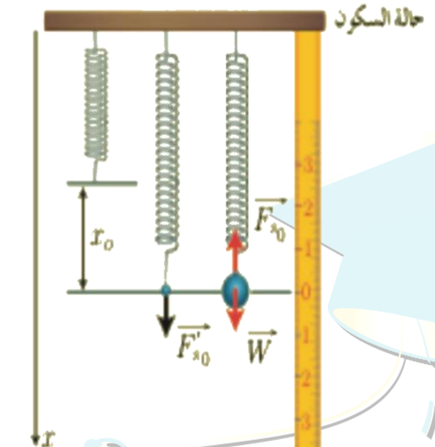
الدرس الأول
الحركة التوافقية البسيطة في النواس المرن

النواس المرن : هو عبارة عن جسم صلب كتلته (m) معلق بنهاية نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته (k) ، يهتز فيه الجسم بين وضعين أعظميين طرفيين $(\pm x_{max})$ مروراً بوضع التوازن (مركز الاهتزاز $x = 0$)

سؤال نظري **-1-** **برهن في النواس المرن أن محصلة القوى المؤثرة في الجسم المعلق إلى النابض هي قوة ارجاع تتناسب شدتها طرداً مع المطال؟** دورة 2016 ثانية



جملة المقارنة : خارجية ، **الجملة المدروسة:** (جسم صلب – نابض)

- **حالة السكون:** نعلق الجسم بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة فيستطيل استطالة سكونية x_0 فيتوازن الجسم (يبقى ساكناً) في النقطة 0 (وضع التوازن) تحت تأثير القوتين السابقتين

يؤثر في مركز عطالة الجسم : قوة ثقل الجسم $\vec{w}$ ، $\overrightarrow{F_{s_0}}$: قوة توتر النابض

$$\xrightarrow{\text{الجسم ساكن}} \sum \vec{F} = \vec{0} \xrightarrow{\text{نعوض القوى}} \vec{w} + \overrightarrow{F_{s_0}} = \vec{0}$$

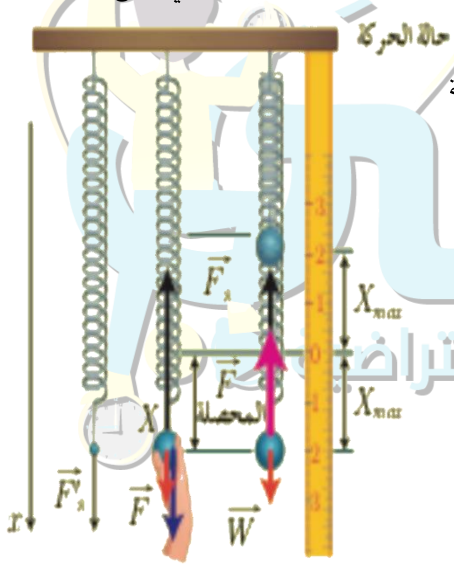
بالإسقاط على محور xx' نحو الأسفل نجد : $w - F_{s_0} = 0$

$$\Rightarrow \quad w = F_{s_0} \dots\dots\dots (*)$$

يؤثر على النابض : قوة توتر النابض $\overrightarrow{F'_{s_0}}$ التي تسبب له الاستطالة x_0

ولكن لنفس النابض $F'_{s_0} = F_{s_0} = kx_0$ بالتعويض في $(*)$ نجد: $\boxed{w = kx_0} \dots\dots\dots (1)$

- **حالة الحركة:** نحرك (نزيح) الجسم شاقولياً نحو الأسفل بمقدار $\bar{x}$ ونتركه ليقوم بحركة اهتزازية إلى جانبي وضع التوازن



يؤثر في مركز عطالة الجسم : قوة ثقل الجسم $\vec{w}$ ، $\overrightarrow{F_s}$: قوة توتر النابض

فيخضع الجسم لتأثير قوتين : قوة توتر النابض $F_s = k(x_0 + \bar{x})$, قوة ثقل الجسم $\vec{w}$ ، ويؤثر في نهاية النابض قوة $\overrightarrow{F'_s} = \overrightarrow{F_s}$

$$\xrightarrow{\text{الجسم متحرك نطبق قانون نيوتن الثاني}} \sum \vec{F} = m\,\vec{a} \xrightarrow{\text{نعوض القوى}} \vec{w} + \overrightarrow{F_s} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على محور xx' نحو الأسفل نجد : $w - F_s = m\,\bar{a} \dots\dots\dots (**)$

يؤثر على النابض : قوة توتر النابض $\overrightarrow{F'_s}$ التي تسبب له الاستطالة $(x_0 + \bar{x})$

ولكن لنفس النابض $F'_s = F_s = k(x_0 + \bar{x})$ بالتعويض في $(**)$ نجد :

$$w - k(x_0 + \bar{x}) = m\,\bar{a} \xrightarrow{\text{ننشر}(-k)\text{ على القوس و من}(1)\text{ نعوض } w}$$

$$kx_0 - kx_0 - k\bar{x} = m\,\bar{a}$$

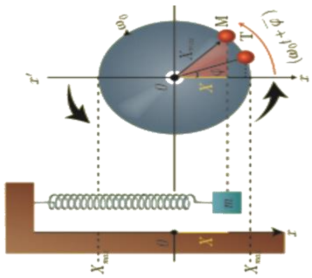
$$-k\bar{x} = m\,\bar{a}$$

$$-k\bar{x} = \sum \bar{F} = \bar{F}$$

$\boxed{\bar{F} = -k\bar{x}}$ إن محصلة القوى في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة ارجاع تعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً (0) وتتناسب شدتها طرداً مع المطال $\bar{x}$، وتعاكسه بالإشارة .

تطبيق: **اكتب عناصر قوة الإرجاع**

- نقطة التأثير : مركز عطالة الجسم الصلب
- الحامل : القطعة المستقيمة التي يرسمها مركز العطالة
- الجهة : نحو مركز التوازن 0 دوماً
- الشدة : $\boxed{\bar{F} = |-k\bar{x}|}$



العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة والحركة التوافقية البسيطة (تمثيل فرينل)

- الطور الابتدائي للحركة $\bar{\varphi}$ هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{xx'}$ في اللحظة $t = 0$.
- طور الحركة $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{xx'}$ في اللحظة t.
- سعة الحركة X_{max} هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الثابتة عند الدوران.
- النبض الخاص للحركة ω_0 يقابل السرعة الزاوية الثابتة التي تدور بها النقطة M.
- مطال الحركة $\bar{x}$ هو مسقط الشعاع $\overrightarrow{OM}$ على المحور $\overrightarrow{xx'}$ وهو متغير بتغير الزمن.
- النسبة: $cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = \frac{\bar{x}}{X_{max}}$
- التابع الزمني لحركة المسقط تابع جيبي من الشكل: $\bar{x} = X_{max} cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$
لذلك تسمى الحركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة).

التابع الزمني للمطال : $\bar{X} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

دلالات الرموز :

• $\bar{X}$: المطال في اللحظة ويقدر بالمتر m
• X_{max} : المطال الأعظمي (سعة الاهتزاز) وتقدر بالمتر m
• ω_0 : النبض الخاص للحركة ويقدر $rad.s^{-1}$
• $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$:طور الحركة في اللحظة t
• $\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي في اللحظة $t = 0$ ويقدر بالراديان rad
• ندعو كل من $\bar{\varphi}$, ω_0 , X_{max} ثوابت الحركة

سؤال نظري -2- انطلاقاً من العلاقة ($\bar{F} = m\bar{a} = -k\bar{x}$) استنتج طبيعة الحركة في النواس المرن (الهزازة التوافقية البسيطة) ومن ثم استنتج الدور الخاص [دورة 2013 - 2019 الأولى 2015 الثانية]

$$\bar{F} = m\bar{a} = -k\bar{x}$$

لكن: $\bar{a} = (\bar{x})''_t$

نعوض فنجد: $m\,(\bar{x})''_t = -k\bar{x}$

$$(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\bar{x} \ldots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نشتق مرتين: $\bar{v} = (x)'_t = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$(x)''_t = -X_{max}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 \bar{x} \ldots (2)$$

بمطابقة 1 مع 2 نجد: النبض الخاص للاهتزاز $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- طبيعة الحركة: جيبية انسحابية بشرط $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ ، وهذا محقق لأن m و k موجبان

إن حركة النواس المرن هي حركة جيبية انسحابية الشكل العام للتابع الزمني للمطال (الموضع) يعطى بالعلاقة :

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

- استنتاج الدور: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \xRightarrow{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}} T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \xRightarrow{\text{نضرب بمقلوب المقام}}$

علاقة الدور الخاص للنواس المرن غير المتخامد $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

من هذه العلاقة نستنتج أن الدور الخاص :

- ✓ لا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max} ولا بتسارع الجاذبية الأرضية g
- ✓ يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز m
- ✓ يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k

تطبيق (1) : نواس مرن ثابت صلابته $(k=50Nm^{-1})$ ويحمل جسماً صلباً كتلته $(m=2Kg)$ والمطلوب :

1- أحسب الدور الخاص للنواس و تواتر الاهتزاز ونبضه الخاص

2- إذا استبدلنا الكتلة المعلقة بكتلة أخرى $(m'=9m)$, أحسب الدور الخاص الجديد

3- أحسب قوة الإرجاع في نقطة مطالها $(2cm)$

.1 باعتبار أن $\pi^2 = 10 \Longleftarrow \pi = \sqrt{10}$

حساب الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{50}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{25}} \Longrightarrow \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{5}\ sec}$$

حساب التواتر: وهو مقلوب الدور

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{5}{2\pi} Hz$$

حساب النبض الخاص:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5\ rad.s^{-1}$$

.2 الفرض : $m' = 9\,m$

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}}$$

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{9m}{k}}$$

$$T_0 = 3\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)$$

$$T'_0 = 3T_0 \xrightarrow{T_0=\frac{2\pi}{5}sec} T'_0 = 3\times\frac{2\pi}{5} \Longrightarrow \boxed{T'_0 = \frac{6\pi}{5}\ sec}$$

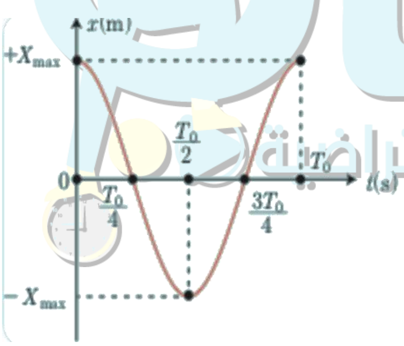
.3 $x = 2cm = 2\times10^{-2}m$

$$\bar{F} = -k\bar{x}$$

$$F = -50\times2\times10^{-2} = -100\times10^{-2} \Longrightarrow \boxed{F = -1\,N}$$

