدد 1 قاصر عن u_n و $\frac{1}{2} < 1$ أي :

$$\frac{1}{2} < 1 \leq u_n \leq 3 < 5$$

$$then: \frac{1}{2} < u_n < 5$$

الأسلوب الرابع :

لإثبات أن M عنصر راجح على المتتالية $(\mathrm{u_n})_{n\geq0}$ فإننا نهدف لإثبات أن

$$u_n \leq M$$

و هذا يكافئ إثبات أن $\boxed{\mathrm{u_n} - M \leq 0}$

و بالمثل لإثبات أن m عنصر قاصر يمكن إثبات أن $\boxed{\mathrm{u_n} - m \geq 0}$

و بالتالي إن دراسة إشارة الفرق بين الحد العام $\mathrm{u_n}$ و العدد يبين أنه عنصر قاصر أو راجح وذلك وفق :

أ- إذا كان الفرق موجباً فإن العدد عنصر قاصر

ب- إذا كان الفرق سالباً فإن العدد عنصر راجح

مثال: أثبت أن العدد $\frac{1}{2}$ عنصر راجح على المتتالية التي حدها العام

$$u_n = \frac{1}{n^2 - 4n + 6}, n \geq 0$$

الحل:

لندرس الفرق :

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2 - 4n + 6} - \frac{1}{2}$$
$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{2 - n^2 + 4n - 6}{2(n^2 - 4n + 6)}$$
$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{-n^2 + 4n - 4}{2(n^2 - 4n + 6)}$$
$$u_n - \frac{1}{2} = -\frac{n^2 - 4n + 4}{2(n^2 - 4n + 6)}$$
$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{-(n-2)^2}{2(n^2 - 4n + 6)} \leq 0$$

$$u_n - \frac{1}{2} \leq 0$$
$$u_n \leq \frac{1}{2}$$

المتتاليتان المتجاورتان :

نقول عن متتاليتين x_n, y_n إنهما متجاورتين إذا تحقق الشرطان :

إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$$

أمثلة و تمارين

التمرين الأول :

أثبت أن المتتاليتين :

$$s_n = \frac{1}{n+1} \quad , t_n = \frac{-1}{2n+4}$$

متجاورتين

الحل

ندرس اطراد s_n فنعرف التابع :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}<0$$

فالمتتالية s_n متناقصة

ندرس اطراد t_n فنعرف التابع :

$$f(x)=-\frac{1}{2x+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{(2x+4)^2}\geq 0$$

فالمتتالية t_n متزايدة

$$s_n-t_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+4}=\frac{3n+5}{(n+1)(2n+4)}$$

$$=\frac{3n+5}{2n^2+6n+4}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(s_n-t_n)=0$$

فالمتتاليتان (s_n) و (t_n) متجاورتان

التمرين الثاني

أثبت أن المتتاليتين s_n, t_n متجاورتين حيث :

$$s_n=1+\frac{1}{n^2}\quad,\qquad t_n=\frac{n-1}{n}$$

يترك للقارئ

التمرين الثالث :

أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتين

$$x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$y_n=x_n+\frac{1}{n}$$

الحل

ندرس اطراد x_n :

$$x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

نشكل الفرق :

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{4n+3}{(2n+2)(2n+1)}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{(4n+3)(n+1)-(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$=\frac{4n^2+7n+3-4n^2-6n-2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$=\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

إذن x_n متزايدة

لندرس اطراد y_n :

$$y_{n+1}=x_{n+1}+\frac{1}{n+1}$$

$$y_{n+1}-y_n=x_{n+1}-x_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n-2(2n+1)}{2n(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{-3n-2}{2n(2n+1)(n+1)} < 0$$

إذن y_n متناقصة

أخيراً :

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$
$$y_n - x_n = \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$$

فالمتتاليتان متجاورتان.

التمرين الرابع

أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتين

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$
$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

الحل

لندرس اطراد x_n :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} +,,, + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

نشكل الفرق :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}$$
$$= -\frac{1}{2n(2n+1)} < 0$$

فهي متناقصة

لندرس اطراد y_n :

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

نشكل الفرق :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

فهي متزايدة :

أخيراً :

$$x_n - y_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$$

فالمتتاليتان متجاورتان.

