طريقي إلى اللوغارتمي

المدرس: نذير تيناوي

المحتوى

يحتوي هذا الملف على ترتيب كامل لأفكار بحث التابع اللوغارتمي مع حل أغلب مسائل الكتاب و أسئلة الدورات السابقة بالإضافة إلى تمارين خارجية محلولة و غيرمحلولة لتكون عوناً للطالب في إنجاز هذا البحث باتقان و كفاءة . و نعتذر سلفاً في حال ورود أي خطأ طباعي فجلّ من لا يخطئ و نرجو مراجعتنا في حال وروده

تعريف التابع اللوغارتمي : هو تابع من الشكل :

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln(x)$$

وهو التابع اللوغارتمي الطبيعي (النبري) وله أشكال أخرى بأساسات مختلفة فمثلاً التابع $x \mapsto \log(x)$ التابع اللوغارتمي العشري (أساسه 10)

والتابع $x \mapsto \log_a(x)$ التابع اللوغارتمي بالأساس a

التابع اللوغارتمي ينعدم عند الواحد

$$\boxed{\ln(1) = 0}$$

مجموعة تعريف التابع اللوغارتمي :

التابع اللوغارتمي معرف بشرط مضمونه أكبر تماماً من الصفر (موجب تماماً) أي لإيجاد مجموعة تعريف التابع

$$f(x) = \ln(u(x))$$

1 نضع الشرط $u(x) > 0$

2 نحل المتراجحة فنحصل على D_f

وهنا نميز الحالات الآتية :

1 المضمون $u(x)$ درجة أولى :

عندئذٍ لحل المتراجحة $u(x) > 0$ ننقل المجاهيل لطرف والمعاليم لطرف ثم نحصل على D_f

مثال(1) : أوجد مجموعة تعريف التوابع التالية

1) $f(x) = \ln(2x - 4)$

f معرف بشرط

$$2x - 4 > 0$$
$$2x > 4$$
$$x > 2$$
$$\Rightarrow D_f =]2, +\infty[$$

2) $f(x) = \ln(1 - x)$

f معرف بشرط

$$1 - x > 0$$
$$1 > x$$
$$\Rightarrow D_f =]-\infty, 1[$$

3) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2} - 16\right)$

f معرف بشرط

$$\frac{x}{2} - 16 > 0$$
$$\frac{x}{2} > 16$$
$$x > 32$$

$\Rightarrow D_f =]32, +\infty[$

4) $f(x) = \ln\left(\frac{3}{4} - 2x\right)$

f معرف بشرط

$$\frac{3}{4} - 2x > 0$$

$$\frac{3}{4} > 2x$$

$$\frac{3}{8} > x$$

$$\Rightarrow D_f =]-\infty, \frac{3}{8}[$$

المضمون $u(x)$ من الدرجة الثانية :

1) نعدم المضمون $u(x) = 0$

2) نحل المعادلة ونميز الحالات التالية

أ) المعادلة مستحيلة الحل :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$u(x)$	يوافق إشارة a
المتراجحة	محققة أو غير محققة

إن صباح كل يومٍ يخاطبك فيقول :

أنا يوم جديد على عملك شهيد فاغتنمني فلن و لن أعود إلى يوم يبعثون

ب) المعادلة لها حل وحيد x_0

x	x_0
$u(x)$	يوافق a $\quad 0 \quad$ يوافق a
المتراجحة	$D_f = D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ أو $\emptyset$

ت) للمعادلة حلان x_1 و x_2 :

x	$x_1 \quad x_2$
$u(x)$	يوافق a $\quad 0 \quad$ يخالف a $\quad 0 \quad$ يوافق a
المتراجحة	محققة و غير محققة

مثال : عين مجموعة تعريف كل من التوابع :

1 $f(x) = \ln(2x^2 + 3)$

f معرف بشرط

$$2x^2 + 3 > 0$$

$$2x^2 + 3 = 0$$

$$2x^2 = -3$$

مستحيلة

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$2x^2 + 3$	+ + + + + + + + + + + + +
المتراجحة	محققة $\quad$ محققة

$$D_f = \mathbb{R}$$

2 $f(x) = \ln(x^2 - x)$

f معرف بشرط

$$x^2 - x > 0$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

إما $x = 0$ أو $x = 1$

x	$0 \quad 1 \quad +\infty -\infty$
$x^2 - x$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
المتراجحة	م غ م م

$D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

3 $f(x) = \ln[(x-1)(6-x)]$

f معرف بشرط

$(x-1)(6-x) > 0$

$(x-1)(6-x) = 0$

إما $x = 1$ أو $x = 6$

x	$1 \quad 6 \quad +\infty -\infty$
$(x-1)(6-x)$	$- - -0 + +0 - -$
المتراجحة	غ م م غ م

$D_f =]1,6[$

حيث

$(x-1)(6-x) = \underbrace{-x^2}_{a=-1} + 7x - 6$

يعني مشان نعرف تخالف و توافق شو ..

نشرنا على جنب

4 $f(x) = \ln(4 - x^2)$

f معرف بشرط

$4 - x^2 > 0$

$4 - x^2 = 0$

$4 = x^2$

$\Rightarrow x = \mp 2$

x	$-2 \quad 2 \quad +\infty -\infty$
$4 - x^2$	$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$
المتراجحة	غ م م غ م

$D_f =]-2,2[$

5 $f(x) = \ln(x^2 + 5x - 6)$

f معرف بشرط

$x^2 + 5x - 6 > 0$

$x^2 + 5x - 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4(1)(-6) = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7$

$x_1 = \frac{-5-7}{2}$

$x_2 = \frac{-5+7}{2} = +1$

x	$-6 \quad 1 \quad +\infty -\infty$
$x^2 + 5x - 6$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
المتراجحة	م غ م م

$D_f =]-\infty, -6[\cup]1, +\infty[$

6 $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$

f معرف بشرط

$x^2 - 4x + 4 > 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 2$

x	$2 \qquad +\infty - \infty$
$x^2 - 4x + 4$	$+ \quad 0 \quad +$
المتراجحة	م م

$D_f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

المضمون $u(x)$ تابع كسري :

1) نعدم البسط
2) نعدم المقام
3) نشكل الجدول

x	$+\infty - \infty$
بسط	صفر تحت القيمة التي عدمت البسط و اشارات
مقام	صفر تحت القيمة التي عدمت المقام و اشارات
كسر	صفر – شلمونة – جداء الاشارات
متراجحة	

صفر البسط يعني صفر للكسر

صفر المقام يعني شلمونة للكسر &_&

مثال: أوجد D_f فيما يلي :

1 $f(x) = \ln\left(\frac{2x-4}{x+1}\right)$

f معرف بشرط $\frac{2x-4}{x+1} > 0$

البسط

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

المقام

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$+\infty \quad -1 \quad 2 \quad -\infty$
$2x - 4$	$- \quad - \quad 0 \quad +$
$x + 1$	$- \quad 0 \quad + \quad +$
$\frac{2x-4}{x+1}$	$+ \quad \| \quad - \quad 0 \quad +$
متراجحة	م غ م م

$D_f =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

2 $f(x) = \ln\left(\frac{-x+2}{x+2}\right)$

f معرف بشرط

$$\frac{-x+2}{x+2} > 0$$

البسط

$$-x + 2 = 0$$

$$x = 2$$

المقام

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

x	$-2 \quad 2 \quad +\infty - \infty$
$-x + 2$	$+ \quad + \quad 0 \quad -$
$x + 2$	$- \quad 0 \quad + \quad +$
$\frac{-x+2}{x+2}$	$\| \quad + \quad 0 \quad -$
متراجحة	غ م م غ م

$D_f =]-2, 2[$

③ $f(x) = \ln\left(\frac{3}{x}\right)$

البسط : موجب دوماً

المقام : $x = 0$

x	0	$+\infty-\infty$
3	$+$	$+$
x	$-$ 0	$+$
$\frac{3}{x}$	$+$ ‖	$+$
متراجحة	م غ	م

$D_f =]0, +\infty[$

④ $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

f معرف بشرط $\frac{x}{x^2+1} > 0$

البسط $x = 0$

المقام $x^2 + 1$ " موجب دوماً ولا ينعدم"

x	0	$+\infty-\infty$
x	$-$ 0	$+$
x^2+1	$+$	$+$
$\frac{x}{x^2+1}$	$-$ 0	$+$
متراجحة	م غ	م

$D_f =]0, +\infty[$

⑤ $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)$

f معرف بشرط $\frac{2x}{x^2-4} > 0$

البسط $2x = 0 \Rightarrow x = 0$

المقام $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$

x	-2	0	2	$+\infty-\infty$
$2x$	$-$	$-$	0 $+$	$+$
x^2-4	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$
$\frac{2x}{x^2-4}$	‖ $+$	0 $-$	‖ $+$	$-$
متراجحة	م غ	م	غ	م

$D_f =]-2,0[\cup]2,+\infty[$

ملاحظة : أحياناً نحتاج لإصلاح شكل $u(x)$

مثال :

$$f(x) = \ln\left(\frac{3}{x} - 1\right)$$

f معرف بشرط $\frac{3}{x} - 1 > 0$

$$\frac{3-x}{x} > 0$$

البسط $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

المقام $x = 0$

x	0	3	$+\infty-\infty$
$3-x$	$+$	$+$ 0	$-$
x	$-$ 0	$+$	$+$
$\frac{3-x}{x}$	$-$ ‖	$+$ 0	$-$
متراجحة	م غ	م	م غ

$D_f =]0,3[$

مثال :

$$f(x) = \ln\left(2x - \frac{8}{x}\right)$$

f معرف بشرط $2x - \frac{8}{x} > 0$

$$\frac{2x^2 - 8}{x} > 0$$

البسط $2x^2 - 8 = 0$

$$\Rightarrow 2x^2 = 8$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \mp 2$$

المقام $x = 0$

أنت قادر على صنع المعجزات و لكن إن قررت ذلك

x	$-2 \quad 0 \quad 2 \quad +\infty -\infty$
$2x^2 - 8$	$+ \quad 0 \quad - \quad - \quad 0 \quad +$
x	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
$\frac{2x^2 - 8}{x}$	$- \quad 0 \quad \Vert \quad - \quad 0 \quad +$
متراجحة	غ م م غ م م

$$D_f =]-2,0[\cup]2,+\infty[$$

4- المضمون $u(x)$ تابع قيمة مطلقة أو مربع كامل :

المضمون لا يساوي الصفر

مثال : جد مجموعة تعريف التوابع :

$$f(x) = \ln|2x - 4|$$

....

$$f(x) = \ln(x + 1)^2$$

....

$$f(x) = \ln(x^2)$$

....