سؤال نظري -3- **اكتب الشكل العام لتابع المطال موضحاً دلالات الرموز والواحدات الدولية، وفي شروط بدء مناسبة حيث $t = 0$ نفرض $\bar{x} = +X_{max}$ استنتج الشكل المختزل لتابع المطال ، ثم بيّن متى يكون المطال أعظمي ومتى يكون معدوم موضحاً بالرسم البياني لتابع المطال خلال دور واحد؛**

- **الشكل العام لتابع المطال :** $\bar{x} = x_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$



- $\bar{x}$: المطال أو (موضع الجسم) في اللحظة ويقدر بالمتر m
- X_{max} : سعة الحركة أو (المطال الأعظمي) وتقدر بالمتر m
- ω_0 : النبض الخاص للحركة ويقدر $rad.s^{-1}$
- $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$: طور الحركة في اللحظة t
- $\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي في اللحظة $t = 0$ ويقدر بالراديان
- ندعو كال من X_{max} , ω_0 , $\bar{\varphi}$ ثوابت الحركة

- من شروط البدء المعطاة أن الجسم كان في مطاله الأعظمي الموجب $x = +x_{max}$ في اللحظة $t = 0$

نعوض الشروط في الشكل العام لتابع المطال: $\bar{x} = x_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$x_{max} = x_{max}\cos\bar{\varphi}$$

$$\cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

- الشكل المختزل لتابع المطال (أبسط شكل): $\boxed{\bar{x} = x_{max}\cos\omega_0 t}$

- تابع المطال بدلالة الدور : $\boxed{\bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}t} \Leftarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

ملاحظة : لتحديد مطال الجسم (موضع الجسم x) في لحظة t معينة : نعوض اللحظة t المعطاة في تابع المطال $\boxed{\bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}t}$

مثال : حدد مطال الجسم في كل من اللحظات التالية : $\left(t = 0\,,\ t = \frac{T_0}{2}\ ,\ t = \frac{3T_0}{2}\ ,\ t = \frac{3T_0}{4}\right)$

الحل :

✓ الجسم في المطال الأعظمي الموجب $\boxed{\bar{x} = +x_{max}} \Leftarrow$ $t = 0 \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}(0) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos(0) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}(+1) \Rightarrow \boxed{\bar{x} = +x_{max}}$

✓ الجسم في المطال الأعظمي السالب $t = \frac{T_0}{2} \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{T_0}{2}\right) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos(\pi) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}(-1) \Rightarrow \boxed{\bar{x} = -x_{max}}$

✓ الجسم في المطال الأعظمي السالب $t = \frac{3T_0}{2} \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{3T_0}{2}\right) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos(3\pi) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}(-1) \Rightarrow \boxed{\bar{x} = -x_{max}}$

✓ الجسم في مركز الاهتزاز $t = \frac{3T_0}{4} \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos\frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{3T_0}{4}\right) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \bar{x} = x_{max}(0) \Rightarrow \boxed{x = 0}$

✓ واعتماداً على الملاحظة السابقة في ما يلي جدول لتغيرات المطال بدلالة الزمن خلال دورين كاملين :

اللحظة t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{2T_0}{4} = \frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	$\frac{4T_0}{4} = T_0$	$\frac{5T_0}{4}$	$\frac{6T_0}{4} = \frac{3T_0}{2}$	$\frac{7T_0}{4}$	$\frac{8T_0}{4} = 2T_0$
المطال $\bar{x}$	$+x_{max}$	0	$-x_{max}$	0	$+x_{max}$	0	$-x_{max}$	0	$+x_{max}$

- المطال أعظمي (طويلة) في الوضعين الطرفيين $x = |\pm x_{max}|$, ومعدوم في مركز الاهتزاز (وضع التوازن) $x = 0$

تطبيق (2) : نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته (k) نعلق في نهايته كتلة (m=1kg) فتهتز بدور $(T_0 = 2\ s)$ والمطلوب .

1- أحسب ثابت صلابة النابض

2- أحسب الاستطالة السكونية

3- إذا استبدلنا بالنابض نابض آخر ثابت صلابته $(k' = 2k)$, *أحسب الدور الجديد* (T'_0)

4- نشد الكتلة نحو الأسفل ونتركها بدون سرعة ابتدائية في المطال الاعظمي الموجب $(t = 0$ و $\bar{x} = 10cm)$ استنتج التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام مبيّناً قيم ثوابته (قبل استبدال النابض). باعتبار $(\pi^2 = 10)$

.1 يحسب k من : $k = m.\omega_0^2$ أو من علاقة الدور بعد تربيعها

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\overset{\text{نربع}}{\Longrightarrow} T_0^2 = 4\pi^2\frac{m}{k} \overset{\text{نعزل } k}{\Longrightarrow} k = 4\pi^2\frac{m}{T_0^2}$$

$$k = 4 \times 10 \times \frac{1}{4} \Longrightarrow \boxed{k = 10\ N.m^{-1}}$$

.2 $k\,x_0 = m.g$

$$x_0 = \frac{mg}{k} \underset{\text{نعوض}}{\Longrightarrow} x_0 = \frac{1\times10}{10}$$

$$\boxed{x_0 = 1(m)}$$

.3 $k' = 2k$

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

$$T'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right) \Rightarrow T'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}T_0$$

$$\boxed{\overset{\text{نعوض}}{\Longrightarrow} T'_0 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}sec}$$

.4 $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$$

ترك دون سرعة ابتدائية: $x = X_{max} = 10\ cm$

$$x = X_{max} = 10 \times 10^{-2} = 10^{-1}m$$

- تعيين $\bar{\varphi}$ من شروط البدء:

$x = +X_{max}$ (مطال أعظمي موجب)، $t = 0$

$$+X_{max} = X_{max}\cos\bar{\varphi}$$

$$\cos\bar{\varphi} = 1 \Longrightarrow \varphi = 0$$

$$\boxed{\bar{x} = 10^{-1}\cos\pi t \quad (m)}$$

تطبيق (3): **هزازة جيبية انسحابية تحمل جسم كتلته (m=100g) نسحب الجسم نحو الأسفل ونتركه بدون سرعة ابتدائية فيرسم قطعة مستقيمة طولها (L=10cm) بتواتر (f₀=5Hz)** باعتبار $(\pi^2 = 10)$ والمطلوب :

-1 استنتج التابع الزمني انطلاقاً من شكله العام علماً أن الجسم كان في المطال الأعظمي الموجب ساكن آنياً لحظة بدء الزمن

-2 أحسب ثابت صلابة النابض

من المعطيات: $m = 100.10^{-3} = 10^{-1}kg$

$f_0 = 5Hz$

تعيين X_{max} : طول القطعة $L = 10cm = 2X_{max}$

$\Rightarrow X_{max} = \frac{10}{2} = 5\ cm$

$\boxed{X_{max} = 5 \times 10^{-2} m}$

.1 $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega t + \bar{\varphi})$

$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 5 = 10\pi\ rad.s^{-1}$

- تعيين $\bar{\varphi}$ من شروط البدء:

$x = +X_{max}$ (مطال أعظمي موجب)، $t = 0$

$+X_{max} = X_{max}\cos\bar{\varphi}$

$\cos\bar{\varphi} = 1 \Longrightarrow \varphi = 0$

$\boxed{\bar{x} = 5 \times 10^{-2}\cos 10\pi t \quad (m)}$

.2 $k = m.\omega_0^2$

$k = 10^{-1} \times (10\pi)^2 \Longrightarrow 10^{-1}.100.\pi^2$

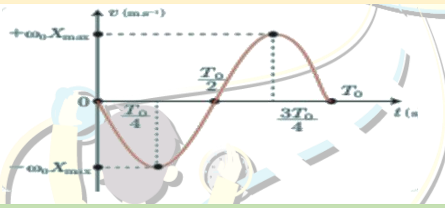
$\boxed{k = 100\ N.m^{-1}}$

سؤال نظري -4-

انطلاقاً من الشكل لتابع المطال $\bar{x} = x_{max}\cos\omega_0 t$ استنتج تابع السرعة , وبيّن متى تكون السرعة أعظمية ومتى تكون معدومة موضحاً بالرسم البياني لتابع السرعة خلال دور واحد: [دورة 2015 الأولى ـ 2017 الأولى]

- **تابع السرعة : هو المشتق الأول لتابع المطال بالنسبة للزمن , نشتق فنجد**

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t$$
$$\bar{v} = -\omega_0 x_{max}\sin\omega_0 t$$
$$\bar{v} = -\omega_0 x_{max}\sin\frac{2\pi}{T_0}t$$



ملاحظة :

- لتحديد سرعة الجسم في لحظة t معينة : **نعوض اللحظة t المعطاة في تابع السرعة** $\boxed{\bar{v} = -\omega_0 x_{max}\sin\frac{2\pi}{T_0}t}$
- لتحديد اتجاه حركة الجسم حسب اشارة سرعته فإذا كانت السرعة سالبة فحركة الجسم في الاتجاه السالب أي (من $+x_{max}$ إلى $-x_{max}$) والعكس صحيح

مثال : حدد سرعة وجهة حركة الجسم في كل من اللحظات التالية : $\left(t = 0\ ,\ t = \frac{T_0}{2}\ ,\ t = \frac{3T_0}{2}\ ,\ t = \frac{3T_0}{4}\right)$

✓ **الحل : اعتماداً على الملاحظة السابقة وفي مايلي جدول لتغيرات السرعة بدلالة الزمن خلال دورين كاملين :**

اللحظة t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{2T_0}{4} = \frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	$\frac{4T_0}{4} = T_0$	$\frac{5T_0}{4}$	$\frac{6T_0}{4} = \frac{3T_0}{2}$	$\frac{7T_0}{4}$	$\frac{8T_0}{4} = 2T_0$
السرعة $\bar{v}$	0	$-\omega_0 x_{max}$	0	$+\omega_0 x_{max}$	0	$-\omega_0 x_{max}$	0	$+\omega_0 x_{max}$	0
اتجاه الحركة	معدومة	اتجاه سالب	معدومة	اتجاه موجب	معدومة	اتجاه سالب	معدومة	اتجاه موجب	معدومة