التمرين الخامس

أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتين

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$
$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

الحل

لندرس اطراد x_n :

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .. + \frac{1}{n^2}$$
$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

الفرق :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

فهي متزايدة

لندرس اطراد y_n :

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$
$$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{n+1}$$
$$y_{n+1} - y_n = (x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2}$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

فهي متناقصة

أخيراً : $y_n = x_n + \frac{1}{n}$

$$y_n - x_n = \frac{1}{n}$$
$$\lim(y_n - x_n) = 0$$

فالمتتاليتان متجاورتان

التمرين السادس (وظيفة)

أثبت أن المتتاليتين :

$$u_n = 2 - \frac{1}{n} \quad , \quad v_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

متجاورتين .

التمثيل الهندسي لحدود متتالية

إذا كان لدينا متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1- ندرس التغيرات f على مجال مناسب

2- نحل المعادلة $f(x) = x$ و ليكن حلها l

3- نرسم المستقيم $y = x$ منصف الربع الأول و الثالث

و نرسم c_f (سيتقاطعان عند $x = l$)

4- نحدد u_0 على محور الفواصل

5- نوجد $f(u_0)$ بيانياً باستخدام الخط c_f فتتعين u_1 على محور التراتيب

6- نرسم مستقيماً أفقياً عند u_1 فيتقاطع مع المستقيم $y = x$ في نقطة تكون فاصلتها هي هي u_1 فنكون هنا قد مثلنا u_1 على محور الفواصل

7- نعيد الكرّة فنصور u_1 وفق f باستخدام الخط البياني c_f فنحصل على u_2 على محور التراتيب

8- نرسم مستقيماً أفقياً من u_2 فيقطع المستقيم $y = x$ في نقطة تكون فاصلتها هي u_2 فنكون قد مثلنا u_2 على محور الفواصل

و هكذا ....

و المسألة التالية توضح ما سبق :

مسألة

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \quad , \quad u_0 = 2$$

و المطلوب :

أولاً :

1- ادرس تغيرات التابع f المعرف بالشكل $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ على المجال $]0, +\infty[$ و نظم جدولاً بها

2- أثبت أن المستقيم $d: y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط c_f في جوار $+\infty$ و ادرس الوضع النسبي له مع c_f

3- أوجد نقاط تقاطع المستقيم $\Delta: y = x$ مع الخط c_f

4- ارسم d و Δ ثم ارسم c_f

ثانياً :

1- مستفيداً مما سبق مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها مباشرةً

2- أيمكن أن تلاحظ من التمثيل السابق عنصر راجح على u_n و عنصر قاصر عنه

3- أيمكن أن تتوقع جهة اطراد $(u_n)_{n\geq0}$

ثالثاً :

1- أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج صحة الخاصة :

$$E(n): \ll \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \gg$$

2- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و عين نهايتها

الحل

أولاً :

التابع f معرف على المجال $]0, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad ,$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و c يقع على يمين مقاربه

اشتقاقي f على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{2} \quad or \quad x = -\sqrt{2} \notin D_f$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

فجدول التغيرات له يكون :

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$

$f'(x)$	$-\ -\ -\ 0\ +\ +\ +\ \ +$
$f(x)$	$+\infty \searrow \sqrt{2} \nearrow +\infty$

. قيمة حدية صغرى $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$

لإثبات أن d مقارب مائل :

نشكل الفرق :

$$f(x)-y_d=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{x}{2}=\frac{1}{x}$$

ثم نحسب النهاية :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

إذن d مقارب مائل عند $+\infty$

و لدراسة الوضع النسبي نعدم الفرق :

$$f(x)-y_d=\frac{1}{x}>0$$

على المجال $]\sqrt{2},+\infty[$

إذن C فوق d

لإيجاد نقاط التقاطع بين c_f و Δ نحل المعادلة :

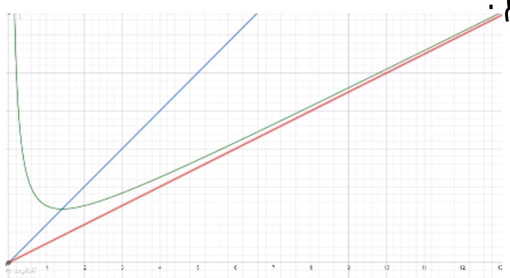
$$f(x)=y_\Delta$$
$$\frac{x}{2}+\frac{1}{x}=x$$
$$\frac{x}{2}=\frac{1}{x}$$