خواص التابع اللوغارتمي :

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n.\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- $\ln(e) = 1 \,; e \approx 2.7$

برهان بعض الخواص السابقة :

إثبات 4 :

$$\ln(a^n) = \ln(a.a.a\ ....a)$$

وحسب 2 :

$$\ln(a^n) = \ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a)$$

$$\ln(a^n) = n.\ln(a)$$

إثبات 5 :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(1) - \ln(a)$$

وحسب 3 :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 - \ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

إثبات 6 :

$$\ln(\sqrt{a}) = \ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

تمارين :

1- بسط العبارات التالية :

ملاحظة: المقصود غالباً ببسط العبارة هو إما الوصول إلى لوغارتمات مضمونها أعداد أولية 2و3و5و7و... أو جواب نهائي سهل

$$a = \ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad ①$$

طريقة 1 :

حسب الخاصة 1

$$a = \ln\left(3 \times \frac{1}{3}\right) = \ln(1) = 0$$

طريقة 2 :

حسب الخاصة 2

$$a = \ln(3) + \ln(1) - \ln(3) = 0$$

$$b = \ln\left(\frac{1}{16}\right) \quad ②$$

حسب الخاصة 5

$$b = -\ln(16)$$

$$b = -\ln(2^4)$$

حسب الخاصة 4

$$b = -4\ln(2)$$

$$c = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}) \quad ③$$

$$c = \frac{1}{2}\ln(2^{\frac{1}{2}})$$

$$c = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{4}\ln(2)$$

2- بسط ما يلي واكتبه بدلالة $ln(2)$ و $ln(5)$:

$$a = \ln(50) \quad ①$$

$$a = \ln(25 \times 2)$$

$$a = \ln(25) + \ln(2)$$

$$a = \ln(5^2) + \ln(2)$$

$$a = 2\ln(5) + \ln(2)$$

$$\boldsymbol{b = \ln\left(\frac{16}{25}\right)} \quad ②$$

$$b = \ln(16) - \ln(25)$$

$$b = \ln(2^4) - \ln(5^2)$$

① $\ln(x^2)$ ④ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ ⑦ $\ln(x^2-3x+2)$

② $\ln(1-x)$ ⑤ $\frac{1}{\ln(x)}$ ⑧ $\ln|x+1| - \ln|x-1|$

③ $\ln(3-x)$ ⑥ $\ln(x^2+4x)$ ⑨ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

$$b = 4\ln(2) - 2\ln(5)$$

3- أثبت أن :

$$\boldsymbol{\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0}$$

لإثبات صحة مساواة ننطلق من طرف للوصول للآخر

$$l_1 = \ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$$

$$l_1 = \ln[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]$$

$$l_1 = \ln[4-3] = \ln(1)$$

$$l_1 = 0 = l_2$$

4- أثبت صحة المساواة :

$$\boldsymbol{\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$l_2 = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$l_2 = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

$$l_2 = \ln(x^2) + \ln(x^2+1) - \ln(x^2)$$

$$l_2 = \ln(x^2+1) = l_1$$

وظيفة :

5- أثبت صحة المساواة :

$$\boldsymbol{\ln(1+x) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

6- في الحالات الآتية عين قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً :

المعادلات اللوغارتمية :

خواص التابع اللوغارتمي وتوظيفها في حل المعادلات والمتراجحات :

درسنا سابقاً تعريف التابع اللوغارتمي ومجموعة تعريفه والآن سنورد لكم خواصه الهامة ومن ثم نوظفها في حل المعادلات اللوغارتمية ليكن لدينا التابع :

$$f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \ln(x)$$

مبرهنة1 :

التابع اللوغارتمي تابع متزايد تماماً " حيث $f'(x) = \frac{1}{x}$ مقدار موجب تماماً على مجموعة تعريفه $]0, +\infty[$ "

مما يجعله يحافظ على جهة المتراجحات أي أن :

$$\ln a \le \ln b \Leftrightarrow a \le b$$
$$\ln a \ge \ln b \Leftrightarrow a \ge b$$
$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

وهذا الأمر الذي سنوظفه في النمط الأول من المعادلات والمتراجحات :

لكن قبل البدء بحل أي معادلة أو متراجحة لوغارتمية يجب إيجاد شرط الحل (وهو تقاطع مجموعات تعريف كل اللوغارتمات الموجودة في المعادلة) ... لنبدأ :

النمط الأول : المعادلات والمتراجحات من النمط :

$\ln a = \ln b$ & $\ln a \le \ln b$ & $\ln a \ge \ln b$

1. نوجد E_1 مجال التعريف الذي يجعل $a > 0$ و E_2 مجال التعريف الذي يجعل $b > 0$
2. نوجد شرط الحل E ألا وهو $E = E_1 \cap E_2$
3. نتخلص من اللوغارتمات حسب المبرهنة1 ونحل المعادلة أو المتراجحة كما مر معنا في الفصل السابق
4. ثم نقاطع النتائج مع E فنحصل على الحلول المطلوبة

مثال1 :

ستكون يوماً ما تريد .. سيرضيك قطاف الغد فلا تستسلم

حل المعادلة التالية

$$\ln(3x - 4) = \ln(x^2 - 4)$$

الحل:

لنوجد E_1 مجال التعريف للطرف الأول

$3x - 4 > 0$ ومنه $3x > 4$

$$\Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

فيكون المجال $E_1 =]\frac{4}{3}, +\infty[$

لنوجد E_2 مجال التعريف للطرف الثاني

$x^2 - 4 > 0$ ومنه $x^2 - 4 = 0$

$$\Rightarrow (x+2)(x-2) = 0$$

فيكون إما

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

أو

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

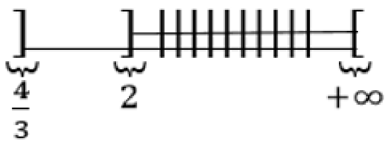
وبتنظيم جدول الإشارة نجد :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
>0	م		غ م		م

فيكون المجال

$E_2=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

-نقاطع: $E_2=E_1\cap E_2$ هي المنطقة التي تحوي على خطين ضمن المجال



أي $E=]2,+\infty[$

فائدة:

....

....

....

$$\ln(3x-4)=\ln(x^2-4)$$

نتخلص من اللوغارتمات:

$$\Leftrightarrow (3x-4)=(x^2-4)$$

$$\Rightarrow 3x-4-x^2+4=0$$
$$\Rightarrow 3x-x^2=0 \Rightarrow x(3-x)=0$$

ومنه إما $\boxed{x=0}$ وهو مرفوض لأنه خارج المجال E

أو $3-x=0$ وبالتالي $\boxed{x=3}$ وهو مقبول لأنه ضمن المجال E

مثال2: حل المعادلة التالية

$$\mathbf{\ln(x-2)=\ln(x^2-2)}$$

-لنوجد E_1 مجال التعريف للطرف الأول

$x-2>0$ ومنه $x>2$

فيكون المجال $E_1=]2,+\infty[$

-لنوجد E_2 مجال التعريف للطرف الثاني

$x^2-2>0$ ومنه $x^2-2=0$

$$\Rightarrow (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$$

فيكون إما

$$x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}$$

أو

$$x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2}$$

وبتنظيم جدول الإشارة نجد :

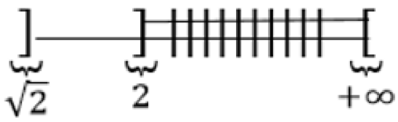
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
x^2-2	$+$	0	$-$	0	$+$
>0	م		غ م		م

فيكون المجال

$E_2 =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

-نقاطع:

$E = E_1 \cap E_2$ هي المنطقة التي تحوي على خطين ضمن المجال



أي $E =]2, +\infty[$

$$\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$$

نتخلص من اللوغارتم

$$\Leftrightarrow (x-2) = (x^2-2)$$
$$\Rightarrow x - 2 - x^2 + 2 = 0$$
$$\Rightarrow x - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x(1-x) = 0$$

ومنه إما $x = 0$ وهو مرفوض لأنه خارج المجال E

أو $1 - x = 0$ وبالتالي $x = 1$ وهو مرفوض أيضاً لأنه خارج المجال

مثال 3 : حل المتراجحة التالية:

$$\ln(x^2-4) \leq \ln(-3x)$$

فائدة :

....

....

....

مجموعة تعريف الطرف الأصغر E_1

$x^2 - 4 > 0$

$E_1 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

و سنكتفي بها حسب الفائدة السابقة

$$\ln(x^2-4) \leq \ln(-3x)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4 \leq -3x$$
$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x+4)(x-1) = 0$$

إما $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

ننظم جدول الإشارة كما يلي:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x^2 - 4 + 3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
≤ 0		غ.م	|	م	|	غ.م	

فتكون مجموعة الحلول هي:

$S =]-4, 1[$

$E = E_1 \cap S =]-4, -2[$

النمط الثاني : المعادلات والمتراجحات من النمط :

$$\ln a + \ln b = n.\ln c$$
$$\&\ \ \ln a + \ln b \leq n.\ln c$$

1- نوجد E_1 و E_2 و E_3 مجموعات تعريف $lna\ , lnb\ , lnc$ على الترتيب

2- نوجد شرط الحل E حيث $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

3- نستفيد من خواص المبرهنة2 إذ نلاحظ أن :

الطرف الأول $lna + lnb = \ln(a.b)$ و

الطرف الثاني $n\ lnc = \ln(c^n)$

و بالتالي تؤول المعادلة المطلوبة إلى المعادلة التالية:

$$\ln(a.b) = \ln(c^n)$$

و بذلك تكون قد ردت إلى معادلة من النمط الأول

(كل ما سبق يبقى صحيحاً في حال كان لدينا متراجحة بدل مساواة "معادلة")