- السرعة عظمى : $\sin\omega_0 t = \pm 1 \Rightarrow \cos\omega_0 t = 0$

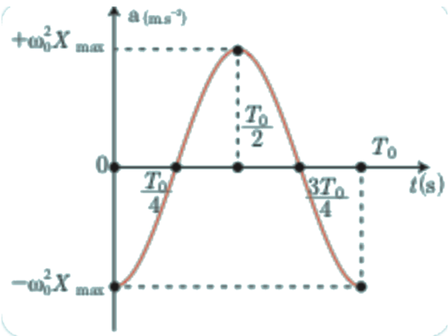
$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow v_{max} = |\pm\omega_0 x_{max}|$ عظمى طويلة

أي تكون السرعة عظمى (طويلة) عند المرور بوضع التوازن (0)

- السرعة معدومة : $v = 0 \Rightarrow \sin\omega_0 t = 0 \Rightarrow \cos\omega_0 t = \pm 1 \Longrightarrow x = \pm x_{max}$

أي تنعدم السرعة عند المرور في الوضعين الطرفيين (المطالين الأعظميين)

سؤال نظري - 5- انطلاقاً من الشكل لتابع المطال $\bar{x} = x_{max} \cos \omega_0 t$ استنتج تابع التسارع , وبيّن متى يكون التسارع أعظمي ومتى يكون معدوم , موضحاً بالرسم البياني لتابع التسارع خلال دور واحد: دورة 2014, 2018 الثانية



- تابع التسارع: هو المشتق الأول لتابع السرعة أو المشتق الثاني لتابع المطال

$$\bar{a} = (\bar{v})'_t = (\bar{x})''_t$$
$$\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 x_{max} \sin \omega_0 t$$
$$\bar{a} = (\bar{v})'_t = -\omega_0^2 x_{max} \cos \omega_0 t$$
$$\bar{a} = -\omega_0^2 x_{max} \cos \frac{2\pi}{T_0} t$$

نلاحظ: التسارع غير ثابت تتغير قيمته بتغيير المطال **فالحركة متغيرة فقط**

$$\bar{a} = -\omega_0^2 \bar{x} \neq const$$

أي يتناسب التسارع طرداً مع المطال $\bar{x}$ ويعاكسه اشارة ويتجه دوماً نحو مركز الاهتزاز

ملاحظة : لتحديد تسارع الجسم في لحظة t معينة : نعوض اللحظة t المعطاة في تابع التسارع $\boxed{\bar{a} = -\omega_0^2 x_{max} \cos \frac{2\pi}{T_0} t}$

مثال : حدد تسارع الجسم في كل من اللحظات التالية : $\left(t = 0 \ , \ t = \frac{T_0}{2} \ , \ t = \frac{3T_0}{2} \ , \ t = \frac{3T_0}{4}\right)$

✓ **الحل : اعتماداً على الملاحظة السابقة وفي مايلي جدول لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دورين كاملين :**

اللحظة t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{2T_0}{4} = \frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	$\frac{4T_0}{4} = T_0$	$\frac{5T_0}{4}$	$\frac{6T_0}{4} = \frac{3T_0}{2}$	$\frac{7T_0}{4}$	$\frac{8T_0}{4} = 2T_0$
التسارع $\bar{a}$	$-\omega_0^2 x_{max}$	0	$+\omega_0^2 x_{max}$	0	$-\omega_0^2 x_{max}$	0	$+\omega_0^2 x_{max}$	0	$-\omega_0^2 x_{max}$

- يكون التسارع أعظمي (طويلة) : عند المرور في الوضعين الطرفيين $x = \pm x_{max} \Rightarrow a_{max} = |\pm\omega_0^2 x_{max}|$
- يكون التسارع معدوم : في وضع التوازن (مركز التوازن) $x = 0 \Rightarrow a = 0$

تطبيق (4): **هزازة توافقية بسيطة كانت في مبدأ الزمن في المطال الأعظمي السالب وسعة الاهتزاز (10cm) ساكنة آنياً فاهتزت بدور خاص (8s)** باعتبار أن $(\pi^2 = 10)$ ، **والمطلوب :**

1- استنتج التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام

2- استنتج تابع السرعة وتابع التسارع .

من المعطيات: سعة الاهتزاز $X_{max} = 10.10^{-2} = 10^{-1} m$

الدور الخاص $T_0 = 8(sec)$

.1 $\bar{x} = X_{max} \cos(\omega t + \bar{\varphi})$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} rad.s^{-1}$$

- سعة الاهتزاز : $X_{max} = 0.1\ m$

تعيين $\bar{\varphi}$ من شروط البدء: $x = -X_{max}$، $t = 0$

$$-X_{max} = X_{max} \cos\bar{\varphi}$$
$$\cos\bar{\varphi} = -1 \Rightarrow \varphi = \pi\ rad$$
$$\boxed{\bar{x} = 0.1 \cos\left(\frac{\pi}{4} t + \pi\right) \quad (m)}$$

.2 تابع السرعة هو مشتق تابع المطال بالنسبة للزمن لمرة واحد

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t \Rightarrow \bar{v} = -\frac{\pi}{4} \times 0.1 \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \pi\right)$$
$$\boxed{\bar{v} = -\frac{\pi}{40} \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \pi\right) \quad m.s^{-1}}$$

تابع التسارع هو المشتق الثاني للمطال أو المشتق الأول للسرعة بالنسبة للزمن.

$$\bar{a} = (\bar{v})'_t = -\frac{\pi}{40} \times \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} t + \pi\right)$$
$$\boxed{\bar{a} = -\frac{1}{16} \cos\left(\frac{\pi}{4} t + \pi\right) \quad (m.s^{-2})}$$

تطبيق (5): نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته (k) نعلق في نهايته جسم كتلته (m=1kg) نشدّه نحو الأسفل فيكون التابع الزمني لمطال حركته $\bar{x} = 0.4\cos 20t$, والمطلوب :

1- أوجد سعة الاهتزاز ودور الحركة وتواترها
2- أوجد ثابت صلابة النابض و الاستطالة السكونية
3- أوجد تابع السرعة وتابع التسارع
4- حدد موضع الجسم لحظة بدء الزمن
5- حدد موضع الجسم في لحظة $(t = \frac{\pi}{60}s)$

من المعطيات: $\bar{x} = 0.4\cos(20t + 0)$ قارن مع الشكل العام:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

.1

- سعة الاهتزاز: $x_{max} = 0.4\ m$
النبض الخاص : $\omega_0 = 20 rad.s^{-1}$
- دور الحركة: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}sec$
- التواتر هو مقلوب الدور: $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{10}{\pi}\ Hz$

.2

- ثابت الصلابة: $k = m.\omega_0^2 = 1.(20)^2 = 400\ N.m^{-1}$
- الاستطالة السكونية : $x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{1\times10}{400} = \frac{1}{40}m$

.3

- تابع السرعة: $\bar{v} = (\bar{x})'_t$
$\bar{v} = -0.4\times 20\sin 20t$
$\boxed{\bar{v} = -8\sin 20t\ \ m.s^{-1}}$
- تابع التسارع: $\bar{a} = (\bar{v})'_t$
$\bar{a} = -8\times 20\cos 20t$
$\boxed{\bar{a} = -160\cos 20t\ \ m.s^{-2}}$

.4 لتحديد موضع جسم في أي لحظة (x) يجب تعويض الزمن بقيمته في تابع المطال ، لحظة بدء الزمن $t = 0$

$$x = 0.4\cos 20(0) \xRightarrow{\cos(0)=1} \boxed{x = 0.4\ m}$$

.5 $t = \frac{\pi}{60}sec$

$$x = 0.4\cos\left(20\times\frac{\pi}{60}\right) \xRightarrow{\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}} x = 0.4\times\frac{1}{2} \to \boxed{x = 0.2\ m}$$

سؤال نظري -6-

استنتج علاقة الطاقة الميكانيكية في الهزازة التوافقية البسيطة (النواس المرن) , وبيّن شكل الطاقة في كل من الوضعين الطرفيين ووضع التوازن وبالاقتراب والابتعاد عن كل منهما موضحاً بالرسم البياني [دورة 2016 أولى]

- **الطاقة الميكانيكية (الكلية) (E_{tot}) هي مجموع طاقتين كامنة مرونية وحركية**

$$E_{tot\ ميكانيكية} = E_{k\ حركية} + E_{p\ كامنة}$$

علماً أن: $E_{p\ الطاقة الكامنة المرونية} = \frac{1}{2}kx^2$, $E_{k\ الطاقة الحركية} = \frac{1}{2}mv^2$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

نعوض كل من تابع المطال وتابع السرعة في علاقة الطاقة E_{tot}

تابع المطال : $\bar{x} = x_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

تابع السرعة : $\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 x_{max}\sin \omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2}kX_{max}^2\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

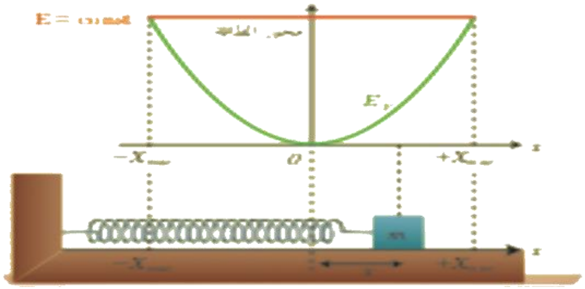
ولكن: $k = m\omega_0^2$ نعوض ونخرج عامل مشترك $\sin^2x+\cos^2x=1$

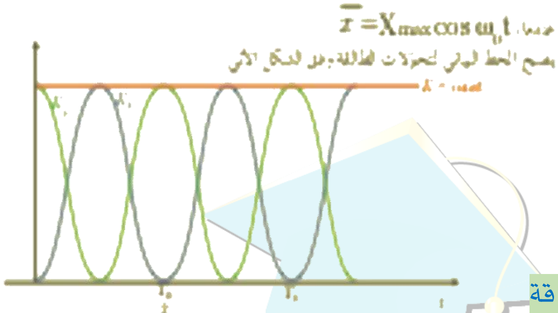
$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2\left[\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})\right]$$

$$\sin^2x+\cos^2x=1\ \boxed{\Rightarrow E_{tot} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = const}$$

نلاحظ أن الطاقة الميكانيكية ثابتة وتتناسب طرداً مع مربع سعة الاهتزاز

- **مناقشة الطاقة :**





✓ في الوضعين الطرفين :

$$x = x_{max} \to v = 0 \to E_k = 0 \to E_{tot} = E_p$$

✓ عند مرور المتحرك في وضع التوازن :

$$x = 0 \to E_p = 0 \to E_{tot} = E_k$$

✓ باقتراب المتحرك من مركز التوازن :

تزداد v فتزداد E_k وتنقص E_p حتى تنعدم في مركز التوازن 0 وتبقى E_{tot} ثابتة .