$x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$ مقبول ,

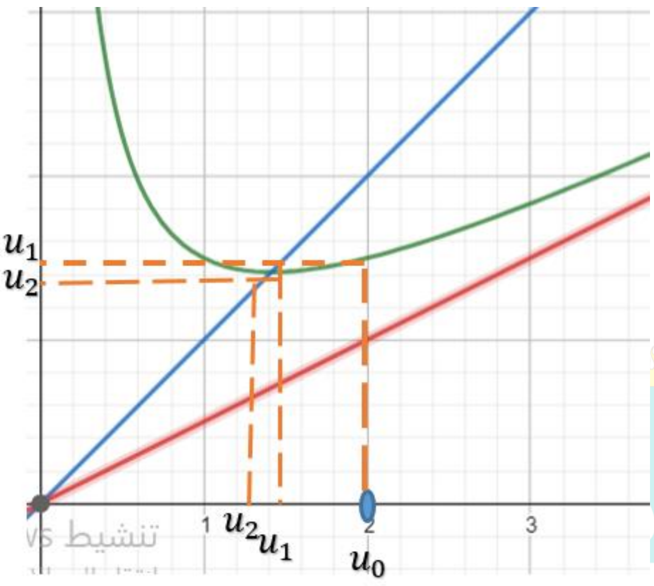
$x=-\sqrt{2}$ مرفوض

فالمستقيم Δ يقطع c_f في النقطة التي فاصلتها $\sqrt{2}$

الرسم :



ثانياً :



الرسم يوضح أن $\sqrt{2}\le u_n\le 2$

و يوضح أنها متناقصة

ثالثاً :

$$E(n): \ll \sqrt{2}\le u_{n+1}\le u_n \gg$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\sqrt{2}\le u_1\le u_0$$
$$\sqrt{2}\le\frac{3}{2}\le 2$$

محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \quad ....(*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \; ....(\text{الطلب})$$

البرهان : لدينا من جدول تغيرات f نلاحظ أن f متزايد على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$

و بالتالي يمكن تصوير أطراف $(*)$ وفق f :

$$f(\sqrt{2}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$
$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

وهو المطلوب

الآن نلاحظ أن المتتالية متناقصة و محدودة من الأدنى فهي متقاربة و نهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$ إذن $lim u_n = \sqrt{2}$

تمرينات ومسائل الوحدة المتبقية

المسألة الأولى

لنضع في حالة عدد طبيعي n ,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1- اثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

2- اكتب $u_{2n} - u_n$ و استنتج أن $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

3- أثبت مستعملاً الإثبات بالتدريج أن $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ أياً كان العدد الطبيعي n غير المعدوم

4- هل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ لها نهاية حقيقية

الحل

لنحسب u_{n+1} :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

نشكل الفرق :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+!} > 0$$

فهي متزايدة

لدينا u_{2n} :

$$u_{2n} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}_{u_n} + \frac{1}{n+1} +,,, + \frac{1}{2n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}$$

نلاحظ أننا أمام مجموع عدد حدوده n و أصغرهم $\frac{1}{2n}$ إذن :

$$u_{n+1} - u_n \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

نرمز بالرمز $E(n)$ للقضية :

$$\ll u_{2^n} \geq \frac{n}{2} \gg$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$u_{2^1} \geq \frac{1}{2}$$
$$u_2 \geq \frac{1}{2}$$
$$1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_{2^n} \geq \frac{n}{2} \dots (\text{الفرض})$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$u_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2} \dots (\text{الطلب})$$

البرهان : لدينا من الطلب السابق :

$$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

نبدل كل n بـ 2^n :

$$u_{2.2^n} - u_{2^n} \geq \frac{1}{2}$$

$$u_{2^{n+1}} - u_{2^n} \geq \frac{1}{2} \dots (♠)$$

الآن : نضيف و نطرح u_{2^n} لـ $u_{2^{n+1}}$:

$$u_{2^{n+1}} = u_{2^{n+1}} - u_{2^n} + u_{2^n} \geq \frac{1}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}$$

المسألة الثانية

ليكن q عدد حقيقي يحقق أنّ: $-1 < q < 1$ و لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق :

$$u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

أعط صيغة أخرى لـ u_n ثم احسب نهايتها

المسألة الثالثة

بفرض $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2 \ , \qquad x_0 = 3$$

$$y_n = x_n + 3$$

أولاً:

1- أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية

2- احسب y_n ثم x_n بدلالة n

ثانياً : نضع $S_n = y_0 + \cdots + y_n$

و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$

1- احسب S_n ثم S'_n بدلالة n

2- احسب نهاية S_n و S'_n

المسألة الرابعة

في كل من الحالات الآتية مثل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_0$ على محور الفواصل ثم ضع بعض التخمينات.

1	$u_{n+1} = 2u_n - 1 \ , u_0 = 1$
2	$u_{n+1} = u_n^2 - 1 \ , u_0 = 0$
3	$u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u_n \ , u_0 = 1$
4	$u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n} \ , u_0 = 1$