4- نتخلص من اللوغارتمات و نوجد الحلول ثم نقاطعها مع E فنحصل على الحلول المقبولة

في حال الطرف الأول كان طرحاً $lna - lnb$ فهو يكتب بالشكل $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

مثال 1 : حل المعادلة التالية

$$\mathbf{\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x}$$

- E_1 : $2x - 3 > 0$ وبالتالي يكون

$2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

ومنه $\boxed{E_1 =]\frac{3}{2}, +\infty[}$

- E_2 : $6 - x > 0$ وبالتالي يكون

$-x > -6 \Rightarrow x < 6$

ومنه $\boxed{E_2 =]-\infty, 6[}$

- E_3 : $x > 0$ فيكون المجال

$\boxed{E_3 =]0, +\infty[}$

-نقاطع: $\boxed{\boxed{E =]\frac{3}{2}, 6[}}$

$$\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$$
$$\Rightarrow \ln(2x-3)^{\frac{1}{2}} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2x-3) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بضرب بـ2}} \quad \ln(2x-3) = 2\ln(6-x) - \ln x$$
$$\Rightarrow \ln(2x-3) = \ln(6-x)^2 - \ln x$$
$$\Rightarrow \ln(2x-3) = \ln\left(\frac{(6-x)^2}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x - 3 = \frac{(6-x)^2}{x}$$
$$\Rightarrow x(2x-3) = (6-x)^2$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 3x = 36 - 12x + x^2$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 36 + 12x - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 9x - 36 = 0$$
$$\Rightarrow (x+12)(x-3) = 0$$

إما $x + 12 = 0$ ومنه $x = -12$ مرفوض

أو $x - 3 = 0$ ومنه $x = 3$ مقبول

مثال 2 : حل المعادلة التالية

$$2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$$

-إن E_1 مجموعة تعريف الطرف الأيسر هو

$x > 0$ وبالتالي $\boxed{E_1 =]0, +\infty[}$

-وE_2 مجموعة تعريف الحد الأول للطرف الأيمن هو

$x + 4 > 0 \Leftarrow x > -4$ وبالتالي:

$\boxed{E_2 =]-4, +\infty[}$

وإن E_3 مجموعة تعريف الحد الثاني للطرف الأيمن هو $2x > 0 \Leftarrow x > 0$

وبالتالي: $\boxed{E_3 =]0, +\infty[}$

ومنه التقاطع:

$$E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \Rightarrow \boxed{\boxed{E =]0, +\infty[}}$$

$$2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$$

$$\Rightarrow \ln x^2 = \ln(x+4) + \ln(2x)$$
$$\Rightarrow \ln x^2 = \ln\big((x+4).(2x)\big)$$

$$\Rightarrow \ln x^2 = \ln(2x^2 + 8x)$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 2x^2 + 8x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x^2 - 8x = 0$$
$$\Rightarrow -x^2 - 8x = 0 \Rightarrow -x(x+8) = 0$$

إما $-x = 0$ مرفوض لأن قيمة 0 لا تنتمي إلى مجموعة التعريف

أو $x + 8 = 0 \Leftarrow x = -8$ مرفوضة ايضاً لان قيمة -8 لا تنتمي إلى مجموعة التعريف

مثال 3 : حل المتراجحة التالية

$$\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6 - x)$$

مجموعة التعريف E_1 للطرف الأيسر

$$x^2 - 3x > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0$$

إما $x = 0$ أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

ولننظم الجدول الآتي:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2 - 3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
> 0		م	|	غ.م	|	م	

فتكون مجموعة التعريف

$$E_1 =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$$

مجموعة التعريف E_2 للطرف الأيمن

$$6 - x > 0$$

$$\Rightarrow 6 - x > 0 \Rightarrow -x > -6 \Rightarrow x < 6$$

فتكون مجموعة التعريف

$$E =]-\infty, 6[$$

$$\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6 - x)$$
$$\Rightarrow \ln(x^2 - 3x) \geq \ln(6 - x)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3x \geq (6 - x)^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 3x \geq 36 - 12x + x^2$$
$$x^2 - 3x - 36 + 12x - x^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow 9x - 36 \geq 0$$
$$\Rightarrow x - 4 \geq 0$$
$$\Rightarrow x \geq 4$$

فتكون مجموعة الحلول

$$E = [4, +\infty[$$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة هي $S =$
$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = [4,6[$

النمط الثالث : المعادلات والمتراجحات

من النمط :

$$lna = m \quad \& \quad lna \le m \quad \& \quad lna \ge m$$

حيث m عدد حقيقي

الشكل الأول لا يحتاج لخواص :

1- نوجد شرط الحل E بحيث $a > 0$

2- نستفيد من (المبرهنة2) و التي تنص في أحد خواصها على أن الكتابة $lna = m$ تكافئ أن $a = e^m$

3- نوجد الحلول و نقاطعها مع E فنحصل على الحلول المقبولة

مثال 1: حل المعادلة التالية

$$\ln(1-x) = 0$$

$$\ln(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1-x > 0$$
$$\Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1$$

وبالتالي تكون مجموعة تعريف المعادلة هي $E =]-\infty, 1[$

$$\ln(1-x) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln(1-x)} = e^0$$
$$\Leftrightarrow 1-x = 1$$
$$\Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

ومنه نجد أن القيمة $x = 0$ ضمن المجال فتكون مقبول.

مثال 2 : حل المعالة $\ln(3-x) = 0$

$$\ln(3-x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3-x > 0$$
$$\Rightarrow -x > -3$$
$$\Rightarrow x < 3$$

وبالتالي تكون مجموعة تعريف المعادلة هي $E =]-\infty, 3[$

$$\ln(3-x) = 2 \Leftrightarrow$$
$$e^{\ln(3-x)} = e^2 \Leftrightarrow$$
$$3-x = e^2$$
$$\Rightarrow 3-x = e^2$$
$$\Rightarrow -x = -3 + e^2 \Rightarrow x = 3 - e^2$$

تذكرة: $e \approx 2{,}7 \quad , e^2 \approx 7{,}2 \quad , \frac{1}{e} \approx 0.3$

مثال 3 : حل المعادلة $\ln(x+2) = 1$

$$x + 2 > 0$$
$$\Rightarrow x > -2 \Rightarrow x > -2$$

وبالتالي تكون مجموعة تعريف المعادلة هي $E =]-2, +\infty[$

$$\ln(x+2) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x+2)} = e^1$$
$$\Leftrightarrow x + 2 = e^1$$
$$\Rightarrow x = e^1 - 2$$

ملاحظة: عند الحل الجبري لا نعوض قيمة e

مثال 4 : حل المتراجحة $\ln x \le 2$

نوجد E_1 مجموعة التعريف لمضمون اللوغاريتم بحيث $x > 0$

ومنه تكون $E_1 =]0, +\infty[$

نوجد مجموعة التعريف E_2 للمعادلة بعد حل المعادلة $\ln x \leq 2 \Rightarrow x \leq e^2$

فتكون $E_2 =]-\infty, e^2]$ ومنه مجموعة حلولها هي $S = E_1 \cap E_2 =]0, e^2]$

مثال 5 : حل المتراجحة

$$\ln(1 - x) \geq 0$$

نوجد E_1 مجموعة التعريف للمضمون $1 - x > 0$ ومنه $-x > -1 \Rightarrow x < 1$

ومنه $E_1 =]-\infty, 1[$

فائدة: إن الرمز e هو عدد حقيقي مميز سندرسه لاحقاً و هو تقريباً يساوي 2.7

$$\ln(1 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq e^0$$
$$\Rightarrow -x \geq 1 - 1 \Rightarrow x \leq 0$$

ومنه مجموعة التعريف

$E_2 =]-\infty, 0]$

وتكون مجموعة الحلول

$S = E_1 \cap E_2 =]-\infty, 0]$

مثال 6 : حل المتراجحة

$$\ln(2 - x) \geq 1$$

نوجد E_1 مجموعة التعريف للمضمون

$2 - x > 0$

ومنه $-x > -2 \Rightarrow x < 2$

ومنه $E_1 =]-\infty, 2[$

$$\ln(2 - x) \geq 1$$
$$\Leftrightarrow 2 - x \geq e^1$$
$$\Rightarrow -x \geq e - 2$$
$$\Rightarrow x \leq 2 - e$$

ومنه مجموعة الحلول

$E_2 =]-\infty, 2 - e]$

وتكون مجموعة الحلول المقبولة $S = E_1 \cap E_2 =]-\infty, 2 - e]$

مثال 7 : حل المتراجحة $\ln\left(-\frac{1}{x}\right) < 2$

نوجد E_1 مجموعة التعريف للمضمون $-\frac{1}{x} > 0$

البسط لا ينعدم ولنعدم المقام $x = 0$

لننظم جدول الإشارة

x	$-\infty$		0		$+\infty$
بسط		$-$		$-$	
مقام		$-$	0	$+$	
كسر		$+$	$\|\|$	$-$	
> 0		م	$\|$	غ.م	

وبالتالي تكون $E_1 =]-\infty, 0[$

$$\ln\left(-\frac{1}{x}\right) < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} < e^2$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{x} - e^2 < 0 \Rightarrow \frac{-1 - xe^2}{x} < 0$$

نعدم البسط $-1 - xe^2 = 0$ ومنه $-xe^2 = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{e^2}$

نعدم المقام $x = 0$ وننظم جدولاً

x	$-\infty$		$-\frac{1}{e^2}$		0		$+\infty$
بسط		$+$	0	$-$		$-$	
مقام		$-$		$-$	0	$+$	
كسر		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
<0		م	|	غ.م	|	م	

وبالتالي $E_2 =]-\infty, -\frac{1}{e^2}[\cup]0, +\infty[$ ومنه

$S = E_1 \cap E_2 =]-\infty, -\frac{1}{e^2}[$

الشكل الثاني يحتاج لخواص :

$$\boldsymbol{lna \pm lnb = m}$$

1- نوجد E_1, E_2 شرطي تعريف $\ln a$, $\ln b$ على الترتيب ثم نوجد شرط الحل $E = E_1 \cap E_2$

2- نستفيد من خواص التابع اللوغارتمي بحيث $\ln(a.b) = \ln(e^m)$ و من ثم $a.b = e^m$

3- نوجد الحلول و تقاطعها مع شرط الحل لنأخذ الحلول المقبولة

مثال 1 : حل المعادلة

$$\ln(x+1) - \ln(-x+2) = 0$$

$-$ E_1 مجموعة تعريف الحد الأول الذي يكافئ $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

فيكون المجال $E_1 =]-1, +\infty[$

$-$ E_2 مجموعة تعريف الحد الثاني الذي يكافئ $-x+2>0$

$\Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2$

فيكون المجال $E_2 =]-\infty, 2[$

فيكون تقاطعهما هو مجموعة تعريف المعادلة

$E = E_1 \cap E_2 \Rightarrow E =]-1, 2[$

$$\text{Ln}(x+1) - \ln(-x+2) = 0$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{-x+2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{\frac{x+1}{-x+2}} = e^0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{-x+2} = 1$$
$$\Rightarrow x+1 = 1.(-x+2)$$
$$\Rightarrow x + x = 2 - 1 \Rightarrow 2x = 1$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

القيمة $x = \frac{1}{2}$ مقبولة لأنه ضمن مجموعة التعريف E.