✓ **بابتعاد الجسم عن مركز التوازن**

تتناقص v فتنقص E_k وتزداد E_p لتصبح $E_{tot} = E_p$ في الوضعين الطرفين $x = \pm x_{max}$ وتبقى E_{tot} ثابتة.

نلاحظ أنه يحدث أثناء الاهتزاز تبادل من كامنة إلى حركية وبالعكس مع بقاء الطاقة الميكانيكية بإهمال القوى المبددة للطاقة.

تطبيق (6) : **نقطة مادية كتلتها (1kg) تهتز بحركة توافقية بسيطة وبسعة اهتزاز (10cm) وبنبض خاص($\omega_0 = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}$) ولحظة بدء الزمن ($x = +X_{max}$) وباعتبار ($\pi^2 = 10$)** والمطلوب :

1- أحسب الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة
2- أحسب قيمة التسارع لحظة بدء الزمن وشدة قوة الإرجاع حينئذ
3- أحسب الطاقة الحركية للنقطة المادية في نقطة مطالها (0.01m)
4- أحسب الطاقة الحركية في نقطة مطالها ($\frac{x_{max}}{3}$)

من المعطيات : $\omega_0 = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}$ ، $m = 1\ kg$

سعة الاهتزاز: $X_{max} = 10 \times 10^{-2} = 10^{-1}\ m$

.1 $E = \frac{1}{2} k\, X_{max}^2$

نحسب k أولاً: $k = m.\omega_0^2 = 1.\frac{\pi^2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} N.m^{-1}$

$$\mathbf{E}_{tot} = \frac{1}{2} . \frac{5}{2} . 10^{-2}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{tot} = \frac{5}{4} \times 10^{-2}\ J}$$

.2 لحظة بدء الزمن: $t = 0 \Rightarrow x = +X_{max}$

حساب التسارع : $\bar{a} = -\omega_0^2 . x = -\omega_0^2 . X_{max}$

$$\boxed{\bar{a} = -\frac{\pi^2}{4} \times 10^{-1} = -\frac{1}{4}\ m.s^{-2}}$$

حساب شدة قوة الإرجاع: $\bar{F} = |-k\bar{x}|$

$$\bar{F} = \left|-\frac{10}{4} \times 10^{-1}\right| \to \boxed{F = \frac{1}{4} N}$$

.3 $x = 0.01\ m = 1 \times 10^{-2} m$

$$E_k = E_{tot} - E_p = \frac{1}{2} k X_{max} - \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} k (x_{max}^2 - x^2)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \times \frac{10}{4} (100 \times 10^{-4} - 1 \times 10^{-4})$$

$$E_k = \frac{10}{8} (99 \times 10^{-4})$$

$$\boxed{E_k = \frac{99}{8} . 10^{-3} J}$$

.4 $E_k = \frac{1}{2} k (X_{max}^2 - x^2)$

فرضاً: $x = \frac{X_{max}}{3} \Leftarrow E_k = \frac{1}{2} k \left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{9}\right)$

$$E_k = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \left(1 - \frac{1}{9}\right) \to E_k = \left(1 - \frac{1}{9}\right) E_{tot}$$

$$E_k = \frac{8}{9} E_{tot} \to E_k = \frac{8}{9} \times \frac{5}{4} \times 10^{-2}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{9} . 10^{-1} J}$$

تطبيق (7) : اقرأ الخط البياني المجاور وأجب عن الأسئلة الآتية:

1- ماذا يمثل الخط البياني.

2- عين شروط البدء واستنتج التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام.

3- عين زمن مرور الجسم بوضع التوازن للمرة الأولى.

1. يمثل تابع المطال في النواس المرن.

2. من الخط البياني:

في اللحظة $t = 0$ يكون الجسم في $x = +X_{max}$

، $x = +X_{max} = 5cm = 5 \times 10^{-2} v = 0$

استنتاج التابع: $\bar{x} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

حساب T_0 من الخط البياني:

$$T_0 = \frac{4}{2} = 2\ sec \frac{T_0}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$$

تعيين $\bar{\varphi}$ من شروط البدء: عند $t = 0$ يكون الجسم في $x = +X_{max}$

$$+X_{max} = X_{max} cos\bar{\varphi}$$

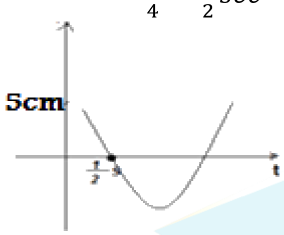
$$cos\bar{\varphi} = +1 \Longrightarrow \varphi = 0$$

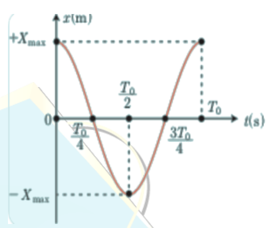
$$\boxed{\bar{x} = 5.10^{-2} \cos(\pi t) \quad (m)}$$

3. زمن المرور الأول: $t = \frac{T_0}{4}$

$$t = \frac{T_0}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} sec$$

- أو فوراً من الرسم البياني: $\frac{T_0}{4} = \frac{1}{2} sec$





نقارن الخط البياني المعطى مع الخط البياني لتابع المطال

سؤال نظري -7-: أثبت صحة العلاقة: $v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$ في الحركة التوافقية البسيطة.

الطريقة الأولى:

$$E_{tot} = E_P + E_k$$

$$\xrightarrow{\text{نعزل } E_k} E_k = E_{tot} - E_P$$

$$\xrightarrow{\text{نعوض قانون كل طاقة}} \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kX_{max}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$\xrightarrow{\text{نخرج عامل مشترك } \frac{1}{2}k} \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} k(X_{max}^2 - x^2)$$

$$\xrightarrow{\text{نختصر } \frac{1}{2}} mv^2 = k(X_{max}^2 - x^2)$$

$$\xrightarrow{\text{نعزل } v^2} v^2 = \frac{k}{m}(X_{max}^2 - x^2)$$

لكن: $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow$

$$v^2 = \omega_0^2 (X_{max}^2 - x^2) \xrightarrow{\text{نجذر الطرفين}}$$

العلاقة الذهبية : $\boxed{v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}}$

من هذه العلاقة نستطيع حساب سرعة حركة جسم عُلم مطاله $\bar{x}$

الطريقة الثانية:

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 + \bar{\varphi}) \Longrightarrow \frac{x^2}{X_{max}^2} = COS^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \Longrightarrow \frac{v^2}{\omega^2 X_{max}^2} = \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نجمع المعادلتين كل طرف إلى طرف نجد:

$$\frac{x^2}{X_{max}^2} + \frac{v^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} = \cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

ولكن : $\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = 1$

$$\frac{x^2}{X_{max}^2} + \frac{v^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} = 1 \xrightarrow{\text{نوحد المقامات}}$$

$$\frac{\omega_0^2 x^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} + \frac{v^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} = 1 \xrightarrow{\text{المقام مشترك}} \frac{\omega_0^2 x^2 + v^2}{\omega_0^2 X_{max}^2} = 1$$

$$\Longrightarrow \omega_0^2 x^2 + v^2 = \omega_0^2 X_{max}^2$$

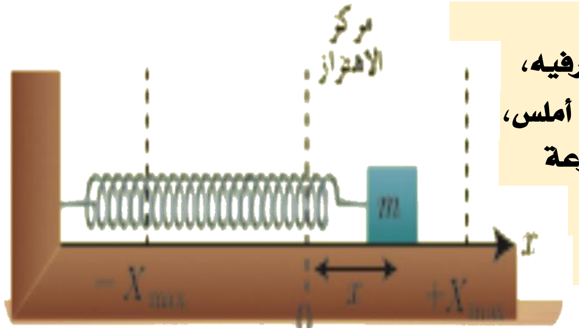
$$\xrightarrow{\text{نعزل } v^2} v^2 = \omega_0^2 X_{max}^2 - \omega_0^2 x^2 \xrightarrow{\text{نخرج عامل مشترك}}$$

$$v^2 = \omega_0^2 (X_{max}^2 - x^2) \xrightarrow{\text{نجذر الطرفين}}$$

$$\boxed{v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}}$$

سؤال نظري -8-

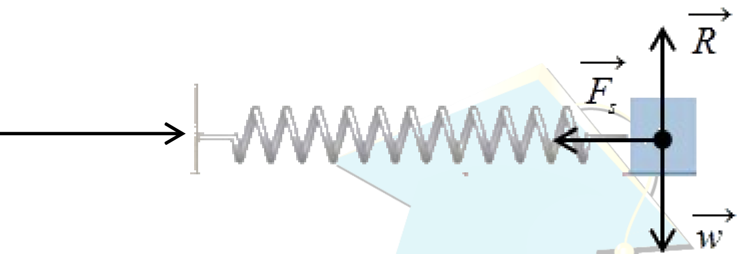
نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k، مثبت من أحد طرفيه، ويربط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرك على سطح أفقي أملس، كما في الشكل المجاور، نشد الجسم مسافة أفقية مناسبة ، ونتركه دون سرعة ابتدائية. المطلوب:



a. **ادرس حركة الجسم، و استنتج التابع الزمني للمطال.**

b. **استنتج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} في كل من الموضعين: A و B $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ و $x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$، ماذا تستنتج؟**

a) دراسة حركة الجسم واستنتاج التابع الزمني للمطال :



جملة المقارنة: خارجية.

الجملة المدروسة: النواس المرن

- يؤثر في مركز عطالة الجسم:

قوة توتر النابض: $\vec{F_s}$ ، قوة الثقل: $\vec{W}$ ، قوة رد فعل السطح: $\vec{R}$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{W} + \vec{R} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور أفقي موجّه كما في الشكل: $-F_s = m\bar{a} \quad (*)$

- تؤثر على النابض : القوة $\vec{F_s}'$ التي تسبّب له الاستطالة x حيث: $F_s' = F_s = k\bar{x}$

بالتعويض في $(*)$ نجد: $-k\bar{x} = m\bar{a}$

بما أن حركة الجسم مستقيمة فالتسارع الناظمي معدوم و التسارع الكلي هو : تسارع مماسي $\bar{a} = \bar{a}_t = (\bar{x})_t''$

$$-k\bar{x} = m(\bar{x})_t''$$

$\boxed{(\bar{x})_t'' = -\left(\frac{k}{m}\right)\bar{x} \ldots\ldots (1)}$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

__للتحقق من صحة الحل:__ نشتق التابع مرتين بالنسبة للزمن نجد: $(\bar{x})_t' = \bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$(\bar{x})_t'' = \bar{a} = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\boxed{(\bar{x})_t'' = \omega_0^2\bar{x} \ldots\ldots (2)}$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد ان: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ومنه: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ وهذا محقق لأنّ k, m موجبان.

حركة الجسم هي **حركة جيبية انسحابية** التابع الزمني للمطال يعطى بالعلاقة: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

b) استنتاج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة : X_{max} $\quad E_{tot} = E_P + E_k \Longrightarrow E_k = E_{tot} - E_p$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2)}$$

$$\bar{x}_A = -\frac{X_{max}}{2} \Longrightarrow E_{k_A} = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2) = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}k\,X_{max}^2\right) = \frac{3}{4}E_{tot}$$

$$\boxed{\bar{x}_A = -\frac{X_{max}}{2} \Longrightarrow E_{k_A} = \frac{3}{4}E_{tot}}$$

$$\bar{x}_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow E_{k_B} = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2) = \frac{1}{2}k\left(X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}k\,X_{max}^2\right) = \frac{1}{2}E_{tot}$$

$$\boxed{\bar{x}_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow E_{k_B} = \frac{1}{2}E_{tot}}$$

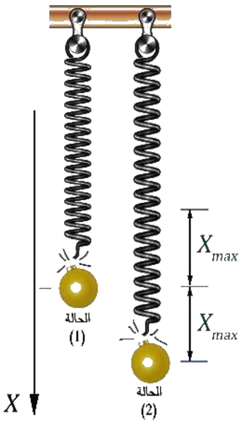
أي أن المطال الذي تتساوى عنده الطاقتين الكامنة المرونية والحركية هو $\bar{x}_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$

__النتيجة:__ تنقص الطاقة الحركية للجسم بازدياد مطاله و بالتالي تزداد طاقته الكامنة.

سؤال نظري -9-

جسم معلق بنابض مرن شاقولي حلقاته متباعدة يهتز بدوره الخاص، ما نوع حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض في كل من الموضعين الآتيين، ولماذا؟

a. مركز الاهتزاز، وهو يتحرك بالاتجاه السالب؟
b. المطال الأعظمي الموجب؟



لحظة انفصال الجسم يخضع لقوة ثقله فقط $\vec{W} = m\vec{g}$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{W} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = \overrightarrow{const}$$

a. **الانفصال في مركز الاهتزاز:** في مركز الاهتزاز تكون سرعة الجسم عظمى أي عند انفصال الجسم في هذا المطال تكون سرعته الابتدائية عظمى أي أن الجسم يُقذف (حالة قذف شاقولي نحو الاعلى لأن الجسم مزود بسرعة ابتدائية و الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.
طورها الاول صعود (متباطئة بانتظام) وطورها الثاني هبوط (متسارعة بانتظام).

b. **الانفصال في المطال الأعظمي الموجب:** في المطالين الأعظميين تنعدم سرعة الجسم أي عند انفصال الجسم في هذا المطال تكون سرعته الابتدائية معدومة أي أنه يسقط سقوطاً حراً .

ملاحظات حل مسائل النواس المرن

1. **الدور الخاص وواحدته (sec)** T_0 حسب المعطيات من إحدى الطرق الثلاثة

$$\begin{cases} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0 \text{ النبض}} \\ T_0 \text{ تجريبياً} = \dfrac{t \text{ زمن الهزات}}{N \text{ عدد الهزات}} \end{cases}$$

✓ **الدور الخاص للنواس المرن لاعلاقة له بالجاذبية g ولا بسعة الاهتزاز X_{max} (يعني لما يغيرن يبقى الدور كما هو $T'_0 = T_0$)**

✓ **الدور الخاص للنواس المرن له علاقة بالكتلة m (تناسب طردي) وبثابت صلابة النابض k (تناسب عكسي)**

2. **الاستطالة السكونية:** $mg = kx_0 \Rightarrow \boxed{x_0 = \dfrac{m.g}{k}}$

وإذا لم تعطى قيم m , k

✓ نستطيع تبديل $k = m.\omega_0^2$ فيكون $x_0 = \dfrac{m.g}{k} \Rightarrow x_0 = \dfrac{m.g}{m.\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{x_0 = \dfrac{g}{\omega_0^2}}$

✓ $mg = kx_0 \Rightarrow \dfrac{m}{k} = \dfrac{x_0}{g} \xrightarrow{\text{نعوض بدل } \frac{m}{k} \text{ في علاقة الدور}} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{x_0}{g}} \xrightarrow{\text{نربع ونعزل } x_0}$

3. $\begin{cases} \text{قوة الارجاع } (N) \quad \bar{F} = -k\bar{x} \\ \text{التسارع } (m.s^{-2}) \quad \bar{a} = -\omega_0^2\bar{x} \end{cases}$ لما يطلبن رح يعطي قيمة المطال x أو (اللحظة $t = 0$ تكون مثلاً $x = +X_{max}$)

✓ شدة قوة الارجاع بالقيمة المطلقة والتسارع عندئذٍ يكون موجب $a = \dfrac{F \text{ قوة الإرجاع}}{m}$ $\sum F = m.a \Rightarrow a = \dfrac{\sum F}{m} \xrightarrow{\text{محصلة القوى هي قوة إرجاع}}$

4. **ثابت صلابة النابض k $(N.m^{-1})$**

✓ إذا أعطانا النبض الخاص ω_0 : $\boxed{k = m.\omega_0^2}$

✓ أو نحسبه من علاقة الدور بعد تربيعها : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \xrightarrow{\text{نربع}} T_0^2 = 4\pi^2\dfrac{m}{k} \Rightarrow \boxed{k = 4\pi^2\dfrac{m}{T_0^2}}$

5. **استنتاج التابع الزمني:**

1) نكتب الشكل العام: $\boxed{\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$

2) نعين الثوابت: ω_0 ، X_{max} ، $\bar{\varphi}$

3) نعوض الثوابت بالشكل العام

♥ تعيين ω_0 النبض الخاص $(rad.s^{-1})$: $\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$ أو $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

♥ تعيين سعة الحركة ، سعة الاهتزاز ، ضمن جدول مرونة النابض ، $\frac{\text{طول القطعة المستقيمة}}{2}$ $\xLeftarrow{\text{تعني كلها}}$ $\boxed{X_{max}}$

♥ تعيين $\bar{\varphi}$ من شروط البدء ↓

في الوضعين الطرفيين $x = \pm X_{max}$ تنعدم السرعة في كلا الاتجاهين $v = 0$

▪ شروط البدء : $x = +X_{max}$, $t = 0$ تركت دون سرعة ابتدائية

نعوض شروط البدء بتابع المطال :

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$+X_{max} = X_{max}\cos(\bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0}$$

▪ شروط البدء : $x = -X_{max}$, $t = 0$ تركت دون سرعة ابتدائية

نعوض شروط البدء بتابع المطال :

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$-X_{max} = X_{max}\cos(\bar{\varphi}) \Rightarrow \cos\varphi = -1 \Rightarrow \boxed{\varphi = \pi\ rad}$$

الاتجاه الموجب: $v > 0$ السرعة موجبة , الاتجاه السالب: $v < 0$ السرعة سالبة

▪ شروط البدء : $x = \frac{X_{max}}{2}$, $t = 0$ الاتجاه سالب مثلاً

نعوض شروط البدء بتابع المطال :

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos\left(\frac{\pi}{2}(0) + \bar{\varphi}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = +\frac{1}{2}\begin{cases} \varphi = +\frac{\pi}{3}\ rad & \text{إما} \\ \varphi = -\frac{\pi}{3}\ rad & \text{أو} \end{cases}$$

نختار φ قيمة التي تجعل السرعة سالبة:

$$\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نعوض شروط البدء $t = 0$, $v < 0$

لأن الاتجاه سالب: $\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin\bar{\varphi} < 0$

$$\varphi = +\frac{\pi}{3} \Rightarrow \bar{v} = \underbrace{-}_{\text{سالب}}\omega_0 X_{max}\underbrace{\sin\left(+\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{موجب}} < 0 \Rightarrow v < 0$$ مقبول

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \bar{v} = \underbrace{-}_{\text{سالب}}\omega_0 X_{max}\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{سالب}} > 0 \Rightarrow v > 0$$ مرفوض

6. السرعة الخطية لمركز عطالة الجسم:

- تابع السرعة: $\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$
- السرعة العظمى طويلةً (موجبة): $\boxed{v_{max} = \omega_0 X_{max}}$
- سرعة المرور الاول بوضع التوازن في كلا الاتجاهين $(t = 0\ , x = \pm X_{max})$: $\boxed{v = \pm\omega_0 X_{max}}$

7. **تعيين (زمن) أو لحظات المرور بوضع التوازن لعدة مرات :**

1) نعدم تابع المطال لأن في وضع التوازن $x = 0$ ← $0 = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$X_{max} \neq 0 \Rightarrow \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = 0$$

2) نضع بدل (0) لأن $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ حيث k عدد الدورات التي ينعدم عندها الـ cos : $k = 0, 1, 2, 3, 4, ..$

فيصبح: $\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \Rightarrow \omega_0 t + \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

3) نعزل الزمن t من المعادلة السابقة حيث تكون قيم $\omega_0, \bar{\varphi}$ معلومة من تابع المطال مسبقاً : $\boxed{t = \frac{\frac{\pi}{2} - \bar{\varphi} + \pi k}{\omega_0}}$

4) نعوض $k = 0$ للحصول على زمن المرور الأول و $k = 1$ للمرور الثاني و $k = 2$ للمرور الثالث

نكشة : إذا عوضنا $k = 0$ للمرور الأول ونتج زمن سالب هنا نرفضه ونعتبر ناتج تعويض $k = 1$ هو زمن المرور الأول

8. زمن الوصول من المطال الأعظمي الموجب إلى المطال الأعظمي السالب (الزمن بين الوضعيين المتناظرين $\pm X_{max}$): $\boxed{t = \frac{T_0}{2}}$

9. الطاقات :

الطاقة الكامنة المرونية التي يقدمها المجرب (بدون ماكس) : $\boxed{E_P = \frac{1}{2}kX^2}$	الطاقة الميكانيكية (الكلية) (مع ماكس) : $\boxed{E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2}$, $\boxed{E_{tot} = E_k + E_P}$

الطاقة الحركية (من الفرق) : $\boxed{E_k = E_{tot} - E_P}$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kX^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}k\left[X_{max}^2 \text{ سعة الحركة } - X^2 \text{ معطاة بالطلب}\right]$$

♥ الطاقة الحركية عند مرور المتحرك بوضع التوازن

$$x = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow E_k = E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2$$