مثال 2: حل المعادلة الآتية

$$\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2$$

$-$ E_1 مجموعة تعريف الحد الأول الذي يكافئ $x-2>0 \Rightarrow x>2$

فيكون المجال $E_1 =]2, +\infty[$

$-$ E_2 مجموعة تعريف الحد الثاني الذي يكافئ $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

فيكون المجال $E_2 =]-1, +\infty[$ أي

فيكون تقاطعهما

$E = E_1 \cap E_2 \Rightarrow E =]2, +\infty[$

$$\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = 2$$

$$\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)} = e^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x+1}\right) = e^2$$
$$\Rightarrow x - 2 = e^2(x+1)$$
$$\Rightarrow x - 2 = xe^2 + e^2$$
$$\Rightarrow x - xe^2 = e^2 + 2$$
$$\Rightarrow x(1 - e^2) = e^2 + 2$$
$$\Rightarrow x = \frac{(e^2+2)}{1-e^2}$$

قيمة x مرفوضة لأنها لا تقع ضمن المجال

لأنها أقل من العدد 2

النمط الرابع : المعادلات والمتراجحات من النمط :

$$a(lnx)^2 + bln(x) + c = 0 \quad (\geq 0 \quad or \leq 0)$$

بشرط $x > 0$ نضع $t = lnx$ فتصبح المعادلة من النمط $at^2 + bt + c = 0$ و نحلها كما مر في الفصل السابق

(لا تنسَ العودة إلى المتحول الأصلي)

مثال 1 : حل المعادلة الآتية

$$(\ln x)^2 - 5\ln x = 6$$

بشرط $x > 0$ نفرض $\ln x = t$ فتصبح المعادلة من الشكل:

$$t^2 - 5t = 6 \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0$$
$$\Rightarrow (t-6)(t+1) = 0$$

إما $t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow \ln x = 6$

$\Rightarrow \boxed{x = e^6}$

أو $t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow \boxed{x = e^{-1}}$

مثال 2 : حل المعالة الآتية

$$(\ln x)^2 = 3\ln x$$

بشرط $x > 0$ نفرض $\ln x = t$ فتصبح المعادلة بالشكل:

$$t^2 = 3t \Rightarrow t^2 - 3t = 0 \Rightarrow t(t-3) = 0$$

إما t

$-3 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow \boxed{x = e^3}$

أو $t = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

مثال 3 : حل المعالة الآتية $\boxed{(\ln x)^2 = 25}$

بشرط $x > 0$ نفرض $\ln x = t$ فتصبح المعادلة بالشكل:

$$t^2 = 25 \Rightarrow t^2 - 25 = 0$$
$$\Rightarrow (t-5)(t+5) = 0$$

إما $t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow \ln x = 5$

$\Rightarrow \boxed{x = e^5}$

أو $t + 5 = 0 \Rightarrow t = -5$

$\Rightarrow \ln x = -5$

$\Rightarrow \boxed{x = e^{-5}}$

مثال 4 : حل المعالة الآتية

$$(\ln x)^2 - 2\ln x = -1$$

بشرط $x > 0$ نفرض $\ln x = t$ فتصبح

المعادلة بالشكل:

$$t^2 - 2t = -1 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (t-1)(t+1) = 0$$

إما $t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \ln x = 1$

$\Rightarrow \boxed{x = e^1}$

أو $t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow \boxed{x = e^{-1}}$

مثال 5 : حل المتراجحة

$$(\ln x)^2 - 2\ln x \le 3$$

$$\Rightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \le 0$$

بشرط $x > 0$ نفرض $\ln x = t$ فتصبح

المعادلة من الشكل:

$$t^2 - 2t - 3 \le 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$
$$\Rightarrow (t-3)(t+1) = 0$$

إما $t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3$ ومنه $\ln x = 3$

$\Rightarrow \boxed{x = e^3}$

أو $t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$ ومنه

$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

ننظم الجدول

x	0	e^{-1}	e^3	$+\infty$
المتراجحة	+	0	0	+
≤ 0	غ.م	م	غ.م	

ومنه مجموعة الحلول $S = [e^{-1}, e^3]$

مثال 6 : حل المتراجحة التالية

$$(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 \le 0$$

بشرط $x > 0$ نفرض $\ln x = t$ فتصبح العلاقة:

$$(t-3)(t-2) \le 0$$
$$\Rightarrow (t-3)(t-2) = 0$$

إما $t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3$ ومنه $\ln x = 3$

$\Rightarrow \boxed{x = e^3}$

أو $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ ومنه $\ln x = 2$

$\Rightarrow \boxed{x = e^2}$

ننظم جدول الإشارة

x	0	e^2	e^3	$+\infty$
المتراجحة	+	0 −	0	+
≤ 0	م	غ.م	م	

وبالتالي مجموعة التعريف $S =]0, e^2] \cup [e^3, +\infty[$

إضاءة هامة : إشارة اللوغارتم

مما لا شك فيه أن مضمون اللوغارتم موجب تماماً و ذلك حسب شرط تعريفه

لكن السؤال الآن متى يكون $\ln(x)$ موجباً و متى يكون سالباً

يكون موجباً إذا كان مضمونه أكبر تماماً من الواحد $x > 1$

و يكون سالباً إذا كان مضمونه أصغر تماماً من الواحد $x < 1$

و يكون صفراً إذا كان مضمونه مساوياً للواحد $x = 1$ (راجع تعريف التابع اللوغارتمي)

مثال: حدد الإشارة للمقدار $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

المضمون $\frac{3}{2} > 1$ إذن $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ موجب تماماً

مثال حدد الإشارة للمقدار $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ المضمون $\frac{2}{3} > 1$ إذن $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ سالب تماماً

☺قد تحتاج لتذكر المقارنة مع الواحد

إذا كان البسط أصغر من المقام فإن الكسر أصغر من الواحد

إذا كان البسط أكبر من المقام فإن الكسر أكبر من الواحد

النمط الخامس : جمل المعادلات

مثال 1: جد الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} 2lnx + lny = 7 \\ 3lnx - 5lny = 4 \end{cases}$$

نضرب المعادلة الاولى بـ5

$$\begin{cases} 10lnx + 5lny = 35 \\ 3lnx - 5lny = 4 \end{cases}$$

نجمع :

$$13lnx = 39$$
$$lnx = \frac{39}{13}$$
$$lnx = 3$$

نعوض في المعادلة الثانية :

$$3(3) - 5lny = 4$$
$$5lny = 5$$
$$lny = 1$$

إذن:

$$lnx = 3 \implies x = e^3$$
$$lny = 1 \implies y = e$$

مثال2: جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} (lnx)(lny) = -12 \\ ln(xy) = 1 \end{cases}$$

نعيد صياغة المعادلة الثانية :

$$(lnx)(lny) = -12$$
$$\ln(x) + lny = 1$$

فإننا نبحث عن عددين جداؤهما -12 و مجموعهما 1 , إذن :

$$lnx = 4 \quad , \quad lny = -3$$
$$x = e^4 \quad , \quad y = e^{-3}$$

أو بالعكس $x = e^{-3}, y = e^4$

مثال3 : جد الحل المشترك لجملة المعادلتين :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ lnx + lny = ln3 \end{cases}$$

بإعادة صياغة المعادلة الثانية :

$$\ln(xy) = ln3 \Rightarrow xy = 3$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

نضرب المعادلة الثانية ب2:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

نربع المعادلة الثانية:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2y^2 = 9 \end{cases}$$

فالعددين x^2, y^2 عددين موجبين

مجموعهما 10 و جداؤهما 9

فهما 9, 1

$$x^2 = 9 \quad y^2 = 1$$

نجذر (ضمن الشرط $x, y > 0$)

$$x = 3 \quad y = 1$$

أو $x = 1, y = 3$

قدماً نحو الأمام :

حل كلاً من المعادلات الآتية:

① $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

② $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

③ $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

① $a.$ تحقّق أنَّ $P(-1) = 0$.

$b.$ استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x) = (x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود م
الدرجة الثانية.

$c.$ حل المتراجحة $P(x) \leq 0$.

② استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$.

حلّ جملة معادلتين

a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ تماماً. حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} xy = a^2 & (1) \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \dfrac{5}{2}(\ln a)^2 & (2) \end{cases}$$

حساب لوغاريتمي

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحقّقان $\frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln\left(\frac{a+b}{3}\right)$

احسب $\frac{a}{b}$.