تحديد موضع (مطال X) مركز عطالة الجسم عندما تتساوى الطاقتين الكامنة والحركية $E_k = E_P$

$$E_{tot} = E_k + E_P \xrightarrow{\text{نضع } E_P \text{ بدل } E_k} E_{tot} = E_P + E_P \Rightarrow E_{tot} = 2E_P \xrightarrow{\text{نعوض القوانين}} \frac{1}{2}kX_{max}^2 = 2.\frac{1}{2}kX^2 \xrightarrow{\text{نختصر}} X^2 = \frac{X_{max}^2}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{نجذر الطرفين}} \boxed{x = \pm\frac{x_{max}}{\sqrt{2}}}$$

10. تحديد موضع (مطال X) مركز عطالة الجسم في اللحظة t او لحظة بدء الزمن $t = 0$

نعوض هذا الزمن المعطى في تابع المطال فتنتج لدينا قيمة X تكون هي موضع الجسم في ذلك الزمن المعطى

11. التوابع الزمنية الموجودة داخل الكتاب وخارجه :

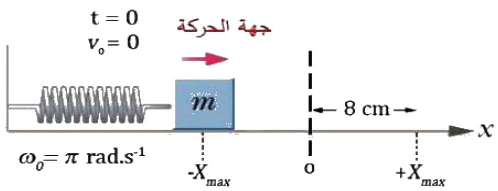
اسم التابع و قانونه	التابع الزمني	تفصيل التابع الزمني	القيمة العظمى الطويلة له
المطال (موضع الجسم) : $\bar{x}$	$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{x} = X_{max}$
السرعة: $\bar{v} = (\bar{x})'_t$	$\bar{v} = -v_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$v_{max} = \omega_0 X_{max}$
التسارع: $\bar{a} = (\bar{v})'_t = (\bar{x})''_t$	$\bar{a} = -\omega_0^2.\bar{x}$	$\bar{a} = -\omega_0^2 x_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$a_{max} = \omega_0^2 x_{max}$
قوة الإرجاع : $\bar{F} = -k\bar{x}$ نعوض تابع المطال $\bar{x}$	$\bar{F} = -F_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{F} = -kX_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$F_{max} = kX_{max}$ $F_{max} = m\omega_0^2 X_{max}$
كمية الحركة : $\bar{p} = m.\bar{v}$ نعوض تابع السرعة $\bar{v}$	$\bar{p} = -p_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{p} = -m.v_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$p_{max} = m.v_{max}$ $p_{max} = m.\omega_0 X_{max}$
الطاقة الكامنة المرونية : $E_P = \frac{1}{2}kx^2$	$\bar{E_P} = E_{P_{max}}\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{E_P} = \frac{1}{2}kx_{max}^2\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$E_{P_{max}} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$ $E_{P_{max}} = \frac{1}{2}m.\omega_0^2 x_{max}^2$
الطاقة الحركية : $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$\bar{E_k} = E_{k_{max}}\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$\bar{E_k} = \frac{1}{2}mv_{max}^2\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$	$E_{k_{max}} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ $E_{k_{max}} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_{max}^2$

اختبر نفسي:

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي

1. **تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجيبية في الشكل المجاور هو:**

a. $x = 0.08 \cos(\pi t + \pi)$
b. $x = 8 \cos(\pi t - \pi)$
c. $x = 0.008 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$
d. $x = 0.8 \cos\pi t$



الحل: تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجيبية في الشكل المجاور هو:

الإجابة الصحيحة: a) $\boxed{\bar{x} = 0.08 \cos(\pi t + \pi)}$

توضيح اختيار الإجابة

- شروط البدء $t = 0$, $\bar{x} = -X_{max} = -0.08m$, $v_0 = 0$

نبدل في التابع الزمني للمطال $-0.08 = 0.08\, cos\bar{\varphi} \Longrightarrow cos\varphi = -1 \Longrightarrow \bar{\varphi} = \pi\, rad$

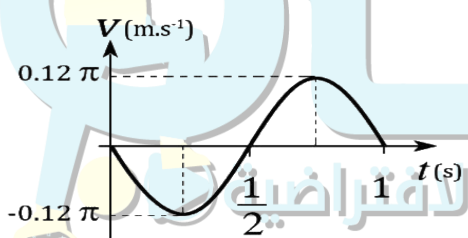
$\omega_0 = \pi\, rad.s^{-1}$

$\boxed{\bar{x} = 0.08 \cos(\pi t + \pi)}$

2. **الرسم البياني جانباً يمثل تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة توافقية بسيطة فيكون التابع الزمني للسرعة هوك**

a. $v = 0.06\pi\, cos\pi t$
b. $v = -0.06\pi\, cos\, 2\pi t$
c. $v = -012\pi\, sin2\pi t$
d. $v = 0.12\pi\, sin\pi t$

الحل: الرسم البياني جانباً يمثّل تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة توافقية بسيطة، فيكون التابع الزمني للسرعة هو:



الإجابة الصحيحة: c) $\boxed{\bar{v} = -0.12\pi\, sin2\pi t}$

توضيح اختيار الإجابة

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\, rad.s^{-1}$
- $v_{\max} = 0.12\,\pi\, m.s^{-1}$
- $v_{max} = \omega_0 X_{max} \Longrightarrow X_{max} = \frac{v_{max}}{\omega_0} = \frac{0.12\pi}{2\pi} = 0.06m$
- $(t = 0 \text{ ، } v = 0)$ نبدل في التابع الزمني للسرعة $\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ فنجد:

$0 = -2\pi \times 0.06 \sin(0 + \bar{\varphi}) \Rightarrow \sin(\bar{\varphi}) = 0$

إما: $\bar{\varphi} = 0$ rad الحل مقبول لأنه يحقق السرعة **سالبة** في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}s$

$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \Longrightarrow \bar{v} = -2\pi \times 0.06 \sin\left(2\pi \frac{1}{4} + 0\right) = -0.12\pi\, m.s^{-1}$

أو: $\bar{\varphi} = \pi$ rad الحل مرفوض لأنه يحقق السرعة **موجبة** في اللحظة $t = \frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}s$

$\bar{v} = -\omega X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi}) \Longrightarrow \bar{v} = -2\pi \times 0.06 \sin\left(2\pi \frac{1}{4} + \pi\right) = +0.12\pi\, m.s^{-1}$

3. يمثل الشكل المجاور هزازتان توافقيتان (1) و(2) تنطلقان من الموضع نفسه، وفي اللحظة نفسها فإنهما بعد مضي $3s$ من بدء حركتهما:

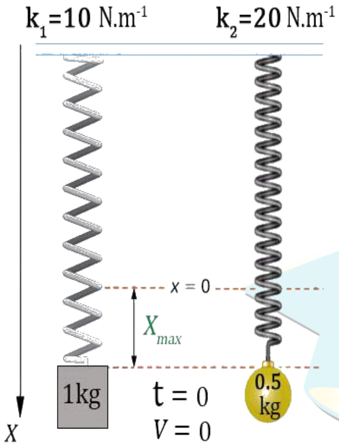
a. تلتقيان في مركز الاهتزاز.

b. تلتقيان في الموضع $+X_{max}$

c. لا تلتقيان لأن مطال الأولى $+X_{max}$ ومطال الثانية $-X_{max}$.

d. لا تلتقيان لأن مطال الأولى $-X_{max}$ ، ومطال الثانية $+X_{max}$.

الحل: يمثّل الشكل المجاور هزازتان توافقيتان تنطلقان من الموضع نفسه وفي اللحظة نفسها، فإنهما بعد مضي $3s$ من بدء حركتهما:



الإجابة الصحيحة: d) لا تلتقيان.

توضيح اختيار الإجابة

- دور النواس الأول: $T_{0_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2s$
- دور النواس الثاني: $T_{0_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{20}} = 1s$

بعد مضي $3s$:

سينجز النواس الأول هزة ونصف $\frac{t}{T_{0_1}} = \frac{3}{2} = 1.5$ أي سيكون في المطال $\bar{x} = -X_{max}$

سينجز النواس الثاني ثلاث هزات $\frac{t}{T_{0_2}} = \frac{3}{1} = 3$ أي سيكون في المطال $\bar{x} = +X_{max}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية. تم الحل سابقا في أسئلة النظري رقم 9_8_7

ثالثاً: حل المسائل الآتية. (في جميع المسائل $g = 10m.s^{-2}$ ، $\pi^2 = 10$، $4\pi = 12.5$)

المسألة الأولى (درس):

تتألف هزازة جيبية انسحابية من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 10N.m^{-1}$ ، مثبت من أحد طرفيه، ويحمل في طرفه الآخر جسماً كتلته m ، ويُعطى التابع الزمني لمطال حركتهما بالعلاقة: $\bar{x} = 0.1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ ،

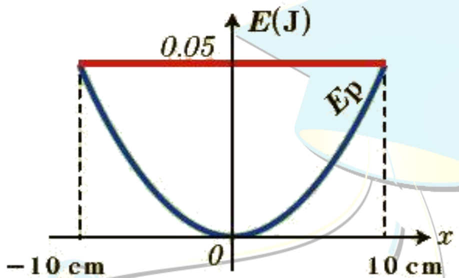
المطلوب:

1. أوجد قيم ثوابت الحركة ودورها الخاص.
2. احسب كتلة الجسم m.
3. احسب قيمة السرعة في موضع مطاله $x = 6\ cm$ و الجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور.
4. حدد موضع الجسم وجهة حركته لحظة بدء الزمن

الحل:

المسألة الثانية (درس)

يوضّح الرسم البياني المجاور تغيرات الطاقة الكامنة المرونية بتغير الموضع لهزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته $m = 0.4\text{kg}$، المطلوب:



1. استنتج قيمة ثابت صلابة النابض k.
2. احسب الدور الخاص للحركة .
3. احسب قيمة السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز.

الحل :

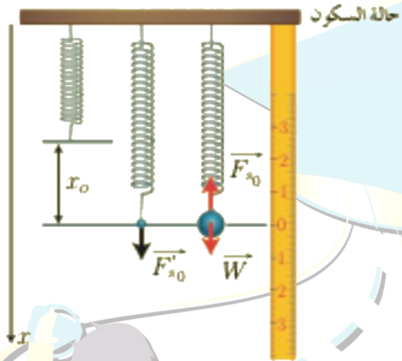
WWW.Myway.edu.sy
/tel: 0947050592
دورة شتوية

المسألة الثالثة (درس) :

تشكل هزازة توافقية بسيطة من جسم كتلته $m = 1\ kg$ معلق بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة فينجز 10 هزات في 8 s ويرسم في أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها 24cm، المطلوب:

1. استنتج قيمة الاستطالة السكونية لهذا النابض، ثم احسب قيمتها.
2. احسب قيمة السرعة العظمى (طويلة).
3. احسب قيمة التسارع في مطال $x = 10cm$.
4. احسب الطاقة الكامنة المرونية في موضع مطاله $x = -4\ cm$، و احسب الطاقة الحركية عندئذٍ.