مشتق التابع اللوغارتمي :

إذا كان f التابع المعرف على $]0,+\infty[$

وفق $f(x) = lnx$ فإن f اشتقاقي على

$]0,+\infty[$ و يعطى مشتقه بالصيغة

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

و بشكل عام إذا كان u تابعاً موجباً تماماً

على I و اشتقاقياً عليه فإن :

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$= \frac{\text{مشتق المضمون}}{\text{المضمون}}$$

أمثلة : أوجد مشتق كلاً من التوابع الآتية

مبيناً المجموعة التي تحسب المشتق عليها :

1	$f(x) = \ln(2 - x)$
2	$f(x) = \ln(x^2 - 3x)$
3	$f(x) = \ln\left(2x + \frac{1}{3}\right)$
4	$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$
5	$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
6	$f(x) = \ln(x^2)$
7	$f(x) = \ln\left(\frac{x}{2x+3}\right)$
8	$f(x) = \ln(ln(x))$

الحل :

نهايات التابع اللوغارتمي

نهايات بسيطة	
$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$	1
$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$	2

نهايات عند $+\infty$	
$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$	1
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{lnx} = +\infty$	2

و تعمم المبرهنات السابقة إلى :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0 \quad , \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{lnx} = +\infty$$

نهايات عند الصفر و الواحد	
$\lim_{x\to0^+} xln(x) = 0^-$	1
$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	2
$\lim_{x\to0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$	3

4	$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$
5	$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{lnx}=1$

ملاحظة: أحياناً نحتاج لإصلاح شكل التابع لرده إلى أحد النهايات المرجعية السابقة و ذلك من خلال (عامل مشترك-نشر- توحيد المقامات-تفريق الكسور – تطبيق خواص اللوغارتم – تغيير المتحول)

تمارين : احسب على دفترك نهاية كلٍ من التوابع الآتية عند أطراف مجال تعريفها :

1	$f(x)=\frac{lnx}{x}$
2	$f(x)=x-lnx$
3	$f(x)=\frac{1}{x}+lnx$
4	$f(x)=\frac{1}{x}-lnx$
5	$f(x)=\frac{x}{lnx}$
6	$f(x)=\frac{lnx}{x^2}$
7	$f(x)=x(1-lnx)$
8	$f(x)=\frac{1}{x}(lnx-1)$
9	$f(x)=\frac{x-lnx}{x}$
10	$f(x)=\frac{x+1}{lnx}$
11	$f(x)=\frac{xlnx}{x+1}$
12	$f(x)=\frac{xlnx}{x-1}$
13	$f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x)$
14	$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$
15	$f(x)=\frac{\ln(1+sinx)}{x}\ ,a=0$
16	$f(x)=\frac{\ln(\sqrt{x}+1)-ln\sqrt{2}}{x-1}$ $a=1$
17	$f(x)=\frac{ln\sqrt{x}}{x}\ ,a=+\infty$
18	$f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}$

دراسة تغيرات توابع لوغارتمية:

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$$

f معرف على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{-\infty}{0}=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x)-(1)(\ln x)}{(x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0$$

$$1-\ln x=0$$

$$\ln x=1$$

$$x=e$$

$$f(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}$$

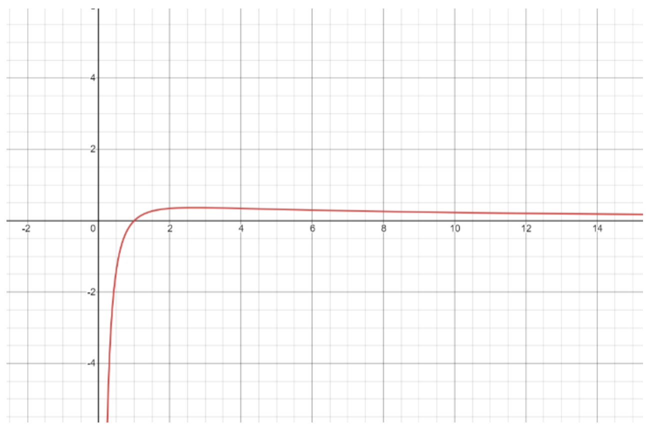
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

التقاطع مع xx' نضع $y=0$

$$\frac{\ln(x)}{x}=0$$

$$\ln x=0$$

$$x=1$$



$$\boldsymbol{f(x)=\ln^2(x)=[\ln(x)]^2}$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$[u^n]'=n.u^{n-1}.u^1$$

$$f'(x)=2\ln(x).\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\ln(x)}{x}$$

نعدم المشتق

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2\ln(x)}{x}=0$$

$$2\ln(x)=0$$

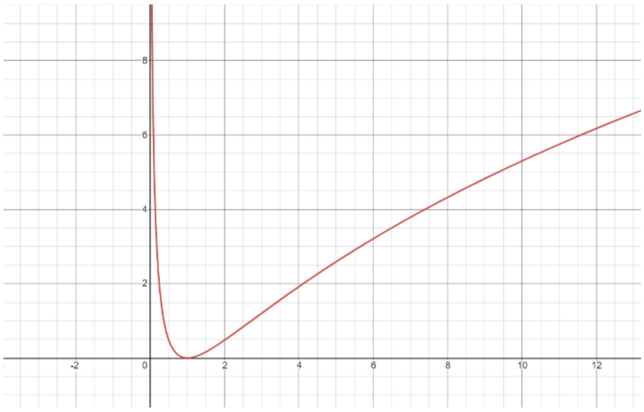
$$\ln(x)=0$$

$$x=1$$

$$f(1)=\ln^2(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=0$ قيمة صغرى



$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)}$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{1}{0^+}-\infty=+\infty-\infty$$

$$f(x)=\frac{1+x\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{(1+0)}{0^+}=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

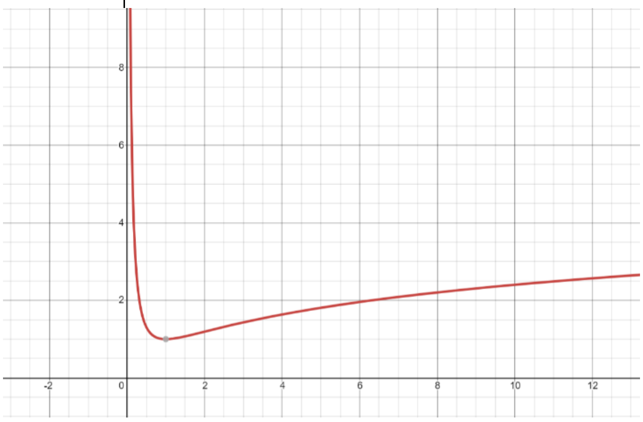
$$f'(x)=\frac{-1+x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -1+x=0$$

$$x=1$$

$$f(1)=\frac{1}{1}+\frac{\ln(1)}{0^+}=1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$	



" سؤال دورة "

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x\ln x}}$$

$x\mapsto \ln x$ معرف على $]0,+\infty[$

نعدم المقام $x.\ln x=0$

$$x=0 \qquad \ln x=0$$

$$x=1$$

$$D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{1\ln(1)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار ال$+\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي و C على يمين المقارب

$x = 1$ مقارب شاقولي و C على يسار المقارب

f اشتقاقي على D_f

$$f'(x) = \frac{(0)(x\ln x) - \left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right)(1)}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\ln(x) - 1}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln(x) - 1 = 0$$

$$\ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

$$f(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}.\ln(e^{-1})}$$

$$f(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}.(-1)} = -e$$

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

مسألة :

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

② أثبت أن $d : y = x - \ln(2)$ مقارب مائل للخط C_f عند $+\infty$ وادرس وضعه النسبي

③ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$

④ عين معادلة المماس للتابع f عند $a = 1$

⑤ ارسم d ثم C_f

الحل :

f معرف بشرط

$$2+\frac{1}{x}>0$$

$$\frac{2x+1}{x}>0$$

البسط :

$$2x+1=0$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

المقام :

$$x=0$$

x	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty -\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$
x	$-$		$-$ 0	$+$
$\frac{2x+1}{x}$	$+$	0	$-$ $\Vert$	$+$
متراجحة	م		غ م	م

$$D_f=]-\infty,-\frac{1}{2}[\cup]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty-\ln(2)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\ln(2)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} f(x)=+\infty$$

$x=-\frac{1}{2}$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

C يقع على يسار المقارب

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$$

$x=-\frac{1}{2}$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

C يقع على يمين المقارب

f اشتقاقي على D_f :

ولكن سنغير شكل f للسهولة

$$f(x)=x-\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$f(x)=x-[\ln(2x+1)-\ln(x)]$$

$$f(x)=x-\ln(2x+1)+\ln(x)$$

$$f'(x)=1-\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{x}$$

نوحد المقامات

$$f'(x)=\frac{x(2x+1)-2x+2x+1}{x(2x+1)}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+x+1}{x(2x+1)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2x^2+x+1=0$$

$$\Delta=1-4(2)(1)$$

$$1-8=-7<0$$

مستحيلة الحل

$$f'(x)>0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$\Vert$	$++$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow +\infty$	

$$f(x)-y_d = x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-(x-\ln(2))$$

$$f(x)-y_d = x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)-x+\ln(2)$$

$$f(x)-y_d = -\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+\ln(2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d) = -\ln(2)+\ln(2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d) = 0$$

d مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x)-y_d = -\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+\ln(2)$$

$$-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)+\ln(2) = 0$$

$$\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = \ln(2)$$

$$2+\frac{1}{x} = 2$$

$$\frac{1}{x} = 0$$

مستحيلة

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$f(x)-y_d$	$+$				$-$
	C فوق d				C تحت d

f مستمر ومتزايد على $]1,2[$

$$0 \in f(\,]1,2[\,) =]1-\ln(3)\ ,2-\ln\left(\frac{5}{2}\right)[$$

للمعادلة حل وحيد α على المجال $]1,2[$

$$f'(x) = \frac{2x^2+x+1}{x(2x+1)}$$

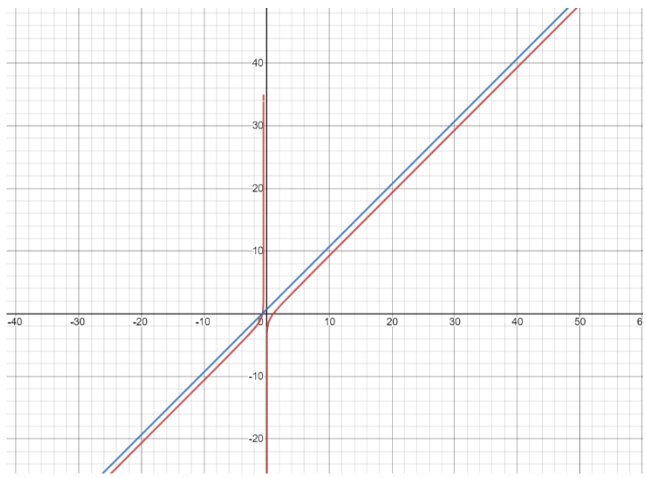
$$y = \underbrace{f'(a)}_{\frac{4}{3}}\left(x-\underbrace{a}_{1}\right)+\underbrace{f(a)}_{1-\ln(3)}$$

$$T: y = \frac{4}{3}(x-1)+1-\ln(3)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$	

$$y = x-\ln(2)$$

x	y	(x,y)
0	$-\ln 2$	$(0,-\ln 2)$
$\ln 2$	0	$(\ln 2\,,0)$



المتراجحات المختلطة :

هي المتراجحات التي تحوي تابعين مختلفين

$$\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1}$$

❶ ننقل جميع الحدود لجهة واحدة :

$$\underbrace{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}_{f(x)} \geq 0$$

❷ نعرف التابع f بقاعدة الربط الناتجة

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$D_f =]-1, +\infty[$$

❸ ندرس تغيرات f

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty - \frac{-1}{0}$$

ج ع ت

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x}{x+1}$$

$$\lim_{\blacksquare\to 0}(\blacksquare \ln(\blacksquare)) = 0$$

نفرض $t = x+1$

$$x \to -1 \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{x\to -1^+}(x+1)\ln(x+1) = \lim_{t\to -1^+} t\ln t = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{0+1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على $]-1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+1-1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ أن

$$f(x) \geq 0 \,;\, \forall x \in]-1\,,+\infty[$$

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0 \;\; \forall x \in]-1\,,+\infty[$$

$$\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1} \quad ,\forall x \in]-1\,,+\infty[$$

مثال: أثبت أن :

$$\mathbf{\ln(x+1) < \sqrt{x+1}}$$

وذلك $\forall x > -1$

الحل :

$$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

لنعرف التابع f بالشكل

$$f(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x+1}$$

$$D_f =]-1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty - \infty \text{ ح ع ت}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}\left(\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} - 1\right)$$

$$\lim_{\circledast\to +\infty} \frac{\ln \circledast}{\circledast} = 0$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}\left(\frac{2.\frac{1}{2}\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} - 1\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}\left(2\frac{\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1}} - 1\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}\left(2\frac{\ln\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} - 1\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(2(0) - 1)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

f اشتقاقي على $]-1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$$

$$f'(x) = 0$$

$$2 - \sqrt{x+1} = 0$$

$$\sqrt{x+1} = 2$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$

$$f(3) = \ln(4) - 2$$

$$f(x) < \ln(4) - 2 < 0$$

$$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$$

$$\forall x \in]-1,+\infty[$$

x	-1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\ln(4)-2$	$\searrow$	$-\infty$

مسودة :

$\ln 2 = 0.7$	$\ln(2^2) - 2$
$\ln 3 = 1.1$	$2\ln 2 - 2$
$\ln 5 = 1.7$	$1 \times 4 - 2 < 0$

من جدول التغيرات نجد أن :

$f(x) \leq \ln 4 - 2 < 0,$ $\mathbf{\forall x > -1}$

$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0\,,$ $\mathbf{\forall x > -1}$

$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$,, $\forall x > -1$

مثال3:أثبت أن $lnx < 2\sqrt{x}$

و ذلك $\forall x > 0$

الحل:

$$lnx - 2\sqrt{x} < 0$$

نعرف التابع $g(x) = lnx - 2\sqrt{x}$

على المجال $]0, +\infty[$

$$lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$lim_{x \to +\infty} f(x) : +\infty - \infty$$

$$f(x) = \sqrt{x}\left(\frac{lnx}{\sqrt{x}} - 2\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x}\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}^2\right)}{\sqrt{x}} - 2\right)$$

$$= \sqrt{x}\left(\frac{2\ln(\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 2\right)$$

$$lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(0-2) = -\infty$$

حيث $lim_{t \to +\infty} \frac{lnt}{t} = 0$

g اشتقاقي على D_f:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$
$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x} = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$
$$g(1) = ln1 - 2\sqrt{1} = -2$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+ + + +$	0	$- - - -$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

من جدول التغيرات نجد أن :

$$g(x) \le -2 < 0 \quad , \forall x > 0$$
$$lnx - 2\sqrt{x} < 0 \quad , \forall x > 0$$
$$lnx < 2\sqrt{x} \quad , \forall x > 0$$

مركز تناظر تابع :

إذا كان $A(a,b)$ مركز تناظر للتابع f فإنه سيحقق الشرطين :

① $\forall x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f$

② $f(2a - x) + f(x) = 2b$

27 من تمارين الوحدة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

① تحقق أن مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]1,3[$

② أثبت أن $(4-x) \in D_f$ ، أياً يكن x من D_f

③ a. احسب عند كل x من D_f المقدار $f(4-x) + f(x)$

b. استنتج أن النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط C

④ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f

⑤ ادرس تغيرات f ونظم جولاً بها

⑥ ارسم الخط C في معلم متجانس

الحل :

$$\frac{x-1}{3-x} > 0$$

البسط :

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

المقام: $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

x		1		3	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{x-1}{3-x}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$
متراجحة			م		

$$D_f =]1,3[$$

(3

$$\forall x \in D_f \Rightarrow x \in]1,3[$$

$$1 < x < 3$$

نضرب بـ (-1)

$$-1 > -x > -3$$

نضيف $2a = 2(2) = 4$:

$$3 > 4 - x > 1$$

$$3 > 2a - x > 1$$

$$2a - x \in D_f$$

$$f(2a - x) + f(x) = f(4 - x) + f(x)$$

$$= \ln\left(\frac{4 - x - 1}{3 - (4 - x)}\right) + \ln\left(\frac{x - 1}{3 - x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3 - x}{-1 + x}\right) + \ln\left(\frac{x - 1}{3 - x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3 - x}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{3 - x}\right)$$

$$f(2a - x) + f(x) = \ln(1) = 0 = 2b$$

(4

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

$x = 3$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

C يقع على يسار المقارب

(5

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{-1}{3-x}$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x}$$

$$= \frac{3-x+x-1}{(x-1)(3-x)}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(3-x)} > 0$$

x	1		3
$f'(x)$	$\|\|$	$+ \quad + \quad +$	$\|\|$
$f(x)$	$\|\|$	$-\infty \nearrow +\infty$	$\|\|$

5 من تمارين الوحدة:

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

① جد نهاية هذه المتتالية

② نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

a. أثبت أن $S_n = \ln(n+1)$

b. ما نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$ ؟

الحل :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \ln(1+n)$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= u_1 = \ln\left(\frac{1+1}{1}\right) = \ln 2 \\ l_2 &= \ln(1+1) = \ln 2 \end{aligned}\right\} l_1 = l_2$$

الخاصة $E(1)$ محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$u_1 + \cdots + u_n = \ln(1+n) \ldots$ (الفرض)

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} = \ln(n+2)$$

$$\lim u_n = f(n)$$

لدينا من (الفرض)

$$u_1 + \dots + u_n = \ln(1+n)$$

نضيف للطرفين u_{n+1}

$$u_1 + \dots + u_n + \boldsymbol{u_{n+1}} = \ln(1+n) + \boldsymbol{u_{n+1}}$$

$$u_1 + \dots + u_n + \boldsymbol{u_{n+1}} = \ln(1+n) + \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{n+2}}{\boldsymbol{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left((n+1).\frac{(n+2)}{(n+1)}\right)$$

$$u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} = \ln(n+2)$$

وهو المطلوب

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

③ ادرس تقارب S_n

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(\infty + 1) = +\infty$$

متباعدة

طريقة2 لإيجاد S_n:

$$u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\dots.\frac{n+1}{n}\right] = \ln(n+1)$$

تمرين خارجي: باستخدام تعريف العدد المشتق أثبت ما يلي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

الحل:

نعرف التابع

$$f(x) = \ln(1+x)$$

نوجد $f(0)\,, f'(x)\,, f'(0)$

$$f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)}$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

حسب تعريف العدد المشتق

$$f'(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-0}{x-0}$$

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

وهو المطلوب

4 من تمارين الوحدة :

كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$ جذران مختلفان ؟

شرط الحل

$$m + 1 > 0$$

$$\boxed{m > -1 \ldots D_1}$$

$$a = 1 \ ,b = -2 \ ,c = \ln(m+1)$$

الحل :

حتى يكون للمعادلة جذران مختلفان يجب أن يكون:

$$\Delta > 0$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

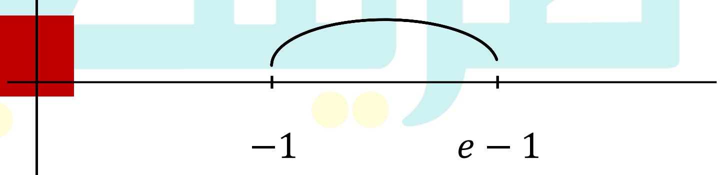
$$4 - 4\ln(m+1) > 0$$

$$4 > 4\ln(m+1)$$

$$1 > \ln(m+1)$$

$$e > m+1$$

$$\boxed{e - 1 > m \ldots D_2}$$



$$m \in (D_1 \cap D_2) =]-1, e-1[$$

إضافي: عين m ليكون للمعادلة السابقة حل وحيد :

حتى تملك المعادلة حلاً وحيداً يجب تحقق:

$$\Delta = 0$$

$$4 - 4\ln(m+1) = 0$$

$$\ln(m+1) = 1$$

$$m + 1 = e$$

$m = e - 1$ مقبول

28 من تمارين الوحدة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة

$$f(x) = ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

① احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ ، $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ وما مقاربات الخط C ؟

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ، ثم ارسم الخط C .