الحل :



المسألة الرابعة (درس) :

تهتز كرة معدنية كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثبت صلابته $k = 16\ N.m^{-1}$ بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص $1\ s$، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1\ m$، و بفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرك بالاتجاه السالب. **المطلوب:**

1. استنتج التابع الزمني لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام.
2. عيّن لحظتي المرور الأول و الثالث للكرة في موضع التوازن.
3. احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $x = +0.1\ m$.
4. احسب كتلة الكرة.

الحل :

نموذج مؤتمت بعد المسائل

1- في الحركة التوافقية البسيطة محصلة القوى $F=-kx$ تسمى ب:							
A	قوة اهتزازية	B	قوة العطالة	C	قوة المرونة	D	قوة الإرجاع
2- تكون السرعة في النواس المرن عظمى(طويلة) عندما:							
A	يمر النواس بوضع التوازن	B	$\sin\omega t=0$	C	يمر النواس بالوضعين المتطرفين	D	$V_{max}=k.X_{max}$
3- تسارع الحركة التوافقية غير ثابت بسبب:							
A	تغير السرعة	B	ثبات الطاقة الكلية	C	انعدام التسارع	D	تغير المطال
4- نواس مرن كتلته $4kg$ وثابت صلابته $10\ N/m$ فيكون دوره:							
A	$2.5\ s$	B	$4\ s$	C	$6\ s$	D	$40\ s$
5- إن طبيعة حركة النواس المرن غير المتخامد بالاقتراب من مركز الاهتزاز:							
A	دائرية منتظمة	B	مستقيمة منتظمة	C	مستقيمة متسارعة بانتظام	D	مستقيمة متسارعة نحو المركز
6- تعطى قوة الإرجاع في النواس المرن غير المتخامد بالعلاقة:							
A	$F=-k.Fx^2$	B	$F=-k.\bar{x}$	C	$F=\frac{1}{2}k.x^2$	D	$F=\frac{1}{2}kx_{max}^2$
7- حركة توافقية بسيطة لجسم كتلته m دورها الخاص T_0 نجعل الكتلة أربعة أمثال ماكانت عليه فيصبح دورها الخاص:							
A	$4T_0$	B	T_0	C	$3T_0$	D	$2T_0$
8- في الحركة التوافقية البسطة عند مرور المحرك بالمطالين الأعظمين الجانبيين تكون الطاقة الكلية:							
A	طاقة حركية فقط	B	طاقة حرارية فقط	C	طاقة كهربائية	D	طاقة كامنة فقط
9- حركة جيبية انسحابية دورها الخاص $(1s)$ فإذا اعتبرنا $(\pi^2=10)$ يكون تسارعها الخطي في نقطة مطالها $5\ cm$							
A	$20\ m.s^{-2}$	B	$-2m.s^{-2}$	C	$0.1\ m.s^{-2}$	D	$2\pi\ m.s^{-2}$
10- تكون السرعة عظمى في الهزازة الجيبية الانسحابية عندما :							
A	$x=\pm X_{max}$	B	$x=-X_{max}$	C	$x=\frac{X_{max}}{2}$	D	$x=0$
11- حركة جيبية انسحابية سرعتها العظمى (طويلة) تساوي $(1m.s^{-1})$ وسعة اهتزازها $(10\ cm)$ فتكون قيمة نبضها الخاص ω_0 :							
A	$\frac{\pi}{20}rad.s^{-1}$	B	$10rad.s^{-1}$	C	$\frac{\pi}{10}\ rad.s^{-1}$	D	$\frac{1}{2}\ rad.s^{-1}$

12- الطاقة الكامنة للنواس المرن هي:							
A	$\frac{1}{2}I_{\Delta}V^2$	B	$\frac{1}{2}k.x^2$	C	$\frac{1}{2}k.X_{max}$	D	$\frac{1}{2}k.\theta^2$
13- وحدة قياس قوة الإرجاع في الجملة الدولية هي :							
A	N	B	$m.N.rad$	C	$m.N.rad^{-1}$	D	$N.m^{-1}$
14- حركة توافقية بسيطة لجسم كتلته m معلق بنابض ودور حركته T_0 نجعل الكتلة $m' = \frac{1}{9}\ m$ فصبح دوره T'_0 :							
A	$T'_0 = \frac{1}{3}T_0$	B	$T'_0 = 3T_0$	C	$T'_0 = 9T_0$	D	$T'_0 = T_0$
15- نواس مرن دوره $2s$ نزيح الجسم شاقولياً نحو الأسفل ضمن حدود مرونة النابض مسافة $x = 2\ cm$ ونتركه دون سرعة ابدائية في اللحظة $t = 0$ فإن التابع الزمني للمطال هو:							
A	$x = 2\cos(\pi t)$	B	$x = 2\times10^{-2}\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$	C	$x = 12\times10^{-2}\cos(\pi t)$	D	$x = 2\times10^{-2}\cos(\pi t)$
16- إن النواس المرن عند مروره بمركز التوازن:							
A	نعدم المطال	B	يكون التسارع أعظمي	C	تنعدم سرعة النواس	D	لاشيء مما سبق
17- يتناسب الدور الخاص لحركة النواس المرن عكساً مع الجذر التربيعي لـ:							
A	طول النابض	B	ثابت صلابة النابض	C	كتلة الجسم المهتز	D	سعة الاهتزاز
18- من تابع المطال في الحركة التوافقية البسيطة $x = X_{max}\cos\omega_0 t$ تكون واحدة ω_0 هي:							
A	$rad.s^{-1}$	B	rad	C	$rad.s^{-2}$	D	$m.s^{-1}$
19- في الحركة التوافقية البسيطة عند مرور المحرك بالمركز تكون الطاقة الكلية :							
A	حركية فقط	B	كامنة وحرارية معاً	C	حرارية فقط	D	كامنة فقط
20- حركة توافقية بسيطة سعة اهتزازها X_{max} دورها الخاص T_0 نضاعف سعة الاهتزاز فيصبح دورها الخاص T_0 يساوي:							
A	$T_0 = \sqrt{2}T_0$	B	$T_0 = 4T_0$	C	$T_0 = T_0$	D	$T_0 = 2T_0$
21- نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة شاقولي نعلق فيه جسم كتلته $m = 0.5\ kg$ فيهتز بدور $4s$ ويكون ثابت صلابة النابض:							
A	$k = 5\ N.m^{-1}$	B	$k = 1.25\ N.m^{-1}$	C	$k = 12.5\ N.m^{-1}$	D	$k = 7\ N.m^{-1}$
22- عند وصول الهزازة التوافقية إلى أحد الوضعين المتطرفين $x = \pm X_{max}$ ينعدم :							
A	الطاقة الكامنة	B	الطاقة الميكانيكية	C	قيمة التسارع	D	قيمة السرعة

23- إذا كان لدينا نواس مرن مطاله $x = 4\cos(10\pi t)$ فيكون زمن مروره الأول في وضع التوازن:

A	$t_1 = \frac{1}{6}\ s$	B	$t_1 = \frac{1}{3} s$	C	$t_1 = \frac{1}{12}\ s$	D	$t_1 = \frac{1}{20}\ s$

24- نقطة مادية معلقة بنابض مرن ثابت صلابته $k = 100\ N.m^{-1}$ تهتز بحركة توافقية بسيطة سعتها $X_{max} = 10\ cm$ فتكون الطاقة الميكانيكية:

A	$E = 0.1\ J$	B	$E = 0.5\ J$	C	$E = 0.2\ J$	D	$E = 1\ J$

انتهى النموذج

الخطوط البيانية

منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد

المسألة (1) عامة:

نشكل هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن، مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 10N.m^{-1}$ يُثبت إلى سقف من إحدى نهايتيه، ويربط بنهايته الثانية جسم كتلته $m = 0.1\ kg$ فإذا علمت أنه بدء الزمن كان الجسم في الموضع $x = 0$ وهو يتحرك بالاتجاه السالب بسرعة $v = -3\ m.s^{-1}$، **المطلوب:**

1- احسب نبض الحركة.

2- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة.

3- احسب شدة قوة الإرجاع عندما $x = 3\ cm$.

الحل:

منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد

المسألة (2) عامة: تهتز نقطة مادية كتلتها $0.5\ kg$ لحركة توافقية بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة حلقاته متباعدة شاقولية وبدور $4s$ وبسعة اهتزاز $X_{max} = 8\ cm$ فإذا علمت أن النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحركة بالاتجاه السالب، **والمطلوب:**

1. استنتج التابع الزمني لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.
2. عين لحظتي المرور الأول و الثالث في مركز الاهتزاز.
3. عين الموضع التي تكون فيه شدة محصلة القوى عظمى واحسب قيمتها وحدد موضعاً تنعدم فيه شدة هذه المحصلة.
4. احسب قيمة ثابت صلابة النابض وهل تتغير هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلقة؟
5. احسب الكتلة التي تجعل الدور الخاص $1s$.

الحل:

منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد

نموذج نظري شامل مؤتمت في النواس المرن

.1 يتوازن جسم كتلته m معلق بنهاية نابض مرن ممهل الكتلة حلقاته متباعدة ؛ثابت صلابته k عندما:							
A	$mg = kx_0$	B	$F_s = kx$	C	$F_s = kx_0$	D	$w = mg$
.2 نعلق كرة كتلتها m بنهاية نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k فتكون القوى المؤثرة في الكرة بعد توازنها:							
A	$w - F_{s_0} = 0$		$w + F_{s_0} < 0$	C	$w - F_{s_0} > 0$	D	$w + F_{s_0} = ma$
.3 في النواس المرن يستغرق الجسم المتحرك من مطاله الأعظمي الموجب إلى المطال المناظر له زمن يساوي:							
A	$\frac{T_0}{2}$	B	$\frac{T_0}{4}$	C	T_0	D	$2T_0$
.4 القوى الخارجية المؤثرة في الكرة أثناء حركتها وهي معلقة بنهاية نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k هي:							
A	$w - k(x + x_0) = ma$	B	$w - k(x + x_0) = 0$	C	$w + F_{s_0} = 0$	D	$w + F_{s_0} = ma$
.5 هزازة توافقية بسيطة دورها الخاص T_0 وتسارع الجاذبية الأرضية g تعطى عبارة الاستطالة السكونية للنابض بالعلاقة:							
A	$x_0 = \frac{4\pi^2}{T_0^2 \cdot g}$	B	$x_0 = \frac{T_0^2 \cdot g}{4\pi^2}$	C	$x_0 = \frac{\pi^2}{T_0^2 \cdot g}$	D	$x_0 = \frac{T_0^2 \cdot g}{4}$
.6 نواس مرن شاقولي غير متخامد يتصل بجسم صلب كتلته m يهتز بدور $1\ s$ فيكون مقدار استطالة النابض السكونية هي							
A	$2\pi\ m$	B	$\frac{20}{\pi}\ m$	C	$0.25\ m$	D	$4\ m$
.7 تنعدم محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في النواس المرن عند المرور بالمطال:							
A	$x = \frac{x_{max}}{2}$	B	$x = -x_{max}$	C	$x = +x_{max}$	D	$x = 0$
.8 تكون قوة الإرجاع عظمى عند المطال:							
A	$x = \frac{x_{max}}{3}$	B	$x = \frac{x_{max}}{2}$	C	$x = \pm x_{max}$	D	$x = 0$
.9 إن جهة قوة الإرجاع دوماً نحو:							
A	نحو $+X_{max}$	B	نحو $-X_{max}$	C	نحو وضع التوازن	D	عكس جهة التسارع
.10 المعادلة التفاضلية التي تصف حركة النواس المرن:							
A	$(x)''_t = -kx$	B	$(x)''_t = -\frac{m}{k}x$	C	$(x)''_t = -\frac{k}{m}x$	D	$x = -\frac{k}{m}(x)''_t$
.11 هزازة توافقية بسيطة نبضها الخاص ω_0 نجعل $k' = \frac{k}{2}$ و $m' = 2m$ فيصبح النبض الخاص الجديد							
A	$\omega_0' = \omega_0$	B	$\omega_0' = 2\omega_0$	C	$\omega_0' = \sqrt{2}\omega_0$	D	$\omega_0' = \frac{\omega_0}{2}$
.12 علاقة الدور الخاص في النواس المرن:							
A	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	B	$T_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}$	C	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$	D	$T_0 = 2\pi\frac{m}{k}$

13. هزازة توافقية بسيطة دورها الخاص T_0 نجعل $k' = \frac{k}{2}$ و $m' = 2m$ فيصبح دورها الخاص الجديد:							
A	$T_0' = T_0$	B	$T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$	C	$T_0' = \frac{T_0}{2}$	D	$T_0' = 2T_0$
14. هزازة توافقية بسيطة دورها الخاص T_0 نجعل $X'_{max} = 2X_{max}$ فيصبح دورها الخاص الجديد:							
A	$T_0' = \frac{T_0}{2}$	B	$T_0' = 2T_0$	C	$T_0' = T_0$	D	$T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$
15. بفرض في اللحظة $t = 0$ كان الجسم في وضع مطاله الأعظمي الموجب فتكون قيمة الطور الابتدائي:							
A	$\varphi = 0$	B	$\varphi = \frac{\pi}{2} rad$	C	$\varphi = \frac{\pi}{6} rad$	D	$\varphi = \frac{\pi}{3} rad$
16. يعبر عدد الهزات التي ينجزها النواس المرن غير المتخامد خلال واحدة الزمن عن:							
A	دور النواس T_0	B	سعة الحركة X_{max}	C	النبض الخاص للحركة w_0	D	تواتر الحركة f
17. يعبر الزمن اللازم لإنجاز هزة واحدة عن:							
A	دور النواس T_0	B	النبض الخاص للحركة w_0	C	سعة الحركة X_{max}	D	تواتر الحركة f
18. نواس مرن شاقولي غير متخامد ينجز 5 هزات وبدور $4\ s$ فيكون الزمن اللازم لإنجاز الهزات هو:							
A	$20\ s$	B	$1.25\ s$	C	$0.8\ s$	D	$1\ s$
19. ينجز نواس مرن غير متخامد 12 هزة خلال $3\ s$ فيكون نبضه الخاص							
A	$\frac{1}{4}\ rad.s^{-1}$	B	$50\ rad.s^{-1}$	C	$\frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1}$	D	$25\ rad.s^{-1}$

اقرأ النص الآتي وأجب عن الأسئلة من (20إلى24):
تعطى المعادلة التفاضلية لحركة جسم كتلته $m = 0.2\ kg$ في النواس المرن $(x)''_t = -4x$
اعتماداً على النص السابق فإن:

20. نبض الاهتزاز:							
A	$\omega_0 = 32\ rad\ s^{-1}$	B	$\omega_0 = 16\ rad\ s^{-1}$	C	$\omega_0 = 2 rad\ s^{-1}$	D	$\omega_0 = 4\ rad\ s^{-1}$
21. دور الاهتزاز:							
A	$T_0 = \frac{\pi}{4} sec$	B	$T_0 = \frac{\pi}{2} sec$	C	$T_0 = \pi\ sec$	D	$T_0 = 2\pi\ sec$
22. قيمة ثابت صلابة النابض:							
A	$k = 4 \times 10^{-2}\ Nm^{-1}$	B	$k = 32 \times 10^{-1} Nm^{-1}$	C	$k = 8 \times 10^{-1} Nm^{-1}$	D	$k = 4 \times 10^{-1} Nm^{-1}$
23. شدة قوة الإرجاع في مركز الاهتزاز مقدرة بالنيوتن:							
A	F = 0	B	$F = 4$	C	$F = 3$	D	$F = -3$
24. تسارع الحركة:							
A	$a = 4m.s^{-1}$	B	$a = -4x$	C	$a = -8m.s^{-1}$	D	$a = -2x$

اقرأ النص الآتي وأجب عن الأسئلة (25-26):

إذا كان الشكل المختزل لتابع المطال بدلالة الدور الخاص $x = x_{max} \cos \frac{2\pi}{T_0} t$

25. فإن مطال الجسم في اللحظة $t = \frac{3T_0}{2}$ هو:							
A	$x = \frac{x_{max}}{2}$	B	$x = 0$	C	$x = +x_{max}$	D	$x = -x_{max}$
26. تابع السرعة يعطى بالعلاقة:							
A	$\bar{v} = \frac{2\pi}{T_0} . X_{max} \sin \frac{2\pi}{T_0} t$			B	$\bar{v} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 . X_{max} \sin \frac{2\pi}{T_0} t$		
C	$\bar{v} = \frac{2\pi}{T_0} . X_{max} \cos \frac{2\pi}{T_0} t$			D	$\bar{v} = -\frac{2\pi}{T_0} . X_{max} \sin \frac{2\pi}{T_0} t$		
27. إن تسارع الجسم غير ثابت متغير القيمة مع تغير							
A	جهة الحركة	B	سرعة الجسم	C	مطال الحركة	D	سعة الحركة
28. نواس مرن سعة الاهتزاز فيه تساوي $5cm$ ودوره الخاص $\pi\ s$ تكون سرعته العظمى (طويلة) تساوي:							
A	$v_{max} = 0.1\ m.s^{-1}$	B	$v_{max} = 0.1\pi\ m.s^{-1}$	C	$v_{max} = 1\ m.s^{-1}$	D	$v_{max} = 10\ m.s^{-1}$
29. نواس مرن سعة الاهتزاز فيه تساوي $5cm$ ودوره الخاص $\pi\ s$ يكون التسارع الأعظمي (طويلة) يساوي:							
A	$a_{max} = 0.2\pi\ m.s^{-2}$	B	$a_{max} = 0.2\ m.s^{-2}$	C	$a_{max} = 0.1\pi\ m.s^{-2}$	D	$a_{max} = 0.1\ m.s^{-2}$

اقرأ النص التالي وأجب عن (30-31) :

إذا كان مطال جسم $x = \frac{X_{max}}{2}$

30. فإن طاقته الحركية:							
A	$E_k = \frac{1}{3} E_{tot}$	B	$E_k = \frac{3}{4} E_{tot}$	C	$E_k = \frac{1}{4} E_{tot}$	D	$E_k = \frac{1}{2} E_{tot}$
31. وتكون الطاقة الكامنة المرونية:							
A	$E_p = \frac{1}{3} E_k$	B	$E_p = \frac{3}{4} E_{tot}$	C	$E_p = \frac{1}{4} E_{tot}$	D	$E_p = \frac{1}{2} E_{tot}$
32. تتساوى الطاقة الحركية مع الطاقة الكامنة المرونية عند المطال:							
A	$x = \frac{X_{max}}{4}$	B	$x = \frac{X_{max}}{3}$	C	$x = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$	D	$x = \frac{X_{max}}{2}$
33. في النواس المرن عندما $E_k = 2E_p$ يكون:							
A	$x = X_{max}$	B	$x = \frac{X_{max}}{2}$	C	$x = \frac{X_{max}}{\sqrt{3}}$	D	$x = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$
34. في النواس المرن عندما $E_k = 3E_p$ يكون:							
A	$x = X_{max}$	B	$x = \frac{X_{max}}{2}$	C	$x = \frac{X_{max}}{3}$	D	$x = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$
35. تكون الطاقة الحركية عظمى في النواس المرن عندما:							
A	$x = 0$	B	$x = \frac{X_{max}}{3}$	C	$x = \pm X_{max}$	D	$x = \frac{X_{max}}{2}$

36. تكون الطاقة الكامنة المرونية عظمى في النواس المرن:

A	$x = \frac{X_{max}}{2}$	B	$x = 0$	C	$x = \frac{X_{max}}{3}$	D	$x = \pm X_{max}$

37. تنعدم الطاقة الكامنة المرونية في النواس المرن:

A	$x = \frac{X_{max}}{2}$	B	$x = 0$	C	$x = \frac{X_{max}}{3}$	D	$x = \pm X_{max}$

38. بالاقتراب من مركز الاهتزاز بالهزازة التوافقية البسيطة و بإهمال القوى المبددة للطاقة:

A	تتحول الطاقة الميكانيكية إلى طاقة حركية	B	تتحول الطاقة الكامنة إلى طاقة حركية وحرارية	C	تزداد الطاقة الكامنة و تتناقص الطاقة الحركية	D	تزداد الطاقة الحركية و تتناقص الطاقة الكامنة

39. عندما يمر الجسم في مركز التوازن في الهزازة التوافقية البسيطة:

A	ينعدم التسارع و يقف الجسم	B	تنعدم السرعة و يقف الجسم	C	تنعدم السرعة و التسارع و يقف الجسم	D	ينعدم التسارع و لا يقف الجسم

40. يتوقف الجسم المهتز في الهزازة التوافقية البسيطة عن الحركة بانعدام:

A	السرعة في X_{max}	B	التسارع عند المرور في مركز الاهتزاز	C	السرعة و التسارع في مركز الاهتزاز	D	الطاقة الحركية

انتهى النموذج

منصة طريقي مع أنس أحمد التعليمية الافتراضية