الحل :

ملاحظة: لو أردنا إيجاد مجموعة التعريف :

$$1 + \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x+1}{x} > 0$$

البسط

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

المقام

$$x = 0$$

x		-1		0	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$	0	$-$	‖	$+$
متراجحة	م		غ م		م

فمجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

لكن بما أنه في نص المسألة قد حدد لنا مجال الدارسة $R_+^* =]0, +\infty[$ فنلتزم بهذا المجال

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$y = 0$ مقارب أفقي نحو الـ $+\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

C يقع على يمين المقارب

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{x}{x^2}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

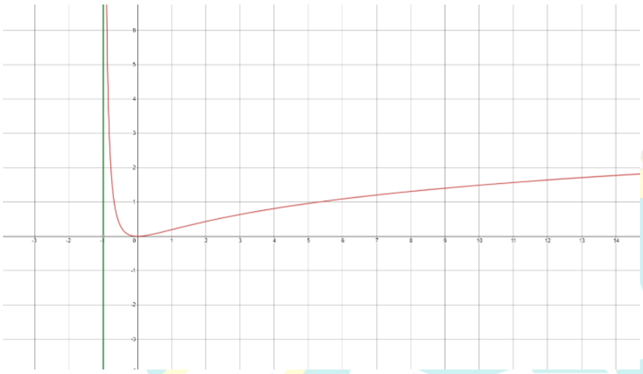
$$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

نوحد المقامات

$$\frac{-x-1+x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$$

f متناقص على المجال $]0, +\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-\quad-\quad-$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$	0



طلب إضافي : أثبت أن

$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$ لكل $x > 0$

الحل : المتراجحة المفروضة

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$$

$$f(x) > 0$$

من جدول التغيرات نلاحظ أن

$$f(x) > 0$$

$\forall x \in]0,+\infty[$

فالمتراجحة صحيحة لكل $x > 0$

تمرين :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة :

$$f(x) = \ln(3 + x^2)$$

① ادرس تغيرات f وارسمه .

② ناقش حسب قيم m حلول المعادلة $f(x) = m$.

الحل :

f معرف بشرط

$$x^2 + 3 > 0$$

$$+x^2 + 3 = 0$$

$x^2 = -3$ مستحيلة

x	$-\infty$			$+\infty$
x^2+3	+	+	+	
	م	م	م	

$$D_f =]-\infty,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x}{3+x^2}$$

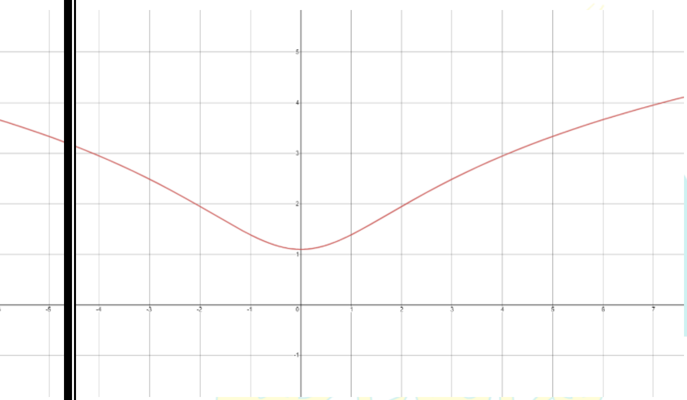
$$f'(x) = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = \ln(3)$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln(3)$	↗	$+\infty$

$$f(x) = m$$



بيانياً :

$m \in]-\infty, \ln(3)[$ المعادلة مستحيلة الحل

$m = \ln(3)$ للمعادلة حل وحيد

$m \in]\ln(3), +\infty[$ للمعادلة حلان

تمرين :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ بالعلاقة :

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) \ , f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

① أثبت أن f مستمر عند الصفر.

② هل f اشتقاقي عند الصفر , احسب $f'(0)$ في حال الإيجاب .

③ أوجد معادلة المماس عند $a = 0$.

الحل :

☺شرط الاستمرار :

$$\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{❶} = \underbrace{f(a)}_{❷}$$

❶ $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} [-x^2 \ln(x)] = 0$$

حيث :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \ , \lim_{x\to 0}[x^n \ln(x)] = 0$$

❷ $f(0) = 0 \Rightarrow$ f مستمر عند $a = 0$

☺قابلية الاشتقاق:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}[-x \ln(x)] = 0$$

قابل للاشتقاق عند $a = 0$ ومشتقه عند الصفر::

$$f'(0) = 0$$

☺معادلة المماس عند $a = 0$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = 0(x - 0) + 0$$

$$y = 0$$

مسألة : ليكن c_f الخط البياني للتابع

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{x}\ln(x)$$

عيّن a, b ليكون المماس ل c_f عند النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم

$$2y - 6x = 4$$

الحل :

$A(a, f(a)) \Leftarrow A(1,0)$ حيث A نقطة من C_f

والمماس عندها يوازي المستقيم

$$2y - 6x = 4$$

المعلومة الأولى:

$$A \in C_f \Rightarrow f(1) = 0$$

$$\Rightarrow a + b + \frac{1}{1}\ln(1) = 0$$

$$a + b = 0 \ldots ❶$$

$$2y - 6x = 4$$

$$2y = 6x + 4$$

$$y = 3x + 2$$

المعلومة الثانية : $m = 3$ إذن:

$$f'(1) = 3$$

$$f'(x) = a - \frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x}.\frac{1}{x}$$

$$f'(1) = 3$$

$$a + 1 = 3 \Rightarrow a = +2$$

نعوض في ❶

$$2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x}\ln(x)$$

تمرين :

ليكن f التابع المعرف بالعلاقة :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| \; ; D_f = \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$$

① a. أثبت أن $\frac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$

b. استنتج أن $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر .

② احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f وأوجد مقارباته .

③ ادرس تغيرات f ونظم جولاً بها .

④ أثبت أن $d : y = -\frac{1}{2}x = -\frac{x}{2}$ مقارب مائل .

⑤ ارسم الخط C في معلم متجانس .

الحل :

انتبه :قبل تصوير شيء يجب ضمان وجوده في D_f

إذن:

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$$

$$-x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$$

$$1 - x \in \mathbb{R}\backslash\{1,0\} = D_f$$

$$|3-5| = |5-3|$$

الآن نثبت العلاقة المطلوبة فننطلق من الطرف الاول :

$$l_1 = \frac{f(x) + f(1-x)}{2}$$

$$l_1=\frac{-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{-(1-x)}{2}+\ln\left|\frac{(1-x)-1}{(1-x)}\right|}{2}$$

$$l_1=\frac{\frac{-x-1+x}{2}+\ln\left[\left|\frac{x-1}{x}\right|.\left|\frac{-x}{1-x}\right|\right]}{2}$$

$$l_1=\frac{\frac{-1}{2}+\ln\left[\left|\frac{x-1}{x}\right|.\left|\frac{-x}{1-x}\right|\right]}{2}$$

$$l_1=\frac{-\frac{1}{2}+\ln(1)}{2}=-\frac{1}{4}=l_2$$

فائدة: للتخلص من القيمة المطلقة ندرس إشارة المضمون فلدينا هنا :

$$u(x)=\frac{x-1}{x}$$

x		0		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$\left\lvert\frac{x-1}{x}\right\rvert$		$-\frac{x-1}{x}$		$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x-1}{x}$

$$\left|\frac{x-1}{x}\right|=\begin{cases}\frac{x-1}{x}\ ;\ x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\\ \frac{-x+1}{x}\ ;\ x\in]0,1[\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\ ;\ x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\\ -\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{-x+1}{x}\right)\ ;\ x\in]0,1[\end{cases}$$

لنحسب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

C يقع على يسار المقارب

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

C يقع على يسار المقارب

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

C يقع على يمين المقارب

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x}{2}+\ln(x-1)-\ln(x)\ ;\ x\in D_1\\ -\frac{x}{2}+\ln(-x+1)-\ln(x)\ ;\ x\in D_2\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\ ;\ x\in D_1\\ -\frac{1}{2}+\frac{-1}{-x+1}-\frac{1}{x}\ ;\ x\in D_2\end{cases}$$

نوحد المقامات

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-x^2+x+2x-2x+2}{2x(x-1)}\ ;\ x\in D_1\\ \frac{x^2-x-2x+2x-2}{2x(-x+1)}\ ;\ x\in D_2\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+x+2}{2x(x-1)} \; ; \; x\in D_1\\[2mm] \dfrac{x^2-x-2}{2x(-x+1)} \; ; \; x\in D_2\end{cases}$$

$$f'(x)=0$$

إما :

$$-x^2+x+2=0$$

$$x^2-x-2=0$$

أو :

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x=2 \Rightarrow f(2)=-1-\ln 2$$

$$x=-1 \Rightarrow f(-1)=\frac{1}{2}+\ln 2$$

x	$-\infty$	-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$\frac{1}{2}+ln2$	$\nearrow +\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow$	$-1-ln2$	$\searrow$	$-\infty$

المقارب :

$$f(x)-y_d=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_d=0$$

d مقارب مائل عند $\mp\infty$

دراسة الوضع النسبي :

ندرس إشارة الفرق

x	y	(x,y)
0	0	$(0,0)$
2	-1	$(2,-1)$

$$f(x)-y_d=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=0$$

$$\left|\frac{x-1}{x}\right|=1$$

إما $\frac{x-1}{x}=1$ ومنه $x-1=x$ و منه $-1=0$

(مستحيلة)

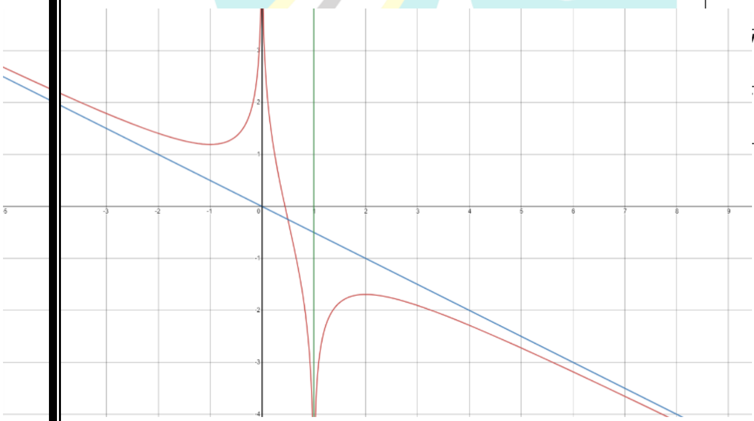
أو $\frac{x-1}{x}=-1$ و منه $x-1=-x$ و منه $x=$

1

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)-y_d$	$+$	$\Vert$ $+$	0	$-$ $\Vert$	$-$
الوضع النسبي	c فوق المقارب	$\Vert$		$\Vert$	cتحت المقارب

و النقطة $A(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ نقطة مشتركة

$$y=-\frac{x}{2}$$



فكرة هامة : مماس مشترك

ليكن c_f, c_g الخطين البيانين للتابعين f, g على الترتيب , نقول إن هذين الخطين يقبلان

مماساً مشتركاً عند النقطة $x = a$ إذا تحقق الشرطان

الشرط الأول $f(a) = g(a)$

الشرط الثاني $f'(a) = g'(a)$

مثال : ليكن لدينا التابعين

$$f(x) = \ln(x+1) \ , g(x) = \frac{x}{x+1}$$

أثبت أن التابعين السابقين يقبلان مماساً مشتركاً عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

الحل : الشرط الأول $f(0) = \ln(1) = 0$

$g(0) = 0$

إذن $f(0) = g(0)$ محقق

الشرط الثاني :

$f'(0) = 1 \quad g'(0) = 1$

$f'(0) = g'(0)$محقق

فالتابعان يقبلان مماساً مشتركاً و معادلته

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 1(x-0) + 0$$
$$y = x$$

مسألة : ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

①احسب نهايات التابع عند أطراف مجال تعريفه و عين ما له من مقاربات

②ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

③لتكن M_1, M_2, M_3, M_4 النقاط المعرفة كما يلي:

1- النقطة M_1 تقاطع C مع محور الفواصل

2- النقطة M_2 نقطة من C مماسه عندها يمر بمبدأ الإحداثيات

3- النقطة M_3 نقطة من C مماسه منها يوازي محور الفواصل

4- النقطة M_4 نقطة من C ينعدم فيها المشتق الثاني f''

a- احسب فواصل هذه النقاط

b- أثبت أن تلك الفواصل تمثل حدود متعاقبة لمتتالية هندسية , عين أساسها و احسب نهاياتها .

الحل :

① $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$x = 0$مقارب شاقولي في جوار $-\infty$ وC يقع على يمين مقاربه

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

② اشتقاقي f على $]0,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-1-lnx}{x^2}=-\frac{lnx}{x^2}$$

$$f'(x)=0$$
$$lnx=0$$
$$x=1$$

$$f(1)=1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $+++$	0	$---$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$ $\nearrow$	1	$\searrow$ 0

③ تعيين فاصلة M_1:

عند تقاطع C مع محور الفواصل تكون $y=0$ إذن: $f(x)=0$

$$\frac{1+lnx}{x}=0$$
$$1+lnx=0$$
$$lnx=-1$$
$$\boxed{x=e^{-1}}$$

تعيين فاصلة M_2 :

بما أن المماس عند M_2 يمر من مبدأ الإحداثيات فمعادلته لها الشكل :

$$y=mx$$

و يكون $f'(x_{M_2})=m$ نعوض في المشتق :

$$-\frac{\ln(x_{M_2})}{x_{M_2}^2}=m\ ...(1)$$

من جهة أخرى المماس يمر من M_2 و يمر من المبدأ فإذن ميله يُحسب من العلاقة :

$$m=\frac{y_{M_2}-0}{x_{M_2}-0}=\frac{f(x_{M_2})}{x_{M_2}}$$

$$m=\frac{\frac{1+\ln(x_{M_2})}{x_{M_2}}}{x_{M_2}}=\frac{1+\ln(x_{M_2})}{x_{M_2}^2}..(2)$$

بمقارنة $(1),(2)$:

$$\frac{1+\ln(x_{M_2})}{x_{M_2}^2}=-\frac{\ln(x_{M_2})}{x_{M_2}^2}$$
$$1+\ln(x_{M_2})=-\ln(x_{M_2})$$
$$2\ln(x_{M_2})=-1$$
$$\ln(x_{M_2})=-\frac{1}{2}$$
$$\boxed{x_{M_2}=e^{-\frac{1}{2}}}$$

تعيين فاصلة M_3 :

بما أن المماس عند M_3 يوازي محور الفواصل (أفقي) فالمشتق عند M_3 معدوم

إذن نحن نبحث عن الفاصلة التي تعدم المشتق : و من الواضح من جدول التغيرات أن:

$$f'(x) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x = 1}$$

تعيين فاصلة M_4 : نحسب المشتق الثاني :

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$
$$= -\frac{\frac{1}{x}x^2 - 2xln(x)}{x^4}$$
$$= -\frac{x - 2xlnx}{x^4}$$
$$= -\frac{x(1 - 2lnx)}{x^4}$$
$$= -\frac{1 - 2lnx}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow$$
$$-(1 - 2lnx) = 0$$
$$1 - 2lnx = 0$$
$$lnx = \frac{1}{2}$$
$$\boxed{x = e^{\frac{1}{2}}}$$

و بالتالي فواصل النقاط M_1, M_2, M_3, M_4 هي على الترتيب :

$$x_1 = e^{-1} \;, x_2 = e^{-\frac{1}{2}} \;, x_3 = 1 \;, x_4 = e^{\frac{1}{2}}$$

لإثبات أنها حدود متعاقبة من متتالية هندسية نلاحظ أن :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-1}} = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{x_3}{x^2} = \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}} = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{x_4}{x_3} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{1} = e^{\frac{1}{2}}$$

فهي تمثل أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها $q = e^{\frac{1}{2}}$ و أن $q > 1$ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

و المتتالية متباعدة .

مسألة : (مسألة وجود)

أيوجد عددان حقيقيان موجبان تماماً و مختلفان بحيث $\frac{lna}{lnb} = \frac{a}{b}$

الحل :

إن إثبات التناسب السابق يكافئ إثبات وجود عددين موجبين تماماً و مختلفين يحققان أن:

$$\frac{lna}{a} = \frac{lnb}{b}$$

لنعرف التابع f على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل :

$$f(x) = \frac{lnx}{x}$$

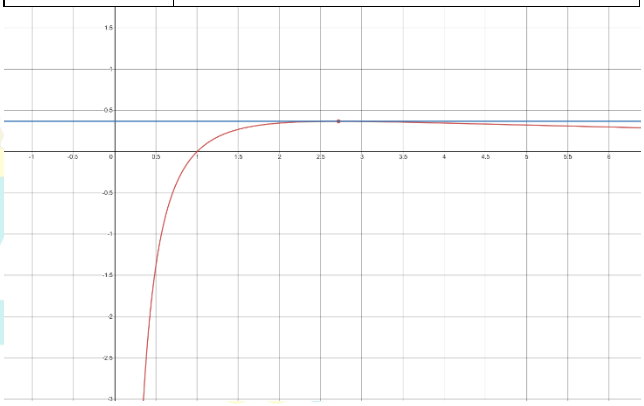
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad , \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$$
$$f'(x)=0\Longrightarrow lnx=1\Longrightarrow x=e$$
$$f(e)=\frac{1}{e}$$

فجدول التغيرات :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



نلاحظ أنه أياً تكن $m\in]0,\frac{1}{e}[$ فإن للمعادلة

$$f(x)=m$$

حلان مختلفان نفرض أنهما a,b وبالتالي

يتحقق أن $f(a)=f(b)=m$

$$\frac{lna}{a}=\frac{lnb}{b}$$

أو $\frac{a}{b}=\frac{lna}{lnb}$ و هو المطلوب .

مسألة : نفترض وجود عددين حقيقين

موجبين تماماً a,b يحققان أن :

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{lna+lnb}{2}$$

احسب $\frac{a}{b}$

الحل :

لدينا : $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{lna+lnb}{2}$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln(ab)$$
$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\ln(\sqrt{ab})$$
$$\frac{a+b}{3}=\sqrt{ab}$$
$$a+b=3\sqrt{ab}$$

نربع : $a^2+2ab+b^2=9ab$

$$a^2-7ab+b^2=0$$

لنفرض أن $\frac{a}{b}=k$ و بالتالي $a=kb$, نعوض

$$k^2b^2-7kb^2+b^2=0$$
$$b^2(k^2-7k+1)=0$$

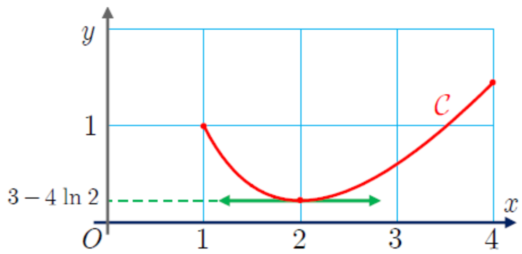
و بملاحظة أن $b\neq 0$:

$$k^2-7k+1=0$$
$$\Delta=49-4=45$$
$$\sqrt{\Delta}=3\sqrt{5}$$
$$k_1=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\quad ,k_2=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

و بالتالي إن النسبة $\frac{a}{b}$ لها أحد القيمتين k_1,k_2

قدماً نحو الأمام:

المسألة الأولى :



في الشكل السابق : الخط البياني للتابع المعرف على المجال $I = [1,4]$ وفق $f(x) = ax + b + clnx$

1- أثبت أن f اشتقاقي على I ثم احسب مشتقه

2- مستفيداً من المعلومات في الشكل جد الأعداد a, b, c

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

المسألة الثانية :

لتكن a وb أعداد حقيقية و ليكن التابع f المعرف على R_+^* وفق : $f(x) = ax + b + \frac{1}{x} lnx$

النقطة $A(1,0)$ نقطة من الخط البياني C للتابع f . و المماس للخط C عند النقطة A يوازي المستقيم الذي معادلته $y = 3x + 2$.

جد العددين a, b .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

المسألة الثالثة :

نتأمل التابع المعرف على R_+^* وفق :

$$f(x)=\begin{cases} x^2(1-lnx) & : x>0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$$

احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ و استنتج أن f اشتقاقي من اليمين عند الصفر

ثم اكتب معادلة نصف المماس لخطه البياني عند الصفر من اليمين

المسألة الرابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

ادرس تغيرات f و جد ماله من مقاربات و ارسم خطه البياني .

تابع مساعد

المسألة الأولى :

ادرس تغيرات التابع

$f(x) = (x+1)lnx$ و ارسم خطه البياني

المسألة الثانية :

وظيفة $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$

مسألة (دورة 2022)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\ln x} & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$$

1- أثبت أن f مستمر عند الصفر

2- ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليمين و فسّر النتيجة هندسياً

3- بين أن الخط C يقبل مقارباً أفقياً عند $+\infty$ جد معادلته

4- اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها 1 و استعمل التقريب التآلفي المحلي في إيجاد قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$